НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

Горбань Юлия Сергеевна

УДК 517.9

СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С L^1-ДАННЫМИ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Ковалевский Александр Альбертович
доктор физ.-мат. наук, профессор

Донецк — 2014

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел соответственно;

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, с точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$;

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$;

если u — локально суммируемая функция на Ω, имеющая обобщенные производные первого порядка $D_i u$, $i = 1, \ldots, n$, то $\nabla u : \Omega \to \mathbb{R}^n$, причем для любых $x \in \Omega$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ $(\nabla u(x))_i = D_i u(x)$;

$C^k(\Omega)$ — множество непрерывных функций на Ω, имеющих в Ω непрерывные производные до порядка k включительно;

$C_0^k(\Omega)$ — множество функций, принадлежащих $C^k(\Omega)$ и имеющих компактный носитель, содержащийся в Ω;

$C_0^\infty(\Omega)$ — множество функций, принадлежащих $C^\infty(\Omega)$ и имеющих компактный носитель, содержащийся в Ω;

$L^p(\Omega)$ — банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Ω функций, суммируемых по Ω со степенью $p \geqslant 1$; норма в нем определяется равенством

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p};$$

$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — множество всех локально суммируемых функций на Ω;

$L^\infty(\Omega)$ — банахово пространство, состоящее из всех измеримых на Ω функций, ограниченных в существенном; норма в нем определяется равенством

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{vrai} \max_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf_{meas\, A = 0} \sup_{x \in \Omega \setminus A} |u(x)|;$$

$W^{1,1}(\Omega)$ банахово пространство, состоящее из всех элементов $L^1(\Omega)$, имеющих обобщенные производные первого порядка из $L^1(\Omega)$; норма в нем определяется равенством

$$\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} = \int_\Omega |u|\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega |D_i u|\,dx;$$

$\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ замыкание множества функций $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,1}(\Omega)$;

$W^{1,q}(\nu,\Omega)$ банахово пространство, состоящее из всех функций $u \in L^1(\Omega)$, имеющих для любого $i = 1,\dots,n$ обобщенные производные первого порядка $D_i u$ со свойством $\nu_i |D_i u|^{q_i} \in L^1(\Omega)$; норма в нем определяется равенством

$$\|u\|_{W^{1,q}(\nu,\Omega)} = \int_\Omega |u|\,dx + \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \nu_i |D_i u|^{q_i}\,dx\right)^{1/q_i};$$

здесь $q_i \in (1,n)$, ν_i – неотрицательная функция на Ω такая, что $\nu_i > 0$ п.в. на Ω, $\nu_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $(1/\nu_i)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$.

$\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ замыкание множества функций $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,q}(\nu,\Omega)$;

если $k > 0$, то T_k – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leqslant k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k; \end{cases}$$

$\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ множество всех функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $k > 0$ имеем $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Исследование, представленное в диссертационной работе, принадлежит одному из актуальных и интенсивно развиваемых направлений в современной теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Это направление включает в себя изучение нелинейных уравнений и вариационных неравенств с L^1-правыми частями и мерами в качестве правых частей. Исследования в этом направлении стали активно развиваться с конца 80-х годов прошлого столетия. В настоящее время в целом построена теория нелинейных дивергентных эллиптических уравнений второго порядка с L^1-данными или данными-мерами. В рамках этой теории введены такие понятия решений рассматриваемых уравнений, как слабое, энтропийное и ренормализованное решения, доказаны теоремы существования и единственности этих решений и установлена их принадлежность определенным пространствам Лебега и Соболева. Существенный вклад в развитии данной теории принадлежит Ф. Бенилану (Ph. Bénilan), Л. Боккардо (L. Boccardo), Т. Галлуэ (T. Gallouët), Р. Гарипи (R. Gariepy), Ф. Мюра (F. Murat), М. Пьеру (M. Pierre), Ж. Л. Вазкезу (J. L. Vázquez), Ж.-М. Ракотосону (J.-M. Rakotoson), а также А. Альвино (A. Alvino), В. Фероне (V. Ferone), А. Меркальдо (A. Mercaldo), Л. Орсина (L. Orsina), А. Порретта (A. Porretta), С. Сегура де Леон (S. Segura de León), Г. Тромбетти (G. Trombetti), А.А. Ковалевскому и другим математикам.

Исходная трудность в изучении разрешимости уравнений с L^1-правой частью (или правой частью-мерой) состоит в том, что такая правая часть не порождает линейного непрерывного функционала на соответствующем энергетическом соболевском пространстве. Вследствие этого непосредственное применение известной теории монотонных операторов невозможно, и вообще, в данной ситуации требуется уточнение самóго понятия решения рассматриваемых уравнений. При этом естественным аналогом обычного понятия обобщенного решения, подходящего для случая достаточно суммируемой правой части, является понятие слабого решения (решения из $W^{1,1}$ в смысле интегрального тождества для гладких функций). Теоремы существования слабых решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений установлены Л. Боккардо и Т. Галлуэ (см., например, [35, 37]). Отметим, что слабое решение существует не для всех значений параметра, характеризующего рост коэффициентов рассматриваемых уравнений относительно производных неизвестной функции, и кроме того, слабое решение, вообще говоря, неединственно.

Эффективный подход к исследованию разрешимости задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с L^1-правой частью предложен Ф. Бениланом, Л. Боккардо, Т. Галлуэ, Р. Гарипи, М. Пьером и Ж. Л. Вазкезом в работе [29]. В рамках этого подхода введено понятие энтропийного решения исследуемой задачи и рассмотрены более широкие, чем соответствующие энергетические соболевские пространства, классы функций, которым такие решения должны принадлежать. При этом установлено, что если коэффициенты уравнений удовлетворяют стандартным условиям роста, коэрцитивности и строгой монотонности, то энтропийное решение существует и единственно для всего диапазона значений параметра, характеризующего рост коэффициентов уравнений относительно производных неизвестной функции.

Что касается эллиптических вариационных неравенств с L^1-данными и данными-мерами, то известные нам результаты об их разрешимости получены преимущественно с помощью тех же подходов и техники, что "работают" и в случае уравнений. Эти результаты, доказанные прежде всего в работах Л. Боккардо и Т. Галлуэ [36], Л. Боккардо и Г.Р. Чирми (G.R. Cirmi) [33], П. Оппецци (P. Oppezzi) и А.М. Росси (A.M. Rossi) [79–81], установлены в основном для односторонних задач Дирихле.

Заметим, что вышеупомянутые и связанные с ними многие другие исследования относятся к L^1-теории нелинейных уравнений и вариационных неравенств с изотропными и невырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами. Что касается разрешимости нелинейных эллиптических уравнений и вариационных неравенств второго порядка с L^1-данными и данными-мерами в случае анизотропии или вырождения (по пространственной переменной) их коэффициентов, отметим следующее.

Существование слабого решения задачи Дирихле для модельного эллиптического уравнения с анизотропными и невырождающимися коэффициентами и мерой в качестве правой части установлено Л. Боккардо, Т. Галлуэ и П. Марчеллини (P. Marcellini) в работе [40]. Существование слабых решений для некоторого класса уравнений с анизотропными и невырождающимися коэффициентами и локально интегрируемыми данными доказано М. Бендамане (M. Bendahmane) и К.Х. Карлсеном (K.H. Karlsen) в [27].

Разрешимость задачи Дирихле для эллиптических уравнений с изотропными и вырождающимися коэффициентами и L^1-данными и данными-мерами изучена в работах Л. Ахаруша (L. Aharouch), Э. Азрула (E. Azroul) и А. Бенкиране (A. Benkirane) [20], Й. Атика (Y. Atik) и Ж.-М. Ракотосона [25], А.К. Кавалейро [44], Г.Р. Чирми [46], Ф.К. Ли (F.Q. Li) [75].

В статье Л. Ахаруша, Й. Акдима (Y. Akdim) и Э. Азрула [19] исследована разрешимость односторонней задачи Дирихле для вариационного неравенства с L^1-правой частью и вырождающимся оператором, причем вырождение коэффициентов оператора характеризовалось набором весовых функций, присоединенных к производным неизвестной функции, а рост коэффициентов по этим производным характеризовался единым показателем. Разрешимость вариационных неравенств с L^1-данными и двусторонними ограничениями изучена в работах Й. Атика и Ж.-М. Ракотосона [25] и Й. Атика [24] в предположении, что старшие коэффициенты оператора, порождающего левую часть неравенства, имеют вырождение и рост, обусловленные единой весовой функцией и единым показателем.

Вместе с тем в работах этих и других авторов не рассмотрены уравнения и вариационные неравенства второго порядка с L^1-правыми частями в том случае, когда их коэффициенты одновременно имеют анизотропный характер и вырождение по пространственной переменной. Именно этот случай изучен в диссертационной работе. Кроме того, говоря о вариационных неравенствах, заметим, что в отличие от вышеупомянутых исследований задач с односторонними и двусторонними ограничениями, в диссертации предполагается, что множество ограничений, связанное с рассматриваемыми вариационными неравенствами, удовлетворяет некоторым достаточно общим условиям, допускающим изучение задач и с односторонними, и двусторонними, и другими ограничениями.

Определяющими в диссертационной работе являются результаты о существовании и единственности решений вариационных неравенств с L^1-данными. Они доказаны, по существу, при минимальных условиях на вовлеченные весовые функции и являются новыми для вариационных неравенств с вырождающимися коэффициентами, поскольку объединяют две особенности – вырождение и анизотропию и, кроме того, относятся к более широкому классу множеств ограничений по сравнению с рассматривавшимся ранее. Ввиду последнего обстоятельства эти результаты новы даже для невырождающихся изотропных вариационных неравенств. При этом, допуская в качестве множества ограничений соответствующее весовое анизотропное пространство Соболева, в силу тех же особенностей они новы и для уравнений. Отметим, что разрешимость задачи Дирихле для вырождающихся анизотропных уравнений второго порядка с L^1-данными в диссертации установлена как раз исходя из соответствующих результатов для вариационных неравенств с ограничениями достаточно общего вида.

Отметим, наконец, что вопросы о существовании и свойствах решений для специальных классов уравнений высшего порядка с L^1-правыми частями, в том числе уравнений с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами, исследованы в работах А.А. Ковалевского [6, 8] и А.А. Ковалевского и Ф. Николози (F. Nicolosi) [66, 68]. При этом уравнения рассмотренных ими классов характеризуются соответствующими условиями усиленной коэрцитивности относительно коэффициентов.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Исследования, изложенные в диссертационной работе, проводились в соответствии с планами научно-исследовательской работы Института прикладной математики и механики НАН Украины по следующим темам: "Качественная теория и усреднение нелинейных эллиптических и параболических граничных задач", 2001–2005 г.г. (шифр темы 1.1.4.1, номер гос. регистрации — 0101U001095), "Качественный и асимптотический анализ решений краевых задач для линейных и квазилинейных эллиптических и эволюционных уравнений с нерегулярными данными", 2006–2010 г.г. (шифр темы III-1-06 (1.1.4.1), номер гос. регистрации — 0106U000043) и "Локальные, глобальные и асимптотические свойства решений сингулярных, спектральных и неклассических задач для эллиптических и эволюционных уравнений и вариационных неравенств", 2011–2015 г.г. (шифр темы III-1-11, номер гос. регистрации — 0111U000481).

Цель и задачи исследования. Цель работы: установить результаты о существовании и свойствах решений эллиптических уравнений и вариационных неравенств второго порядка с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-данными.

Задачи исследования: доказать теоремы о существовании и единственности решений эллиптических вариационных неравенств второго порядка с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-данными, установить условия существования решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-данными, исследовать принадлежность решений изучаемых уравнений и вариационных неравенств некоторым пространствам Лебега и Соболева.

Объект исследования. Эллиптические уравнения и вариационные неравенства второго порядка с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-правыми частями.

Предмет исследования. Условия существования и единственности решений эллиптических вариационных неравенств второго порядка с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-данными, условия разрешимости задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-данными, условия принадлежности решений рассматриваемых уравнений и вариационных неравенств определенным пространствам Лебега и Соболева.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы теории монотонных операторов в рефлексивных банаховых пространствах, методы L^1-теории нелинейных уравнений и вариационных неравенств, методы функционального анализа.

Научная новизна полученных результатов. В работах многих авторов проблема разрешимости эллиптических уравнений и вариационных неравенств с L^1-данными и данными-мерами рассматривалась либо в *изотропном невырождающемся* случае, либо в *анизотропном невырождающемся* случае, либо в *изотропном вырождающемся* случае, причем результаты по вариационным неравенствам относились в основном к односторонним и двусторонним задачам Дирихле. В отличие от этого в диссертационной работе рассмотрены уравнения и вариационные неравенства второго порядка с L^1-правыми частями в том случае, когда их коэффициенты одновременно имеют *анизотропный* характер и *вырождение* по пространственной переменной. Кроме того, в диссертации предполагается, что множество ограничений, связанное с рассматриваемыми вариационными неравенствами, удовлетворяет некоторым достаточно общим условиям, допускающим изучение задач и с односторонними, и двусторонними, и другими ограничениями. В диссертационной работе впервые рассмотрены вопросы о существовании и свойствах решений для широкого класса эллиптических уравнений и вариационных неравенств второго порядка с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-правыми частями.

1. Доказаны теоремы существования и единственности T-решений эллиптических вариационных неравенств второго порядка с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-правыми частями.
2. Установлены условия принадлежности T-решений рассмотренных вариационных неравенств некоторым пространствам Лебега и Соболева.
3. Доказана теорема существования и единственности энтропийного решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-данными.
4. Установлены условия существования T-решений и W-решений рассмотренной задачи Дирихле в общем и ряде модельных случаев.

Практическое значение полученных результатов. Полученные результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы при дальнейшем изучении вопросов о существовании и свойствах решений для различных классов уравнений и вариационных неравенств с L^1-данными.

Личный вклад соискателя. В статье [14] (и соответственно в препринте [13]) соискателю принадлежат доказательство предложения 3.1, результаты, изложенные в §§4–6, а также примеры 8.3–8.5, 8.7 и 8.8. Весь материал §2 и §7, условия (3.1)–(3.5), определение 3.1 и примеры 8.1, 8.2, 8.6 и 8.9–8.11 принадлежат научному руководителю А.А. Ковалевскому. В заметке [62] соискателю принадлежат теоремы 2, 3 и предложение 5, а А.А. Ковалевскому принадлежат исходные предположения, определения 1, 6, теоремы 7, 8 и предложение 9. В статье [63] из числа основных результатов соискателю принадлежат теоремы 3.2, 3.4 и 3.8, следствия 3.5 и 3.9, а также утверждения (i) и (ii) предложения 5.1 и утверждения (i) и (ii) предложения 5.3, а А.А. Ковалевскому принадлежат определение 3.10, теорема 3.11, следствия 3.12, 3.13 и 4.5, предложение 4.4, утверждение (iii) предложения 5.1, утверждение (iii) предложения 5.3, а также примеры 5.2, 5.4 и 5.5. В статье [64] соискателю принадлежат теоремы 1–4 и предложения 1–6, а А.А. Ковалевскому принадлежат предложения 7–10.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих математических конференциях и научных семинарах:

- International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations" Kyiv, August 22–28, 2001;
- International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations" Alushta, Crimea, September 15–21, 2003;
- International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations" dedicated to the memory of O.A. Ladyzhenskaya, Alushta, Crimea, September 17–23, 2005;
- International Conference on Differential Equations dedicated to the 100th anniversary of Ya.B. Lopatinsky, Lviv, September 12–17, 2006;
- Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвячена 100-річневому ювілею Я.Б. Лопатинського, Донецьк, 6–7 грудня, 2006;
- International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations" dedicated to the 95th anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine, Donetsk, September 9–14, 2013;

– Наукова конференція, присвячена 60-річчю кафедри диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка, Львів, 18–19 жовтня, 2013;
– Научный семинар отделов нелинейного анализа и уравнений в частных производных Института прикладной математики и механики НАН Украины (руководители: д.ф.-м.н., профессор А.А. Ковалевский и д.ф.-м.н., профессор А.Е. Шишков), Донецк, 2007–2014 г.г.;
– Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь (керівники: д.ф.-м.н., професор М.І. Іванчов, д.ф.-м.н., професор П.І. Каленюк і д.ф.-м.н., професор Б.Й. Пташник), Львів, 25 квітня 2014;
– Научный семинар отдела математического моделирования физических процессов Физико-технического института низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины (руководитель: академик НАН Украины, д.ф.-м.н., профессор Е.Я. Хруслов), Харьков, 14 мая 2014.

Публикации. По основным результатам диссертационной работы опубликовано 6 статей в специализированных изданиях [2, 4, 14, 62–64], из которых 3 статьи [2, 4, 64] опубликовано в научных изданиях из списка, утвержденного Министерством образования и науки Украины, и 3 статьи [14, 62, 63] – в известных зарубежных научных журналах. Дополнительно результаты диссертации освещены в 1 препринте и 7 тезисах докладов на математических конференциях, из которых 5 – международные.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти разделов, выводов и списка использованных источников. Полный объем диссертации – 141 страница. Список использованных источников занимает 12 страниц и содержит 87 наименований.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Александру Альбертовичу Ковалевскому за постановку задач, постоянное внимание к работе, полезные советы и поддержку.

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Как уже отмечалось во Введении, исследования по теории существования и свойств решений нелинейных уравнений второго порядка с L^1-правыми частями и мерами в качестве правых частей активно развиваются с конца 80-х годов прошлого столетия. В рамках этой теории введены такие понятия решений рассматриваемых уравнений, как слабое, энтропийное и ренормализованное решения, доказаны теоремы существования и единственности этих решений и установлена их принадлежность определенным пространствам Лебега и Соболева.

Понятие слабого решения (решения из $W^{1,1}$ в смысле интегрального тождества для гладких функций) в ситуации уравнений с L^1-правыми частями или мерами в качестве правых частей является естественным аналогом обычного понятия обобщенного решения, подходящего для случая достаточно суммируемой правой части.

Рассмотрим, например, следующую задачу Дирихле:

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \nabla u) = f \quad \text{в } \Omega, \tag{1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{1.2}$$

где Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, a_i, $i = 1, \ldots, n$, – функции Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(x, \xi)| \leqslant c_1 |\xi|^{p-1} + g(x), \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, \xi)\xi_i \geqslant c_2 |\xi|^p, \tag{1.4}$$

и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x,\xi) - a_i(x,\xi')](\xi_i - \xi_i') > 0. \tag{1.5}$$

В первых двух неравенствах $p \in (1,n)$, $c_1, c_2 > 0$ и g – неотрицательная функция из $L^{p/(p-1)}(\Omega)$.

Положим $p^* = np/(n-p)$. Как известно, (см., например, [50]), имеет место непрерывное вложение

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega). \tag{1.6}$$

Если $f \in L^{p^*/(p^*-1)}(\Omega)$, то в силу неравенств (1.3)–(1.5) и известных результатов о разрешимости уравнений с монотонными операторами (см., например, [1, 16]) задача (1.1), (1.2) имеет единственное обобщенное решение класса $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Другими словами, существует единственная функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ такая, что

$$\forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \quad \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,\nabla u) D_i\varphi \right\} dx = \int_\Omega f\varphi\, dx. \tag{1.7}$$

Заметим, что требование (1.7), составляющее суть формулировки понятия обобщенного решения задачи (1.1), (1.2), в рассматриваемом случае корректно прежде всего потому, что ввиду включения $f \in L^{p^*/(p^*-1)}(\Omega)$ и вложения (1.6) для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ функция $f\varphi$ суммируема на Ω. Более того, функция f порождает функционал $F \in (\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^*$,

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi\, dx, \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega), \tag{1.8}$$

а функции a_i, $i = 1, \ldots, n$, порождают оператор $A : \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^*$,

$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,\nabla u)\, D_i\varphi \right\} dx, \quad u, \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega),$$

который в силу вышеприведенных условий относительно коэффициентов a_i является радиально непрерывным, коэрцитивным и строго монотонным, и следовательно, по теореме Браудера-Минти (см. [1, гл. 3, теорема 2.1]) существует единственное решение u операторного уравнения $Au = F$, которое и есть обобщенное решение класса $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ задачи (1.1), (1.2).

Если же $f \notin L^{p^*/(p^*-1)}(\Omega)$, например, как крайний случай, $f \in L^1(\Omega)$ и $f \notin L^\lambda(\Omega)$, $\forall \lambda > 1$, то функция f не порождает линейный непрерывный функционал $F \in (\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^*$ вида (1.8), поскольку в этом случае произведение $f\varphi$ суммируемо уже не для всякой функции из $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Как следствие, в данной ситуации понятие обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) теряет смысл, и для ее разрешимости непосредственное использование результатов теории монотонных операторов невозможно.

Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Тогда имеет смысл следующее определение решения задачи (1.1), (1.2).

Определение 1.1. Слабым решением задачи (1.1), (1.2) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ такую, что выполняются условия:

(i) для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $a_i(x, \nabla u) \in L^1(\Omega)$;

(ii) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i\varphi \right\} dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Подобного рода определения сформулированы, например, в статьях Л. Боккардо (L. Boccardo) и Т. Галлуэ (T. Gallouët) [35, 37], являющихся одними из первых работ, посвященных исследованию существования и свойств слабых решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений с L^1-правыми частями и мерами в качестве правых частей.

Если показатель p удовлетворяет неравенству $p > 2-1/n$, то согласно теореме 1 из [37] существует слабое решение задачи (1.1), (1.2), принадлежащее $\overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ для любого λ, $1 \leqslant \lambda < n(p-1)/(n-1)$. Если же $p \leqslant 2-1/n$, то задача (1.1), (1.2), вообще говоря, может не иметь слабых решений (по этому поводу см. пример в [29]). Кроме того, существуют примеры неединственности слабого решения (см. замечание 8 в [35]).

В работе Ф. Бенилана (Ph. Bénilan), Л. Боккардо, Т. Галлуэ, Р. Гарипи (R. Gariepy), М. Пьера (M. Pierre) и Ж. Л. Вазкеза (J. L. Vázquez) [29] для исследования разрешимости задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с L^1-правой частью был предложен эффективный подход, в рамках которого введено понятие энтропийного решения исследуемой задачи и определены более широкие, чем соответствующие энергетические соболевские пространства, классы функций, которым такие решения должны принадлежать.

Опишем некоторые результаты этой работы. Прежде всего рассмотрим введенный в ней функциональный класс $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$.

Пусть для любого $k > 0$ $\;T_k$ – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leqslant k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Через $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $k > 0$ имеем $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

Заметим, что $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$. При этом множество $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ содержит функции, не принадлежащие $L^1(\Omega)$, и следовательно, класс $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ шире пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

Для произвольных $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и $x \in \Omega$ положим

$$k(u, x) = \min\{l \in \mathbb{N} : |u(x)| \leqslant l\}.$$

Определение 1.2. Пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $\delta_i u$ – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$

$$\delta_i u(x) = D_i T_{k(u,x)}(u)\,(x). \tag{1.9}$$

Предложение 1.1. *Пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда для любого $k > 0$ имеем*

$$D_i T_k(u) = \delta_i u \cdot 1_{\{|u|<k\}} \quad \textit{п. в. на } \Omega. \tag{1.10}$$

В работе [29] равенство вида (1.10) служит для определения "градиента" элементов некоторого функционального класса, содержащего множество $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$. Непосредственное определение функций $\delta_i u$ для $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ формулой (1.9) дано в статье А.А. Ковалевского [10]. Там же установлено предложение 1.1.

Заметим, что если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$, то $\delta_i u = D_i u$ п.в. на Ω для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Определение 1.3. Если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, то δu – отображение Ω в $\mathbb{R}^n$ такое, что для любых $x \in \Omega$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $(\delta u(x))_i = \delta_i u(x)$.

Из неравенства (1.3) и предложения 1.1 вытекает, что если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$, то функция $a_i(x, \delta u)(\delta_i u - \delta_i \varphi)$ суммируема на множестве $\{|u - \varphi| < k\}$.

Определение 1.4. Энтропийным решением задачи (1.1), (1.2) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ такую, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$ имеет место неравенство

$$\int_{\{|u-\varphi|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \delta u)(\delta_i u - \delta_i \varphi) \right\} dx \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u - \varphi) dx. \tag{1.11}$$

Согласно основному результату работы [29], в которой и было введено понятие энтропийного решения задачи (1.1), (1.2), справедливо следующее утверждение (см. [29, теорема 6.1]).

Теорема 1.1. *Существует единственное энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2).

Таким образом, в отличие от слабых решений, энтропийное решение задачи (1.1), (1.2) существует и единственно для всего диапазона допустимых значений показателя p, т.е. для любого $p \in (1, n)$.

Заметим, что если u – энтропийное решение задачи (1.1), (1.2), то неравенство (1.11) справедливо для любых $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k > 0$.

При этом на самом деле знак неравенства в (1.11) можно заменить на знак равенства (см. [29]).

Среди других работ, посвященных изучению существования и единственности энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с L^1-правыми частями или мерами в качестве правых частей, отметим, например, статьи Л. Боккардо, Т. Галлуэ и Л. Орсина (L. Orsina) [41] и С. Сегура де Леон (S. Segura de León) [86].

При исследовании свойств суммируемости решений задач вида (1.1), (1.2) весьма полезен следующий простой результат.

Предложение 1.2. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $\lambda \in [1,p]$ *и* $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$. *Тогда* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ *и для любого* $i \in \{1,\dots,n\}$ *имеем* $D_i u = \delta_i u$ *п. в. на* Ω.

Этот результат был сформулирован и использовался, например, в статьях А.А. Ковалевского [7, 10, 12, 59].

Из следствия 4.3 работы [29] и предложения 1.2 вытекает такой результат.

Теорема 1.2. *Пусть* u *– энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2), *и пусть* $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. *Тогда* u *– слабое решение задачи* (1.1), (1.2).

Положим

$$q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \qquad r = \frac{n(p-1)}{n-1}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.3. *Пусть* u *– энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2). *Тогда для любого* $\lambda \in (0,q)$ *имеем* $u \in L^\lambda(\Omega)$ *и для любого* $\lambda \in (0,r)$ *имеем* $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$.

Теорема 1.4. *Пусть $p > 2 - 1/n$, и пусть u – энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2). *Тогда u – слабое решение задачи* (1.1), (1.2), *и для любого $\lambda \in [1, r)$ имеем $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$.*

Теорема 1.5. *Пусть $p > 2 - 1/n$. Тогда существует слабое решение задачи* (1.1), (1.2), *принадлежащее $\overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ для любого $\lambda \in [1, r)$.*

Теорема 1.3 является следствием лемм 3.1, 4.1 и 4.2 статьи [29], теорема 1.4 вытекает из теорем 1.3, 1.2 и предложения 1.2, а теорема 1.5 – следствие теорем 1.1 и 1.4. Последний результат уже был упомянут выше со ссылкой на работу [37].

Заметим, что слабые и энтропийные решения задачи (1.1), (1.2), вообще говоря, могут не принадлежать пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$. Примеры, показывающие это, даны в статьях А.А. Ковалевского [9, 10].

Вопрос о дополнительных условиях на функцию f, обеспечивающих принадлежность решений задачи (1.1), (1.2) пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$, изучался Л. Боккардо и Т. Галлуэ, а также А.А. Ковалевским. Так, в статье Л. Боккардо и Т. Галлуэ [37] существование слабого решения задачи (1.1), (1.2), принадлежащего пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$, доказано при условиях $p > 2 - 1/n$ и $f \ln(1 + |f|) \in L^1(\Omega)$. В работах А.А. Ковалевского [7, 9, 10, 59] это сделано при более слабых предположениях относительно p и f, в частности, при условиях $p \geqslant 2 - 1/n$ и $f[\ln(1 + |f|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$, где $\sigma > (n - 1)/n$.

Относительно понятия ренормализованного решения для уравнений с L^1-правыми частями или мерами в качестве правых частей отметим, что такие решения являются элементами того же функционального класса, которому принадлежат энтропийные решения, но в отличие от последних удовлетворяют другому семейству интегральных соотношений. В ряде случаев понятия энтропийного и ренормализованного решения эквивалентны. Это верно, например, по отношению к задаче (1.1), (1.2).

Определение 1.5. Ренормализованным решением задачи (1.1), (1.2) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ такую, что

(i) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int_{\{m\leqslant|u|\leqslant 2m\}} |\delta u|^p \, dx = 0;$

(ii) для любых $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ и $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i \varphi \Big\} h(u) dx + \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) \delta_i u \Big\} h'(u) \varphi \, dx = \int_\Omega f \, h(u) \varphi \, dx.$$

По поводу этого определения см., например, статью Ф. Мюра (F. Murat) [78].

Теорема 1.6. *Функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ есть ренормализованное решение задачи* (1.1), (1.2) *тогда и только тогда, когда эта функция есть энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2).

Доказательство этой теоремы дано, например, в [15, гл. 1].

Вопросы существования и единственности ренормализованных решений исследовались, например, в работах Ф. Мюра [77, 78], Ж.-М. Ракотосона (J.-M. Rakotoson) [85], Дж. Даль Мазо (G. Dal Maso), Ф. Мюра, Л. Орсина и А. Принье (A. Prignet) [47, 48], М.Ф. Бетта (M.F. Betta), А. Меркальдо (A. Mercaldo), Ф. Мюра и М.М. Порцио (M.M. Porzio) [32].

Кроме уже упомянутых исследований вопросы о существовании и свойствах решений задачи (1.1), (1.2) и близких к ней задач для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с L^1-правыми частями и мерами в качестве правых частей изучались в работах Ж.-М. Ракотосона [84], Л. Боккардо, Т. Галлуэ и Ж. Л. Вазкеза [42], Л. Боккардо и Т. Галлуэ [38, 39], Л. Боккардо, А. Даль Альо (A. Dall'Aglio) и Л. Орсина [34], А. Альвино (A. Alvino), В. Фероне (V. Ferone) и Г. Тромбетти (G. Trombetti) [23], А. Альвино, Л. Боккардо, В. Фероне, Л. Орсина и Г. Тромбетти [22], А. Порретта (A. Porretta) [83] и А.А. Ковалевского [11].

Отметим, что в вышеприведенной части данного обзора использован материал вводного раздела первой главы монографии [15], причем описанные исследования относятся к L^1-теории нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с изотропными и невырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами.

Что касается разрешимости нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с L^1-данными и данными-мерами в случае анизотропии или вырождения (по пространственной переменной) их коэффициентов, упомянем следующие работы.

Прежде всего это статья Л. Боккардо, Т. Галлуэ и П. Марчеллини (P. Marcellini) [40], в которой рассмотрена однородная задача Дирихле для уравнения вида (1.1) с правой частью f из класса ограниченных мер Радона на Ω и анизотропными коэффициентами $a_i(x,\xi) = |\xi_i|^{p_i-2}\xi_i$, где $p_i > 1$, $i = 1,\ldots,n$, и установлено существование слабого решения u этой задачи такого, что $D_i u \in L^{q_i}(\Omega)$ с $q_i < \frac{n(\overline{p}-1)}{\overline{p}(n-1)}\,p_i$, где $\overline{p}$ – среднее гармоническое чисел p_i, т.е. $1/\overline{p} = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(1/p_i)$, причем $\overline{p} < n$. Существование слабых решений для класса уравнений с анизотропными и невырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и локально интегрируемыми в $\mathbb{R}^n$ данными доказано в работе М. Бендамане (M. Bendahmane) и К.Х. Карлсена (K.H. Karlsen) [27]. Этими же авторами установлено существование слабого решения задачи Дирихле для системы уравнений с анизотропными и невырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и правыми частями-мерами [28]. Существование и определенная регулярность слабых решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений с анизотропными и невырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и правой частью класса L^m при $m > 1$, достаточно близком к 1, доказано в статье Ф.К. Ли (F.Q. Li) [74].

