

## Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу Горбань Юлії Сергіївни

"Існування та властивості розв'язків вироджуваних анізотропних  
еліптичних рівнянь і варіаційних нерівностей з  $L^1$ -даними" ,

яка подана на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння

На даний час теорія еліптичних рівнянь та варіаційних нерівностей з монотонними операторами у випадку достатньо регулярних правих частин практично є завершеною. Коли ж праві частини рівнянь чи варіаційних нерівностей належать простору  $L^1$  або є мірами, то, незважаючи на велику активність багатьох відомих математиків у відповідних дослідженнях, що проводяться з кінця 89-их років минулого століття, залишилось ще багато невирішених проблем. Основна складність у вивченні розв'язності еліптичних рівнянь з  $L^1$ -правими частинами полягає в тому, що така права частина не породжує лінійного неперервного функціоналу на соболевському просторі, який є природною областю визначення оператора рівняння. Внаслідок цього безпосереднє застосування відомої теорії монотонних операторів неможливе і, більше того, потрібне уточнення самого поняття розв'язку таких рівнянь.

На сьогодні в цілому побудовано теорію нелінійних ізотропних невироджуваних (за незалежними змінними) дивергентних еліптичних рівнянь другого порядку з  $L^1$ -даними або даними-мірами, в рамках якої доведено існування та єдиність слабких, ентропійних та ренормалізованих розв'язків розв'язків і встановлено їх належність певним просторам Лебега та Соболева. Суттєвий внесок у розвиток даної теорії належить Ф. Бенілану, Л. Боккардо, Т. Галлуе, Р. Гаріпі, Ф. Мюра, М. П'єру, Ж.Л. Вазкезу, Ж.-М. Ракотосону, а також А. Альвіно, А. Порретта, Г. Тромбетті, О.А. Ковалевському та іншим. Аналогічні результати отримано і для еліптичних варіаційних нерівностей з  $L^1$ -даними і даними-мірами з використанням переважно тих самих підходів і техніки, які були розроблені для рівнянь, зокрема, в роботах Л. Боккардо та Т. Галлуе, Л. Боккардо та Г.Р. Чірмі, П. Оппецці та А.М. Россі. Відзначимо, що розглядали, в основному, односторонню задачу Діріхле.

Один з найбільш ефективних підходів до дослідження розв'язності задачі Діріхле для нелінійних еліптичних рівнянь другого порядку з  $L^1$ -правими частинами полягає в тому, що розглядають так звані ентропійні розв'язки, які є елементами більш широких, ніж відповідні енергетичні соболевські простори, класів функцій і задовольняють рівняння в сенсі сім'ї інтегральних нерівностей, яка визначається відповідним набором "зрізуючих" операторів. При цьому встановлено, що у разі виконання стандартних умов зростання, коерцитивності і строгої монотонності на коефіцієнти рівнянь ентропійний розв'язок досліджуваної задачі існує і тільки один.

В роботах багатьох математиків, зокрема, Боккардо, Т. Галлуе, П. Марчелліні, М. Бендамане, К.Х. Карлсеном, Л. Ахаруша, Е. Азрула, А. Бенкіране, Й. Атіка, Ж.-М. Ракотсона, А.К. Кавалейро, Г.Р. Чірмі, Ф.К. Лі, розглядались також анізотропні невироджені

(за незалежними змінними) та ізотропні вироджувані (за незалежними змінними) еліптичні рівняння та варіаційні нерівності з  $L^1$ -правими частинами. Отримані там результати є схожими на згадані вище. Еліптичні рівняння та варіаційні рівняння, які є одночасно анізотропними і вироджуваними (за незалежними змінними) та мають праві частини з класу  $L^1$ , розглядалися тільки в роботах автора дисертації, що містять основні результати його дисертаційного дослідження. Крім того, в дисертації розглянуто більш загальні обмеження для варіаційних нерівностей, ніж раніше вивчали у випадку нерівностей з  $L^1$ -даними. З огляду на останню обставину вказані результати є новими навіть для невироджуваних ізотропних варіаційних нерівностей. Отож, тематика дисертації Ю.С. Горбань є **актуальною**.

Метою дисертаційної роботи є встановлення умов і єдиності та вивчення властивостей розв'язків анізотропних і вироджуваних (за незалежними змінними) еліптичних рівнянь та варіаційних нерівностей другого порядку з  $L^1$ -правими частинами.

Робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. У вступі викладена вся інформація, яка потрібна згідно з вимогами до оформлення дисертацій. Перший розділ присвячений оглядові першоджерел і опису основних результатів дисертації. Відзначимо, що зроблений огляд літератури є достатньо повний і змістовний. У другому розділі схематично описано методику дослідження, яке проводиться в дисертації. Основний зміст роботи викладений у третьому, четвертому та п'ятому розділах.

У третьому та четвертому розділах досліджено анізотропні вироджувані (за просторовими змінними) еліптичні варіаційні нерівності з  $L^1$ -правими частинами і операторами, які визначені на відповідних вагових просторах Соболева (енергетичних просторах) заданих на обмежених областях функцій і є монотонними, обмеженими, семінеперервними та коєцитивними. Спочатку показано, що коли праві частини є достатньо регулярними, тобто належать просторам Лебега  $L^p$  для  $p \geq p_*$  при деякому  $p_* > 1$ , то для розглядуваних нерівностей можна стандартним чином визначити розв'язок та довести його існування і єдиність. Далі пояснено, що у випадку правих частин з  $L^1$  цього зробити не можна. Тому автор визначає так званий Т-розв'язок досліджуваної нерівності як елемент досить широкого класу функцій, який містить відповідний енергетичний ваговий простір Соболева. Цей функційний клас визначений за допомогою сім