Разрешимость задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений с изотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-данными и данными-мерами изучалась в работах Г.Р. Чирми (G.R. Cirmi) [46], Й. Атика (Y. Atik) и Ж.-М. Ракотосона [25], М.Ф. Бетта, Т. Дель Веккио (T. Del Vecchio) и М.Р. Постераро (M.R. Posteraro) [31], Л. Ахаруша (L. Aharouch), Э. Азрула (E. Azroul) и А. Бенкиране (A. Benkirane) [20], Ф.К. Ли [75], А.К. Кавалейро (A.C. Cavalheiro) [44].

Так, в статье [46] рассмотрена задача вида (1.1), (1.2) с правой частью f из класса ограниченных мер Радона и коэффициентами a_i, удовлетворяющими для почти всех $x \in \Omega$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(x,\xi)| \leqslant \beta\nu(x)|\xi|^{p-1} + \beta k(x)[\nu(x)]^{1/p},$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi)\xi_i \geqslant \nu(x)|\xi|^p,$$

где $p \in (1,+\infty)$, $\beta > 0$, $k \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, ν – неотрицательная функция на $\overline{\Omega}$ такая, что $1/\nu \in L^t(\Omega)$ и $\nu \in L^s(\Omega)$, а числа t и s удовлетворяют соотношениям

$$t > n, \qquad \left(1+\frac{1}{t}\right) \leqslant p < n\left(1+\frac{1}{t}\right), \qquad s > \frac{nt}{t(p-1)-n}. \tag{1.12}$$

При дополнительных предположениях, что

$$p > \frac{2sn-s-n}{n(s-1)}\left(1+\frac{1}{t}\right) \tag{1.13}$$

и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство (1.5), в данной работе среди других результатов доказано существование слабого решения рассмотренной задачи, принадлежащего соответствующим весовым соболевским пространствам. Такого же сорта результат получен в [31] в случае уравнения, отличающегося от уравнения (1.1) дополнительным младшим коэффициентом, зависящим от ∇u, и зависимостью старших коэффициентов от u.

В статье [25] изучена задача Дирихле для уравнения

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{a}_i(x, u, \nabla u) + b(x)|u|^{\gamma-1} u = \mu \quad \text{в} \ \ \Omega$$

со старшими коэффициентами $\hat{a}_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющими условию строгой монотонности типа (1.5) и такими, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} |\hat{a}_i(x, s, \xi)| \leqslant \nu(x)\{|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + a_0(x)\}, \tag{1.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i(x, s, \xi)\xi_i \geqslant \nu(x)|\xi|^p, \tag{1.15}$$

где $p > 1$, $\gamma > p-1$, ν и b – неотрицательные функции на $\overline{\Omega}$, которые могут обращаться в нуль или стремиться к бесконечности на некотором замкнутом множестве $S \subset \overline{\Omega}$, причем $\nu/b \in L^\infty(\Omega)$, $b \in L^1(\Omega)$, и a_0 – неотрицательная функция из весового пространства Лебега $L^{p/(p-1)}(\Omega, \nu)$. В рассматриваемой статье введены специальные множества функций $v : \Omega \to \mathbb{R}$ (локальные T-множества) и для исследованной задачи доказано существование решений из таких множеств, слабого – в случае принадлежности μ классу ограниченных мер Радона и ренормализованного – в случае $\mu \in L^1(\Omega)$.

В работе [75] изучена разрешимость задачи Дирихле для уравнения

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{a}_i(x, u, \nabla u) = \mu \quad \text{в} \ \ \Omega \tag{1.16}$$

с правой частью μ из класса ограниченных мер Радона и коэффициентами $\hat{a}_i$, удовлетворяющими условию строгой монотонности и таким же неравенствам, как (1.14) и (1.15), причем, как и в [46], $1/\nu \in L^t(\Omega)$ и $\nu \in L^s(\Omega)$, но в отличие от [46], числа t и s вместо соотношений (1.12) и (1.13) удовлетворяют неравенствам

$$s,\, t > 1, \qquad \frac{1}{t} + \frac{1}{s} < \frac{p}{n}, \qquad 1 + \frac{1}{t} < p < n\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

В рассматриваемой работе введено некоторое весовое множество функций $v : \Omega \to \mathbb{R}$ (аналог T-множеств из [84, 25]) и для исследуемой задачи установлено существование принадлежащего этому множеству дистрибутивного решения (т.е. решения в смысле аналогичного приведенному в определении 1.1 интегрального тождества для функций из $C_0^\infty(\Omega)$).

В статье [20] изучена задача Дирихле для уравнения

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{a}_i(x, u, \nabla u) + \bar{g}(x, u, \nabla u) = \mu \quad \text{в} \;\; \Omega \tag{1.17}$$

со старшими коэффициентами $\bar{a}_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющими условию строгой монотонности типа (1.5) и такими, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$|\bar{a}_i(x, s, \xi)| \leqslant \beta {\omega_i}^{1/p}(x) \Biggl\{ \sum_{j=1}^{n} {\omega_j}^{(p-1)/p}(x) |\xi_j|^{p-1} + \sigma^{(p-1)/p}(x) |s|^{q(p-1)/p} + k(x) \Biggr\},\; i \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i(x, s, \xi)\xi_i \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) |\xi_i|^p,$$

где $p \in (1, +\infty)$, $\alpha, \beta > 0$, k – положительная функция из $L^{p/(p-1)}(\Omega)$, $\omega_i \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$, $\omega_i > 0$ п.в. на Ω и $(1/\omega_i)^{1/(p-1)} \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Функция $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}$ и число $q \in (1, +\infty)$ предполагаются такими, что вложение соответствующего весового соболевского пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega, \omega)$ в весовое пространство Лебега $L^q(\Omega, \sigma)$ является компактным. Кроме того, относительно младшего коэффициента $\bar{g} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ предполагаются выполненными знаковое условие ($\bar{g}(x, s, \xi)s \geqslant 0$) и определенное условие роста, а правая часть μ в уравнении (1.17) считается такой, что

$\mu = f - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$, где $f \in L^1(\Omega)$ и $F_i \in L^{p/(p-1)}(\Omega, (1/\omega_i)^{1/(p-1)})$, $i = 1, \ldots, n$. В статье утверждается, что при описанных условиях рассмотренная задача имеет по крайней мере одно энтропийное решение в соответствующем множестве функций $\mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega, \omega)$.

В статье [44] доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле для уравнения вида (1.16) с правой частью $\mu \in L^1(\Omega)$ и коэффициентами $\hat{a}_i$, удовлетворяющими условию строгой монотонности и неравенствам типа (1.14) и (1.15), причем предполагалось, что весовая функция ν принадлежит классу Макенхаупта A_p (по поводу этих классов см., например, [76, 56]).

Вопросы о существовании и свойствах решений для специальных классов нелинейных эллиптических уравнений высшего порядка с L^1-правыми частями, в том числе уравнений с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами, исследованы в работах А.А. Ковалевского [6, 8, 57, 58, 60, 61] и А.А. Ковалевского и Ф. Николози (F. Nicolosi) [66–72]. Рассмотренные ими классы характеризуются соответствующими условиями усиленной коэрцитивности относительно коэффициентов уравнений. Впервые классы уравнений такого типа в случае достаточно регулярных правых частей были рассмотрены И.В. Скрыпником [17].

Для нелинейных эллиптических уравнений произвольного четного порядка с анизотропными и невырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-данными разрешимость задачи Дирихле в соответствующем энергетическом пространстве установлена в статье М. Шрифа (M. Chrif) и С. Эль Маноуни (S. El Manouni) [45]. Однако это было сделано при таком условии на вовлеченные параметры, которое обеспечивает вложение рассмотренного энергетического пространства в пространство ограниченных функций.

Теперь перейдем к обзору работ, посвященных исследованию эллиптических вариационных неравенств второго порядка с L^1-правыми частями и правыми частями-мерами. Естественно, изучение вопроса о разрешимости таких вариационных неравенств сталкивается с теми же проблемами, которые имеют место и в случае уравнений с подобного рода правыми частями. Прежде всего исследование данного вопроса требует уточнения самогó понятия решения вариационного неравенства и расширения множества, в котором это решение ищется.

Известные нам результаты о разрешимости эллиптических вариационных неравенств второго порядка с L^1-правыми частями и мерами в качестве правых частей получены преимущественно с помощью тех же подходов и техники, что "работают" и в случае уравнений. Эти результаты относятся в основном к односторонним задачам Дирихле. Они установлены, в первую очередь, в статье Л. Боккардо и Т. Галлуэ [36], а затем, например, в работах Л. Боккардо и Г.Р. Чирми [33], П. Оппецци (P. Oppezzi) и А.М. Росси (A.M. Rossi) [79–82], Б. Брандолини (B. Brandolini) и Л. Рандаццо (L. Randazzo) [43], К. Леоне (C. Leone) [73], А. Бенкиране и Дж. Бенноуна (J. Bennouna) [30], Л. Ахаруша, Й. Акдима (Y. Akdim) и Э. Азрула [19], Л. Ахаруша и Й. Акдима [18], Л. Ахаруша, Э. Азрула и М. Рудафа (M. Rhoudaf) [21], А. Эльмаи (A. Elmahi) и Д. Мескине (D. Meskine) [49].

Односторонние задачи соответствуют нелинейному эллиптическому оператору A второго порядка, определенному на подходящем соболевском пространстве, множеству V функций v из этого пространства, удовлетворяющих условию $v \geqslant \psi$, где ψ – заданная функция, и правой части f того или иного класса. При этом в большинстве исследований по этим задачам предполагается, что оператор A имеет изотропные и невырождающиеся (по пространственной переменной) коэффициенты (см., например, [18, 21, 30, 33, 36, 43, 49, 73, 79–82]).

Приведем один типичный результат (см. [33]). Пусть $2-1/n<p<n$, $\alpha,\beta>0$, $b\in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, $b\geqslant 0$ на Ω, и пусть заданы функции Каратеодори $A_i:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, такие, что для почти всех $x\in\Omega$ и любых $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n A_i(x,\xi)\xi_i\geqslant\alpha|\xi|^p,\quad \sum_{i=1}^n |A_i(x,\xi)|\leqslant\beta[b(x)+|\xi|^{p-1}]$$

и для почти всех $x\in\Omega$ и любых $\xi,\xi'\in\mathbb{R}^n$, $\xi\neq\xi'$,

$$\sum_{i=1}^n [A_i(x,\xi)-A_i(x,\xi')](\xi_i-\xi_i')>0.$$

Пусть еще $\psi\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ и

$$V=\{v\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega):v\geqslant\psi \text{ п.в. на } \Omega\}.$$

Тогда если $f\in L^1(\Omega)$, то существует единственное решение u следующей задачи:

$$u\in\overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)\quad\forall\lambda\in\left(1,\frac{n(p-1)}{n-1}\right),$$

$$u\geqslant\psi \text{ п.в. на } \Omega,\quad T_k(u)\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)\quad\forall k>0,$$

$$\int_\Omega\left\{\sum_{i=1}^n A_i(x,\nabla u)D_iT_k(u-v)\right\}dx\leqslant\int_\Omega f\,T_k(u-v)dx$$

$$\forall\, v\in V\cap L^\infty(\Omega) \text{ и } \forall\, k>0.$$

Функция u, удовлетворяющая описанным требованиям, и есть решение вариационного неравенства, соответствующего оператору $A:\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)\to(\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^*$ дивергентного вида с коэффициентами A_i, множеству ограничений V и правой части f (т.е. u – решение односторонней задачи Дирихле).

Случай модельного оператора, а именно, оператора A такого, что $Au=-\mathrm{div}\,\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big)$, был рассмотрен в [36]. Разрешимость односторонней задачи Дирихле для вариационного неравенства с правой частью-мерой в случае такого же оператора, как и в [33], была установлена в [73]. Результаты, близкие к приведенному утверждению из статьи [33], получены в работах [43, 18] для случая операторов, отличающихся от рассмотренного в [33] младшим коэффициентом, зависящим от u и ∇u, и зависимостью старших коэффициентов от u. Кроме того, теорема существования, аналогичная упомянутым результатам из [36, 33], получена в статье [79] для случая многозначного оператора. Вариационные неравенства с многозначными операторами дивергентного вида и L^1-данными и данными-мерами также изучались в работах [80–82], где было установлено существование ренормализованных решений соответствующих односторонних задач Дирихле. Результаты, аналогичные приведенному утверждению из [33], для случая операторов, определенных на пространствах Орлича-Соболева, получены в статьях [30, 21, 49].

В работе [19] установлена разрешимость односторонней задачи Дирихле для вариационного неравенства с L^1-правой частью и старшими коэффициентами в левой части, удовлетворяющими тем же условиям роста, коэрцитивности и строгой монотонности, что и старшие коэффициенты уравнения, рассмотренного в статье [20], т.е. уравнения (1.17).

Теоремы существования и единственности решений нелинейных вариационных неравенств с L^1-данными и двусторонними ограничениями вида $\varphi \leqslant v \leqslant \psi$ получены Й. Атиком и Ж.-М. Ракотосоном [25, 26] и Й. Атиком [24] в предположении, что старшие коэффициенты оператора, порождающего левую часть неравенства, имеют вырождение и рост, обусловленные единой весовой функцией и единым показателем (см. неравенства (1.14) и (1.15)).

Вместе с тем в вышеупомянутых и многих других работах не рассмотрены уравнения и вариационные неравенства второго порядка с L^1-правыми частями в том случае, когда их старшие коэффициенты одновременно имеют анизотропный характер и вырождение по пространственной переменной. Именно этот случай изучен в диссертационной работе. Кроме того, говоря о вариационных неравенствах, заметим, что в отличие от вышеупомянутых исследований задач с односторонними и двусторонними ограничениями, в диссертации предполагается, что множество ограничений, связанное с рассматриваемыми вариационными неравенствами, удовлетворяет некоторым достаточно общим условиям, допускающим изучение задач и с односторонними, и двусторонними, и другими ограничениями.

Определяющими в диссертационной работе являются результаты о существовании и единственности решений вариационных неравенств с L^1-данными. Они доказаны, по существу, при минимальных условиях на вовлеченные весовые функции и являются новыми для вариационных неравенств с вырождающимися коэффициентами, поскольку объединяют две особенности – вырождение и анизотропию, и, кроме того, относятся к более широкому классу множеств ограничений по сравнению с рассматривавшимися ранее. Ввиду последнего обстоятельства эти результаты новы даже для невырождающихся изотропных вариационных неравенств. При этом, допуская в качестве множества ограничений соответствующее весовое анизотропное пространство Соболева, в силу тех же особенностей они новы и для уравнений. Отметим, что разрешимость задачи Дирихле для вырождающихся анизотропных уравнений второго порядка с L^1-данными в диссертации установлена как раз исходя из соответствующих результатов для вариационных неравенств с ограничениями достаточно общего вида.

Дадим более подробное описание основных результатов, представленных в диссертации. Прежде всего в работе рассмотрены соболевское пространство $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и более широкое множество $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, характеризующиеся наборами показателей $q = \{q_1, \dots, q_n\}$ и весовых функций $\nu = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ таких, что $q_i \in (1, n)$, $\nu_i > 0$ п.в. на Ω, $\nu_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

и $(1/\nu_i)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$. Заметим, что множество $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ состоит из функций на Ω, суперпозиции которых со срезками T_k принадлежат пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Это множество есть обобщение на весовой и анизотропный случай соответствующего класса функций, введенного в [29].

Затем рассмотрен оператор $\mathcal{A} : \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega))^*$, коэффициенты $a_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,n$, которого удовлетворяют определенным условиям роста, коэрцитивности и строгой монотонности. Показатели $q_1,\dots,q_n$ и весовые функции $\nu_1,\dots,\nu_n$ входят в упомянутые условия роста и коэрцитивности и отражают анизотропный характер и вырождение или сингулярность (по пространственной переменной) коэффициентов a_i. Простым примером коэффициентов, удовлетворяющих предположенным условиям, являются функции, которые задаются следующим образом: $a_i(x,\xi) = \nu_i(x)|\xi_i|^{q_i-1}\operatorname{sign}\xi_i$, $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$.

После этого фиксировано замкнутое выпуклое множество V в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, содержащее ограниченные функции и обладающее тем свойством, что для любых $u, v \in V$ и $k > 0$ справедливо включение $u - T_k(u-v) \in V$. Заметим, что множества функций $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, определяемые односторонними ограничениями вида $v \geqslant \psi$ или $v \leqslant \psi$ и двусторонними ограничениями вида $\varphi \leqslant v \leqslant \psi$, с $\psi, \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, обладают таким свойством. Однако этим примеры множеств с указанным свойством далеко не исчерпываются.

Если $f \in L^1(\Omega)$, то T-решением вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, называется функция $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, удовлетворяющая для любых $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geqslant 1$ включению $v - T_k(v-u) \in V$ и неравенству

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u),\, T_k(u-v)\rangle \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u-v)dx,$$

где $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Очевидно, что указанное понятие T-решения отличается от обычного понятия решения вариационного неравенства. Однако, оказывается, что если функция f имеет достаточную L^p-регулярность, зависящую от суммируемости функций $1/\nu_i$, $i = 1, \ldots, n$, то рассмотренное понятие T-решения вариационного неравенства равносильно обычному понятию решения вариационного неравенства, которое используется в случае регулярных данных (см. предложение 3.9).

Для случая $f \in L^1(\Omega)$ в диссертации доказано существование и единственность T-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$ (см. теоремы 3.1 и 3.2). Затем установлен ряд результатов о свойствах суммируемости такого решения, и в частности, об условиях его принадлежности пространствам $L^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ (см. раздел 4). Полученные результаты о существовании и свойствах суммируемости T-решений рассмотренных вариационных неравенств с L^1-правой частью положены в основу доказательства существования энтропийных решений, T-решений и W-решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений с теми же коэффициентами a_i и L^1-правой частью (см. раздел 5).

РАЗДЕЛ 2

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Методы исследования вопросов, рассматриваемых в диссертационной работе, тесно связаны с общими подходами к изучению существования и свойств решений нелинейных эллиптических уравнений и вариационных неравенств с L^1-данными.

Доказательство существования T-решений исследуемых в диссертации вариационных неравенств с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-правой частью основано на подходе, который включает в себя реализацию следующих шагов:

а) рассмотрение аппроксимирующих вариационных неравенств с ограниченными правыми частями f_l, сходящимися в L^1 к L^1-правой части исходного вариационного неравенства;

б) получение специальных равномерных оценок для последовательности решений u_l аппроксимирующих вариационных неравенств с правыми частями f_l;

в) выделение на основе установленных оценок подпоследовательности последовательности $\{u_l\}$, сходящейся в определенных смыслах к некоторой предельной функции u;

г) предельный переход в аппроксимирующих вариационных неравенствах и доказательство того факта, что предельная функция u является T-решением исходного вариационного неравенства.

Этот подход вполне аналогичен тому подходу, который был предложен в [29] для исследования разрешимости нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с изотропными и невырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-данными.

Относительно вышеупомянутых шагов обсуждаемого здесь подхода отметим следующее.

Существование решений аппроксимирующих вариационных неравенств с ограниченными правыми частями обеспечивается известными результатами о разрешимости абстрактных вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами (см., например, [16, гл. 2]).

Специальные равномерные оценки для решений u_l аппроксимирующих вариационных неравенств – это, во-первых, равномерные по l оценки сверху интегралов функций, зависящих от производных $D_i u_l$, по множествам вида $\{|u_l| < k\}$, а во-вторых, равномерные по l оценки мер множеств $\{|u_l| \geqslant k\}$ и $\{\nu_i^{1/q_i}|D_i u_l| \geqslant k\}$, $i = 1, \ldots, n$, характеризующие определенное убывание этих мер с ростом k. Получение этих оценок основано на использовании срезающих функций T_k, о которых уже говорилось в предыдущем разделе, исходных предположений относительно множества ограничений и теоремы о вложении основного в наших рассмотрениях весового анизотропного пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ в пространство Лебега $L^{n/(n-1)}(\Omega)$.

Следующий шаг – выделение на основе полученных оценок подпоследовательности последовательности $\{u_l\}$, сходящейся в определенных смыслах (слабая сходимость срезок, сходимость почти всюду) к некоторой предельной функции, – осуществляется с использованием специальных приемов, предложенных в [29, 6], и в значительной степени состоит в доказательстве фундаментальности по мере последовательности решений аппроксимирующих вариационных неравенств и последовательностей производных этих решений с соответствующими весовыми множителями.

Наконец, заключительный, довольно технический шаг, – предельный переход в аппроксимирующих вариационных неравенствах, – реализуется с использованием информации о решениях этих неравенств, полученной на предыдущих шагах. При этом существенно применяются такие классические результаты вещественного анализа, как свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега, теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, теорема Егорова и лемма Фату.

Далее, доказательство единственности T-решений вариационных неравенств с L^1-правой частью, рассматриваемых в диссертационной работе, основано на использовании некоторых установленных априорных оценок этих решений и условия строгой монотонности коэффициентов оператора, порождающего левую часть данных вариационных неравенств. При этом важную роль играет неравенство, связанное с вложением пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ в пространство $L^{n/(n-1)}(\Omega)$. Отметим, что априорные оценки, о которых идет речь, – это оценки интегралов функций, зависящих от "производных" T-решения u, по множествам вида $\{h \leqslant |u-\psi| < h+k\}$, где ψ – некоторая фиксированная ограниченная функция из множества ограничений и $h,\ k \geqslant 1$. Подобного типа оценки ранее были получены в [29] в существенно более простой ситуации, а именно, для энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с изотропными и невырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-данными.

Заметим, что упомянутое условие строгой монотонности коэффициентов оператора, порождающего левую часть рассматриваемых вариационных неравенств, существенно используется и при доказательстве существования T-решений, а именно, при установлении фундаментальности по мере последовательностей "взвешенных" производных решений аппроксимирующих вариационных неравенств.

Важно также отметить, что отправными точками в получении результатов о существовании и единственности T-решений являются подстановки в соответствующие вариационные неравенства подходящих допустимых (и зависящих от решений) функций из заданного множества ограничений.

Далее, описание свойств суммируемости T-решений вариационных неравенств, исследуемых в диссертации, основывается на некоторых априорных оценках этих решений и следующем результате общего характера (см., например, [29, 6, 7]): если измеримая функция $v : \Omega \to \mathbb{R}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{meas} \{|v| \geqslant k\} \leqslant Mk^{-\gamma}$ с наперед заданными M, $\gamma > 0$, то для любого $\lambda \in (0, \gamma)$ справедливо включение $v \in L^{\lambda}(\Omega)$. Отметим, что одна из упомянутых априорных оценок как раз состоит в том, что при тех или иных условиях на вовлеченные весовые функции или правую часть рассматриваемого вариационного неравенства для его T-решения u выполняется неравенство $\operatorname{meas} \{|u| \geqslant k\} \leqslant Ck^{-\alpha}$ с некоторыми фиксированными C, $\alpha > 0$ и любым $k \geqslant 1$. Другая априорная оценка имеет аналогичный вид, но формулируется не для самого́ решения u, а для его "производных" с соответствующими весовыми множителями.

Наконец, заметим, что в основе доказательства разрешимости рассматриваемой в диссертации задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-правой частью лежат упомянутые выше результаты о существовании и свойствах суммируемости T-решений исследуемых в работе вариационных неравенств.

РАЗДЕЛ 3

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ T-РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ АНИЗОТРОПНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С L^1-ДАННЫМИ

3.1. Функциональные пространства и множества

В этом вводном подразделе рассмотрим используемые в диссертационной работе функциональные пространства и множества. Эти пространства и множества были введены А.А. Ковалевским в [13]. Ему же принадлежат сформулированные ниже предложения 3.1 – 3.8 и их доказательства, изложенные в работе [13].

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $q_i \in (1, n)$.

Положим $q = \{q_i : i = 1, \ldots, n\}$,

$$q_- = \min\{q_i : i = 1, \ldots, n\}, \qquad q_+ = \max\{q_i : i = 1, \ldots, n\},$$

$$\overline{q} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}\right)^{-1}, \qquad \hat{q} = \frac{n(\overline{q}-1)}{(n-1)\overline{q}}\,.$$

Пусть для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ ν_i – неотрицательная функция на Ω такая, что $\nu_i > 0$ п.в. на Ω,

$$\nu_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \qquad \left(\frac{1}{\nu_i}\right)^{1/(q_i-1)} \in L^1(\Omega). \tag{3.1}$$

Положим $\nu = \{\nu_i : i = 1, \ldots, n\}$. Через $W^{1,q}(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in L^1(\Omega)$ таких, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$ и $\nu_i |D_i u|^{q_i} \in L^1(\Omega)$.

Пусть $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$ – отображение $W^{1,q}(\nu,\Omega)$ в $\mathbb{R}$ такое, что для любой функции $u \in W^{1,q}(\nu,\Omega)$

$$\|u\|_{1,q,\nu} = \int_\Omega |u|\,dx + \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \nu_i |D_i u|^{q_i}\,dx\right)^{1/q_i}.$$

Отображение $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$ есть норма в $W^{1,q}(\nu,\Omega)$ и ввиду второго из включений (3.1) множество $W^{1,q}(\nu,\Omega)$ есть банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$. Кроме того, в силу первого из включений (3.1) имеем $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,q}(\nu,\Omega)$.

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^{1,q}(\nu,\Omega)$. Очевидно, что множество $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ является банаховым пространством относительно нормы, индуцированной нормой $\|\cdot\|_{1,q,\nu}$.

Положим

$$c_{q,\nu} = 1 + \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\int_\Omega \left(\frac{1}{\nu_i}\right)^{1/(q_i-1)} dx\right)^{(q_i-1)/q_i}.$$

Предложение 3.1. *Имеют место следующие утверждения*:

(i) $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ *и для любой функции* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$

$$\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leqslant c_{q,\nu}\|u\|_{1,q,\nu};$$

(ii) *если* $u_j \to u$ *слабо в* $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, *то* $u_j \to u$ *сильно в* $L^1(\Omega)$.

Предложение 3.2. *Пространство* $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ *рефлексивно.*

Далее, пусть для любого $k > 0$ T_k – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leqslant k, \\ k\,\mathrm{sign}\,s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Аналогично известным результатам для невесовых соболевских пространств (см., например, [5, гл.2]) имеем: если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $k > 0$, то $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$

$$D_i T_k(u) = D_i u \cdot 1_{\{|u|<k\}} \quad \text{п. в. на } \Omega. \tag{3.2}$$

Предложение 3.3. *Пусть* $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, *и пусть для любого* $k \in \mathbb{N} \quad w_k = v + T_k(u - v)$. *Тогда* $w_k \to u$ *сильно в* $W^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Через $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $k > 0$ имеем $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Ясно, что

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega). \tag{3.3}$$

Для произвольных $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и $x \in \Omega$ положим

$$k(u, x) = \min\{l \in \mathbb{N} : |u(x)| \leqslant l\}.$$

Определение 3.1. Пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $\delta_i u$ – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$

$$\delta_i u(x) = D_i T_{k(u,x)}(u)\,(x).$$

Определение 3.2. Если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, то δu – отображение Ω в $\mathbb{R}^n$ такое, что для любых $x \in \Omega$ и $i \in \{1, \dots, n\} \quad (\delta u(x))_i = \delta_i u(x)$.

Предложение 3.4. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ *и* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Тогда для любого* $k > 0$ *имеем* $D_i T_k(u) = \delta_i u \cdot 1_{\{|u|<k\}}$ *п. в. на* Ω.

Из (3.2), (3.3) и предложения 3.4 вытекает, что если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, то для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $\delta_i u = D_i u$ п.в. на Ω.

Предложение 3.5. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ *и* $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Тогда* $u - v \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ *и для любых* $i \in \{1, \dots, n\}$ *и* $k > 0$ *имеем*

$$D_i T_k(u - v) = \delta_i u - D_i v \quad \text{п.в. на } \{|u - v| < k\}.$$

Предложение 3.6. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ *и* $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. *Тогда* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ *и для любого* $i \in \{1, \dots, n\}$ *имеем* $D_i u = \delta_i u$ *п.в. на* Ω.

Для любого $m \in \mathbb{R}^n$ такого, что $m_i > 0,\ i = 1, \dots, n$, положим

$$p_m = n\biggl(\sum_{i=1}^n \frac{1 + m_i}{m_i q_i} - 1\biggr)^{-1}. \tag{3.4}$$

Заметим, что если $m \in \mathbb{R}^n$ и для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $m_i \geqslant 1/(q_i - 1)$, то $p_m > 1$.

Предложение 3.7. *Пусть $m \in \mathbb{R}^n$ и выполняется условие: для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $m_i \geqslant 1/(q_i - 1)$ и $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. Тогда $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \subset L^{p_m}(\Omega)$ и существует положительная постоянная c, зависящая только от n, q, m и $\|1/\nu_i\|_{L^{m_i}(\Omega)}$, $i = 1, \dots, n$, такая, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ справедливо неравенство*

$$\left(\int_\Omega |u|^{p_m} dx \right)^{1/p_m} \leqslant c \prod_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega \nu_i |D_i u|^{q_i} dx \right)^{1/nq_i}.$$

Из этого предложения и второго из включений (3.1) вытекает следующий результат.

Предложение 3.8. *Существует положительная постоянная c_0, зависящая только от n, q и $\|1/\nu_i\|_{L^{1/(q_i-1)}(\Omega)}$, $i = 1, \dots, n$, такая, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ имеем*

$$\left(\int_\Omega |u|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leqslant c_0 \prod_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega \nu_i |D_i u|^{q_i} dx \right)^{1/nq_i}.$$

Заметим, что предложения 3.4 и 3.6 являются аналогами предложений 1.1 и 1.2, установленных в [10] для невесового изотропного случая, а предложение 3.5 – аналог предложения 2.3, доказанного в [12] для того же невесового изотропного случая. Отметим еще, что предложение 3.7 установлено с использованием одного результата о вложении для невесовых анизотропных пространств (см. [87]).

3.2. Понятие T-решения вариационного неравенства

Пусть $c_1, c_2 > 0$, $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, $g_1, g_2 \geqslant 0$ на Ω, и пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ a_i – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} (1/\nu_i)^{1/(q_i-1)}(x)|a_i(x,\xi)|^{q_i/(q_i-1)} \leqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x)|\xi_i|^{q_i} + g_1(x), \tag{3.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi)\xi_i \geqslant c_2 \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x)|\xi_i|^{q_i} - g_2(x). \tag{3.6}$$

Кроме того, будем считать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x,\xi) - a_i(x,\xi')]\,(\xi_i - \xi_i') > 0. \tag{3.7}$$

Заметим, что в силу (3.5) для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $i \in \{1,\ldots,n\}$ функция $a_i(x,\nabla u)D_i v$ суммируема на Ω.

Пусть $\mathcal{A}$ – оператор из $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ в $(\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega))^*$ такой, что для любых $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,\nabla u)\,D_i v \right\} dx.$$

Пусть V – замкнутое выпуклое множество в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$V \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing, \tag{3.8}$$

$$\text{если}\ \ u, v \in V\ \text{и}\ k > 0,\ \text{то}\ \ u - T_k(u-v) \in V. \tag{3.9}$$

Определение 3.3. Пусть $f \in L^1(\Omega)$. T-решением вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ такую, что:

(i) для любых $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v-u) \in V$;

(ii) если $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u),\, T_k(u-v)\rangle \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u-v)dx.$$

Предложение 3.9. *Пусть* $m \in \mathbb{R}^n$ *и выполняется условие:*

$$\text{для любого } i \in \{1, \dots, n\} \text{ имеем } m_i \geqslant 1/(q_i - 1) \text{ и } 1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega). \quad (3.10)$$

Пусть $f \in L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)$. *Тогда* u *есть* T*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$, *в том и только в том случае, если* $u \in V$ *и для любой функции* $v \in V$ *справедливо неравенство*

$$\langle \mathcal{A}u, u - v \rangle \leqslant \int_\Omega f(u - v)dx. \quad (3.11)$$

Доказательство. Пусть $u \in V$ и для любой функции $v \in V$ справедливо неравенство (3.11). Очевидно, что $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, и ввиду (3.9) выполняется условие (i) определения 3.3. Пусть $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Согласно (3.9) имеем $u - T_k(u - v) \in V$. Тогда в силу (3.11)

$$\langle \mathcal{A}u, T_k(u - v) \rangle \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u - v)dx. \quad (3.12)$$

Но ввиду (3.2)

$$\langle \mathcal{A}u, T_k(u - v) \rangle = \langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u - v) \rangle.$$

Отсюда и из неравенства (3.12) вытекает, что выполняется условие (ii) определения 3.3. Таким образом, u есть T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.

Пусть теперь u – T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Значит, $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и выполняются условия (i), (ii) определения 3.3.

Пусть $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$ и положим $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. В силу условия (ii) определения 3.3 имеем

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u - v) \rangle \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u - v)dx. \quad (3.13)$$

В силу предложения 3.5 верно включение $T_k(u - v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда, принимая во внимание условие (3.10), из предложения 3.7 и неравенства

Юнга выводим, что

$$\left(\int_\Omega |T_k(u-v)|^{p_m}dx\right)^{1/p_m} \leqslant c\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \nu_i|D_iT_k(u-v)|^{q_i}dx\right)^{1/q_i}. \qquad (3.14)$$

Положим

$$I_k = \sum_{i=1}^n \int_{\{|u-v|<k\}} \nu_i|D_iT_{k_1}(u)|^{q_i}dx,$$

и пусть $\varepsilon \in (0,1)$. Используя предложения 3.4, 3.5 и неравенство Юнга, находим, что

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \nu_i|D_iT_k(u-v)|^{q_i}dx\right)^{1/q_i}$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^n \left(\int_{\{|u-v|<k\}} \nu_i|D_iT_{k_1}(u)|^{q_i}dx\right)^{1/q_i} + \|v\|_{1,q,\nu}$$
$$\leqslant \varepsilon I_k + n\varepsilon^{-1/(q_--1)} + \|v\|_{1,q,\nu}. \qquad (3.15)$$

Из (3.13)–(3.15) и неравенства Гельдера вытекает, что

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u-v)\rangle \leqslant c\|f\|_{L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)}\{\varepsilon I_k + n\varepsilon^{-1/(q_--1)} + \|v\|_{1,q,\nu}\}. \qquad (3.16)$$

Далее, положим

$$J_k = \int_{\{|u-v|<k\}} \left\{\sum_{i=1}^n |a_i(x,\nabla T_{k_1}(u))|\,|D_iv|\right\}dx.$$

Используя предложения 3.4, 3.5 и (3.6), получаем

$$c_2I_k \leqslant \langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u-v)\rangle + J_k + \|g_2\|_{L^1(\Omega)}. \qquad (3.17)$$

Кроме того, в силу (3.5) и неравенства Юнга имеем

$$J_k \leqslant \varepsilon c_1 I_k + n\varepsilon^{-q_+}(1+\|v\|_{1,q,\nu})^{q_+} + \|g_1\|_{L^1(\Omega)}.$$

Отсюда и из (3.16), (3.17), выбирая ε подходящим образом, выводим, что $I_k \leqslant C$, где C – положительная постоянная, зависящая только от n, q_-, c, c_1, c_2, $\|g_1\|_{L^1(\Omega)}$, $\|g_2\|_{L^1(\Omega)}$, $\|f\|_{L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)}$ и $\|v\|_{1,q,\nu}$.

Тогда, учитывая предложение 3.4, получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\{|u-v|<k\}} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} dx \leqslant C.$$

Отсюда, используя лемму Фату, заключаем, что для любого $i \in \{1, ..., n\}$ функция $\nu_i |\delta_i u|^{q_i}$ суммируема на Ω. Тогда, учитывая условие (3.10) и используя предложения 3.7 и 3.4, а также лемму Фату, устанавливаем, что $u \in L^1(\Omega)$ и последовательность $\{T_k(u)\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Теперь, воспользовавшись предложением 3.2 и утверждением (ii) предложения 3.1, получаем, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда в силу предложения 3.3 имеем $v - T_k(v-u) \to u$ сильно в $W^{1,q}(\nu, \Omega)$. Кроме того, ввиду условия (i) определения 3.3 для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $v - T_k(v-u) \in V$. Следовательно, учитывая, что множество V замкнуто в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, получаем $u \in V$. Заметим, что вследствие (3.2) и условия (ii) определения 3.3 для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle \mathcal{A}u, T_k(u-v) \rangle \leqslant \int_\Omega f \, T_k(u-v) dx.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $T_k(u-v) \to u-v$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и поточечно на Ω, а функция $f(u-v)$ в силу условий предложения суммируема на Ω, выводим, что

$$\langle \mathcal{A}u, u-v \rangle \leqslant \int_\Omega f(u-v) dx. \tag{3.18}$$

Неравенство (3.18) доказано для произвольной функции $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$. Пусть теперь $v \in V$. Зафиксируем функцию $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ положим $v_k = \psi - T_k(\psi - v)$. Из условия (3.9) вытекает, что $\{v_k\} \subset V \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда в силу (3.18) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\langle \mathcal{A}u, u-v_k \rangle \leqslant \int_\Omega f(u-v_k) dx. \tag{3.19}$$

Заметим, что вследствие предложения 3.3 $v_k \to v$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда

$$\langle \mathcal{A}u, u-v_k \rangle \to \langle \mathcal{A}u, u-v \rangle. \tag{3.20}$$

Кроме того, ввиду поточечной сходимости $\{v_k\}$ к v, условий предложения и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\int_\Omega f(u-v_k)dx \to \int_\Omega f(u-v)dx.$$

Отсюда и из (3.19), (3.20) выводим неравенство (3.18). Предложение доказано.

Замечание 3.1. Предложение 3.9 показывает, что при достаточной регулярности функций $1/\nu_i$, $i=1,\dots,n$, и f T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A},V,f)$, совпадает с решением вариационного неравенства для той же тройки в обычном смысле.

Предложение 3.10. *Пусть* $f\in L^n(\Omega)$. *Тогда* u *есть* T*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A},V,f)$, *в том и только в том случае, если* $u\in V$ *и для любой функции* $v\in V$ *справедливо неравенство* (3.11).

Доказательство. Пусть $m\in\mathbb{R}^n$, причем для любого $i\in\{1,\dots,n\}$ $m_i=1/(q_i-1)$. Тогда в силу второго из включений (3.1) выполняется условие (3.10). Кроме того, ввиду (3.4) имеем $p_m=n/(n-1)$ и, следовательно, $f\in L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)$. Теперь из предложения 3.9 выводим требуемый результат.

3.3. Существование T-решений вариационных неравенств

Прежде всего приведем один результат о существовании решений вариационных неравенств в обычном смысле.

Предложение 3.11. *Пусть* $m\in\mathbb{R}^n$ *и выполняется условие: для любого* $i\in\{1,\dots,n\}$ *имеем* $m_i\geqslant 1/(q_i-1)$ *и* $1/\nu_i\in L^{m_i}(\Omega)$. *Пусть* $f\in L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)$ *и* W *– непустое замкнутое выпуклое множество* *в* $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. *Тогда существует функция* $u \in W$ *такая, что для любой функции* $v \in W$ *справедливо неравенство*

$$\langle \mathcal{A}u, u - v\rangle \leqslant \int_\Omega f(u-v)\,dx.$$

Доказательство. Используя (3.5), устанавливаем, что оператор $\mathcal{A}$ ограничен и семинепрерывен. В силу (3.7) оператор $\mathcal{A}$ монотонен. Тогда ввиду предложения 2.5 из [16, гл. 2] оператор $\mathcal{A}$ псевдомонотонен. Кроме того, вследствие (3.5), (3.6), предложения 3.8 и неравенства Юнга для любых функций $v, v_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ имеем

$$\langle \mathcal{A}v, v - v_0\rangle \geqslant c'\|v\|^{q_-}_{1,q,\nu} - c''(1 + \|v_0\|_{1,q,\nu})^n,$$

где c', c'' – положительные постоянные, зависящие только от n, q, ν, c_1, c_2, $\|g_1\|_{L^1(\Omega)}$, $\|g_2\|_{L^1(\Omega)}$ и $\operatorname{meas}\Omega$. Заметим еще, что в силу условия данного предложения относительно m и предложения 3.7 функция f естественным образом порождает линейный непрерывный функционал на $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Указанные свойства оператора $\mathcal{A}$ и функции f и теоремы 8.1 и 8.2 из [16, гл. 2] приводят к требуемому заключению.

Из предложений 3.11 и 3.9 вытекает следующий результат.

Предложение 3.12. *Пусть* $m \in \mathbb{R}^n$ *и выполняется условие: для любого* $i \in \{1,\dots,n\}$ *имеем* $m_i \geqslant 1/(q_i - 1)$ *и* $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. *Пусть* $f \in L^{p_m/(p_m-1)}(\Omega)$. *Тогда существует* T*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$, *и это решение принадлежит множеству* V.

Следствие 3.1. *Пусть* $f \in L^n(\Omega)$. *Тогда существует* T*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$, *и это решение принадлежит множеству* V.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $m_i = 1/(q_i - 1)$. Тогда в силу второго из включений (3.1) и (3.4) выполняются условия предложения 3.12, из которого и выводим требуемый результат.

В предложении 3.12 и следствии 3.1, связанных с непосредственным применением стандартных результатов теории монотонных операторов, для утверждения о существовании T-решений вариационных неравенств требуются, как видим, довольно сильные предположения относительно регулярности функций $1/\nu_i$, $i = 1, \dots, n$, и f. Однако, как показывает следующая основная теорема, эти предположения могут быть заменены на минимально возможное условие относительно суммируемости функции f. Хотя при этом о существующих T-решениях, вообще говоря, нельзя сказать, что они обладают такой же регулярностью, как и решения, о которых идет речь в предложении 3.12 и следствии 3.1.

Теорема 3.1. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Тогда существует T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.*

Доказательство. Будем использовать подход, предложенный в [29] для изучения разрешимости невырожденных (по пространственным переменным) изотропных уравнений второго порядка с L^1-правыми частями. Доказательство проведем в несколько шагов.

Первый шаг. Для любого $l \in \mathbb{N}$ положим $f_l = T_l(f)$. Очевидно, что $\{f_l\} \subset L^\infty(\Omega)$,

$$\forall\, l \in \mathbb{N} \qquad \|f_l\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^1(\Omega)}, \tag{3.21}$$

$$\lim_{l \to \infty} \|f_l - f\|_{L^1(\Omega)} = 0. \tag{3.22}$$

Учитывая второе из включений (3.1), из предложения 3.11 выводим: если $l \in \mathbb{N}$, то существует функция $u_l \in V$ такая, что для любой функции $v \in V$ справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{A} u_l, u_l - v \rangle \leqslant \int_\Omega f_l (u_l - v)\, dx. \tag{3.23}$$

Зафиксируем произвольную функцию $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$. Далее через c_i, $i = 3, 4, \ldots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, q, c_1, c_2, $\|g_1\|_{L^1(\Omega)}$, $\|g_2\|_{L^1(\Omega)}$, $\|f\|_{L^1(\Omega)}$, $\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|\psi\|_{1,q,\nu}$ и $\|1/\nu_i\|_{L^{1/(q_i-1)}(\Omega)}$, $i = 1, ..., n$.

Покажем, что для любых $k \geqslant 1$ и $l \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\int_{\{|u_l|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i u_l|^{q_i} \right\} dx \leqslant c_3 k, \tag{3.24}$$

$$\operatorname{meas}\{|u_l| \geqslant k\} \leqslant c_4 k^{-\hat{q}}. \tag{3.25}$$

Действительно, пусть $k \geqslant 1$ и $l \in \mathbb{N}$. Положим $k_1 = k + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$. Вследствие условия (3.9) имеем $u_l - T_{k_1}(u_l - \psi) \in V$. Тогда в силу (3.23) и (3.21) получаем

$$\langle \mathcal{A} u_l, T_{k_1}(u_l - \psi) \rangle \leqslant \int_\Omega f_l \, T_{k_1}(u_l - \psi) \, dx \leqslant c_5 k. \tag{3.26}$$

Положим

$$I_l = \sum_{i=1}^n \int_{\{|u_l - \psi| < k_1\}} \nu_i |D_i u_l|^{q_i} dx,$$

$$J_l = \sum_{i=1}^n \int_{\{|u_l - \psi| < k_1\}} |a_i(x, \nabla u_l)| \, |D_i \psi| \, dx.$$

Используя (3.2) и (3.6), устанавливаем, что

$$\langle \mathcal{A} u_l, T_{k_1}(u_l - \psi) \rangle \geqslant c_2 I_l - J_l - \|g_2\|_{L^1(\Omega)}. \tag{3.27}$$

Кроме того, с помощью (3.5) и неравенства Юнга находим, что

$$J_l \leqslant \frac{c_2}{2} I_l + n 2^n (1 + c_1/c_2)^n (1 + \|\psi\|_{1,q,\nu})^n + \|g_1\|_{L^1(\Omega)}.$$

Из этого неравенства и (3.26), (3.27) вытекает, что $I_l \leqslant c_3 k$. Отсюда, учитывая, что почти все точки множества $\{|u_l| < k\}$ принадлежат множеству $\{|u_l - \psi| < k_1\}$, получаем неравенство (3.24).

Далее, имеем $|T_k(u_l)| = k$ на $\{|u_l| \geqslant k\}$ и, следовательно,

$$k^{n/(n-1)}\mathrm{meas}\{|u_l| \geqslant k\} \leqslant \int_\Omega |T_k(u_l)|^{n/(n-1)} dx. \tag{3.28}$$

Используя предложение 3.8, (3.2) и (3.24), получаем

$$\bigg(\int_\Omega |T_k(u_l)|^{n/(n-1)} dx\bigg)^{(n-1)/n} \leqslant c_0 \prod_{i=1}^n \bigg(\int_{\{|u_l|<k\}} \nu_i |D_i u_l|^{q_i} dx\bigg)^{1/nq_i} \leqslant c_0 (c_3 k)^{1/\overline{q}}.$$

Отсюда и из (3.28) вытекает неравенство (3.25).

Покажем теперь, что для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $k \geqslant 1$ и $l \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\mathrm{meas}\,\{\nu_i^{1/q_i} |D_i u_l| \geqslant k\} \leqslant c_6 k^{-q_i \hat{q}/(1+\hat{q})}. \tag{3.29}$$

Действительно, пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$, $k \geqslant 1$ и $l \in \mathbb{N}$. Положим

$$k_* = k^{q_i/(1+\hat{q})}, \quad G = \{|u_l| < k_*,\, \nu_i^{1/q_i}\, |D_i u_l| \geqslant k\}.$$

Имеем

$$\mathrm{meas}\,\{\nu_i^{1/q_i}\, |D_i u_l| \geqslant k\} \leqslant \mathrm{meas}\,\{|u_l| \geqslant k_*\} + \mathrm{meas}\, G. \tag{3.30}$$

В силу (3.25)

$$\mathrm{meas}\,\{|u_l| \geqslant k_*\} \leqslant c_4 k_*^{-\hat{q}}. \tag{3.31}$$

Кроме того, в силу определения множества G и (3.24) имеем

$$k^{q_i}\mathrm{meas}\, G \leqslant \int_{\{|u_l|<k_*\}} \nu_i\, |D_i u_l|^{q_i}\, dx \leqslant c_3 k_*.$$

Отсюда и из (3.30), (3.31) вытекает неравенство (3.29).

Второй шаг. Вследствие (3.2) и (3.24) для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{T_k(u_l)\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда ввиду рефлексивности пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ существуют возрастающая последовательность $\{l_h\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{z_k\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $T_k(u_{l_h}) \to z_k$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Учитывая это, без ограничения общности можем считать, что

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad T_k(u_l) \to z_k \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega). \tag{3.32}$$

Третий шаг. Покажем, что последовательность $\{u_l\}$ фундаментальна по мере.

Действительно, зафиксируем $t > 0$, и пусть $k \geqslant 1$, $l, j \in \mathbb{N}$. Положим $G' = \{|u_l| < k,\ |u_j| < k,\ |u_l - u_j| \geqslant t\}$. Имеем

$$\operatorname{meas}\{|u_l - u_j| \geqslant t\} \leqslant \operatorname{meas}\{|u_l| \geqslant k\} + \operatorname{meas}\{|u_j| \geqslant k\} + \operatorname{meas} G'. \tag{3.33}$$

Поскольку $t \leqslant |T_k(u_l) - T_k(u_j)|$ на G', имеем

$$t \operatorname{meas} G' \leqslant \int_\Omega |T_k(u_l) - T_k(u_j)|\, dx.$$

Отсюда и из (3.25) и (3.33) вытекает, что для любых $k \geqslant 1$ и $l, j \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{meas}\{|u_l - u_j| \geqslant t\} \leqslant 2c_4 k^{-\hat{q}} + t^{-1} \int_\Omega |T_k(u_l) - T_k(u_j)|\, dx. \tag{3.34}$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$2c_4 k^{-\hat{q}} \leqslant \varepsilon/2. \tag{3.35}$$

Ввиду (3.32) и утверждения (ii) предложения 3.1 имеем $T_k(u_l) \to z_k$ сильно в $L^1(\Omega)$ и, следовательно, существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $l, j \in \mathbb{N}$, $l, j \geqslant N$, справедливо неравенство

$$\int_\Omega |T_k(u_l) - T_k(u_j)|\, dx \leqslant \varepsilon t/2.$$

Отсюда и из (3.34) и (3.35) выводим, что для любых $l, j \in \mathbb{N}$, $l, j \geqslant N$, $\operatorname{meas}\{|u_l - u_j| \geqslant t\} \leqslant \varepsilon$. Значит, последовательность $\{u_l\}$ фундаментальна по мере.

Четвертый шаг. Покажем, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ последовательность $\{\nu_i^{1/q_i} D_i u_l\}$ фундаментальна по мере.

Для любых $t > 0$ и $l, j \in \mathbb{N}$ положим

$$N_t(l,j) = \operatorname{meas}\Big\{\sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}\,|D_i u_l - D_i u_j| \geqslant t\Big\}.$$

Кроме того, для любых $t > 0$, $h, k \geqslant 1$ и $l, j \in \mathbb{N}$ положим

$$E_{t,h,k}(l,j) = \Big\{\sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}\,|D_i u_l - D_i u_j| \geqslant t,\ \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}\,|D_i u_l| \leqslant h,$$
$$\sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}\,|D_i u_j| \leqslant h,\ \ |u_l - u_j| < 1/k\Big\}.$$

Используя (3.29), находим, что для любых $t > 0$, $h \geqslant n$, $k \geqslant 1$ и $l, j \in \mathbb{N}$

$$N_t(l,j) \leqslant 2c_6 n^{n+1} h^{-q-\hat{q}/(1+\hat{q})} + \operatorname{meas}\{|u_l - u_j| \geqslant 1/k\} + \operatorname{meas} E_{t,h,k}(l,j). \quad (3.36)$$

Теперь получим одну оценку для некоторых интегралов, связанных с множествами $E_{t,h,k}(l,j)$. Для этого введем ряд вспомогательных функций и множеств.

Пусть для произвольного $x \in \Omega$ Φ_x – функция на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой пары $(\xi, \xi') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\Phi_x(\xi, \xi') = \sum_{i=1}^n [a_i(x,\xi) - a_i(x,\xi')]\,(\xi_i - \xi'_i).$$

Поскольку a_i, $i = 1, \ldots, n$, – функции Каратеодори и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство (3.7), существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что:

(i) для любого $x \in \Omega \backslash E$ функция Φ_x непрерывна на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;

(ii) для любых $x \in \Omega \backslash E$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, имеем $\Phi_x(\xi, \xi') > 0$.

Положим для любых $t > 0$, $h > t$ и $x \in \Omega$

$$G_{t,h}(x) = \Big\{(\xi, \xi') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}(x)|\xi_i| \leqslant h,$$
$$\sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}(x)|\xi'_i| \leqslant h,\ \sum_{i=1}^n \nu_i^{1/q_i}(x)|\xi_i - \xi'_i| \geqslant t\Big\}.$$

Поскольку $\nu_i > 0$ п.в. на Ω, $i = 1, \ldots, n$, существует множество $\tilde{E} \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любых $t > 0$, $h > t$ и $x \in \Omega \setminus \tilde{E}$ множество $G_{t,h}(x)$ непустое.

Пусть для любых $t > 0$ и $h > t$ $\mu_{t,h}$ – функция на Ω такая, что

$$\mu_{t,h}(x) = \begin{cases} \min\limits_{G_{t,h}(x)} \Phi_x, & \text{если } x \in \Omega \setminus (E \cup \tilde{E}), \\ 0, & \text{если } x \in E \cup \tilde{E}. \end{cases}$$

Для любых $t > 0$ и $h > t$ имеем $\mu_{t,h} > 0$ п.в. на Ω и $\mu_{t,h} \in L^1(\Omega)$.

Пусть $t > 0$, $h \geqslant t + 1$, $k \geqslant 1$ и $l, j \in \mathbb{N}$. Зафиксируем произвольную точку $x \in E_{t,h,k}(l,j) \setminus (E \cup \tilde{E})$ и положим $\xi = \nabla u_l(x)$, $\xi' = \nabla u_j(x)$. Имеем $(\xi, \xi') \in G_{t,h}(x)$ и, следовательно, $\mu_{t,h}(x) \leqslant \Phi_x(\xi, \xi')$. Отсюда и из определения функции Φ_x вытекает, что

$$\mu_{t,h}(x) \leqslant \sum_{i=1}^n \left[a_i(x, \nabla u_l(x)) - a_i(x, \nabla u_j(x))\right](D_i u_l(x) - D_i u_j(x)).$$

Тогда, учитывая (3.7) и (3.2), получаем

$$\int_{E_{t,h,k}(l,j)} \mu_{t,h}\, dx \leqslant \langle \mathcal{A} u_l, T_{1/k}(u_l - u_j)\rangle - \langle \mathcal{A} u_j, T_{1/k}(u_l - u_j)\rangle. \tag{3.37}$$

Поскольку $u_l, u_j \in V$, в силу (3.9) имеем

$$u_l - T_{1/k}(u_l - u_j) \in V, \quad u_j - T_{1/k}(u_j - u_l) \in V.$$

Отсюда и из (3.23) следует, что

$$\langle \mathcal{A} u_l, T_{1/k}(u_l - u_j)\rangle \leqslant \int_\Omega f_l T_{1/k}(u_l - u_j)\, dx, \tag{3.38}$$

$$\langle \mathcal{A}u_j, T_{1/k}(u_j - u_l)\rangle \leqslant \int_\Omega f_j T_{1/k}(u_j - u_l)\, dx. \tag{3.39}$$

Из (3.37)–(3.39) выводим, что для любых $t > 0$, $h \geqslant t + 1$, $k \geqslant 1$ и $l, j \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\int_{E_{t,h,k}(l,j)} \mu_{t,h}\, dx \leqslant \frac{1}{k} \int_\Omega |f_l - f_j|\, dx. \tag{3.40}$$

Далее, поскольку последовательность $\{u_l\}$ фундаментальна по мере, существует возрастающая последовательность $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что для любых $k \in \mathbb{N}$ и $l, j \in \mathbb{N}$, $l, j \geqslant n_k$, имеем

$$\operatorname{meas}\{|u_l - u_j| \geqslant 1/k\} \leqslant 1/k. \tag{3.41}$$

Пусть теперь $t > 0$ и $\varepsilon > 0$. Зафиксируем $h \geqslant t + n$ такое, что

$$2c_6 n^{n+1} h^{-q-\hat{q}/(1+\hat{q})} \leqslant \varepsilon/4. \tag{3.42}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\alpha_k = \sup_{l,j \geqslant n_k} \operatorname{meas} E_{t,h,k}(l,j).$$

Покажем, что $\alpha_k \to 0$. Предположим, что это не так. Тогда существуют $\tau > 0$, возрастающая последовательность $\{k_s\} \subset \mathbb{N}$ и последовательности $\{l_s\}, \{j_s\} \subset \mathbb{N}$ такие, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $l_s, j_s \geqslant n_{k_s}$ и

$$\operatorname{meas} E_{t,h,k_s}(l_s, j_s) \geqslant \tau. \tag{3.43}$$

Положим для любого $s \in \mathbb{N}$ $\quad G_s = E_{t,h,k_s}(l_s, j_s)$. В силу (3.40) и (3.21) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{G_s} \mu_{t,h}\, dx \leqslant \frac{2}{k_s} \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

и, следовательно,

$$\lim_{s\to\infty} \int_{G_s} \mu_{t,h}\, dx = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\mu_{t,h} \in L^1(\Omega)$ и $\mu_{t,h} > 0$ п.в. на Ω, выводим, что $\operatorname{meas} G_s \to 0$. Но это противоречит (3.43). Полученное противоречие доказывает, что $\alpha_k \to 0$.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ такое, что выполняются неравенства

$$1/k \leqslant \varepsilon/4, \qquad \alpha_k \leqslant \varepsilon/2, \tag{3.44}$$

и пусть $l, j \in \mathbb{N}$, $l, j \geqslant n_k$. Тогда из (3.36), (3.41), (3.42) и (3.44) вытекает, что $N_t(l, j) \leqslant \varepsilon$.

Полученный результат позволяет сделать вывод о том, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ последовательность $\{\nu_i^{1/q_i} D_i u_l\}$ фундаментальна по мере.

Отметим, что на проведенном шаге доказательства теоремы использовались некоторые идеи из [6, § 7].

Пятый шаг. В силу результатов, полученных на третьем и четвертом шагах доказательства, и теоремы Ф.Рисса существуют измеримые функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и $v^{(i)} : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что последовательность $\{u_l\}$ сходится к u по мере и для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ последовательность $\{\nu_i^{1/q_i} D_i u_l\}$ сходится к $v^{(i)}$ по мере. Тогда, как известно, из рассматриваемых последовательностей можно извлечь подпоследовательности, сходящиеся к соответствующим функциям почти всюду на Ω. Учитывая это, без ограничения общности можем считать, что

$$u_l \to u \ \text{ п.в. на } \Omega, \tag{3.45}$$

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \quad \nu_i^{1/q_i} D_i u_l \to v^{(i)} \ \text{ п.в. на } \Omega. \tag{3.46}$$

Из (3.45), (3.32) и утверждения (ii) предложения 3.1 вытекает, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega), \tag{3.47}$$

$$T_k(u_l) \to T_k(u) \ \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega). \tag{3.48}$$

Покажем, что $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Действительно, пусть $k > 0$. Возьмем $h \in \mathbb{N}$ такое, что $h > k$. В силу (3.47) имеем $T_h(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда ввиду (3.3) $T_k(T_h(u)) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Отсюда и из равенства $T_k(u) = T_k(T_h(u))$ следует, что $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и, значит, $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Шестой шаг. Покажем, что

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \qquad D_i u_l \to \delta_i u \ \text{ п.в. на } \Omega. \tag{3.49}$$

Действительно, пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$. В силу (3.45) существует множество $E' \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall\, x \in \Omega \backslash E' \qquad u_l(x) \to u(x), \tag{3.50}$$

а в силу (3.46) существует множество $E'' \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall\, x \in \Omega \backslash E'' \qquad \nu_i^{1/q_i}(x) D_i u_l(x) \to v^{(i)}(x). \tag{3.51}$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Вследствие (3.2) имеем: если $l \in \mathbb{N}$, то существует множество $E^{(l)} \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall\, x \in \{|u_l| < k\} \backslash E^{(l)} \qquad D_i T_k(u_l)(x) = D_i u_l(x). \tag{3.52}$$

Обозначим через $\widehat{E}$ объединение множеств E', E'' и $E^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\operatorname{meas} \widehat{E} = 0$. Пусть $x \in \{|u| < k\} \backslash \widehat{E}$. В силу (3.50) существует $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_0$, имеем $|u_l(x)| < k$. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_0$. Тогда $x \in \{|u_l| < k\} \backslash E^{(l)}$ и согласно (3.52) имеем

$$\nu_i^{1/q_i}(x) D_i T_k(u_l)(x) = \nu_i^{1/q_i}(x) D_i u_l(x).$$

Отсюда и из (3.51) выводим, что $\nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l)(x) \to v^{(i)}(x)$ и, следовательно,

$$\nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l) \to v^{(i)} \qquad \text{п.в. на} \quad \{|u| < k\}. \tag{3.53}$$

Кроме того, в силу (3.2) и (3.24) для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_\Omega \nu_i |D_i T_k(u_l)|^{q_i}\, dx \leqslant c_3 k. \tag{3.54}$$

Используя лемму Фату, из (3.53) и (3.54) выводим, что функция $|v^{(i)}|^{q_i}$ суммируема на множестве $\{|u| < k\}$.

Далее, пусть φ – измеримая функция на Ω такая, что $|\varphi| \leqslant 1$ на Ω, и пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $|v^{(i)}|$ суммируема на множестве

$\{|u| < k\}$, существует $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \{|u| < k\}$, $\operatorname{meas} G \leqslant \varepsilon_1$, имеем

$$\int_G |v^{(i)}|\, dx \leqslant \varepsilon. \tag{3.55}$$

Кроме того, в силу (3.53) и теоремы Егорова существует измеримое множество $\Omega' \subset \{|u| < k\}$ такое, что

$$\operatorname{meas}\left(\{|u| < k\} \backslash \Omega'\right) \leqslant \varepsilon_1, \tag{3.56}$$

$$\nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l) \to v^{(i)} \ \text{ равномерно на } \ \Omega'. \tag{3.57}$$

Из (3.55) и (3.56) вытекает, что

$$\int_{\{|u|<k\}\backslash\Omega'} |v^{(i)}|\, dx \leqslant \varepsilon, \tag{3.58}$$

а вследствие (3.57) существует $l_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_1$, имеем

$$\int_{\Omega'} |\nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l) - v^{(i)}|\, dx \leqslant \varepsilon. \tag{3.59}$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_1$. Используя (3.58), (3.59), неравенство Гельдера, а также неравенства (3.56) и (3.54), получаем

$$\left| \int_{\{|u|<k\}} [\, \nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l) - v^{(i)}]\, \varphi\, dx \right| \leqslant 2\varepsilon + \int_{\{|u|<k\}\backslash\Omega'} \nu_i^{1/q_i} |D_i T_k(u_l)|\, dx$$

$$\leqslant 2\varepsilon + \varepsilon^{(q_i-1)/q_i} \left(\int_\Omega \nu_i |D_i T_k(u_l)|^{q_i} dx \right)^{1/q_i} \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon^{(q_i-1)/q_i} (c_3 k)^{1/q_i}.$$

Отсюда в силу произвольности ε вытекает, что

$$\lim_{l\to\infty} \int_{\{|u|<k\}} [\, \nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l) - v^{(i)}]\, \varphi\, dx = 0. \tag{3.60}$$

С другой стороны, пусть F – функционал на $\mathring{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ такой, что для любой функции $v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$

$$\langle F, v \rangle = \int_{\{|u|<k\}} \nu_i^{1/q_i} D_i v \cdot \varphi\, dx.$$

Легко видеть, что $F \in (\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega))^*$. Тогда ввиду (3.48) имеем

$$\langle F, T_k(u_l)\rangle \to \langle F, T_k(u)\rangle.$$

Отсюда и из определения функционала F следует, что

$$\lim_{l\to\infty}\int_{\{|u|<k\}} \nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u_l)\cdot\varphi\,dx = \int_{\{|u|<k\}} \nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u)\cdot\varphi\,dx. \tag{3.61}$$

Из (3.60) и (3.61) выводим, что

$$\int_{\{|u|<k\}} [\, v^{(i)} - \nu_i^{1/q_i} D_i T_k(u)]\,\varphi\,dx = 0.$$

В свою очередь, из этого равенства и предложения 3.4 вытекает, что

$$v^{(i)} = \nu_i^{1/q_i}\delta_i u \quad \text{п.в. на} \quad \{|u|<k\}.$$

Отсюда в силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ следует, что

$$v^{(i)} = \nu_i^{1/q_i}\delta_i u \quad \text{п.в. на } \Omega. \tag{3.62}$$

Из (3.46) и (3.62), учитывая, что $\nu_i > 0$ п.в. на Ω, получаем, что $D_i u_l \to \delta_i u$ п.в. на Ω. Тем самым утверждение (3.49) доказано.

В силу (3.49) и того, что a_i, $i = 1, \dots, n$, – функции Каратеодори, имеем

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\} \qquad a_i(x, \nabla u_l) \to a_i(x, \delta u) \quad \text{п.в. на} \quad \Omega. \tag{3.63}$$

Седьмой шаг. Покажем, что для любых $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geqslant 1$ имеет место включение

$$v - T_k(v-u) \in V. \tag{3.64}$$

Действительно, пусть $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geqslant 1$. Для любого $l \in \mathbb{N}$ положим $v_l = v - T_k(v - u_l)$. В силу условия (3.9) имеем

$$\{v_l\} \subset V. \tag{3.65}$$

Кроме того, ввиду (3.45)

$$v_l \to v - T_k(v-u) \ \text{ сильно в } \ L^1(\Omega). \tag{3.66}$$

Заметим также, что вследствие (3.2) и (3.24) последовательность $\{v_l\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Тогда в силу рефлексивности пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ существуют такие возрастающая последовательность $\{l_h\}\subset\mathbb{N}$ и функция $z\in\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, что $v_{l_h}\to z$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Отсюда, из утверждения (ii) предложения 3.1 и (3.66) вытекает, что $z=v-T_k(v-u)$ п.в. на Ω. Следовательно, $v_{l_h}\to v-T_k(v-u)$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Отсюда, учитывая (3.65) и слабую замкнутость множества V, выводим (3.64).

Восьмой шаг. Пусть $v\in V\cap L^\infty(\Omega)$, $k\geqslant 1$ и $k_1=k+\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Покажем, что

$$\langle\mathcal{A}T_{k_1}(u),T_k(u-v)\rangle\leqslant\int_\Omega f\,T_k(u-v)\,dx. \tag{3.67}$$

Положим

$$H=\{|u-v|<k\},\quad H_0=\{|u-v|=k\},$$

и пусть для любого $l\in\mathbb{N}$

$$H_l=\{|u_l-v|<k\}\backslash H_0,\quad E_l=\{|u_l-v|<k\}\cap H_0.$$

Прежде всего докажем, что для любой функции $\varphi\in L^1(\Omega)$

$$\int_{H_l}\varphi\,dx\to\int_H\varphi\,dx. \tag{3.68}$$

Действительно, пусть $\varphi\in L^1(\Omega)$. Для любого $j\in\mathbb{N}$ положим

$$H^{(j)}=\{|u-v|<k-1/j\},\quad \widetilde{H}^{(j)}=\{|u-v|>k+1/j\}.$$

Имеем

$$\operatorname{meas}(H\backslash H^{(j)})\to 0,\qquad \operatorname{meas}(\{|u-v|>k\}\backslash\widetilde{H}^{(j)})\to 0. \tag{3.69}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега и (3.69) существует $j\in\mathbb{N}$ такое, что

$$\int_{H\backslash H^{(j)}}|\varphi|\,dx\leqslant\varepsilon/4,\qquad\int_{\{|u-v|>k\}\backslash\widetilde{H}^{(j)}}|\varphi|\,dx\leqslant\varepsilon/4. \tag{3.70}$$

Кроме того, вследствие абсолютной непрерывности интеграла Лебега, (3.45) и теоремы Егорова существует измеримое множество $\Omega' \subset \Omega$ такое, что

$$\int_{\Omega\setminus\Omega'} |\varphi|\, dx \leqslant \varepsilon/4, \tag{3.71}$$

$$u_l \to u \ \text{ равномерно на } \ \Omega'. \tag{3.72}$$

Ввиду (3.72) найдется $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_0$, и $x \in \Omega'$ имеем

$$|u_l(x) - u(x)| < 1/j. \tag{3.73}$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_0$. Из (3.73) вытекает, что

$$(H^{(j)}\setminus H_l) \cap \Omega' = \varnothing, \qquad \{|u_l - v| < k\} \cap \widetilde{H}^{(j)} \cap \Omega' = \varnothing.$$

Тогда

$$H\setminus H_l \subset (H\setminus H^{(j)}) \cup (\Omega\setminus\Omega'), \quad H_l\setminus H \subset (\{|u - v| > k\}\setminus \widetilde{H}^{(j)}) \cup (\Omega\setminus\Omega').$$

Отсюда и из (3.70) и (3.71) выводим, что

$$\int_{H\setminus H_l} |\varphi|\, dx \leqslant \varepsilon/2, \qquad \int_{H_l\setminus H} |\varphi|\, dx \leqslant \varepsilon/2.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{H_l} \varphi\, dx - \int_H \varphi\, dx \right| \leqslant \varepsilon$$

и значит, имеет место (3.68).

Далее, положим

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_{k_1+1}(u))\, D_i v,$$

и пусть для любого $l \in \mathbb{N}$

$$\psi_l = \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u_l)\, D_i u_l + g_2,$$

$$S_l' = \int_{H_l} \left\{ \sum_{i=1}^n [\, a_i(x, \nabla u_l) - a_i(x, \nabla T_{k_1+1}(u))]\, D_i v \right\} dx,$$

$$S_l'' = \int_{E_l} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla v)\, [D_i u_l - D_i v] \right\} dx.$$

Зафиксируем произвольное $l \in \mathbb{N}$. В силу (3.9) $u_l - T_k(u_l - v) \in V$. Тогда вследствие (3.23) имеем

$$\langle \mathcal{A} u_l, T_k(u_l - v) \rangle \leqslant \int_\Omega f_l\, T_k(u_l - v)\, dx. \tag{3.74}$$

Используя (3.2) и (3.7), находим, что

$$\langle \mathcal{A} u_l, T_k(u_l - v) \rangle \geqslant \int_{H_l} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u_l)\, [D_i u_l - D_i v] \right\} dx + S_l''.$$

Отсюда и из (3.74) получаем

$$\int_{H_l} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u_l)\, D_i u_l \right\} dx \leqslant \int_{H_l} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u_l)\, D_i v \right\} dx \\ + \int_\Omega f_l\, T_k(u_l - v)\, dx - S_l''.$$

Следовательно, для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{H_l} \psi_l\, dx \leqslant \int_\Omega f_l\, T_k(u_l - v)\, dx + \int_{H_l} (\varphi_1 + g_2)\, dx + S_l' - S_l''. \tag{3.75}$$

Заметим, что ввиду (3.22) и (3.45)

$$f_l\, T_k(u_l - v) \to f\, T_k(u - v) \;\text{ сильно в }\; L^1(\Omega),$$

и поэтому

$$\int_\Omega f_l\, T_k(u_l - v)\, dx \to \int_\Omega f\, T_k(u - v)\, dx. \tag{3.76}$$

Поскольку $\varphi_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, в силу (3.68) имеем

$$\int_{H_l} (\varphi_1 + g_2)\, dx \to \int_H (\varphi_1 + g_2)\, dx. \tag{3.77}$$

Докажем, что

$$S_l' \to 0. \tag{3.78}$$

Действительно, пусть $\varepsilon \in (0,1)$. Вследствие абсолютной непрерывности интеграла Лебега, соотношений (3.45), (3.63) и теоремы Егорова существует измеримое множество $\Omega_1 \subset \Omega$ такое, что

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_1} \left\{ |\varphi_1| + \sum_{i=1}^{n} \nu_i \, |D_i v|^{q_i} \right\} dx \leqslant \varepsilon^n, \tag{3.79}$$

$$u_l \to u \ \text{ равномерно на } \ \Omega_1, \tag{3.80}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u_l) \, D_i v \to \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \delta u) \, D_i v \quad \text{равномерно на } \ \Omega_1. \tag{3.81}$$

Ввиду (3.80) найдется $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_0$, и $x \in \Omega_1$

$$|u_l(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{3.82}$$

Кроме того, в силу (3.81) существует $l_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_1$, имеем

$$\int_{\Omega_1} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u_l) \, D_i v - \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \delta u) \, D_i v \right| dx \leqslant \varepsilon. \tag{3.83}$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant \max(l_0, l_1)$. Поскольку $v \in L^\infty(\Omega)$, существует множество $\widehat{E} \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \Omega\setminus\widehat{E}$ имеем $|v(x)| \leqslant \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Отсюда и из (3.82) вытекает, что $(H_l \cap \Omega_1)\setminus\widehat{E} \subset \{|u| < k_1 + 1\}$. Используя это включение, а также предложение 3.4 и (3.83), получаем

$$\int_{H_l \cap \Omega_1} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u_l) \, D_i v - \varphi_1 \right| dx \leqslant \varepsilon.$$

В силу этого неравенства и (3.79) имеем

$$|S_l'| \leqslant 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \int_{H_l\setminus\Omega_1} |a_i(x, \nabla u_l)| \, |D_i v| \, dx. \tag{3.84}$$

Используя неравенство Гельдера, (3.5), включение $H_l\setminus\widehat{E} \subset \{|u_l| < k_1\}$ и неравенства (3.24), (3.79), устанавливаем, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\int_{H_l\setminus\Omega_1} |a_i(x, \nabla u_l)| \, |D_i v| \, dx \leqslant (c_1 c_3 k_1 + 1 + \|g_1\|_{L^1(\Omega)})\varepsilon.$$

Отсюда и из (3.84) вытекает, что

$$|S_l'| \leqslant 2\varepsilon + n(c_1c_3k_1 + 1 + \|g_1\|_{L^1(\Omega)})\varepsilon.$$

Следовательно, (3.78) справедливо.

Покажем теперь, что

$$S_l'' \to 0. \tag{3.85}$$

Достаточно считать, что $\operatorname{meas} H_0 > 0$. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$. Поскольку $u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $v \in \mathring{W}^{1,q}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, в силу предложения 3.5 справедливо включение $u - v \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда ввиду предложения 3.4

$$D_iT_k(u-v) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad H_0. \tag{3.86}$$

С другой стороны, для почти всех $x \in H_0$ имеем $|u(x)| < k_1 + 1$. Поэтому $T_k(u-v) = T_{k_1+1}(u) - v$ п.в. на H_0 и, следовательно,

$$D_iT_k(u-v) = D_iT_{k_1+1}(u) - D_iv \quad \text{п.в. на} \quad H_0.$$

Тогда, учитывая (3.86), получаем, что $D_iT_{k_1+1}(u) = D_iv$ п.в. на H_0. Отсюда и из предложения 3.4 вытекает, что $\delta_i u = D_iv$ п.в. на H_0. Полученный результат и (3.49) позволяют заключить, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$D_iu_l \to D_iv \quad \text{п.в. на} \quad H_0.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla v)\,[D_iu_l - D_iv] \to 0 \quad \text{п.в. на} \quad H_0. \tag{3.87}$$

Далее, положим

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^n |a_i(x, \nabla v)|\,|D_iv|, \qquad \varphi_3 = \sum_{i=1}^n (1/\nu_i)^{1/(q_i-1)}|a_i(x, \nabla v)|^{q_i/(q_i-1)}.$$

В силу (3.5) функции φ_2 и φ_3 суммируемы на Ω.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Вследствие абсолютной непрерывности интеграла Лебега, (3.87) и теоремы Егорова существует измеримое множество $\Omega_2 \subset H_0$ такое, что

$$\int_{H_0 \setminus \Omega_2} (\varphi_2 + \varphi_3)\, dx \leqslant \varepsilon, \tag{3.88}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla v)\, [D_i u_l - D_i v] \to 0 \quad \text{равномерно на} \quad \Omega_2.$$

Ввиду последнего свойства найдется $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_0$,

$$\int_{\Omega_2} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla v)\, [D_i u_l - D_i v] \right| dx \leqslant \varepsilon. \tag{3.89}$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_0$. Используя (3.88) и (3.89), находим, что

$$|S_l''| \leqslant 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \int_{E_l \setminus \Omega_2} |a_i(x, \nabla v)|\, |D_i u_l|\, dx. \tag{3.90}$$

С помощью неравенства Гельдера и соотношений (3.88), (3.24) получаем, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\int_{E_l \setminus \Omega_2} |a_i(x, \nabla v)|\, |D_i u_l|\, dx$$
$$\leqslant \left(\int_{E_l \setminus \Omega_2} \varphi_3\, dx \right)^{(q_i - 1)/q_i} \left(\int_{\{|u_l| < k_1\}} \nu_i |D_i u_l|^{q_i} dx \right)^{1/q_i}$$
$$\leqslant \varepsilon^{(q_i - 1)/q_i} (c_3 k_1)^{1/q_i}.$$

Отсюда и из (3.90), учитывая произвольность ε, выводим, что (3.85) справедливо.

Далее, пусть $\chi : \Omega \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция множества H, и пусть для любого $l \in \mathbb{N}$ $\chi_l : \Omega \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция множества H_l. Имеем

$$\varliminf_{l \to \infty} \chi_l \geqslant \chi \quad \text{п.в. на} \quad \Omega. \tag{3.91}$$

Действительно, в силу (3.45) существует множество $E_0 \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \Omega \setminus E_0$ $u_l(x) \to u(x)$. Пусть $x \in \Omega \setminus E_0$. Если $x \notin H$, то $\chi(x) = 0$ и тогда $\chi(x) \leqslant \chi_l(x)$ для любого $l \in \mathbb{N}$. Пусть

$x \in H$. Поскольку $u_l(x) \to u(x)$, найдется $l_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_1$, имеем $|u_l(x) - u(x)| < k - |u(x) - v(x)|$. Тогда, взяв произвольное $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant l_1$, получаем $|u_l(x) - v(x)| < k$ и, следовательно, $x \in H_l$. Поэтому $\chi_l(x) = 1 = \chi(x)$. Теперь можно заключить, что в любом случае $\chi(x) \leqslant \varliminf\limits_{l\to\infty} \chi_l(x)$, а значит, (3.91) справедливо.

Из (3.91), (3.49), (3.63) и (3.6) вытекает, что

$$\varliminf_{l\to\infty} (\psi_l \chi_l) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x, \delta u)\delta_i u + g_2 \right) \chi \quad \text{п.в. на} \quad \Omega. \tag{3.92}$$

Используя (3.6), (3.75)–(3.78), (3.85), лемму Фату и (3.92), устанавливаем, что функция $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x, \delta u)\delta_i u + g_2 \right) \chi$ суммируема на Ω и

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \delta u)\delta_i u + g_2 \right\} \chi \, dx \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u - v)\, dx + \int_H (\varphi_1 + g_2)\, dx.$$

Отсюда, учитывая предложения 3.4 и 3.5, выводим неравенство (3.67).

Таким образом, установлено, что $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и справедливы свойства (i) и (ii) определения 3.3. Значит, u – T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Теорема доказана.

3.4. Единственность T-решения вариационного неравенства

Дадим сначала два вспомогательных результата, которые будут использованы в доказательстве теоремы о единственности T-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$ с $f \in L^1(\Omega)$.

Лемма 3.1. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$, и пусть u – T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда существуют неотрицательные числа M_1 и M_2 такие, что для любого $k \geqslant 1$ справедливы неравенства*

$$\int_{\{|u|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} \right\} dx \leqslant M_1 k, \tag{3.93}$$

$$\operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant M_2 k^{-\hat{q}}. \tag{3.94}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и положим

$$M_1 = \frac{2}{c_2}\biggl\{\|g_1\|_{L^1(\Omega)} + \|g_2\|_{L^1(\Omega)} + 2^n\Bigl(\frac{c_1}{c_2}+1\Bigr)^n \int_\Omega \Bigl(\sum_{i=1}^n \nu_i |D_i\psi|^{q_i}\Bigr)\,dx$$
$$+(1+\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)})\|f\|_{L^1(\Omega)}\biggr\},$$

$$M_2 = \bigl(c_0 M_1^{1/\bar{q}}\bigr)^{n/(n-1)}.$$

Пусть $k \geqslant 1$. Положим $k_1 = k + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$, $k_2 = k_1 + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$,

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{\{|u-\psi|<k_1\}} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} dx, \qquad J = \sum_{i=1}^n \int_{\{|u-\psi|<k_1\}} |a_i(x,\delta u)|\,|D_i\psi|\,dx.$$

В силу свойства (ii) из определения 3.3 имеем

$$\langle \mathcal{A} T_{k_2}(u),\, T_{k_1}(u-\psi)\rangle \leqslant \int_\Omega f\, T_{k_1}(u-\psi)\,dx.$$

Отсюда, учитывая предложения 3.4 и 3.5 и используя (3.6), получаем, что

$$c_2 I \leqslant k_1 \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g_2\|_{L^1(\Omega)} + J.$$

В свою очередь, используя неравенство Юнга и (3.5), находим, что

$$J \leqslant \frac{c_2}{2}\, I + \frac{1}{2}\,\|g_1\|_{L^1(\Omega)} + 2^{n-1}\Bigl(1+\frac{c_1}{c_2}\Bigr)^n \int_\Omega \Bigl(\sum_{i=1}^n \nu_i |D_i\psi|^{q_i}\Bigr)\,dx.$$

Из последних двух оценок выводим неравенство

$$I \leqslant M_1 k. \tag{3.95}$$

Далее, поскольку $|T_k(u)| = k$ на $\{|u| \geqslant k\}$, имеем

$$k^{n/(n-1)} \operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant \int_\Omega |T_k(u)|^{n/(n-1)}\,dx, \tag{3.96}$$

а так как $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, то в силу предложений 3.8 и 3.4 и неравенства (3.95) получаем

$$\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{n/(n-1)}dx\right)^{(n-1)/n} \leqslant c_0\prod_{i=1}^n\left(\int_\Omega \nu_i\,|D_iT_k(u)|^{q_i}dx\right)^{1/nq_i}$$

$$= c_0\prod_{i=1}^n\left(\int_{\{|u|<k\}} \nu_i\,|\delta_i u|^{q_i}dx\right)^{1/nq_i} \leqslant c_0\prod_{i=1}^n\left(\int_{\{|u-\psi|<k_1\}} \nu_i\,|\delta_i u|^{q_i}dx\right)^{1/nq_i}$$

$$\leqslant c_0 I^{1/\bar q} \leqslant c_0(M_1k)^{1/\bar q}.$$

Отсюда и из (3.96) выводим неравенство (3.94). Кроме того, учитывая, как и выше, что почти все точки множества $\{|u|<k\}$ содержатся во множестве $\{|u-\psi|<k_1\}$, из (3.95) получаем неравенство (3.93). Тем самым лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$, u – T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A},V,f)$, и пусть $\psi\in V\cap L^\infty(\Omega)$, $k\geqslant 1$ и $h\geqslant 1$. Тогда*

$$\int_{\{h\leqslant|u-\psi|<h+k\}}\left\{\sum_{i=1}^n \nu_i|\delta_i u|^{q_i}\right\}dx \leqslant \frac{2k}{c_2}\int_{\{|u-\psi|\geqslant h\}}|f|\,dx$$

$$+\frac{2^n}{c_1}\left(1+\frac{c_1}{c_2}\right)^n\int_{\{h\leqslant|u-\psi|<h+k\}}\left\{\sum_{i=1}^n \nu_i|D_i\psi|^{q_i}+g_1+g_2\right\}dx. \tag{3.97}$$

Доказательство. Положим

$$v=\psi-T_h(\psi-u),\qquad k_1=k+\|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Из определения 3.3 и предложения 3.4 следует, что

$$\int_{\{|u-v|<k\}}\left\{\sum_{i=1}^n a_i(x,\nabla\, T_{k_1}(u))\,D_iT_k(u-v)\right\}dx\leqslant k\int_{\{|u-\psi|\geqslant h\}}|f|\,dx. \tag{3.98}$$

Положим

$$G_1=\{h\leqslant|u-\psi|<h+k\},\qquad G_2=\{|u-\psi|<h\}.$$

Заметим, что

$$\{|u-v|<k\} = G_1 \cup G_2, \qquad G_1 \cap G_2 = \varnothing. \tag{3.99}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&T_k(u-v) = T_{k_1}(u) - \psi - T_h(u-\psi) \quad \text{п.в. на } \ G_1,\\
&T_k(u-v) = 0 \quad \text{на } \ G_2.
\end{aligned}$$

Следовательно, для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned}
&D_i\, T_k(u-v) = D_i\, T_{k_1}(u) - D_i\psi \quad \text{п.в. на } \ G_1,\\
&D_i\, T_k(u-v) = 0 \quad \text{п.в. на } \ G_2.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.98) и (3.99) вытекает, что

$$\begin{aligned}
&\int_{G_1} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla\, T_{k_1}(u))\, D_i\, T_{k_1}(u) \Big\}\, dx\\
&\qquad \leqslant \int_{G_1} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla\, T_{k_1}(u))\, D_i\psi \Big\}\, dx + k \int_{\{|u-\psi|\geqslant h\}} |f|\, dx.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Обозначим через I_1 интеграл в левой части неравенства (3.100), а через I_2 – первый интеграл в правой части неравенства (3.100). В силу (3.6) имеем

$$I_1 \geqslant c_2 \int_{G_1} \Big\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i\, T_{k_1}(u)|^{q_i} \Big\}\, dx - \int_{G_1} g_2\, dx.$$

Отсюда и из (3.100) следует неравенство

$$c_2 \int_{G_1} \Big\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i\, T_{k_1}(u)|^{q_i} \Big\}\, dx \leqslant k \int_{\{|u-\psi|\geqslant h\}} |f|\, dx + \int_{G_1} g_2\, dx + I_2. \tag{3.101}$$

Используя (3.5) и неравенство Юнга, находим, что

$$\begin{aligned}
I_2 \leqslant \frac{c_2}{2} &\int_{G_1} \Big\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i\, T_{k_1}(u)|^{q_i} \Big\}\, dx + \int_{G_1} g_1\, dx\\
&+ 2^{n-1} \Big(\frac{c_1}{c_2} + 1\Big)^{n-1} \int_{G_1} \Big\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i\psi|^{q_i} \Big\}\, dx.
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Заметим, что в силу предложения 3.4 для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $D_i T_{k_1}(u) = \delta_i u$ п.в. на G_1. Учитывая это, из (3.101) и (3.102) выводим неравенство (3.97). Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$, и пусть u_1, u_2 – T-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u_1 = u_2$ п.в. на Ω.*

Доказательство. Через $c_i,\ i = 3, 4, \dots,$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, c_1 и c_2.

Зафиксируем произвольную функцию $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и положим

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \nu_i |D_i \psi|^{q_i} + g_1 + g_2 + |f|.$$

Из леммы 3.2 следует, что если $k \geqslant 1$ и $h \geqslant k+1$, то

$$\int_{\{h-k \leqslant |u_j - \psi| < h+k\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nu_i |\delta_i u_j|^{q_i} \right\} dx \leqslant c_3\, k \int_{\{|u_j - \psi| \geqslant h-k\}} \Phi\, dx, \quad j = 1, 2. \tag{3.103}$$

Зафиксируем произвольные $k \geqslant 1$ и $h \geqslant k+1$. Положим

$$\begin{aligned} G\ &= \{|u_1 - u_2| < k,\ |u_1 - \psi| < h,\ |u_2 - \psi| < h\}, \\ G_1 &= \{|u_1 - \psi| < h,\ |u_2 - \psi| < h\}, \\ G_2 &= \{|u_1 - \psi| \geqslant h\} \cup \{|u_2 - \psi| \geqslant h\}, \\ v\ &= \psi - T_h(\psi - u_2), \quad l = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

В силу определения 3.3 имеем

$$\langle \mathcal{A} T_l(u_1),\ T_k(u_1 - v) \rangle \leqslant \int_{G_1} f\, T_k(u_1 - u_2)\, dx + k \int_{G_2} |f|\, dx. \tag{3.104}$$

Оценим снизу левую часть этого неравенства. Введем множества

$$\begin{aligned} E' &= \{|u_1 - v| < k,\ |u_2 - \psi| < h\}, \\ E'' &= \{|u_1 - v| < k,\ |u_2 - \psi| \geqslant h\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$G \subset E'. \tag{3.105}$$

Кроме того, имеем

$$E' \setminus G \subset \{h \leqslant |u_1 - \psi| < h + k\} \cap \{h - k \leqslant |u_2 - \psi| < h\}, \tag{3.106}$$

$$E'' \subset \{h - k \leqslant |u_1 - \psi| < h + k\}. \tag{3.107}$$

Действительно, пусть $x \in E' \setminus G$. Тогда

$$|u_1(x) - u_2(x)| < k, \quad |u_2(x) - \psi(x)| < h, \quad |u_1(x) - \psi(x)| \geqslant h.$$

Следовательно,

$$h \leqslant |u_1(x) - \psi(x)| \leqslant |u_1(x) - u_2(x)| + |u_2(x) - \psi(x)|$$

$$< k + |u_2(x) - \psi(x)| < h + k.$$

Отсюда вытекает, что включение (3.106) справедливо. Пусть теперь $x \in E''$. Значит,

$$|u_1(x) - v(x)| < k, \quad |u_2(x) - \psi(x)| \geqslant h. \tag{3.108}$$

В силу второго из этих неравенств и определения функции v имеем $v(x) = \psi(x) - h \operatorname{sign}(\psi(x) - u_2(x))$. Тогда, учитывая первое из неравенств (3.108), получаем

$$|u_1(x) - \psi(x)| \leqslant |u_1(x) - v(x)| + |v(x) - \psi(x)| < h + k,$$

$$h = |\psi(x) - v(x)| \leqslant |u_1(x) - \psi(x)| + |u_1(x) - v(x)| < |u_1(x) - \psi(x)| + k.$$

Следовательно, включение (3.107) справедливо.

Далее, поскольку

$$T_k(u_1 - v) = T_l(u_1) - T_l(u_2) \quad \text{п.в. на} \quad E',$$

для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем

$$D_i T_k(u_1 - v) = D_i T_l(u_1) - D_i T_l(u_2) \quad \text{п.в. на} \quad E'. \tag{3.109}$$

Аналогично,

$$T_k(u_1 - v) = T_l(u_1) - \psi - T_h(u_2 - \psi) \quad \text{п.в. на} \ \ E'',$$

и следовательно, для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$D_i\, T_k(u_1 - v) = D_i\, T_l(u_1) - D_i\psi \quad \text{п.в. на} \ \ E''. \tag{3.110}$$

Учитывая (3.109) и (3.110), получаем

$$\langle \mathcal{A}T_l(u_1),\ T_k(u_1 - v)\rangle = \int_{E'} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla\, T_l(u_1))\, [D_i\, T_l(u_1) - D_i T_l(u_2)] \right\} dx$$
$$+ \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla\, T_l(u_1))\, [D_i\, T_l(u_1) - D_i\psi] \right\} dx.$$

Отсюда, используя (3.105) и (3.6), выводим, что

$$\langle \mathcal{A}\, T_l(u_1),\ T_k(u_1 - v)\rangle \geqslant \int_{G} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla\, T_l(u_1))\, [D_i\, T_l(u_1) - D_i T_l(u_2)] \right\} dx$$
$$- \int_{(E'\setminus G)\cup E''} g_2\, dx - \int_{E'\setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_i(x, \nabla\, T_l(u_1))|\, |D_i\, T_l(u_2)| \right\} dx$$
$$- \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_i(x, \nabla\, T_l(u_1))|\, |D_i\, \psi| \right\} dx. \tag{3.111}$$

Обозначим через I' и I'' соответственно третий и четвертый интегралы в правой части неравенства (3.111). Используя неравенство Юнга и (3.5), получаем

$$I' \leqslant c_1 \int_{E'\setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nu_i\, |D_i\, T_l(u_1)|^{q_i} \right\} dx$$
$$+ \int_{E'\setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nu_i\, |D_i\, T_l(u_2)|^{q_i} \right\} dx + \int_{E'\setminus G} g_1\, dx, \tag{3.112}$$

$$I'' \leqslant c_1 \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nu_i\, |D_i\, T_l(u_1)|^{q_i} \right\} dx$$
$$+ \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nu_i\, |D_i\, \psi|^{q_i} \right\} dx + \int_{E''} g_1\, dx. \tag{3.113}$$

Заметим, что в силу предложения 3.4, включений (3.106) и (3.107) и неравенства (3.103) имеем

$$\int_{(E'\setminus G)\cup E''}\Big\{\sum_{i=1}^n \nu_i\,|D_i\,T_l(u_1)|^{q_i}\Big\}\,dx$$
$$= \int_{(E'\setminus G)\cup E''}\Big\{\sum_{i=1}^n \nu_i\,|\delta_i u_1|^{q_i}\Big\}\,dx \leqslant c_3\,k\int_{\{|u_1-\psi|\geqslant h-k\}}\Phi\,dx, \quad (3.114)$$

$$\int_{E'\setminus G}\Big\{\sum_{i=1}^n \nu_i\,|D_i\,T_l(u_2)|^{q_i}\Big\}\,dx$$
$$= \int_{E'\setminus G}\Big\{\sum_{i=1}^n \nu_i\,|\delta_i u_2|^{q_i}\Big\}\,dx \leqslant c_3\,k\int_{\{|u_2-\psi|\geqslant h-k\}}\Phi\,dx. \quad (3.115)$$

Из (3.112)–(3.115) и (3.106), (3.107) вытекает, что

$$\int_{(E'\setminus G)\cup E''} g_2\,dx + I' + I'' \leqslant c_4\,k\bigg\{\int_{\{|u_1-\psi|\geqslant h-k\}}\Phi\,dx + \int_{\{|u_2-\psi|\geqslant h-k\}}\Phi\,dx\bigg\}.$$

Отсюда и из (3.111) получаем, что

$$\langle \mathcal{A}\,T_l(u_1),\,T_k(u_1-v)\rangle$$
$$\geqslant \int_G\Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,\nabla\,T_l(u_1))\,[D_i\,T_l(u_1) - D_i\,T_l(u_2)]\Big\}\,dx$$
$$- c_4\,k\bigg\{\int_{\{|u_1-\psi|\geqslant h-k\}}\Phi\,dx + \int_{\{|u_2-\psi|\geqslant h-k\}}\Phi\,dx\bigg\}. \quad (3.116)$$

Учитывая, что в силу предложения 3.4

$$\nabla\,T_l(u_j) = \delta u_j \quad \text{п.в. на } \ G,\ \ j=1,2,$$

из (3.116) и (3.104) выводим, что

$$\int_G\Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u_1)\,[\delta_i u_1 - \delta_i u_2]\Big\}\,dx$$
$$\leqslant \int_{G_1} f\,T_k(u_1-u_2)\,dx + c_5\,k\bigg\{\int_{\{|u_1-\psi|\geqslant h-k\}}\Phi\,dx + \int_{\{|u_2-\psi|\geqslant h-k\}}\Phi\,dx\bigg\}.$$

Аналогично этому имеем

$$\int_G \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u_2)\, [\delta_i u_2 - \delta_i u_1] \right\} dx$$

$$\leqslant \int_{G_1} f\, T_k(u_2 - u_1)\, dx + c_5\, k \left\{ \int_{\{|u_1-\psi|\geqslant h-k\}} \Phi\, dx + \int_{\{|u_2-\psi|\geqslant h-k\}} \Phi\, dx \right\}.$$

Складывая последние два неравенства, заключаем, что для любых $k \geqslant 1$ и $h \geqslant k+1$ справедливо неравенство

$$\int_{\{|u_1-u_2|<k, |u_1-\psi|<h, |u_2-\psi|<h\}} \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i(x, \delta u_1) - a_i(x, \delta u_2)]\, [\delta_i u_1 - \delta_i u_2] \right\} dx$$

$$\leqslant 2\, c_5\, k \left\{ \int_{\{|u_1-\psi|\geqslant h-k\}} \Phi\, dx + \int_{\{|u_2-\psi|\geqslant h-k\}} \Phi\, dx \right\}. \tag{3.117}$$

Заметим, что если $k \geqslant 1$, то $\operatorname{meas}\{|u_j - \psi| \geqslant h - k\} \to 0$ при $h \to +\infty$, $j = 1, 2$. Этот факт является следствием леммы 3.1. Из него, в свою очередь, вытекает, что если $k \geqslant 1$, то

$$\int_{\{|u_j-\psi|\geqslant h-k\}} \Phi\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad h \to +\infty,\ j = 1, 2. \tag{3.118}$$

Учитывая (3.7) и используя лемму Фату, из (3.117) и (3.118) выводим, что

$$\delta u_1 = \delta u_2 \quad \text{п. в. на} \ \ \Omega. \tag{3.119}$$

Пусть снова $k \geqslant 1$ и $h \geqslant k+1$. Положим

$$w = T_h(u_1 - \psi) - T_h(u_2 - \psi).$$

Ясно, что $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и, следовательно, $T_k(w) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда в силу предложения 3.8 и неравенства Юнга имеем

$$\left(\int_\Omega |T_k(w)|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leqslant c_0 \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \nu_i\, |D_i\, T_k(w)|^{q_i} dx \right)^{1/q_i}. \tag{3.120}$$

Введем множества

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \{|w| < k, |u_1 - \psi| < h, |u_2 - \psi| < h\},\\
H_2 &= \{|w| < k, |u_1 - \psi| < h, |u_2 - \psi| \geqslant h\},\\
H_3 &= \{|w| < k, |u_1 - \psi| \geqslant h, |u_2 - \psi| < h\},\\
H_4 &= \{|w| < k, |u_1 - \psi| \geqslant h, |u_2 - \psi| \geqslant h\}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что эти множества попарно не пересекаются и их объединение есть множество $\{|w| < k\}$.

Зафиксируем произвольное $i \in \{1, \dots, n\}$. Учитывая (3.2) и сказанное относительно множеств $H_m,\ m = 1, \dots, 4$, получаем

$$\int_\Omega \nu_i\, |D_i\, T_k(w)|^{q_i}\, dx = \sum_{m=1}^{4} \int_{H_m} \nu_i\, |D_i w|^{q_i}\, dx. \tag{3.121}$$

В силу предложения 3.5 и соотношения (3.119) имеем

$$D_i w = 0 \quad \text{п.в. на} \ \ H_1. \tag{3.122}$$

Относительно множеств H_2 и H_3 прежде всего заметим, что

$$H_2 \subset \{h - k < |u_1 - \psi| < h\}, \quad H_3 \subset \{h - k < |u_2 - \psi| < h\}. \tag{3.123}$$

Кроме того, ввиду предложений 3.5 и 3.4 имеем

$$D_i w = \delta_i u_1 - D_i \psi \ \ \text{п.в. на} \ \ H_2, \quad D_i w = D_i \psi - \delta_i u_2 \quad \text{п.в. на} \ \ H_3. \tag{3.124}$$

Используя (3.123), (3.124) и (3.103), устанавливаем, что

$$\int_{H_2} \nu_i\, |D_i\, w|^{q_i}\, dx \leqslant 2^n (c_3 + 1)\, k \int_{\{|u_1 - \psi| \geqslant h - k\}} \Phi\, dx, \tag{3.125}$$

$$\int_{H_3} \nu_i\, |D_i\, w|^{q_i}\, dx \leqslant 2^n (c_3 + 1)\, k \int_{\{|u_2 - \psi| \geqslant h - k\}} \Phi\, dx. \tag{3.126}$$

Наконец, в силу предложений 3.5 и 3.4 имеем

$$D_i w = 0 \quad \text{п.в. на} \ \ H_4. \tag{3.127}$$

Из (3.121), (3.122) и (3.125)–(3.127) вытекает, что

$$\int_\Omega \nu_i \, |D_i \, T_k(w)|^{q_i} \, dx \leqslant 2^n (c_3 + 1) \, k \left\{ \int_{\{|u_1 - \psi| \geqslant h-k\}} \Phi \, dx + \int_{\{|u_2 - \psi| \geqslant h-k\}} \Phi \, dx \right\}.$$

Отсюда и из (3.120) следует, что для любых $k \geqslant 1$ и $h \geqslant k+1$ справедливо неравенство

$$\left(\int_{\{|u_1 - u_2| < k, |u_1 - \psi| < h, |u_2 - \psi| < h\}} |u_1 - u_2|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n}$$

$$\leqslant c_0 \, c_6 \, k \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\{|u_1 - \psi| \geqslant h-k\}} \Phi \, dx + \int_{\{|u_2 - \psi| \geqslant h-k\}} \Phi \, dx \right\}^{1/q_i}.$$

Полученный результат и утверждение (3.118) позволяют заключить, что для любого $k \geqslant 1$

$$\int_{\{|u_1 - u_2| < k\}} |u_1 - u_2|^{n/(n-1)} dx = 0.$$

Следовательно, $u_1 = u_2$ п.в. на Ω. Тем самым теорема доказана.

Выводы к разделу 3

В разделе 3 диссертационной работы рассмотрены вариационные неравенства, соответствующие нелинейному эллиптическому оператору с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами, множеству ограничений достаточно широкого класса и правой части класса L^1.

Основные результаты раздела следующие.

1. Установлено, что T-решения рассмотренных вариационных неравенств в случае достаточной регулярности их правой части и вовлеченных весовых функций совпадают с решениями вариационных неравенств в обычном смысле (предложение 3.9).

2. Доказана теорема существования T-решений рассмотренных вариационных неравенств (теорема 3.1).

3. Доказана теорема единственности T-решений рассмотренных вариационных неравенств (теорема 3.2).

Реализация общего подхода L^1-теории разрешимости нелинейных эллиптических задач, основанного на изучении решений соответствующих аппроксимирующих задач и предельных переходах в этих задачах, показывает, что в случае рассматриваемых вариационных неравенств с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-правыми частями для существования подходящих решений (T-решений) этих вариационных неравенств нужны, по существу, минимальные условия на вовлеченные весовые функции. При этом понятие T-решения можно считать естественным обобщением на случай L^1-данных обычного понятия решения вариационного неравенства, используемого в случае достаточно регулярных данных.

Основные результаты, изложенные в разделе 3, анонсированы в заметке [62] и опубликованы с полными доказательствами сначала в препринте [13], а затем в статье [14].

РАЗДЕЛ 4

СВОЙСТВА СУММИРУЕМОСТИ T-РЕШЕНИЙ И СУЩЕСТВОВАНИЕ $W^{1,1}$-РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ АНИЗОТРОПНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С L^1-ДАННЫМИ

4.1. Суммируемость T-решений вариационных неравенств с L^1-данными

Прежде всего напомним один общий результат относительно суммируемости функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, для которых имеется квалифицированная оценка мер множеств $\{|u| \geqslant k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 4.1. *Пусть* u *– измеримая функция на* Ω*,* $M > 0$*,* $\gamma > 0$*, и пусть для любого* $k \in \mathbb{N}$ $\operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant Mk^{-\gamma}$*. Тогда для любого* $\lambda \in (0, \gamma)$ *имеем* $u \in L^\lambda(\Omega)$.

По поводу доказательства этого результата см., например, лемму 2.6 в [6] или более общий результат – лемму 2.1 в [59].

Основным в данном подразделе является следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть* $m \in \mathbb{R}^n$ *и выполняется условие*:

$$\text{для любого } i \in \{1, \dots, n\} \text{ имеем } m_i \geqslant 1/(q_i - 1) \text{ и } 1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega). \quad (4.1)$$

Пусть $f \in L^1(\Omega)$ *и* u *–* T*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$*. Тогда*:

1) *для любого* λ, $0 < \lambda < p_m(\bar{q} - 1)/\bar{q}$, *имеем* $u \in L^\lambda(\Omega)$;

2) *для любых* $i \in \{1, \dots, n\}$ *и* λ, $0 < \lambda < \frac{q_i p_m(\bar{q}-1)}{p_m(\bar{q}-1)+\bar{q}}$, *имеем* $\nu_i^{1/q_i}\delta_i u \in L^\lambda(\Omega)$.

Доказательство. В силу леммы 3.1 существует $M_1 > 0$ такое, что для любого $k \geqslant 1$

$$\int_{\{|u|<k\}} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} \Big\} dx \leqslant M_1 k. \tag{4.2}$$

Пусть $k \geqslant 1$. Поскольку $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, имеем $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Тогда, используя условие (4.1), предложения 3.7 и 3.4, а также неравенство (4.2), получаем

$$\left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{p_m} dx \right)^{1/p_m} \leqslant c \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\{|u|<k\}} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} dx \right)^{1/nq_i} \leqslant c(M_1 k)^{1/\bar{q}}. \tag{4.3}$$

Кроме того, аналогично неравенству (3.96) имеем

$$k^{p_m} \mathrm{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant \int_{\Omega} |T_k(u)|^{p_m} dx.$$

Отсюда и из (4.3) выводим, что для любого $k \geqslant 1$

$$\mathrm{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant c^{p_m} M_1^{p_m/\bar{q}} k^{-p_m(\bar{q}-1)/\bar{q}}. \tag{4.4}$$

Полученный результат и лемма 4.1 приводят к заключению, что утверждение 1) справедливо.

Далее, положим $\bar{p}_m = p_m(\bar{q}-1)/\bar{q}$, и пусть $i \in \{1, \dots, n\}$ и $0 < \lambda < q_i \bar{p}_m/(\bar{p}_m + 1)$. Зафиксируем произвольное $k \geqslant 1$ и положим $h = k^{q_i/(\bar{p}_m+1)}$. В силу (4.4) имеем

$$\mathrm{meas}\{|u| \geqslant h\} \leqslant c^{p_m} M_1^{p_m/\bar{q}} h^{-\bar{p}_m}, \tag{4.5}$$

а из (4.2) следует, что

$$\int_{\{|u|<h\}} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} dx \leqslant M_1 h.$$

Но ясно, что

$$k^{q_i} \mathrm{meas}\{\nu_i^{1/q_i} |\delta_i u| \geqslant k, |u| < h\} \leqslant \int_{\{|u|<h\}} \nu_i |\delta_i u|^{q_i} dx.$$

Из двух последних неравенств вытекает, что

$$\mathrm{meas}\{\nu_i^{1/q_i} |\delta_i u| \geqslant k, |u| < h\} \leqslant M_1 h^{-\bar{p}_m}.$$

Отсюда и из (4.5) выводим, что для любого $k \geqslant 1$

$$\text{meas}\{\nu_i^{1/q_i}|\delta_i u| \geqslant k\} \leqslant (c^{p_m} M_1^{p_m/\bar{q}} + M_1) k^{-q_i \bar{p}_m/(\bar{p}_m+1)}.$$

Полученный результат и лемма 4.1 позволяют заключить, что $\nu_i^{1/q_i}\delta_i u \in L^\lambda(\Omega)$. Значит, утверждение 2) справедливо. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$, и пусть u – T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда*:

1) *для любого $\lambda \in (0, \hat{q})$, имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$*;

2) *для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и λ, $0 < \lambda < \frac{q_i \hat{q}}{\hat{q}+1}$, имеем $\nu_i^{1/q_i}\delta_i u \in L^\lambda(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ $m_i = 1/(q_i - 1)$. Тогда ввиду второго из включений (3.1) выполняется условие (4.1). Учитывая это, из теоремы 4.1 и (3.4) выводим, что утверждения 1) и 2) справедливы. Следствие доказано.

Как видно, формулировка следствия 4.1 не предполагает никаких дополнительных условий относительно чисел q_i и весовых функций ν_i, $i = 1, \ldots, n$, и поскольку $\hat{q} < 1$, из этого следствия, вообще говоря, нельзя заключить, что для любой функции $f \in L^1(\Omega)$ T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, есть суммируемая функция. Условия принадлежности T-решений пространству $L^1(\Omega)$ легко вывести из теоремы 4.1. Именно, имеет место такой результат.

Следствие 4.2. *Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем выполняется условие* (4.1) *и*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1 + 2m_i}{m_i q_i} < n + 1. \tag{4.6}$$

Пусть $f \in L^1(\Omega)$ и u – T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u \in L^1(\Omega)$.

Доказательство. В силу (3.4) имеем

$$\frac{1}{p_m} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i q_i} - 1\right) + \frac{1}{\bar{q}}\,, \tag{4.7}$$

а в силу (4.6) справедливо неравенство

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i q_i}-1\right)<1-\frac{2}{\bar q}\,.$$

Из этого неравенства и равенства (4.7) вытекает, что

$$\frac{1}{p_m}<1-\frac{1}{\bar q}\,.$$

Поэтому

$$1<\frac{p_m(\bar q-1)}{\bar q}\,.$$

Отсюда и из утверждения 1) теоремы 4.1 выводим, что $u\in L^1(\Omega)$. Следствие доказано.

Заметим, что согласно определению 3.3, если $f\in L^1(\Omega)$, то T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A},V,f)$, есть элемент функционального класса $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, и, вообще говоря, это решение не является элементом соболевского пространства $W^{1,1}(\Omega)$. По этому поводу см., в частности, пример в [14]. Следующий результат дает достаточные условия принадлежности T-решений пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$.

Следствие 4.3. *Пусть $m\in\mathbb{R}^n$, причем $m_i>0$, $i=1,\dots,n$. Пусть для любого $i\in\{1,\dots,n\}$*

$$\frac{1}{m_i}+\frac{\bar q}{n(\bar q-1)}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j q_j}<q_i-1-\frac{n-\bar q}{n(\bar q-1)}\,, \tag{4.8}$$

$$1/\nu_i\in L^{m_i}(\Omega). \tag{4.9}$$

Пусть $f\in L^1(\Omega)$ и u – T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A},V,f)$. Тогда $u\in\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$.

Доказательство. Из (4.8) и (4.9) вытекает, что выполняется условие (4.1). Тогда справедливо утверждение 2) теоремы 4.1.

Зафиксируем $i\in\{1,\dots,n\}$ и положим

$$t_i=\frac{m_i\,q_i}{m_i\,q_i-1}.$$

В силу (3.4) имеем

$$\frac{1}{p_m} = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j q_j} - 1\right) + \frac{1}{\bar{q}}\,, \tag{4.10}$$

а в силу (4.8) справедливо неравенство

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j q_j} - 1\right) < \frac{\bar{q}-1}{\bar{q}}\left(q_i - \frac{1}{m_i}\right) - 1\,.$$

Используя это неравенство для оценки правой части равенства (4.10), получим

$$\frac{1}{p_m} < \frac{\bar{q}-1}{\bar{q}}\left(q_i - \frac{1}{m_i} - 1\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$q_i - \frac{1}{m_i} > 1 + \frac{\bar{q}}{p_m(\bar{q}-1)}\,.$$

В свою очередь, из последнего неравенства, учитывая определение t_i, выводим, что

$$t_i < \frac{q_i\, p_m(\bar{q}-1)}{p_m(\bar{q}-1)+\bar{q}}\,.$$

Отсюда и из утверждения 2) теоремы 4.1 получаем $\nu_i^{1/q_i}\delta_i u \in L^{t_i}(\Omega)$. Из этого включения, (4.9) и того, что ввиду неравенства Юнга

$$|\delta_i u| \leqslant (1/\nu_i)^{m_i} + |\nu_i^{1/q_i}\delta_i u|^{t_i} \quad \text{п. в. на} \quad \Omega,$$

выводим включение $\delta_i u \in L^1(\Omega)$.

Теперь можно заключить, что $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. Отсюда и из предложения 3.6 получаем, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$. Следствие доказано.

Замечание 4.1. Очевидно, что необходимым условием для того, чтобы для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имело место неравенство (4.8), является требование

$$q_- > \frac{(n-1)\bar{q}}{n(\bar{q}-1)}\,. \tag{4.11}$$

В свою очередь, необходимыми для выполнения неравенства (4.11) являются следующие условия:

$$\bar{q} > 2 - \frac{1}{n}\,, \tag{4.12}$$

$$q_- > \frac{n^2}{n^2 - n + 1}\,, \tag{4.13}$$

$$q_+ - q_- < \frac{q_+}{q_+ - 1}\left(q_+ - 2 + \frac{1}{n}\right). \tag{4.14}$$

Действительно, пусть неравенство (4.11) справедливо. Тогда для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем

$$\frac{1}{q_i} < \frac{n(\bar{q} - 1)}{(n-1)\bar{q}}$$

и следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} < \frac{n^2(\bar{q} - 1)}{(n-1)\,\bar{q}}.$$

Отсюда и из определения числа $\bar{q}$ выводим неравенство (4.12). Далее, поскольку $q_+ < n$, имеем

$$\frac{1}{\bar{q}} > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{q_-} + \frac{n-1}{n}\right).$$

Тогда

$$\frac{n-1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{n}\right) > \frac{\bar{q} - 1}{\bar{q}}.$$

Из этого неравенства и (4.11) вытекает, что

$$1 - \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{q_-} - \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{q_-}.$$

Отсюда получаем неравенство (4.13). Наконец, так как $q_+ \geqslant \bar{q}$, то

$$\frac{\bar{q}}{\bar{q} - 1} \geqslant \frac{q_+}{q_+ - 1}.$$

Из этого неравенства и (4.11) следует, что

$$q_- > \frac{(n-1)\,q_+}{n(q_+ - 1)}.$$

Отсюда выводим неравенство (4.14).

Замечание 4.2. В случае $q_- = q_+$ условие (4.11) эквивалентно требованию $q_- > 2 - 1/n$, обеспечивающему существование слабых решений (т.е. решений из $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$) невырождающихся изотропных уравнений второго порядка с L^1-правыми частями (см., например, [37]), причем при нарушении последнего требования такие решения существуют не для всякой правой части из $L^1(\Omega)$. По этому поводу см. [29].

Приведем два простых результата, вытекающих из следствия 4.3.

Следствие 4.4. *Пусть справедливо неравенство* (4.11) *и для любого* $i \in \{1, \dots, n\}$ *имеем* $1/\nu_i \in L^\infty(\Omega)$. *Пусть* $f \in L^1(\Omega)$ *и* u *– T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$. *Тогда* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть m_* – положительное число такое, что

$$\frac{1}{m_*} < \frac{\bar{q} - 1}{\bar{q}} \left\{ q_- - \frac{(n-1)\,\bar{q}}{n(\bar{q} - 1)} \right\}, \tag{4.15}$$

и пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $m_i = m_*$. Тогда в силу (4.15) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ справедливо неравенство (4.8). Кроме того, для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ верно включение (4.9). Теперь из следствия 4.3 вытекает требуемый результат. Следствие доказано.

Следствие 4.5. *Пусть* $q_- = q_+ > 2 - 1/n$, $t > (q_+ - 2 + 1/n)^{-1}$ *и для любого* $i \in \{1, \dots, n\}$ *имеем* $1/\nu_i \in L^t(\Omega)$. *Пусть* $f \in L^1(\Omega)$ *и* u *– T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$. *Тогда* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $m_i = t$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеют место соотношения (4.8) и (4.9). Отсюда и из следствия 4.3 выводим требуемый результат. Следствие доказано.

Отметим, что теорема 4.1 и следствия 4.1–4.5 были установлены в работе [14]. Заметим также, что результаты об улучшении свойств суммируемости T-решений рассматриваемых вариационных неравенств в зависимости от улучшения таких свойств у функции f могут быть получены с использованием приемов, предложенных в [7, 9, 59] в отношении решений изотропных уравнений второго порядка.

4.2. Невесовое условие принадлежности T-решений вариационных неравенств классу L^1

В предыдущем подразделе показано (см. следствие 4.2), что при определенных условиях относительно чисел q_i и показателей m_i, характеризующих суммируемость функций $1/\nu_i$, $i = 1, \dots, n$, T-решения исследуемых вариационных неравенств с L^1-правыми частями принадлежат пространству L^1. В данном подразделе устанавливается, что принадлежность изучаемых T-решений классу L^1 можно обеспечить только за счет повышенной суммируемости правой части неравенства.

Теорема 4.2. *Пусть* $\sigma > n/\overline{q}$ *и* $f \in L^\sigma(\Omega)$. *Пусть* u – T*-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке* $(\mathcal{A}, V, f)$. *Тогда существует* $\lambda_0 > 1$, *зависящее только от* n, $\overline{q}$ *и* σ, *такое, что для любого* $\lambda \in [1, \lambda_0)$ *имеем* $u \in L^\lambda(\Omega)$.

Доказательство. Положим

$$\sigma_1 = \frac{n}{2\overline{q}} + \frac{1}{2}\min(\sigma, n).$$

Имеем $n/\overline{q} < \sigma_1 < n$, $\sigma_1 < \sigma$. Следовательно, $f \in L^{\sigma_1}(\Omega)$.

Положим

$$\sigma_2 = \frac{n - \sigma_1}{\sigma_1(n-1)}, \quad \sigma_3 = \frac{1 - \sigma_2}{\overline{q}}.$$

Легко видеть, что $\sigma_2 \in (0, 1)$. Следовательно, $\sigma_3 \in (0, 1)$.

Положим

$$\sigma_4 = \frac{\sigma_2}{\overline{q}(1 - \sigma_3)}, \quad \lambda_0 = \frac{n(1 - \sigma_4)}{n - 1}.$$

Поскольку $\sigma_1 > n/\overline{q}$, имеем $\lambda_0 > 1$.

Теперь, учитывая условие (3.8), зафиксируем функцию $\psi \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и положим

$$M = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i \psi|^{q_i} \right\} dx.$$

Через c_i, $i = 3, 4, \ldots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, $\overline{q}$, c_0, c_1, c_2, σ, M, $\|g_1\|_{L^1(\Omega)}$, $\|g_2\|_{L^1(\Omega)}$, $\|f\|_{L^{\sigma_1}(\Omega)}$ и $\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Зафиксируем $k \geqslant 1$ и положим

$$k_1 = k + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad k_2 = k_1 + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)},$$

$$I = \int_{\{|u-\psi|<k_1\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i T_{k_2}(u)|^{q_i} \right\} dx, \ I_1 = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n \nu_i |D_i T_{k_1}(u-\psi)|^{q_i} \right\} dx,$$

$$J = \int_{\{|u-\psi|<k_1\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_{k_2}(u)) D_i \psi \right\} dx.$$

В силу определения 3.3 имеем

$$\langle \mathcal{A} T_{k_2}(u), T_{k_1}(u-\psi) \rangle \leqslant \int_\Omega f T_{k_1}(u-\psi) dx. \tag{4.16}$$

При этом из определения оператора $\mathcal{A}$ и предложений 3.4 и 3.5 следует, что

$$\langle \mathcal{A} T_{k_2}(u), T_{k_1}(u-\psi) \rangle = \int_{\{|u-\psi|<k_1\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_{k_2}(u)) D_i T_{k_2}(u) \right\} dx - J. \tag{4.17}$$

В свою очередь, ввиду (3.6) имеем

$$\int_{\{|u-\psi|<k_1\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_{k_2}(u)) D_i T_{k_2}(u) \right\} dx \geqslant c_2 I - \|g_2\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.18}$$

Из (4.16)–(4.18) выводим неравенство

$$c_2 I \leqslant \int_\Omega f T_{k_1}(u-\psi) dx + \|g_2\|_{L^1(\Omega)} + J. \tag{4.19}$$

Используя (3.5) и неравенство Юнга, для последнего слагаемого в правой части (4.19) получаем следующую оценку:

$$J \leqslant \frac{c_2}{2} I + c_3.$$

Отсюда и из (4.19) вытекает, что

$$I \leqslant \frac{2}{c_2}\int_\Omega fT_{k_1}(u-\psi)dx + c_4. \tag{4.20}$$

Теперь оценим интеграл в правой части неравенства (4.20). Имеем

$$\int_\Omega fT_{k_1}(u-\psi)dx \leqslant \int_\Omega |f||T_{k_1}(u-\psi)|^{\sigma_2}|T_{k_1}(u-\psi)|^{1-\sigma_2}dx$$
$$\leqslant {k_1}^{\sigma_2}\int_\Omega |f||T_{k_1}(u-\psi)|^{1-\sigma_2}dx. \tag{4.21}$$

Поскольку $f \in L^{\sigma_1}(\Omega)$, используя неравенство Гельдера и учитывая определение числа σ_2, получаем

$$\int_\Omega |f||T_{k_1}(u-\psi)|^{1-\sigma_2}dx \leqslant \|f\|_{L^{\sigma_1}(\Omega)}\left(\int_\Omega |T_{k_1}(u-\psi)|^{n/(n-1)}dx\right)^{(\sigma_1-1)/\sigma_1}. \tag{4.22}$$

Так как $T_{k_1}(u-\psi) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, из предложения 3.8 выводим, что

$$\left(\int_\Omega |T_{k_1}(u-\psi)|^{n/(n-1)}dx\right)^{(n-1)/n} \leqslant c_0{I_1}^{1/\overline{q}}. \tag{4.23}$$

Из (4.21)–(4.23) следует неравенство

$$\int_\Omega fT_{k_1}(u-\psi)dx \leqslant c_5{k_1}^{\sigma_2}{I_1}^{\sigma_3}.$$

Отсюда и из (4.20) получаем, что

$$I \leqslant c_6k^{\sigma_2}{I_1}^{\sigma_3} + c_4. \tag{4.24}$$

Используя неравенство Юнга с показателями $1/(1-\sigma_3)$ и $1/\sigma_3$, устанавливаем

$$c_6k^{\sigma_2}{I_1}^{\sigma_3} = 2^{n\sigma_3}c_6k^{\sigma_2}\cdot 2^{-n\sigma_3}{I_1}^{\sigma_3} \leqslant c_7k^{\sigma_2/(1-\sigma_3)} + 2^{-n}I_1. \tag{4.25}$$

В свою очередь, используя предложения 3.4 и 3.5, находим, что

$$I_1 \leqslant 2^{n-1}I + 2^{n-1}M. \tag{4.26}$$

Из (4.24)–(4.26) вытекает неравенство

$$I \leqslant c_8k^{\sigma_2/(1-\sigma_3)}. \tag{4.27}$$

Легко видеть, что

$$\int_{\{|u|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nu_i |D_i T_{k_2}(u)|^{q_i} \right\} dx \leqslant I. \tag{4.28}$$

Кроме того, используя предложение 3.4, устанавливаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \nu_i |D_i T_k(u)|^{q_i} dx = \int_{\{|u|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \nu_i |D_i T_{k_2}(u)|^{q_i} \right\} dx. \tag{4.29}$$

Из (4.27)–(4.29) получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \nu_i |D_i T_k(u)|^{q_i} dx \leqslant c_8 k^{\sigma_2/(1-\sigma_3)}, \tag{4.30}$$

а поскольку $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, в силу предложения 3.8 имеем

$$\left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leqslant c_0 \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\Omega} \nu_i |D_i T_k(u)|^{q_i} dx \right)^{1/nq_i}.$$

Отсюда и из (4.30) вытекает, что

$$\int_{\Omega} |T_k(u)|^{n/(n-1)} dx \leqslant c_9 k^{n\sigma_4/(n-1)}. \tag{4.31}$$

В свою очередь, учитывая, что для любого $s \in \mathbb{R}$, $|s| \geqslant k$, справедливо равенство $|T_k(s)| = k$, получаем неравенство

$$k^{n/(n-1)} \mathrm{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant \int_{\Omega} |T_k(u)|^{n/(n-1)} dx. \tag{4.32}$$

Из (4.31) и (4.32) следует, что

$$\mathrm{meas}\{|u| \geqslant k\} \leqslant c_9 k^{-\lambda_0}.$$

Поскольку полученное неравенство верно для любого $k \geqslant 1$, применяя лемму 4.1, заключаем, что для любого $\lambda \in [1, \lambda_0)$ справедливо включение $u \in L^{\lambda}(\Omega)$. Теорема доказана.

Отметим, что эта теорема установлена в работе [4]. В ее доказательстве при оценке интеграла I использованы приемы, аналогичные предложенным в лемме 6 из работы [7].

4.3. Существование $W^{1,1}$-решений вырождающихся анизотропных вариационных неравенств с L^1-данными

Определение 4.1. Пусть $f \in L^1(\Omega)$. $W^{1,1}$-решением вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, будем называть T-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$, в случае принадлежности этого решения пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$.

Из теоремы 3.1 и следствия 4.3 вытекает такой результат.

Теорема 4.3. *Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ справедливы неравенство* (4.8) *и включение* (4.9). *Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Тогда существует $W^{1,1}$-решение вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$.*

Что касается единственности $W^{1,1}$-решения, легко видеть, что из теоремы 3.2 вытекает следующий результат.

Теорема 4.4. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$, и пусть u_1, u_2 – $W^{1,1}$-решения вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$. Тогда $u_1 = u_2$ п.в. на Ω.*

Из теорем 4.1, 4.3 и 4.4 выводим такой результат.

Теорема 4.5. *Пусть $m \in \mathbb{R}^n$, причем $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ справедливы неравенство* (4.8) *и включение* (4.9). *Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *существует единственное $W^{1,1}$-решение u вариационного неравенства, соответствующего тройке $(\mathcal{A}, V, f)$;*

2) *для любого λ, $0 < \lambda < p_m(\bar{q} - 1)/\bar{q}$, имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$;*

3) *для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и λ, $0 < \lambda < \frac{q_i p_m(\bar{q}-1)}{p_m(\bar{q}-1)+\bar{q}}$, имеем $\nu_i^{1/q_i} D_i u \in L^\lambda(\Omega)$.*

Как видим, этот результат является следствием результатов, установленных в [14] и изложенных в разделе 3 и подразделе 4.1 данной диссертации. Заметим, что ранее подобный результат о существовании решений в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ вырождающихся анизотропных вариационных неравенств с L^1-данными был получен в работе [2] с теми отличительными предположениями, что:

а) множество ограничений лежит, вообще говоря, в более узком весовом анизотропном пространстве Соболева, является замкнутым и выпуклым в этом пространстве, и, кроме того, содержит его нулевой элемент;

б) функции ν_i, $i = 1, \dots, n$, имеют повышенную суммируемость, вследствие чего для соответствующего решения u было получено утверждение о суммируемости функций $a_i(x, \nabla u)$, $i = 1, \dots, n$.

Остановимся на упомянутом результате более подробно.

Через $\mathcal{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in L^{q_-}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные первого порядка $D_i u$ со свойством $\nu_i |D_i u|^{q_i} \in L^1(\Omega)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Множество $\mathcal{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{1,q}(\nu,\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^{q_-}\, dx \right)^{1/q_-} + \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \nu_i |D_i u|^{q_i}\, dx \right)^{1/q_i}.$$

Через $\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в $\mathcal{W}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Далее, пусть $\theta_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ – функция такая, что для любого $x \in \Omega$ имеем $\theta_0(x) = 0$. Очевидно, что $\theta_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$.

Пусть $\mathcal{V}$ – замкнутое выпуклое множество в $\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, удовлетворяющее условиям:

$$\theta_0 \in \mathcal{V}, \tag{4.33}$$

$$\text{если } \ u, v \in \mathcal{V} \text{ и } k > 0, \text{ то } \ u - T_k(u - v) \in \mathcal{V}. \tag{4.34}$$

Положим

$$Q_1 = \min\left\{ n - \frac{n-1}{q_-}, \quad 1 + \frac{n-1}{q_+} \right\},$$

$$Q_2 = \min\left\{(q_- - 1)n + 1 - q_- \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i}, \quad 1 + \frac{n}{q_+ - 1} - \frac{q_+}{q_+ - 1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i}\right\}.$$

Кроме того, для любого $m \in \mathbb{R}^n$ с положительными координатами положим

$$\hat{q}_m = \frac{p_m(\overline{q} - 1)}{\overline{q}}.$$

В работе [2] установлен следующий результат.

Теорема 4.6. *Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Предположим, что*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} < Q_1, \tag{4.35}$$

и пусть существуют $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ с положительными координатами такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i q_i} < Q_2, \tag{4.36}$$

и для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$, $\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$,

$$\frac{1}{m_i}\left(n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q_j}\right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j q_j} < 1 + (q_i - 1)n - q_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q_j}, \tag{4.37}$$

$$\frac{1}{\sigma_i} < 1 - (q_i - 1)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1 + m_j}{m_j q_j} - 1\right)\left(n - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q_j}\right)^{-1}. \tag{4.38}$$

Тогда существует функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ такая, что

1) *для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $T_k(u) \in \mathcal{V}$;*

2) *для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем $T_k(u - \varphi) \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$;*

3) *для любого $\lambda \in (1, \hat{q}_m)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$;*

4) *для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и любого $\mu \in \left(1, \frac{q_i \hat{q}_m}{\hat{q}_m + 1}\right)$ имеем ${\nu_i}^{1/q_i} D_i u \in L^\mu(\Omega)$;*

5) *для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и любого $p \in \left(0, \frac{q_i \hat{q}_m}{(\hat{q}_m + 1)(q_i - 1)}\right)$ имеем $(1/\nu_i)^{1/q_i} a_i(x, \nabla u) \in L^p(\Omega)$;*

6) *для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $a_i(x, \nabla u) \in L^1(\Omega)$;*

7) *для любых* $k \in \mathbb{N}$ *и* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap \mathcal{V}$ *справедливо неравенство*

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx \leqslant \int_\Omega f T_k(u - \varphi) dx. \tag{4.39}$$

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.1.

Сделаем несколько замечаний, которые позволят упростить формулировку теоремы 4.6.

Прежде всего заметим, что из неравенства (4.37) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i q_i} < 1 + (q_- - 1)n - q_- \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i}, \tag{4.40}$$

а из неравенства (4.38) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i q_i} < \frac{n}{q_+ - 1} + 1 - \frac{q_+}{q_+ - 1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i}. \tag{4.41}$$

Таким образом, заключаем, что неравенство (4.36) является необходимым для того, чтобы оба неравенства (4.37) и (4.38) были справедливы.

В свою очередь, из (4.40) и (4.41) вытекает, что

$$q_- \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} < n(q_- - 1) + 1, \quad \frac{q_+}{q_+ - 1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} < 1 + \frac{n}{q_+ - 1},$$

и, следовательно, выполняется неравенство (4.35). Таким образом, неравенство (4.35) тоже является необходимым для того, чтобы оба неравенства (4.37) и (4.38) были справедливы.

Далее, учитывая определение числа $\overline{q}$, замечаем, что неравенство (4.37) эквивалентно неравенству (4.8), а неравенство (4.38) эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(q_i - 1)\overline{q}}{n(\overline{q} - 1)} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{m_j q_j} + \frac{n}{\overline{q}} - 1 \right).$$

Учитывая сделанные замечания, получаем следующую эквивалентную формулировку теоремы 4.6.

Теорема 4.7. *Пусть* $f \in L^1(\Omega)$. *Предположим, что существуют* $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ *с положительными координатами такие, что для любого* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *имеем* $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$, $\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$,

$$\frac{1}{m_i} + \frac{\bar{q}}{n(\bar{q}-1)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j q_j} < q_i - 1 - \frac{n-\bar{q}}{n(\bar{q}-1)}\,, \tag{4.42}$$

$$\frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(q_i - 1)\overline{q}}{n(\overline{q}-1)} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j q_j} + \frac{n}{\overline{q}} - 1 \right). \tag{4.43}$$

Тогда существует функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ *такая, что справедливы утверждения* 1) – 7) *теоремы* 4.6.

Доказательство. Не повторяя соответствующих рассуждений, изложенных в [2], и аналогичных тем, которые содержатся в доказательстве теоремы 3.1, дадим обоснование заключения теоремы, используя в основном теорему 4.5.

Прежде всего заметим, что

$$\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega).$$

Тогда $\mathcal{V} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Пусть V – замыкание множества $\mathcal{V}$ в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Учитывая, что множество $\mathcal{V}$ выпуклое и справедливо включение (4.33), заключаем, что V – замкнутое выпуклое множество в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $V \cap L^\infty(\Omega) \neq \varnothing$. Кроме того, принимая во внимание справедливость условия (4.34), устанавливаем, что из u, $v \in V$ и $k > 0$ вытекает включение $u - T_k(u-v) \in V$. Таким образом, множество V удовлетворяет условиям (3.8) и (3.9).

Покажем, что имеют место следующие включения:

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega) \subset \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu, \Omega), \tag{4.44}$$

$$V \cap L^\infty(\Omega) \subset \mathcal{V}. \tag{4.45}$$

Пусть $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Поскольку $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, существует последовательность $\{w_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$w_j \to w \text{ сильно в } \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega). \tag{4.46}$$

Учитывая, что $w \in L^\infty(\Omega)$, зафиксируем $k > \|w\|_{L^\infty(\Omega)}$. Тогда

$$T_k(w) = w \text{ почти всюду на } \Omega. \tag{4.47}$$

В силу (4.46) существует последовательность $\{j_l\} \subset \mathbb{N}$ такая, что $w_{j_l} \to w$ почти всюду на Ω. Отсюда и из (4.47) вытекает, что $T_k(w_{j_l}) \to w$ почти всюду на Ω. Тогда

$$T_k(w_{j_l}) \to w \text{ сильно в } L^{q_-}(\Omega). \tag{4.48}$$

Имеем $\{T_k(w_{j_l})\} \subset \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, причем последовательность $\{T_k(w_{j_l})\}$ ограничена в $\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Тогда в силу рефлексивности пространства $\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ существуют функция $z \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и возрастающая последовательность $\{l_s\} \subset \mathbb{N}$ такие, что

$$T_k(w_{j_{l_s}}) \to z \text{ слабо в } \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu,\Omega).$$

Следовательно, $T_k(w_{j_{l_s}}) \to z$ слабо в $L^{q_-}(\Omega)$. Отсюда и из (4.48) вытекает, что $w = z$ п. в. на Ω. Поэтому $w \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Тем самым справедливость включения (4.44) установлена.

Докажем включение (4.45). Пусть $w \in V \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда в силу определения множества V существует последовательность $\{w_j\} \subset \mathcal{V}$ такая, что $w_j \to w$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$. Используя это и рассуждая так же, как и при доказательстве включения (4.44), устанавливаем, что $w \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и при $k > \|w\|_{L^\infty(\Omega)}$ для некоторой возрастающей последовательности $\{j_l\} \subset \mathbb{N}$ имеем

$$T_k(w_{j_l}) \to w \text{ слабо в } \overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu,\Omega). \tag{4.49}$$

При этом в силу (4.33) и (4.34) имеем $\{T_k(w_j)\} \subset \mathcal{V}$. Тогда, учитывая (4.49) и то, что множество $\mathcal{V}$ замкнутое и выпуклое в $\overset{\circ}{\mathcal{W}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, получаем, что $w \in \mathcal{V}$. Тем самым справедливость включения (4.45) доказана.

Учитывая, что V – замкнутое выпуклое множество в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, удовлетворяющее условиям (3.8) и (3.9), и используя теорему 4.5, приходим к выводу, что существует функция $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ такая, что справедливы утверждения:

(a) для любых $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geqslant 1$ имеем $v - T_k(v-u) \in V$;

(b) если $v \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u), T_k(u-v)\rangle \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u-v)dx;$$

(c) для любого $\lambda \in (0, \hat{q}_m)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$;

(d) для любых $i \in \{1,\dots,n\}$ и $\lambda \in \left(0, \frac{q_i\hat{q}_m}{\hat{q}_m+1}\right)$ имеем ${\nu_i}^{1/q_i}D_i u \in L^\lambda(\Omega)$.

Из утверждения (a), (4.33) и (4.45) вытекает, что утверждение 1) теоремы 4.6 справедливо. Кроме того, из предложения 3.5 и включения (4.44) следует, что верно утверждение 2) теоремы 4.6.

Утверждение (c) влечет справедливость утверждения 3) теоремы 4.6. Заметим при этом, что в силу (4.42) и (4.43)

$$\hat{q}_m > \max\left\{\frac{1}{q_- - 1},\, q_+ - 1\right\}, \tag{4.50}$$

и следовательно, $\hat{q}_m > 1$.

Далее, ввиду утверждения (d) справедливо утверждение 4) теоремы 4.6. Заметим при этом, что в силу неравенства (4.50) для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем $1 < q_i\hat{q}_m/(\hat{q}_m+1)$.

Докажем справедливость утверждения 5) теоремы 4.6. Пусть $i \in \{1,\dots,n\}$ и $p \in \left(0, \frac{q_i\hat{q}_m}{(\hat{q}_m+1)(q_i-1)}\right)$. Используя условие (3.5), получаем, что

$$\left|(1/\nu_i)^{1/q_i} a_i(x,\nabla u)\right|^p \leqslant (c_1+1)\sum_{j=1}^n \left({\nu_j}^{1/q_j}|D_j u|\right)^{pq_j(q_i-1)/q_i} + g_1 + 1 \text{ п.в. на } \Omega. \tag{4.51}$$

Поскольку $g_1 \in L^1(\Omega)$ и в силу утверждения (d) для любого $j \in \{1,\dots,n\}$ имеем ${\nu_j}^{1/q_j}D_j u \in L^{pq_j(q_i-1)/q_i}(\Omega)$, то из (4.51) следует, что $(1/\nu_i)^{1/q_i}a_i(x,\nabla u)$ $\in L^p(\Omega)$, и значит, утверждение 5) теоремы 4.6 справедливо.

Теперь докажем, что справедливо утверждение 6) теоремы 4.6. Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. Имеем

$$\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega). \tag{4.52}$$

Кроме того, из (4.43) и определения чисел p_m и $\hat{q}_m$ следует, что $1/\sigma_i < 1 - (q_i - 1)/\hat{q}_m$. Поэтому

$$\frac{\sigma_i q_i}{\sigma_i q_i - 1} < \frac{q_i \hat{q}_m}{(\hat{q}_m + 1)(q_i - 1)}.$$

Тогда в силу утверждения 5) теоремы 4.6 имеем

$$(1/\nu_i)^{1/q_i} a_i(x, \nabla u) \in L^{\sigma_i q_i/(\sigma_i q_i - 1)}(\Omega). \tag{4.53}$$

Наконец, используя неравенство Юнга с показателями $\sigma_i q_i/(\sigma_i q_i - 1)$ и $\sigma_i q_i$, получаем, что

$$|a_i(x, \nabla u)| \leqslant \nu_i^{\sigma_i} + \left|(1/\nu_i)^{1/q_i} a_i(x, \nabla u)\right|^{\sigma_i q_i/(\sigma_i q_i - 1)} \text{ п.в. на } \Omega. \tag{4.54}$$

Из (4.52)–(4.54) вытекает, что $a_i(x, \nabla u) \in L^1(\Omega)$. Тем самым справедливость утверждения 6) теоремы 4.6 установлена.

Наконец, докажем справедливость утверждения 7) теоремы 4.6. Зафиксируем произвольные $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap \mathcal{V}$. Положим $k_1 = k + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$. Поскольку $\mathcal{V} \subset V$, имеем $\varphi \in V \cap L^\infty(\Omega)$. Тогда в силу утверждения (b) справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{A} T_{k_1}(u),\, T_k(u - \varphi) \rangle \leqslant \int_\Omega f T_k(u - \varphi) dx. \tag{4.55}$$

Так как $T_{k_1}(u), T_k(u - \varphi) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, то согласно определению оператора $\mathcal{A}$ имеем

$$\langle \mathcal{A} T_{k_1}(u),\, T_k(u - \varphi) \rangle = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_{k_1}(u)) D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx. \tag{4.56}$$

При этом ввиду включения $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ имеем

$$\nabla T_{k_1}(u) = \nabla u \text{ п.в. на } \{|u| < k_1\}, \tag{4.57}$$

а так как $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ и $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, то из предложений 3.5 и 3.4 вытекает, что если $\operatorname{meas}\{|u-\varphi| \geqslant k\} > 0$, то для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ имеем $D_i T_k(u-\varphi) = 0$ п.в. на $\{|u-\varphi| \geqslant k\}$. Используя это вместе с (4.56) и (4.57), получаем, что

$$\langle \mathcal{A}T_{k_1}(u),\, T_k(u-\varphi)\rangle = \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,\nabla u) D_i T_k(u-\varphi) \right\} dx.$$

Отсюда и из (4.55) выводим неравенство (4.39). Тем самым справедливость утверждения 7) теоремы 4.6 установлена. Это завершает доказательство теоремы 4.7.

Замечание 4.3. С учетом определения чисел $\overline{q}$ и p_m неравенство (4.42) преобразуется к виду

$$\frac{\overline{q}}{p_m(\overline{q}-1)} < q_i - 1 - \frac{1}{m_i},$$

а неравенство (4.43) – к виду

$$\frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(q_i-1)\overline{q}}{p_m(\overline{q}-1)}.$$

4.4. Примеры выполнения условий относительно множества ограничений

Приведем некоторые примеры замкнутых выпуклых множеств в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, удовлетворяющих условиям (3.8) и (3.9).

Пример 4.1. Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ и

$$V = \left\{ v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) : \ v \geqslant \varphi \ \text{ п. в. на } \Omega \right\}.$$

Тогда множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условиям (3.8) и (3.9).

Действительно, так как $\varphi \in V$, то множество V непустое и удовлетворяет условию (3.8).

Проверим выпуклость множества V. Пусть $u, v \in V$ и $\alpha \in [0, 1]$. Имеем $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и

$$u \geqslant \varphi \text{ п. в. на } \Omega, \quad v \geqslant \varphi \text{ п. в. на } \Omega. \tag{4.58}$$

Положим $w = (1-\alpha)u+\alpha v$. Очевидно, что $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Согласно (4.58) существуют множества $E_1 \subset \Omega$ и $E_2 \subset \Omega$ меры нуль такие, что для любого $x \in \Omega \setminus E_1$ имеем $u(x) \geqslant \varphi(x)$, а для любого $x \in \Omega \setminus E_2$ имеем $v(x) \geqslant \varphi(x)$. Тогда для $x \in \Omega \setminus (E_1 \cup E_2)$ получаем

$$w(x) = (1-\alpha)u(x) + \alpha v(x) \geqslant (1-\alpha)\varphi(x) + \alpha\varphi(x) = \varphi(x).$$

Значит, $w \geqslant \varphi$ п.в. на Ω. Теперь можно заключить, что $w \in V$. Тем самым выпуклость множества V доказана.

Проверим замкнутость множества V. Пусть $\{v_k\} \subset V$, $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $v_k \to v$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Ясно, что $\|v_k - v\|_{L^1(\Omega)} \to 0$. Тогда существует возрастающая последовательность $\{k_j\} \subset \mathbb{N}$ такая, что $v_{k_j} \to v$ п.в. на Ω. Поэтому, существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E \qquad v_{k_j}(x) \to v(x). \tag{4.59}$$

Кроме того, так как $\{v_k\} \subset V$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ существует множество $E_k \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_k \qquad v_k(x) \geqslant \varphi(x). \tag{4.60}$$

Положим $E' = \cup_k E_k$. Ясно, что $\operatorname{meas} E' = 0$. Зафиксируем $x \in \Omega \setminus (E \cup E')$. Покажем, что $v(x) \geqslant \varphi(x)$. Действительно, зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. Так как $x \notin E'$, то $x \notin E_{k_j}$. Следовательно, $x \in \Omega \setminus E_{k_j}$. Тогда, в силу (4.60), имеем $v_{k_j}(x) \geqslant \varphi(x)$. Таким образом, для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $v_{k_j}(x) \geqslant \varphi(x)$. Отсюда и из (4.59) следует, что $v(x) \geqslant \varphi(x)$. Значит, для любого $x \in \Omega \setminus (E \cup E')$ имеем $v(x) \geqslant \varphi(x)$, т.е. $v \geqslant \varphi$ п.в. на Ω. Поэтому $v \in V$, и можно заключить, что V – замкнутое множество.

Проверим выполнение условия (3.9). Пусть $u \in V$, $v \in V$ и $k > 0$. Имеем $u \geqslant \varphi$ п.в. на Ω, $v \geqslant \varphi$ п.в. на Ω. Следовательно, существуют множества $E_1 \subset \Omega$, $E_2 \subset \Omega$ меры нуль такие, что

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_1 \quad u(x) \geqslant \varphi(x), \tag{4.61}$$

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_2 \quad v(x) \geqslant \varphi(x). \tag{4.62}$$

Пусть $x \in \Omega \setminus (E_1 \cup E_2)$. Если $|u(x) - v(x)| \leqslant k$, то с учетом определения функции T_k и (4.62) имеем $u(x) - T_k(u(x) - v(x)) = u(x) - (u(x) - v(x)) = v(x) \geqslant \varphi(x)$. Если $u(x) - v(x) > k$, то в силу определения функции T_k и (4.62) имеем $u(x) - T_k(u(x) - v(x)) = u(x) - k > v(x) \geqslant \varphi(x)$. Наконец, если $u(x) - v(x) < -k$, то, учитывая определение функции T_k, неравенство $k > 0$ и (4.61), получаем $u(x) - T_k(u(x) - v(x)) = u(x) + k > u(x) \geqslant \varphi(x)$. Следовательно, в любом случае $u(x) - T_k(u(x) - v(x)) \geqslant \varphi(x)$. Значит, $u - T_k(u - v) \geqslant \varphi$ п.в. на Ω. Поэтому, учитывая, что $u - T_k(u - v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, получаем включение $u - T_k(u - v) \in V$. Следовательно, условие (3.9) для данного множества V выполнено.

Пример 4.2. Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ и

$$V = \Big\{ v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) :\ v \leqslant \varphi \ \text{ п. в. на } \ \Omega \Big\}.$$

Тогда множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условиям (3.8) и (3.9). Доказательство этих свойств проводится аналогично изложенному при рассмотрении предыдущего примера.

Пример 4.3. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ п. в. на Ω, и пусть хотя бы одна из функций φ_1 и φ_2 принадлежит $L^\infty(\Omega)$. Пусть

$$V = \Big\{ v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) :\ \varphi_1 \leqslant v \leqslant \varphi_2 \ \text{ п. в. на } \ \Omega \Big\}.$$

Тогда множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условиям (3.8) и (3.9).

Действительно, так как $\varphi_1, \varphi_2 \in V$ и хотя бы одна из функций φ_1 и φ_2 принадлежит $L^\infty(\Omega)$, то множество V непустое и удовлетворяет условию (3.8). Выпуклость и замкнутость указанного множества V доказываются так же, как в примере 4.1.

Проверим выполнение условия (3.9) для множества V. Пусть $u \in V$, $v \in V$ и $k > 0$. Имеем $\varphi_1 \leqslant u \leqslant \varphi_2$ п.в. на Ω, $\varphi_1 \leqslant v \leqslant \varphi_2$ п.в. на Ω. Следовательно, существуют множества $E_1 \subset \Omega$, $E_2 \subset \Omega$ меры нуль такие, что

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_1 \quad \varphi_1(x) \leqslant u(x) \leqslant \varphi_2(x), \tag{4.63}$$

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_2 \quad \varphi_1(x) \leqslant v(x) \leqslant \varphi_2(x). \tag{4.64}$$

Пусть $x \in \Omega \setminus (E_1 \cup E_2)$. Если $|u(x) - v(x)| \leqslant k$, то, учитывая определение функции T_k, получаем $u(x) - T_k(u(x) - v(x)) = u(x) - (u(x) - v(x)) = v(x)$, и следовательно, в силу (4.64) имеем $\varphi_1(x) \leqslant u(x) - T_k(u(x) - v(x)) \leqslant \varphi_2(x)$. Если $u(x) - v(x) > k$, то учитывая определение функции T_k, (4.63), (4.64) и неравенство $k > 0$, получаем

$$\varphi_1(x) \leqslant v(x) < u(x) - T_k(u(x) - v(x)) = u(x) - k < u(x) \leqslant \varphi_2(x).$$

Наконец, если $u(x) - v(x) < -k$, то учитывая определение функции T_k, (4.63), (4.64) и неравенство $k > 0$, получаем

$$\varphi_1(x) \leqslant u(x) < u(x) - T_k(u(x) - v(x)) = u(x) + k < v(x) \leqslant \varphi_2(x).$$

Следовательно, в любом случае $\varphi_1(x) \leqslant u(x) - T_k(u(x) - v(x)) \leqslant \varphi_2(x)$. Значит, $\varphi_1 \leqslant u - T_k(u - v) \leqslant \varphi_2$ п.в. на Ω. Поэтому, учитывая, что $u - T_k(u - v) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, получаем включение $u - T_k(u - v) \in V$. Следовательно, условие (3.9) для данного множества V выполнено.

Пример 4.4. Пусть φ – неотрицательная функция на Ω и

$$V = \big\{ v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) :\ |\nabla v| \leqslant \varphi \quad \text{п. в. на } \Omega \big\}.$$

Тогда множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условиям (3.8) и (3.9).

Действительно, пусть w – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$ $w(x) = 0$. Имеем $w \in V$ и, следовательно, множество V непустое и удовлетворяет условию (3.8).

Проверим выпуклость множества V. Пусть $u, v \in V$ и $\alpha \in [0, 1]$. Имеем $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и

$$|\nabla u| \leqslant \varphi \text{ п. в. на } \Omega, \quad |\nabla v| \leqslant \varphi \text{ п. в. на } \Omega. \tag{4.65}$$

Положим $w = (1 - \alpha)u + \alpha v$. Очевидно, что $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Согласно (4.65) существуют множества $E_1 \subset \Omega$ и $E_2 \subset \Omega$ меры нуль такие, что для любого $x \in \Omega \setminus E_1$ имеем $|\nabla u(x)| \leqslant \varphi(x)$, а для любого $x \in \Omega \setminus E_2$ имеем $|\nabla v(x)| \leqslant \varphi(x)$. Так как $\nabla w = (1 - \alpha)\nabla u + \alpha \nabla v$ п.в. на Ω, то существует множество $E_3 \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \Omega \setminus E_3$ имеем $\nabla w(x) = (1-\alpha)\nabla u(x)+\alpha\nabla v(x)$. Тогда для $x \in \Omega \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ получаем

$$|\nabla w(x)| \leqslant (1 - \alpha)|\nabla u(x)| + \alpha|\nabla v(x)| \leqslant (1 - \alpha)\varphi(x) + \alpha\varphi(x) = \varphi(x).$$

Значит, $|\nabla w| \leqslant \varphi$ п.в. на Ω. Теперь можно заключить, что $w \in V$. Тем самым выпуклость множества V доказана.

Проверим замкнутость множества V. Пусть $\{v_k\} \subset V$, $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ и $v_k \to v$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$. Значит, $\|v_k - v\|_{1,q,\nu} \to 0$. Используя это, устанавливаем, что существует возрастающая последовательность $\{k_j\} \subset \mathbb{N}$ такая, что $|\nabla v_{k_j}| \to |\nabla v|$ п.в. на Ω. Поэтому, существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E \quad |\nabla v_{k_j}(x)| \to |\nabla v(x)|. \tag{4.66}$$

Кроме того, так как $\{v_k\} \subset V$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ существует множество $E_k \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_k \qquad |\nabla v_k(x)| \leqslant \varphi(x). \tag{4.67}$$

Положим $E' = \cup_k E_k$. Имеем meas $E' = 0$. Зафиксируем $x \in \Omega \setminus (E \cup E')$. Покажем, что $|\nabla v(x)| \leqslant \varphi(x)$. Действительно, зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. Так как $x \notin E'$, то $x \notin E_{k_j}$. Следовательно, $x \in \Omega \setminus E_{k_j}$. Тогда, в силу (4.67), имеем $|\nabla v_{k_j}(x)| \leqslant \varphi(x)$. Таким образом, для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $|\nabla v_{k_j}(x)| \leqslant \varphi(x)$. Отсюда и из (4.66) следует, что $|\nabla v(x)| \leqslant \varphi(x)$. Значит, для любого $x \in \Omega \setminus (E \cup E')$ имеем $|\nabla v(x)| \leqslant \varphi(x)$, т.е. $|\nabla v| \leqslant \varphi$ п.в. на Ω. Поэтому $v \in V$, и можно заключить, что V – замкнутое множество.

Проверим выполнение условия (3.9). Пусть $u \in V$, $v \in V$ и $k > 0$. Положим $w = u - T_k(u - v)$. Имеем $|\nabla u| \leqslant \varphi$ п.в. на Ω, $|\nabla v| \leqslant \varphi$ п.в. на Ω. Следовательно, существуют множества $E_1 \subset \Omega$, $E_2 \subset \Omega$ меры нуль такие, что

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_1 \quad |\nabla u(x)| \leqslant \varphi(x), \tag{4.68}$$

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_2 \quad |\nabla v(x)| \leqslant \varphi(x). \tag{4.69}$$

Так как $\nabla w = \nabla u - (\nabla u - \nabla v) \cdot 1_{\{|u-v|<k\}}$ п.в. на Ω, то существует множество $E_3 \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_3 \quad \nabla w(x) = \nabla u(x) - (\nabla u(x) - \nabla v(x)) \cdot 1_{\{|u-v|<k\}}(x). \tag{4.70}$$

Пусть $x \in \Omega \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$. Если $|u(x) - v(x)| < k$, то в силу (4.70) и (4.69) имеем $|\nabla w(x)| = |\nabla v(x)| \leqslant \varphi(x)$. Если $|u(x) - v(x)| \geqslant k$, то в силу (4.70) и (4.68) имеем $|\nabla w(x)| = |\nabla u(x)| \leqslant \varphi(x)$. Следовательно, в любом случае $|\nabla w(x)| \leqslant \varphi(x)$. Значит, $|\nabla w| \leqslant \varphi$ п.в. на Ω. Поэтому, учитывая, что $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, получаем включение $w \in V$. Следовательно, условие (3.9) для данного множества V выполнено.

Пример 4.5. Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ и

$$V = \big\{ v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) :\; D_i v \geqslant D_i \varphi \;\text{ п. в. на }\; \Omega,\;\; i = 1, \ldots, n \big\}.$$

Тогда множество V непустое, замкнутое, выпуклое и удовлетворяет условиям (3.8) и (3.9).

Действительно, так как $\varphi \in V$, то множество V непустое и удовлетворяет условию (3.8). Выпуклость и замкнутость указанного множества V доказываются так же, как в примере 4.4.

Проверим выполнение условия (3.9). Пусть $u \in V$, $v \in V$, $k > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Положим $w = u - T_k(u - v)$. Имеем $D_i u \geqslant D_i \varphi$ п.в. на Ω, $D_i v \geqslant D_i \varphi$ п.в. на Ω. Следовательно, существуют множества $E_1 \subset \Omega$, $E_2 \subset \Omega$ меры нуль такие, что

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_1 \quad D_i u(x) \geqslant D_i \varphi(x), \tag{4.71}$$

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_2 \quad D_i v(x) \geqslant D_i \varphi(x). \tag{4.72}$$

Так как $D_i w = D_i u - (D_i u - D_i v) \cdot 1_{\{|u-v|<k\}}$ п.в. на Ω, то существует множество $E_3 \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_3 \quad D_i w(x) = D_i u(x) - (D_i u(x) - D_i v(x)) \cdot 1_{\{|u-v|<k\}}(x). \tag{4.73}$$

Пусть $x \in \Omega \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$. Если $|u(x) - v(x)| < k$, то в силу (4.73) и (4.72) имеем $D_i w(x) = D_i v(x) \geqslant D_i \varphi(x)$. Если $|u(x) - v(x)| \geqslant k$, то в силу (4.73) и (4.71) имеем $D_i w(x) = D_i u(x) \geqslant D_i \varphi(x)$. Следовательно, в любом случае $D_i w(x) \geqslant D_i \varphi(x)$. Значит, $D_i w \geqslant D_i \varphi$ п.в. на Ω. Поэтому, учитывая, что $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, получаем включение $w \in V$. Следовательно, условие (3.9) для данного множества V выполнено.

Выводы к разделу 4

В разделе 4 диссертационной работы изложены результаты о свойствах суммируемости решений нелинейных эллиптических вариационных неравенств с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-правыми частями.

Основные результаты раздела следующие.

1. Описаны свойства суммируемости T-решений рассмотренных вариационных неравенств (теорема 4.1). В частности, даны достаточные

условия относительно показателей анизотропии коэффициентов и вовлеченных весовых функций, обеспечивающие принадлежность T-решений исследуемых вариационных неравенств с L^1-правыми частями пространству $L^1(\Omega)$ (следствие 4.2) и пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ (следствие 4.3).

2. Установлено, что принадлежность T-решений рассмотренных вариационных неравенств классу L^1 можно обеспечить за счет некоторого повышения суммируемости правой части неравенства, не требуя дополнительных условий относительно вовлеченных весовых функций (теорема 4.2).

3. Получены теоремы существования $W^{1,1}$-решений вырождающихся анизотропных вариационных неравенств с L^1-данными (теоремы 4.3, 4.5–4.7).

Основные результаты, изложенные в разделе 4, опубликованы в работах [2, 4, 13, 14, 62].

РАЗДЕЛ 5

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ АНИЗОТРОПНЫХ УРАВНЕНИЙ С L^1-ДАННЫМИ

5.1. Формулировка задачи Дирихле и определения ее решений

Пусть a_i, $i = 1, \ldots, n$, – функции Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$, введенные в подразделе 3.2.

В дальнейшем будет полезно следующее предложение.

Предложение 5.1. *Справедливы такие утверждения:*

1) *если* $u, w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ *и* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *то* $a_i(x, \nabla u) D_i w \in L^1(\Omega)$;

2) *если* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$, $l \geqslant k + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}$ *и* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *то* $a_i(x, \delta u) D_i T_k(u - w) = a_i(x, \nabla T_l(u)) D_i T_k(u - w)$ *п.в. на* Ω;

3) *если* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$, $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$ *и* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *то* $a_i(x, \delta u) D_i T_k(u - w) \in L^1(\Omega)$.

Утверждение 1) устанавливается с использованием (3.5). Утверждение 2) доказывается с помощью предложений 3.4 и 3.5. Наконец, утверждение 3) следует из предложения 3.5 и утверждений 1) и 2).

Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \nabla u) = f \quad \text{в } \Omega, \tag{5.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{5.2}$$

Рассмотрим несколько определений решений задачи (5.1), (5.2).

Определение 5.1. Энтропийным решением задачи (5.1), (5.2) назовем функцию $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ такую, что для любых $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и $k \geqslant 1$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i T_k(u - w) \right\} dx \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u - w) dx. \tag{5.3}$$

Принимая во внимание утверждение 3) предложения 5.1, легко видеть, что интеграл в левой части неравенства (5.3) конечен. Интеграл в правой части этого неравенства тоже конечен, что следует из ограниченности функций T_k.

Определение 5.2. T-решением задачи (5.1), (5.2) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu, \Omega)$ такую, что:

(i) для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $a_i(x, \delta u) \in L^1(\Omega)$;

(ii) для любой функции $w \in C_0^1(\Omega)$ имеем

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i w \right\} dx = \int_\Omega f w\, dx.$$

Определение 5.3. W-решением задачи (5.1), (5.2) назовем функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ такую, что:

(i) для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $a_i(x, \nabla u) \in L^1(\Omega)$;

(ii) для любой функции $w \in C_0^1(\Omega)$ имеем

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i w \right\} dx = \int_\Omega f w\, dx.$$

Отметим, что сформулированные определения имеют такую же форму, что и определения соответствующих типов решений, изучавшихся в [29, 35, 37] в случае нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с L^1-данными и изотропными и невырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами.

В связи с доказательством существования решений задачи (5.1), (5.2) в смысле данных определений заметим, что в силу теорем 3.1 и 3.2 справедлив следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть* V – *замкнутое выпуклое множество в* $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, *удовлетворяющее условиям* (3.8) *и* (3.9). *Тогда существует единственная функция* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ *такая, что справедливы следующие утверждения*:

(i) *для любых* $w \in V \cap L^\infty(\Omega)$ *и* $k \geqslant 1$ *имеем* $w - T_k(w-u) \in V$;

(ii) *если* $w \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$ *и* $l = k + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}$, *то*

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_l(u)) D_i T_k(u-w) \Big\} dx \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u-w)dx.$$

Кроме того, из теоремы 4.1 вытекает такой результат.

Предложение 5.2. *Пусть* $m \in \mathbb{R}^n$, *и пусть выполняется условие* (4.1). *Пусть* V – *замкнутое выпуклое множество в* $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, *удовлетворяющее условиям* (3.8) *и* (3.9). *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, *и пусть справедливы утверждения* (i) *и* (ii) *теоремы* 5.1. *Тогда для любого* $i \in \{1,\dots,n\}$ *и любого* λ *такого, что* $0 < \lambda < \frac{q_i p_m(\bar q - 1)}{p_m(\bar q - 1) + \bar q}$, *имеем* $\nu_i^{1/q_i}\delta_i u \in L^\lambda(\Omega)$.

5.2. Существование решений задачи Дирихле

Теорема 5.2. *Существует единственное энтропийное решение задачи* (5.1), (5.2).

Доказательство. Применяя теорему 5.1 для $V = \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$, устанавливаем, что существует единственная функция $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,q}(\nu,\Omega)$ такая, что справедливо следующее утверждение: если $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k \geqslant 1$

и $l = k + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}$, то

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_l(u)) D_i T_k(u-w) \Big\} dx \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u-w) dx.$$

Отсюда и утверждения 2) предложения 5.1 заключаем, что u – единственное энтропийное решение задачи (5.1), (5.2). Теорема доказана.

Из предложения 3.5, утверждения 2) предложения 5.1 и предложения 5.2 вытекает такой результат.

Предложение 5.3. *Пусть* $m \in \mathbb{R}^n$, *и пусть выполняется условие* (4.1). *Пусть* u *– энтропийное решение задачи* (5.1), (5.2). *Тогда для любого* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *и любого* λ *такого, что* $0 < \lambda < \frac{q_i p_m(\bar{q}-1)}{p_m(\bar{q}-1)+\bar{q}}$, *имеем* $\nu_i^{1/q_i} \delta_i u \in L^\lambda(\Omega)$.

Следующая теорема показывает, что при дополнительных предположениях относительно чисел $q_1, \ldots, q_n$ и весовых функций $\nu_1, \ldots, \nu_n$ энтропийное решение задачи (5.1), (5.2) является T-решением этой же задачи.

Теорема 5.3. *Предположим, что существуют* $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ *такие, что выполнены следующие условия:*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad m_i \geqslant 1/(q_i - 1), \quad 1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega), \tag{5.4}$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad \sigma_i > 0, \quad \frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(q_i - 1)\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)}, \quad \nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega). \tag{5.5}$$

Пусть u *– энтропийное решение задачи* (5.1), (5.2). *Тогда* u *–* T-*решение задачи* (5.1), (5.2).

Доказательство. Покажем, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо включение $a_i(x, \delta u) \in L^1(\Omega)$. Действительно, пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$. В силу (3.5) имеем

$$|a_i(x,\delta u)| \leqslant (c_1+1)\sum_{j=1}^{n} {\nu_i}^{1/q_i} |{\nu_j}^{1/q_j}\delta_j u|^{q_j(q_i-1)/q_i} + {\nu_i}^{1/q_i} {g_1}^{(q_i-1)/q_i} \text{ п.в. на } \Omega. \tag{5.6}$$

Используя неравенство Юнга с показателями q_i и $q_i/(q_i-1)$, получаем ${\nu_i}^{1/q_i}{g_1}^{(q_i-1)/q_i} \leqslant \nu_i + g_1$. Отсюда, учитывая, что $g_1 \in L^1(\Omega)$ и согласно условию (5.5) $\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$, выводим, что

$${\nu_i}^{1/q_i}{g_1}^{(q_i-1)/q_i} \in L^1(\Omega). \tag{5.7}$$

Далее, зафиксируем $j \in \{1,\dots,n\}$ и положим

$$\lambda_{ij} = \frac{\sigma_i(q_i-1)q_j}{\sigma_i q_i - 1}.$$

Используя неравенство Юнга с показателями $\sigma_i q_i$ и $\sigma_i q_i/(\sigma_i q_i - 1)$, получим

$${\nu_i}^{1/q_i} |{\nu_j}^{1/q_j}\delta_j u|^{q_j(q_i-1)/q_i} \leqslant {\nu_i}^{\sigma_i} + |{\nu_j}^{1/q_j}\delta_j u|^{\lambda_{ij}}. \tag{5.8}$$

Заметим, что в силу условия (5.5)

$$\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega) \tag{5.9}$$

и

$$\lambda_{ij} < \frac{q_j p_m(\overline{q}-1)}{p_m(\overline{q}-1)+\overline{q}}.$$

Поскольку выполняется условие (5.4), из последнего неравенства и предложения 5.3 вытекает, что ${\nu_j}^{1/q_j}\delta_j u \in L^{\lambda_{ij}}(\Omega)$. Это включение вместе с (5.8) и (5.9) влечет, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$${\nu_i}^{1/q_i} |{\nu_j}^{1/q_j}\delta_j u|^{q_j(q_i-1)/q_i} \in L^1(\Omega). \tag{5.10}$$

Из (5.6), (5.7) и (5.10) выводим, что для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ справедливо включение $a_i(x,\delta u) \in L^1(\Omega)$.

Далее, зафиксируем функцию $w \in C_0^1(\Omega)$ и число $k \geqslant \|w\|_{L^\infty(\Omega)} + 1$, и положим для любого $h \in \mathbb{N}$ $w_h = T_h(u) - w$.

Пусть $h \in \mathbb{N}$. Учитывая, что $w_h \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\nu,\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, в силу определения 5.1 имеем

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u) D_i T_k(u-w_h) \right\} dx \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u-w_h)dx. \tag{5.11}$$

Из предложений 3.4 и 3.5 вытекает, что для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$

$$D_i T_k(u-w_h) = (\delta_i u \cdot 1_{\{|u|\geqslant h\}} + D_i w)\cdot 1_{\{|u-w_h|<k\}} \text{ п.в. на } \Omega.$$

Используя это вместе с (3.6), получаем

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u) D_i T_k(u-w_h) \right\} dx$$
$$\geqslant \int_{\{|u-w_h|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u) D_i w \right\} dx - \int_{\{|u|\geqslant h\}} g_2\, dx.$$

Отсюда и из (5.11) следует, что для любого $h \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{|u-w_h|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u) D_i w \right\} dx \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u-w_h)dx + \int_{\{|u|\geqslant h\}} g_2\, dx. \tag{5.12}$$

Заметим, что для любого $h \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \{|u-w_h|<k\}) \leqslant \operatorname{meas}\{|u| \geqslant h\}$. Тогда, учитывая, что $\operatorname{meas}\{|u|\geqslant h\} \to 0$ при $h \to \infty$ и функции g_2 и $a_i(x,\delta u)D_i w$, $i=1,\ldots,n$, суммируемы на Ω, получим

$$\int_{\{|u-w_h|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u) D_i w \right\} dx \to \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,\delta u) D_i w \right\} dx, \tag{5.13}$$

$$\int_{\{|u|\geqslant h\}} g_2\, dx \to 0. \tag{5.14}$$

Наконец, так как $u - w_h \to w$ на Ω и $k \geqslant \|w\|_{L^\infty(\Omega)}$, то $T_k(u-w_h) \to w$ на Ω. Поэтому, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\int_\Omega f\, T_k(u-w_h)dx \to \int_\Omega f w\, dx. \tag{5.15}$$

Из (5.12)–(5.15) выводим, что

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i w \Big\} dx \leqslant \int_\Omega f w \, dx. \tag{5.16}$$

Так как в неравенстве (5.16) функция $w \in C_0^1(\Omega)$ произвольна, то

$$\forall w \in C_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i w \Big\} dx = \int_\Omega f w \, dx.$$

Итак, функция u обладает всеми свойствами, позволяющими утверждать, что она является T-решением задачи (5.1), (5.2). Теорема доказана.

Заметим, что идея использования функций $w_h = T_h(u) - w$ в вышеприведенном доказательстве взята из [29, следствие 4.3].

Из теорем 5.2 и 5.3 вытекает такой результат.

Следствие 5.1. *Предположим, что существуют* $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ *такие, что выполнены условия* (5.4) и (5.5). *Тогда существует* T*-решение задачи* (5.1), (5.2).

Сформулируем теперь теорему о достаточных условиях, при которых энтропийное решение рассматриваемой задачи является ее W-решением.

Теорема 5.4. *Предположим, что существуют* $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ *с положительными координатами такие, что выполнены следующие условия:*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad \frac{\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)} < q_i - 1 - \frac{1}{m_i}, \quad 1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega); \tag{5.17}$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad \frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(q_i - 1)\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)}, \quad \nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega). \tag{5.18}$$

Пусть u *– энтропийное решение задачи* (5.1), (5.2). *Тогда* u *–* W*-решение задачи* (5.1), (5.2).

Доказательство. Покажем, что $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. Действительно, пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. Ясно, что

$$|\delta_i u| = (1/\nu_i)^{1/q_i} |{\nu_i}^{1/q_i} \delta_i u| \text{ п.в. на } \Omega. \tag{5.19}$$

Используя неравенство Юнга с показателями $m_i q_i$ и $m_i q_i/(m_i q_i - 1)$, получим

$$(1/\nu_i)^{1/q_i} |{\nu_i}^{1/q_i} \delta_i u| \leqslant (1/\nu_i)^{m_i} + |{\nu_i}^{1/q_i} \delta_i u|^{m_i q_i/(m_i q_i - 1)}. \tag{5.20}$$

В силу условия (5.17) выполняется условие (4.1), $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$ и

$$\frac{m_i q_i}{m_i q_i - 1} < \frac{q_i\, p_m(\bar{q} - 1)}{p_m(\bar{q} - 1) + \bar{q}}\,.$$

Тогда, используя предложение 5.3, из (5.19) и (5.20) выводим, что $|\delta_i u| \in L^1(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $|\delta u| \in L^1(\Omega)$. Отсюда и из предложения 3.6 следует, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ и $\delta_i u = D_i u$ п.в. на Ω. Теперь, учитывая, что в силу условий данной теоремы выполняются условия теоремы 5.3, и, значит, u – T-решение задачи (5.1), (5.2), заключаем, что u – W-решение задачи (5.1), (5.2). Теорема доказана.

Из теорем 5.2 и 5.4 вытекает следующий результат.

Следствие 5.2. *Предположим, что существуют* $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ *с положительными координатами такие, что выполнены условия* (5.17) и (5.18). *Тогда существует* W*-решение задачи* (5.1), (5.2).

5.3. Эквивалентные формулировки условий существования T-решений и W-решений в некоторых модельных случаях

В этом подразделе дадим эквивалентные формулировки условий теорем 5.3 и 5.4 для ряда модельных случаев, в которых n – четное число, $q_1 = \dots = q_{n/2} \leqslant q_{n/2+1} = \dots = q_n$, а $\nu_1, \dots, \nu_n$ – степенные функции с вырождением или сингулярностью в Ω.

Итак, предположим, что $n = 2l$, где $l \in \mathbb{N}$, и пусть α и β – числа такие, что

$$1 < \alpha \leqslant \beta < n. \tag{5.21}$$

Предположим, что

$$q_i = \alpha, \qquad \text{если } i \in \{1, \dots, l\}, \tag{5.22}$$

$$q_i = \beta, \qquad \text{если } i \in \{l+1, \dots, n\}. \tag{5.23}$$

Поскольку $n \geqslant 2$ и $\beta > 1$, имеем

$$1 \leqslant \frac{\beta n}{2\beta + n - 2} < \beta,$$

а так как согласно (5.21) $\alpha \leqslant \beta$, то из (5.22) и (5.23) следует, что

$$\forall\, i \in \{1, \dots, n\} \qquad \alpha \leqslant q_i \leqslant \beta. \tag{5.24}$$

Кроме того, в силу определения числа $\overline{q}$ и (5.22), (5.23) имеем

$$\frac{1}{\overline{q}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right). \tag{5.25}$$

Наконец, если $m \in \mathbb{R}^n$, $m_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, то из определения чисел p_m и $\overline{q}$ следует, что

$$\frac{1}{p_m} > \frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{n}. \tag{5.26}$$

Предложение 5.4. *Предположим, что для любого* $i \in \{1, \dots, n\}$ *имеем* $\nu_i \equiv 1$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *существуют* $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ *такие, что выполняются условия* (5.4) *и* (5.5);

(b) *справедливо неравенство*

$$\frac{\beta n}{2\beta + n - 2} < \alpha. \tag{5.27}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение (a) верно. Тогда в силу условия (5.5) и предположения (5.23) имеем

$$\frac{\beta - 1}{p_m} < 1 - \frac{1}{\overline{q}}. \tag{5.28}$$

Поскольку ввиду условия (5.4) $m_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, используя (5.26) и (5.28), получаем

$$\frac{n}{\overline{q}} < 1 + \frac{n-1}{\beta}. \tag{5.29}$$

Отсюда, используя равенство (5.25), выводим неравенство (5.27). Значит, утверждение (b) верно.

Обратно, предположим, что утверждение (b) верно. Тогда, в силу неравенств (5.25) и (5.27) справедливо неравенство (5.29), и, следовательно, $(\overline{q}-1)/(\beta-1) > (n-\overline{q})/n$. Учитывая это неравенство, зафиксируем число $t \in \mathbb{R}$ такое, что

$$t \geqslant \frac{1}{\alpha - 1}, \tag{5.30}$$

$$\frac{1}{t} < \frac{\overline{q}-1}{\beta-1} - \frac{n-\overline{q}}{n}. \tag{5.31}$$

Из (5.31) следует, что

$$1 - \frac{\beta-1}{\overline{q}-1}\left(\frac{1}{t} - \frac{\overline{q}}{n} + 1\right) > 0.$$

Учитывая это неравенство, зафиксируем $s > 0$ такое, что

$$\frac{1}{s} < 1 - \frac{\beta-1}{\overline{q}-1}\left(\frac{1}{t} - \frac{\overline{q}}{n} + 1\right). \tag{5.32}$$

Пусть теперь $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$, причем

$$m_i = t, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.33}$$

$$\sigma_i = s, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5.34}$$

Используя (5.24), (5.30) и (5.33) и то, что $\nu_i \equiv 1$, $i = 1, \ldots, n$, устанавливаем, что условие (5.4) выполняется. При этом, используя (5.33), находим, что

$$\frac{1}{p_m} = \frac{1}{t\overline{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{\overline{q}}.$$

Это вместе с (5.32) влечет, что

$$\frac{1}{s} < 1 - \frac{(\beta - 1)\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)}. \tag{5.35}$$

Используя (5.24), (5.34) и (5.35) и то, что $\nu_i \equiv 1,\ i = 1, \dots, n$, устанавливаем, что условие (5.5) выполняется. Таким образом, утверждение (a) верно. Предложение доказано.

Предложение 5.5. *Предположим, что для любого* $i \in \{1, \dots, n\}$ *имеем* $\nu_i \equiv 1$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *существуют* $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ *с положительными координатами такие, что выполняются условия* (5.17) *и* (5.18);

(b) *справедливо неравенство*

$$\max\left\{\frac{\beta n}{2\beta + n - 2}, \frac{(3n-2)\beta}{(2\beta - 1)n}\right\} < \alpha. \tag{5.36}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение (a) верно. Из условия (5.17) и предположения (5.22) вытекает неравенство $\frac{\overline{q}}{p_m(\overline{q}-1)} < \alpha - 1$. Отсюда, используя (5.26), заключаем, что $\frac{1}{\overline{q}} < 1 - \frac{n-1}{n\alpha}$. Это вместе с (5.25) влечет, что

$$(3n-2)\beta < (2\beta - 1)n\alpha. \tag{5.37}$$

Кроме того, из условия (5.18) и предположения (5.23) вытекает неравенство $(\beta - 1)/p_m < 1 - 1/\overline{q}$. Отсюда, используя (5.25) и (5.26), получаем, что $\beta n < (2\beta + n - 2)\alpha$. Это вместе с (5.37) приводит к заключению, что неравенство (5.36) справедливо. Таким образом, утверждение (b) верно.

Обратно, пусть утверждение (b) верно. Из равенства (5.25) и неравенства (5.37) выводим, что

$$\frac{n - \overline{q}}{n(\overline{q} - 1)} < \alpha - 1. \tag{5.38}$$

Кроме того, из равенства (5.25) и неравенства $\beta n < (2\beta + n - 2)\alpha$ выводим, что $(n - \overline{q})/n < (\overline{q} - 1)/(\beta - 1)$. Учитывая это неравенство и (5.38), зафиксируем $t > 0$ такое, что

$$\frac{1}{t} < \frac{\overline{q} - 1}{\overline{q}} \left[\alpha - 1 - \frac{n - \overline{q}}{n(\overline{q} - 1)} \right], \tag{5.39}$$

$$\frac{1}{t} < \frac{\overline{q} - 1}{\beta - 1} - \frac{n - \overline{q}}{n}. \tag{5.40}$$

Из неравенства (5.39) следует, что

$$\frac{\overline{q}}{\overline{q} - 1} \left(\frac{1}{t\overline{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{\overline{q}} \right) < \alpha - 1 - \frac{1}{t}, \tag{5.41}$$

а из неравенства (5.40) вытекает, что

$$1 - \frac{(\beta - 1)\overline{q}}{\overline{q} - 1} \left(\frac{1}{t\overline{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{\overline{q}} \right) > 0.$$

Учитывая последнее неравенство, зафиксируем $s > 0$ такое, что

$$\frac{1}{s} < 1 - \frac{(\beta - 1)\overline{q}}{\overline{q} - 1} \left(\frac{1}{t\overline{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{\overline{q}} \right). \tag{5.42}$$

Пусть теперь $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$, причем

$$m_i = t, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.43}$$

$$\sigma_i = s, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5.44}$$

Используя (5.43), получаем, что

$$\frac{1}{p_m} = \frac{1}{t\overline{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{\overline{q}}. \tag{5.45}$$

Это вместе с (5.24), (5.41) и (5.43) влечет, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)} < q_i - 1 - \frac{1}{m_i},$$

и, очевидно, что для $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. Следовательно, условие (5.17) выполняется. Кроме того, из (5.24), (5.42), (5.44) и (5.45) выводим, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(q_i - 1)\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)},$$

и, очевидно, что для $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$. Следовательно, условие (5.18) выполняется. Таким образом, утверждение (a) справедливо. Предложение доказано.

Замечание 5.1. Необходимыми для выполнения неравенства (5.36) являются следующие условия:

$$\beta > 2 - \frac{1}{n}, \qquad \alpha > 2 - \frac{5n-4}{n^2+2n-2}.$$

Действительно, пусть неравенство (5.36) справедливо. Тогда ввиду исходного предположения $\alpha \leqslant \beta$ вытекает, что $(3n-2)/n < 2\beta - 1$. Следовательно, $\beta > 2 - 1/n$. Кроме того, в силу (5.36) имеем $n/\alpha < 2 + (n-2)/\beta$. Отсюда и из неравенства $\beta > 2 - 1/n$ заключаем, что $\alpha > 2 - (5n-4)/(n^2+2n-2)$.

Замечание 5.2. Заметим, что если $\beta > 2 - 1/n$, то

$$\max\left\{\frac{n}{2\beta+n-2}, \ \frac{3n-2}{(2\beta-1)n}\right\} < 1.$$

Учитывая это, получаем, что если $\beta > 2 - 1/n$,

$$\max\left\{\frac{n}{2\beta+n-2}, \ \frac{3n-2}{(2\beta-1)n}\right\} < \varepsilon \leqslant 1$$

и $\alpha = \beta\varepsilon$, то неравенство (5.36) справедливо.

Пусть θ – начало координат в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\theta \in \mathbb{R}^n$ и $\theta_i = 0$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Предложение 5.6. *Пусть* $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, *и пусть справедливы утверждения:*

$$\textit{если } i \in \{1, \ldots, l\}, \textit{ то для любого } x \in \Omega \textit{ имеем } \nu_i(x) = |x|^\gamma, \tag{5.46}$$

$$\textit{если } i \in \{l+1, \ldots, n\}, \textit{ то для любого } x \in \Omega \textit{ имеем } \nu_i(x) = |x|^\tau. \tag{5.47}$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) *существуют* $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ *такие, что выполняются условия* (5.4) *и* (5.5);

(b) *справедливы неравенства*

$$\gamma < n(\alpha - 1), \quad \tau < n(\beta - 1), \tag{5.48}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta} < \frac{\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n}{\alpha(\beta - 1)}. \tag{5.49}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение (a) верно. Пусть $i \in \{1, \ldots, l\}$. Из условия (5.4) и предположения (5.22) следует, что $m_i \geqslant 1/(\alpha - 1)$ и $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. Последнее включение вместе с включением $\theta \in \Omega$ и утверждением (5.46) влечет, что $m_i < n/\gamma$. Из данных неравенств для m_i вытекает первое из неравенств (5.48). Пусть теперь $i \in \{l+1, \ldots, n\}$. Из условия (5.4) и предположения (5.23) следует, что $m_i \geqslant 1/(\beta - 1)$ и $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. Последнее включение вместе с включением $\theta \in \Omega$ и утверждением (5.47) влечет, что $m_i < n/\tau$. Из данных неравенств для m_i вытекает второе из неравенств (5.48). Вследствие изложенных рассуждений имеем

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, l\} \qquad \frac{1}{m_i} > \frac{\gamma}{n}, \tag{5.50}$$

$$\forall\, i \in \{l+1, \ldots, n\} \qquad \frac{1}{m_i} > \frac{\tau}{n}. \tag{5.51}$$

Используя (5.22), (5.23), (5.50) и (5.51), получаем

$$\frac{1}{p_m} > \frac{1}{2n}\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{\overline{q}}. \tag{5.52}$$

Далее, из условия (5.5) и предположения (5.23) следует, что $(\beta - 1)/p_m < 1 - 1/\overline{q}$, откуда с помощью (5.52) выводим, что

$$(\beta - 1)\left[\frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta}\right)\right] < 1 - \frac{1}{\overline{q}}.$$

Отсюда и (5.25) следует неравенство (5.49). Таким образом, утверждение (b) верно.

Обратно, предположим, что утверждение (b) верно. Тогда в силу неравенств (5.48)

$$\frac{\gamma}{n(\alpha - 1)} < 1, \qquad \frac{\tau}{n(\beta - 1)} < 1,$$

а в силу (5.49) имеем

$$\alpha(\beta-1)\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\tau}{\beta}\right)\left[\alpha(2\beta+n-2)-\beta n\right]^{-1}<1.$$

Учитывая эти неравенства, зафиксируем $\varepsilon < 1$, такое, что

$$\frac{\gamma}{n(\alpha-1)}<\varepsilon, \quad \frac{\tau}{n(\beta-1)}<\varepsilon, \tag{5.53}$$

$$\alpha(\beta-1)\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\tau}{\beta}\right)\left[\alpha(2\beta+n-2)-\beta n\right]^{-1}<\varepsilon. \tag{5.54}$$

Используя (5.25) и (5.54), устанавливаем, что

$$1-\frac{\overline{q}(\beta-1)}{\overline{q}-1}\left[\frac{1}{2n\varepsilon}\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\tau}{\beta}\right)-\frac{1}{n}+\frac{1}{\overline{q}}\right]>0.$$

Учитывая это неравенство, зафиксируем $s > 0$ такое, что

$$\frac{1}{s}<1-\frac{\overline{q}(\beta-1)}{\overline{q}-1}\left[\frac{1}{2n\varepsilon}\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\tau}{\beta}\right)-\frac{1}{n}+\frac{1}{\overline{q}}\right]. \tag{5.55}$$

Пусть теперь $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$, причем

$$m_i=\frac{n\varepsilon}{\gamma}, \qquad i=1,\ldots,l, \tag{5.56}$$

$$m_i=\frac{n\varepsilon}{\tau}, \qquad i=l+1,\ldots,n, \tag{5.57}$$

$$\sigma_i=s, \qquad i=1,\ldots,n. \tag{5.58}$$

Используя (5.22), (5.23), (5.46), (5.47), (5.53), (5.56), (5.57) и неравенство $\varepsilon < 1$, устанавливаем, что условие (5.4) выполняется. При этом в силу (5.22), (5.23), (5.56) и (5.57) имеем

$$\frac{1}{p_m}=\frac{1}{2n\varepsilon}\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\tau}{\beta}\right)-\frac{1}{n}+\frac{1}{\overline{q}}.$$

Учитывая это равенство и используя (5.24), (5.46), (5.47), (5.55) и (5.58), устанавливаем, что условие (5.5) выполняется. Таким образом, утверждение (a) справедливо. Предложение доказано.

Замечание 5.3. Формулировки предложений 5.4 и 5.6 показывают, что в невесовом случае и в случае степенных весов с положительными показателями необходимое условие на α и β для существования

$m, \sigma \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям (5.4) и (5.5), – одно и то же, а именно, $\alpha > \beta n/(2\beta + n - 2)$.

Предложение 5.7. *Пусть* $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, *и пусть справедливы утверждения* (5.46) *и* (5.47). *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *существуют* $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ *с положительными координатами такие, что выполняются условия* (5.17) *и* (5.18);

(b) *справедливы неравенства*

$$(2\beta - 1)\gamma + \tau < \alpha n(2\beta - 1) - (3n - 2)\beta, \tag{5.59}$$

$$\gamma + (2\alpha - 1)\tau < \alpha(2\beta n - 3n + 2) - \beta n, \tag{5.60}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\tau}{\beta} < \frac{\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n}{\alpha(\beta - 1)}. \tag{5.61}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение (a) верно. Пусть $i \in \{1, \ldots, l\}$. В силу условия (5.17) и предположения (5.22) имеем

$$\frac{1}{m_i} < \alpha - 1 - \frac{\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)}. \tag{5.62}$$

Кроме того, поскольку согласно условия (5.17) $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$, то из этого включения и (5.46), выводим, что $\gamma m_i < n$. Отсюда и из (5.62) следует, что

$$\frac{\gamma}{n} < \alpha - 1 - \frac{\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)}. \tag{5.63}$$

Аналогично, взяв произвольное $i \in \{l + 1, \ldots, n\}$, в силу условия (5.17) и предположения (5.23) имеем

$$\frac{1}{m_i} < \beta - 1 - \frac{\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)}. \tag{5.64}$$

Кроме того, так как по условию (5.17) $1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$, то из этого включения и (5.47), выводим, что $\tau m_i < n$. Отсюда и из (5.64) следует, что

$$\frac{\tau}{n} < \beta - 1 - \frac{\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)}. \tag{5.65}$$

Из вышеприведенных рассуждений вытекает, что справедливы утверждения (5.50) и (5.51). Тогда ввиду (5.22) и (5.23) справедливо неравенство (5.52). Используя (5.25), (5.52) и (5.63), устанавливаем, что неравенство (5.59) справедливо, а с помощью (5.25), (5.52) и (5.65) находим, что справедливо неравенство (5.60). Наконец, из условия (5.18) и предположения (5.23) следует, что $(\beta-1)\overline{q} < p_m(\overline{q}-1)$. Отсюда, используя (5.25) и (5.52), выводим, что справедливо неравенство (5.61). Таким образом, утверждение (b) верно.

Обратно, предположим, что утверждение (b) верно. Тогда, в силу неравенств (5.59)–(5.61), имеем

$$[(2\beta-1)\gamma+\tau][\alpha n(2\beta-1)-(3n-2)\beta]^{-1} < 1,$$

$$[\gamma+(2\alpha-1)\tau][\alpha(2\beta n-3n+2)-\beta n]^{-1} < 1,$$

$$\alpha(\beta-1)\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\tau}{\beta}\right)[\alpha(2\beta+n-2)-\beta n]^{-1} < 1.$$

Учитывая эти неравенства, зафиксируем $\varepsilon < 1$ такое, что

$$[(2\beta-1)\gamma+\tau][\alpha n(2\beta-1)-(3n-2)\beta]^{-1} < \varepsilon, \tag{5.66}$$

$$[\gamma+(2\alpha-1)\tau][\alpha(2\beta n-3n+2)-\beta n]^{-1} < \varepsilon, \tag{5.67}$$

$$\alpha(\beta-1)\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\tau}{\beta}\right)[\alpha(2\beta+n-2)-\beta n]^{-1} < \varepsilon, \tag{5.68}$$

и положим

$$\mu = \frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n\varepsilon}\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\tau}{\beta}\right). \tag{5.69}$$

Используя (5.25), (5.66), (5.67) и (5.69), получаем неравенства

$$\frac{\mu\overline{q}}{\overline{q}-1} < \alpha - 1 - \frac{\gamma}{n\varepsilon}, \qquad \frac{\mu\overline{q}}{\overline{q}-1} < \beta - 1 - \frac{\tau}{n\varepsilon}, \tag{5.70}$$

а используя (5.25), (5.68) и (5.69) получаем, что $\mu(\beta-1)\overline{q} < \overline{q}-1$. Учитывая последнее неравенство, зафиксируем $s > 0$ такое, что

$$\frac{1}{s} < 1 - \frac{\overline{q}(\beta-1)\mu}{\overline{q}-1}. \tag{5.71}$$

Пусть теперь $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$, причем

$$m_i = \frac{n\varepsilon}{\gamma}, \qquad i = 1, \ldots, l, \tag{5.72}$$

$$m_i = \frac{n\varepsilon}{\tau}, \qquad i = l+1, \ldots, n, \tag{5.73}$$

$$\sigma_i = s, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5.74}$$

Из (5.22), (5.23), (5.69), (5.72) и (5.73) следует, что

$$\mu p_m = 1. \tag{5.75}$$

Используя (5.22), (5.23), (5.70), (5.72), (5.73) и (5.75), устанавливаем, что

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \qquad \frac{\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)} < q_i - 1 - \frac{1}{m_i}. \tag{5.76}$$

Кроме того, используя (5.46), (5.47), (5.72), (5.73) и неравенство $\varepsilon < 1$, получаем, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\quad 1/\nu_i \in L^{m_i}(\Omega)$. Это вместе с (5.76) влечет, что условие (5.17) выполняется. Наконец, используя (5.24), (5.46), (5.47), (5.71), (5.74) и (5.75), устанавливаем, что условие (5.18) выполняется. Таким образом, утверждение (a) справедливо. Предложение доказано.

Замечание 5.4. Формулировки предложений 5.5 и 5.7 показывают, что в невесовом случае и в случае степенных весов с положительными показателями необходимое условие на α и β для существования $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ с положительными координатами, удовлетворяющих условиям (5.17) и (5.18), – одно и то же, а именно, неравенство (5.36). Чтобы увидеть это, достаточно отметить, что ввиду (5.59) и исходного условия $\alpha \leqslant \beta$ вытекает, что $\beta > 2 - 1/n$, и следовательно, в силу (5.59) имеем $\alpha(2\beta n - 3n + 2) - \beta n > 0$.

Предложение 5.8. *Пусть* $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, *и пусть справедливы утверждения:*

$$\text{если } i \in \{1, \ldots, l\}, \text{ то для любого } x \in \Omega \setminus \{\theta\} \quad \nu_i(x) = |x|^{-\gamma}; \tag{5.77}$$

$$\text{если } i \in \{l+1, \ldots, n\}, \text{ то для любого } x \in \Omega \setminus \{\theta\} \quad \nu_i(x) = |x|^{-\tau}. \tag{5.78}$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) *существуют* $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ *такие, что выполняются условия* (5.4) *и* (5.5);

(b) *справедливы неравенства*

$$\gamma < \frac{\alpha[\beta(n-2) - \alpha(n-2\beta)]}{2\alpha\beta - \alpha - \beta}, \qquad \tau < \frac{\beta[\alpha(2\beta + n - 2) - \beta n]}{2\alpha\beta - \alpha - \beta}. \tag{5.79}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что ввиду (5.25)

$$\frac{\overline{q}}{\overline{q}-1}\left(\frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{n}\right) = \frac{n(\alpha+\beta) - 2\alpha\beta}{n(2\alpha\beta - \alpha - \beta)}. \tag{5.80}$$

Предположим, что утверждение (a) верно. Пусть $i \in \{1, \dots, l\}$. В силу условия (5.5) и предположения (5.22) имеем $\sigma_i > 0$,

$$\frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(\alpha - 1)\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)} \tag{5.81}$$

и $\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$. Из последнего включения и (5.77), учитывая, что $\theta \in \Omega$, выводим, что $\gamma\sigma_i < n$. Тогда, в силу (5.81),

$$\frac{\gamma}{n} < 1 - \frac{(\alpha - 1)\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)}.$$

Это вместе с (5.26) и (5.80) влечет, что первое из неравенств (5.79) справедливо. Аналогично, пусть $i \in \{l+1, \dots, n\}$. Тогда в силу условия (5.5) и предположения (5.23) имеем $\sigma_i > 0$,

$$\frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(\beta - 1)\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)} \tag{5.82}$$

и $\nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$. Из последнего включения и (5.78), учитывая, что $\theta \in \Omega$, выводим, что $\tau\sigma_i < n$. Тогда, в силу (5.82),

$$\frac{\tau}{n} < 1 - \frac{(\beta - 1)\overline{q}}{p_m(\overline{q} - 1)}.$$

Это вместе с (5.26) и (5.80) влечет, что второе из неравенств (5.79) справедливо. Таким образом, утверждение (b) верно.

Обратно, предположим, что утверждение (b) верно. Тогда в силу неравенств (5.79) и (5.80) имеем

$$\frac{\gamma}{n} < 1 - \frac{(\alpha-1)\overline{q}}{\overline{q}-1}\left(\frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{n}\right), \qquad \frac{\tau}{n} < 1 - \frac{(\beta-1)\overline{q}}{\overline{q}-1}\left(\frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{n}\right).$$

Учитывая эти неравенства, зафиксируем s_1, $s_2 > 0$ такие, что

$$\frac{\gamma}{n} < \frac{1}{s_1} < 1 - \frac{(\alpha-1)\overline{q}}{\overline{q}-1}\left(\frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{n}\right), \tag{5.83}$$

$$\frac{\tau}{n} < \frac{1}{s_2} < 1 - \frac{(\beta-1)\overline{q}}{\overline{q}-1}\left(\frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{n}\right), \tag{5.84}$$

а затем зафиксируем число t такое, что

$$t \geqslant \frac{1}{\alpha-1}, \tag{5.85}$$

$$\frac{\alpha-1}{(\overline{q}-1)t} < 1 - \frac{(\alpha-1)\overline{q}}{\overline{q}-1}\left(\frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{s_1}, \tag{5.86}$$

$$\frac{\beta-1}{(\overline{q}-1)t} < 1 - \frac{(\beta-1)\overline{q}}{\overline{q}-1}\left(\frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{s_2}. \tag{5.87}$$

Пусть теперь $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$, причем

$$m_i = t, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.88}$$

$$\sigma_i = s_1, \qquad i = 1, \ldots, l, \tag{5.89}$$

$$\sigma_i = s_2, \qquad i = l+1, \ldots, n. \tag{5.90}$$

Используя (5.24), (5.77), (5.78), (5.85) и (5.88), заключаем, что условие (5.4) выполняется. При этом ввиду (5.88) имеем

$$\frac{1}{p_m} = \frac{1}{t\overline{q}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{\overline{q}}. \tag{5.91}$$

Из (5.22), (5.23), (5.86), (5.87) и (5.89)–(5.91) следует, что

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad \sigma_i > 0, \qquad \frac{1}{\sigma_i} < 1 - \frac{(q_i-1)\overline{q}}{p_m(\overline{q}-1)}. \tag{5.92}$$

Кроме того, используя (5.77), (5.78), (5.89), (5.90) вместе с включением $\theta \in \Omega$ и учитывая, что ввиду (5.83) и (5.84) $\gamma s_1 < n$ и $\tau s_2 < n$, устанавливаем, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\quad \nu_i \in L^{\sigma_i}(\Omega)$. Это вместе с (5.92) влечет, что условие (5.5) выполняется. Таким образом, утверждение (a) справедливо. Предложение доказано.

Замечание 5.5. Формулировки предложений 5.6 и 5.8 показывают, что для существования $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям (5.4) и (5.5), необходимые требования на α и β в случае степенных весов с отрицательными показателями, вообще говоря, являются более строгими, чем в случае степенных весов с положительными показателями.

Предложение 5.9. *Пусть* $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, *и пусть справедливы утверждения* (5.77) *и* (5.78). *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *существуют* $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ *с положительными координатами такие, что выполняются условия* (5.17) *и* (5.18);

(b) *справедливы неравенство*

$$\frac{(3n-2)\beta}{n(2\beta-1)} < \alpha \tag{5.93}$$

и неравенства (5.79).

Доказательство. Предположим, что утверждение (a) верно. Тогда из условия (5.17) и предположения (5.22) вытекает, что $1/p_m < (\alpha-1)(\overline{q}-1)/\overline{q}$. Отсюда, используя (5.26), заключаем, что $1/\overline{q} < 1 - \frac{n-1}{n\alpha}$. Это вместе с (5.25) влечет, что неравенство (5.93) справедливо. Справедливость неравенств (5.79) устанавливается таким же образом, как и в доказательстве предложения 5.8. Таким образом, утверждение (b) верно.

Обратно, предположим, что утверждение (b) верно. Тогда, учитывая (5.79) и (5.80), зафиксируем s_1, $s_2 > 0$ такие, что неравенства (5.83) и (5.84) справедливы. Заметим, что в силу (5.25) и (5.93) имеем $\frac{\overline{q}}{\overline{q}-1}\left(\frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{n}\right) < \alpha - 1$. Учитывая это неравенство и (5.83), (5.84), зафиксируем $t > 0$ такое, что

$$\frac{\overline{q}}{(\overline{q}-1)t} < \alpha - 1 - \left(\frac{1}{\overline{q}} - \frac{1}{n}\right)\frac{\overline{q}}{(\overline{q}-1)} \tag{5.94}$$

и неравенства (5.86) и (5.87) справедливы. Пусть теперь $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$, причем $m_i = t$, $i = 1, \ldots, n$, $\sigma_i = s_1$, $i = 1, \ldots, l$, и $\sigma_i = s_2$, $i = l+1, \ldots, n$. Легко видеть, что неравенство (5.91) справедливо. Тогда, используя (5.24), (5.77), (5.78) и (5.94), устанавливаем, что условие (5.17) выполняется. Кроме того, используя (5.22), (5.23), (5.77), (5.78), (5.86), (5.87), (5.91), включение $\theta \in \Omega$ и неравенства $\gamma s_1 < n$, $\tau s_2 < n$, получаем, что условие (5.18) выполняется. Таким образом, утверждение (a) верно. Предложение доказано.

Замечание 5.6. Формулировки предложений 5.7 и 5.9 показывают, что для существования $m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ с положительными координатами, удовлетворяющих условиям (5.17) и (5.18), необходимые требования на α и β в случае степенных весов с отрицательными показателями, вообще говоря, являются более строгими, чем в случае степенных весов с положительными показателями.

5.4. Теоремы о разрешимости задачи Дирихле в некоторых модельных случаях

В данном подразделе на основании общих результатов о существовании T-решений и W-решений рассматриваемой задачи Дирихле, установленных в подразделе 5.2, и предложений 5.6–5.9, доказанных в подразделе 5.3, сформулируем теоремы о разрешимости задачи (5.1), (5.2) в весовых модельных случаях, рассмотренных в предыдущем подразделе.

Теорема 5.5. *Пусть* $n = 2l$, *где* $l \in \mathbb{N}$, *и пусть* α *и* β *– числа такие, что* $1 < \alpha \leqslant \beta < n$. *Предположим, что* $q_i = \alpha$, *если* $i \in \{1, \ldots, l\}$, *и* $q_i = \beta$, *если* $i \in \{l+1, \ldots, n\}$. *Пусть* $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, *и предположим, что справедливы утверждения* (5.46) *и* (5.47) *и выполнены неравенства* (5.48) *и* (5.49). *Тогда существует* T*-решение задачи* (5.1), (5.2).

Утверждение теоремы следует из предложения 5.6 и следствия 5.1.

Теорема 5.6. *Пусть* $n = 2l$, *где* $l \in \mathbb{N}$, *и пусть* α *и* β *– числа такие, что* $1 < \alpha \leqslant \beta < n$. *Предположим, что* $q_i = \alpha$, *если* $i \in \{1, \dots, l\}$, *и* $q_i = \beta$, *если* $i \in \{l+1, \dots, n\}$. *Пусть* $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, *и предположим, что справедливы утверждения* (5.46) *и* (5.47) *и выполнены неравенства* (5.59)–(5.61). *Тогда существует* W*-решение задачи* (5.1), (5.2).

Утверждение теоремы следует из предложения 5.7 и следствия 5.2.

Теорема 5.7. *Пусть* $n = 2l$, *где* $l \in \mathbb{N}$, *и пусть* α *и* β *– числа такие, что* $1 < \alpha \leqslant \beta < n$. *Предположим, что* $q_i = \alpha$, *если* $i \in \{1, \dots, l\}$, *и* $q_i = \beta$, *если* $i \in \{l+1, \dots, n\}$. *Пусть* $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, *и предположим, что справедливы утверждения* (5.77) *и* (5.78) *и выполнены неравенства* (5.79). *Тогда существует* T*-решение задачи* (5.1), (5.2).

Утверждение теоремы следует из предложения 5.8 и следствия 5.1.

Теорема 5.8. *Пусть* $n = 2l$, *где* $l \in \mathbb{N}$, *и пусть* α *и* β *– числа такие, что* $1 < \alpha \leqslant \beta < n$. *Предположим, что* $q_i = \alpha$, *если* $i \in \{1, \dots, l\}$, *и* $q_i = \beta$, *если* $i \in \{l+1, \dots, n\}$. *Пусть* $\theta \in \Omega$, $\gamma, \tau > 0$, *и предположим, что справедливы утверждения* (5.77) *и* (5.78) *и выполнены неравенства* (5.79) *и* (5.93). *Тогда существует* W*-решение задачи* (5.1), (5.2).

Утверждение теоремы следует из предложения 5.9 и следствия 5.2.

Выводы к разделу 5

В разделе 5 диссертационной работы рассмотрена задача Дирихле для вырождающихся анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с L^1-данными.

Основные результаты раздела следующие.

1. На основании результатов, полученных в разделе 3 для T-решений вариационных неравенств, установлена теорема существования и един-

ственности энтропийного решения рассмотренной задачи Дирихле (теорема 5.2) и описаны некоторые свойства суммируемости "производных" этого решения (предложение 5.3).

2. Установлены условия относительно показателей анизотропии $q_1, \ldots, q_n$ и весовых функций $\nu_1, \ldots, \nu_n$, при которых энтропийное решение изученной задачи Дирихле является ее T-решением (теорема 5.3) или W-решением (теорема 5.4).

3. Сформулированы утверждения о достаточных условиях существования T-решений и W-решений рассмотренной задачи Дирихле (следствия 5.1 и 5.2).

4. Рассмотрен ряд модельных ситуаций для показателей анизотропии и весовых функций степенного типа. При этом выяснено, что для выполнения установленных условий существования T-решений и W-решений необходимые требования относительно показателей анизотропии в случае степенных весов с отрицательными показателями являются более сильными, чем в случае степенных весов с положительными показателями.

Основные результаты, изложенные в разделе 5, опубликованы в работах [63, 64].

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе исследованы вопросы о существовании и свойствах решений эллиптических уравнений и вариационных неравенств второго порядка с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-правыми частями.

Перечислим наиболее важные результаты, полученные в диссертации.

1. Для вариационных неравенств, соответствующих нелинейному эллиптическому оператору второго порядка с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами, множеству ограничений достаточно широкого класса и правой части класса L^1, доказаны теоремы существования и единственности T-решений. При этом установлено, что T-решения рассмотренных вариационных неравенств в случае достаточной регулярности их правой части и вовлеченных весовых функций являются решениями вариационных неравенств в обычном смысле.

2. Описаны свойства суммируемости T-решений нелинейных эллиптических вариационных неравенств с анизотропными и вырождающимися (по пространственной переменной) коэффициентами и L^1-правыми частями. В частности, даны достаточные условия относительно показателей анизотропии коэффициентов и вовлеченных весовых функций, обеспечивающие принадлежность T-решений исследуемых вариационных неравенств пространствам $L^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$. Кроме того, установлено, что принадлежность T-решений рассмотренных вариационных неравенств классу L^1 можно обеспечить за счет некоторого повышения суммируемости правой части неравенства, не требуя дополнительных условий относительно вовлеченных весовых функций.

3. Получены теоремы существования $W^{1,1}$-решений вырождающихся анизотропных вариационных неравенств с L^1-данными.

4. Установлена теорема существования и единственности энтропийного решения задачи Дирихле для вырождающихся анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с L^1-данными и описаны некоторые свойства суммируемости "производных" этого решения. Кроме того, даны достаточные условия существования T-решений и W-решений рассмотренной задачи Дирихле в общем и ряде модельных случаев.

Список использованных источников

[1] Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

[2] Горбань Ю.С. Существование решений вырождающихся анизотропных вариационных неравенств с L^1-правыми частями / Ю.С. Горбань // Нелинейные граничные задачи. – 2003. – **13**. – С. 63–77.

[3] Горбань Ю.С. О принадлежности T-решений вариационных неравенств соболевским пространствам / Ю.С. Горбань // Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвячена 100-річневому ювілею Я.Б. Лопатинського, Донецьк, 6-7 грудня, 2006 р., тези доповідей. – С. 46–48.

[4] Горбань Ю.С. О невесовом условии суммируемости T-решений вырождающихся анизотропных вариационных неравенств / Ю.С. Горбань // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – **21**. – С. 56–63.

[5] Киндерлерер Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья. – М.: Мир, 1983. – 256 с.

[6] Ковалевский А.А. Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1-правыми частями / А.А. Ковалевский // Известия РАН. Сер. матем. – 2001. – **65**, № 2. – С. 27–80.

[7] Ковалевский А.А. О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из классов, близких к L^1 / А.А. Ковалевский // Матем. заметки. – 2001. – **70**, № 3. – С. 375–385.

[8] Ковалевский А.А. О суммируемости энтропийных решений задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка / А.А. Ковалевский // Известия РАН. Сер. матем. – 2003. – **67**, № 5. – С. 35–48.

[9] Ковалевский А.А. О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из логарифмических классов / А.А. Ковалевский // Матем. заметки. – 2003. – **74**, № 5. – С. 676–685.

[10] Ковалевский А.А. О точном условии предельной суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с L^1-правыми частями / А.А. Ковалевский // Укр. мат. вiсник. – 2005. – **2**, № 4. – С. 502–540.

[11] Ковалевский А.А. О сходимости функций из соболевского пространства, удовлетворяющих специальным интегральным оценкам / А.А. Ковалевский // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 2. – С. 168–183.

[12] Ковалевский А.А. Априорные свойства решений нелинейных уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L^1-данными / А.А. Ковалевский // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2006. – **16**. – С. 47–67.

[13] Ковалевский А.А. Вырождающиеся анизотропные вариационные неравенства с L^1-данными / А.А. Ковалевский, Ю.С. Горбань. – Донецк, ИПММ НАН Украины, 2007. – 92 с. – (Препринт / НАН Украины, Институт прикладной математики и механики НАН Украины; 2007.01).

[14] Ковалевский А.А. О T-решениях вырождающихся анизотропных эллиптических вариационных неравенств с L^1-данными / А.А. Ковалевский, Ю.С. Горбань // Известия РАН. Сер. матем. – 2011. – **75**, № 1. – С. 101–160.

[15] Ковалевский А.А. Сингулярные решения нелинейных эллиптических и параболических уравнений / А.А. Ковалевский, И.И. Скрыпник, А.Е. Шишков. – Киев: Наукова думка, 2010. – 499 с.

[16] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

[17] Скрыпник И.В. О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями / И.В. Скрыпник // Дифференциальные уравнения. – 1978. – **14**, № 6. – С. 1104–1118.

[18] Aharouch L. Strongly nonlinear elliptic unilateral problems without sign condition and L^1-data / L. Aharouch, Y. Akdim // J. Convex Anal. – 2006. – **13**, № 1. – P. 135–149.

[19] Aharouch L. Quasilinear degenerate elliptic unilateral problems / L. Aharouch, Y. Akdim, E. Azroul // Abstr. Appl. Anal. – 2005. – № 1. – P. 11–31.

[20] Aharouch L. Quasilinear degenerated equations with L^1 datum and without coercivity in perturbation terms / L. Aharouch, E. Azroul, A. Benkirane // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2006. – № 19. – 18 pp.

[21] Aharouch L. Nonlinear unilateral problems in Orlicz spaces / L. Aharouch, E. Azroul, M. Rhoudaf // Appl. Math. (Warsaw). – 2006. – **33**, № 2. – P. 217–241.

[22] Alvino A. Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity / A. Alvino, L. Boccardo, V. Ferone, L. Orsina, G. Trombetti // Ann. Mat. Pura Appl. (4). – 2003. – **182**, № 1. – P. 53–79.

[23] Alvino A. Nonlinear elliptic equations with lower-order terms / A. Alvino, V. Ferone, G. Trombetti // Differential Integral Equations. – 2001. – **14**, № 10. – P. 1169–1180.

[24] Atik Y. Local T-sets and degenerate quasilinear elliptic bilateral problems with an L^1-datum / Y. Atik // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. – 1999. – **38**, № 7. – P. 827–867.

[25] Atik Y. Local T-sets and degenerate variational problems. I / Y. Atik, J.-M. Rakotoson // Appl. Math. Lett. – 1994. – **7**, № 4. – P. 49–53.

[26] Atik Y. Local T-sets and degenerate variational problems. II / Y. Atik, J.-M. Rakotoson // Appl. Math. Lett. – 1994. – **7**, № 4. – P. 55–58.

[27] Bendahmane M. Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in R^N with advection and lower order terms and locally integrable data / M. Bendahmane, K.H. Karlsen // Potential Anal. – 2005. – **22**, № 3. – P. 207–227.

[28] Bendahmane M. Anisotropic nonlinear elliptic systems with measure data and anisotropic harmonic maps into spheres / M. Bendahmane, K.H. Karlsen // Electron. J. Differential Equations. – 2006. – № 46. – 30 pp.

[29] Bénilan Ph. An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations / Ph. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.L. Vazquez // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). – 1995. – **22**, № 2. – P. 241–273.

[30] Benkirane A. Existence and uniqueness of solution of unilateral problems with L^1-data in Orlicz spaces / A. Benkirane, J. Bennouna // Ital. J. Pure Appl. Math. – 2004. – **16**. – P. 87–102.

[31] Betta M.F. Existence and regularity results for nonlinear degenerate elliptic equations with measure data / M.F. Betta, T. Del Vecchio, M.R. Posteraro // Ricerche Mat. – 1998. – **47**, № 2. – P. 277–295.

[32] Betta M.F. Existence of renormalized solutions to nonlinear elliptic equations with a lower-order term and right-hand side a measure / M.F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat, M.M. Porzio // J. Math. Pures Appl. (9). – 2003. – **82**, № 1. – P. 90–124.

[33] Boccardo L. Existence and uniqueness of solution of unilateral problems with L^1 data / L. Boccardo, G.R. Cirmi // J. Convex Anal. – 1999. – **6**, № 1. – P. 195–206.

[34] Boccardo L. Existence and regularity results for some elliptic equations with degenerate coercitivity / L. Boccardo, A. Dall'Aglio, L. Orsina // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. – 1998. – **46**, suppl. – P. 51–81.

[35] Boccardo L. Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data / L. Boccardo, T. Gallouët // J. Funct. Anal. – 1989. – **87**, № 1. – P. 149–169.

[36] Boccardo L. Problèmes unilatéraux avec données dans L^1 / L. Boccardo, T. Gallouët // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. – 1990. – **311**, № 10. – P. 617–619.

[37] Boccardo L. Nonlinear elliptic equations with right hand side measures / L. Boccardo, T. Gallouët // Comm. Partial Differential Equations. – 1992. – **17**, № 3-4. – P. 641–655.

[38] Boccardo L. Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms and L^1-data / L. Boccardo, T. Gallouët // Nonlinear Anal. – 1992. – **19**, № 6. – P. 573–579.

[39] Boccardo L. Summability of the solutions of nonlinear elliptic equations with right hand side measures / L. Boccardo, T. Gallouët // J. Convex Anal. – 1996. – **3**, № 2. – P. 361–365.

[40] Boccardo L. Anisotropic equations in L^1 / L. Boccardo, T. Gallouët, P. Marcellini // Differential Integral Equations. – 1996. – **9**, № 1. – P. 209–212.

[41] Boccardo L. Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data / L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. – 1996. – **13**, № 5. – P. 539–551.

[42] Boccardo L. Nonlinear elliptic equations in R^N without growth restrictions on the data / L. Boccardo, T. Gallouët, J.L. Vazquez // J. Differential Equations. – 1993. – **105**, № 2. – P. 334–363.

[43] Brandolini B. An existence result for a class of variational inequalities with L^1-data / B. Brandolini, L. Randazzo // Ricerche Mat. – 2001. – **50**, № 2. – P. 195–207.

[44] Cavalheiro A.C. Existence of entropy solutions for degenerate quasilinear elliptic equations / A.C. Cavalheiro // Complex Var. Elliptic Equ. – 2008. – **53**, № 10. – P. 945–956.

[45] Chrif M. On a strongly anisotropic equation with L^1 data / M. Chrif, S. El Manouni // Appl. Anal. – 2008. – **87**, № 7. – P. 865–871.

[46] Cirmi G. R. On the existence of solutions to non-linear degenerate elliptic equations with measures data / G. R. Cirmi // Ricerche Mat. – 1993. – **42**, № 2. – P. 315–329.

[47] Dal Maso G. Definition and existence of renormalized solutions of elliptic equations with general measure data / G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. – 1997. – **325**, № 5. – P. 481–486.

[48] Dal Maso G. Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data / G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). – 1999. – **28**, № 4. – P. 741–808.

[49] Elmahi A. Elliptic inequalities with lower order terms and L^1-data in Orlicz spaces / A. Elmahi, D. Meskine // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **328**, № 2. – P. 1417–1434.

[50] Gilbarg D. Elliptic partial differential equations of second order / D. Gilbarg, N.S. Trudinger. – Berlin: Springer Verlag, 1983. – 530 p.

[51] Gorban Yu. Existence of solutions of some degenerate anisotropic variational inequalities with L^1-right-hand sides / Yu. Gorban // International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations" , Kyiv, Ukraine, August 22–28, 2001, book of abstracts. – P. 51–52.

[52] Gorban Yu. Existence and uniqueness of solutions of some degenerate anisotropic variational inequalities with L^1-right-hand sides / Yu. Gorban // International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations" , Alushta, Ukraine, September 15–21, 2003, book of abstracts. – P. 79–80.

[53] Gorban Yu. On T-solutions of some degenerate anisotropic variational inequalities with L^1-data / Yu. Gorban // International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations" , Alushta, Ukraine, September 17–23, 2005, book of abstracts. – P. 38.

[54] Gorban Yu. On summability of T-solutions of degenerate anisotropic variational inequalities with L^1-data / Yu.S. Gorban // International Conference on Differential Equations dedicated to the 100th anniversary of Ya.B. Lopatynsky, Lviv, Ukraine, September 12–17, 2006, book of abstracts. – P. 98–100.

[55] Gorban Yu.S. A nonweighted condition of summability of T-solutions for a class of degenerate anisotropic variational inequalities / Yu. Gorban // International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations" , Donetsk, Ukraine, September 9–14, 2013, book of abstracts. – P. 24–25.

[56] Heinonen J. Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations / J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio. – Oxford: Clarendon Press, 1993. – 363 p.

[57] Kovalevsky A. Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic fourth order equations with L^1-data / A. Kovalevsky // Nonlinear Boundary Value Problems. – 1999. – **9**. – P. 46–54.

[58] Kovalevsky A.A. Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic high-order equations with L^1-data / A.A. Kovalevsky // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – **12**. – С. 119–127.

[59] Kovalevsky A.A. General conditions for limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with L^1-data / A.A. Kovalevsky // Nonlinear Anal. – 2006. – **64**, № 8. – P. 1885–1895.

[60] Kovalevsky A.A. Nonlinear fourth-order equations with a strengthened ellipticity and L^1-data / A.A. Kovalevsky//Alvino, A.(ed.) et al., On the notions of solution to nonlinear elliptic problems: results and developments. Caserta: Dipartimento di Matematica, Seconda Universita` di Napoli; Rome: Aracne. Quaderni di Mathematica, 23.–2008.–P.283–337.

[61] Kovalevsky A.A. On some classes of nonlinear equations with L^1-data / A.A. Kovalevsky // A.V. Antoniouk, R.V.N. Melnik (Eds.), Mathematics and Life Sciences. De Gruyter Series in Mathematics and Life Sciences 1. – Berlin: De Gruyter. – 2013. – P. 161–188.

[62] Kovalevsky A.A. Degenerate anisotropic variational inequalities with L^1-data / A.A. Kovalevsky, Y.S. Gorban // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2007. – **345**, № 8. – P. 441–444.

[63] Kovalevsky A.A. Solvability of degenerate anisotropic elliptic second-order equations with L^1-data / A.A. Kovalevsky, Yu.S. Gorban // Electron. J. Differential Equations. – 2013. – № 167. – P. 1–17.

[64] Kovalevsky A.A. Conditions of solvability of the Dirichlet problem for degenerate anisotropic elliptic second-order equations with L^1-data / A.A. Kovalevsky, Yu.S. Gorban // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – **26**. – С. 76–94.

[65] Kovalevsky A.A. Conditions of solvability of the Dirichlet problem for degenerate anisotropic elliptic equations with L^1-data in some model cases / A.A. Kovalevsky, Yu.S. Gorban // International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations" , Donetsk, Ukraine, September 9–14, 2013, book of abstracts. – P. 36–37.

[66] Kovalevsky A. Solvability of Dirichlet problem for a class of degenerate nonlinear high-order equations with L^1-data / A. Kovalevsky, F. Nicolosi // Nonlinear Anal. – 2001. – **47**, № 1. – P. 435–446.

[67] Kovalevsky A. Existence of solutions of some degenerate nonlinear elliptic fourth-order equations with L^1-data / A. Kovalevsky, F. Nicolosi // Appl. Anal. – 2002. – **81**, № 4. – P. 905–914.

[68] Kovalevsky A. Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of degenerate anisotropic fourth-order equations with L^1-right-hand sides / A. Kovalevsky, F. Nicolosi // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. – 2002. – **50**, № 5. – P. 581–619.

[69] Kovalevsky A. Solvability of Dirichlet problem for a class of degenerate anisotropic equations with L^1-right-hand sides / A. Kovalevsky, F. Nicolosi // Nonlinear Anal. – 2004. – **59**, № 3. – P. 347–370.

[70] Kovalevsky A. Summability of solutions of some degenerate nonlinear elliptic fourth-order equations / A. Kovalevsky, F. Nicolosi // Appl. Anal. – 2005. – **84**, № 1. – P. 1–13.

[71] Kovalevsky A.A. On multipliers characterizing summability of solutions for a class of degenerate nonlinear high-order equations with L^1-data / A.A. Kovalevsky, F. Nicolosi // Nonlinear Anal. – 2008. – **69**, № 3. – P. 931–939.

[72] Kovalevsky A.A. On limit summability of solutions for a class of degenerate nonlinear high-order equations with L^1-data / A.A. Kovalevsky, F. Nicolosi // Complex Var. Elliptic Equ. – 2010. – **55**, № 11. – P. 1047–1058.

[73] Leone C. Existence and uniqueness of solutions for nonlinear obstacle problems with measure data / C. Leone // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. – 2001. – **43**, № 2. – P. 199–215.

[74] Li F.Q. Anisotropic elliptic equations in L^m / F.Q. Li // J. Convex Anal. – 2001. – **8**, № 2. – P. 417–422.

[75] Li F.Q. Nonlinear degenerate elliptic equations with measure data / F.Q. Li // Comment. Math. Univ. Carolin. – 2007. – **48**, № 4. – P. 647–658.

[76] Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **165**. – P. 207–226.

[77] Murat F. Soluciones renormalizadas de EDP elipticas no lineales / F. Murat // Publ. Laboratoire d'Analyse Numérique, R 93023. – Univ. Paris VI, 1993.

[78] Murat F. Équations elliptiques non linéaires avec second membre L^1 ou mesure / F. Murat // Actes du 26ème Congrès National d'Analyse Numérique. – Les Karellis, France, 1994. – P. A12–A24.

[79] Oppezzi P. Existence of solutions for unilateral problems with multivalued operators / P. Oppezzi, A.M. Rossi // J. Convex Anal. – 1995. – **2**, № 1–2. – P. 241–261.

[80] Oppezzi P. Esistenza di soluzioni per problemi unilateri con dato misura o in L^1 / P. Oppezzi, A.M. Rossi // Ricerche Mat. – 1996. – **45**, № 2. – P. 491–513.

[81] Oppezzi P. Renormalized solutions for divergence problems with L^1 data / P. Oppezzi, A.M. Rossi // Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. – 1998. – **46**, suppl. – P. 889–914.

[82] Oppezzi P. Unilateral problems with measure data: links and convergence / P. Oppezzi, M. Rossi // Differential Integral Equations. – 2001. – **14**, № 9. – P. 1051–1076.

[83] Porretta A. Nonlinear equations with natural growth terms and measure data / A. Porretta // Electron. J. Differential Equations. Conf., 09. – Proceedings of the 2002 Fez Conference on Partial Differential Equations. – 2002. – P. 183–202.

[84] Rakotoson J.-M. Generalized solutions in a new type of sets for problems with measures as data / J.-M. Rakotoson // Differential Integral Equations. – 1993. – **6**, № 1. – P. 27–36.

[85] Rakotoson J.-M. Uniqueness of renormalized solutions in a T-set for the L^1-data problem and link between various formulations / J.-M. Rakotoson // Indiana Univ. Math. J. – 1994. – **43**, № 2. – P. 685–702.

[86] Segura de León S. Existence and uniqueness for L^1 data of some elliptic equations with natural growth / S. Segura de León // Adv. Differential Equations. – 2003. – **8**, № 11. – P. 1377–1408.

[87] Troisi M. Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi / M. Troisi // Ricerche Mat. – 1969. – **18**. – P. 3–24.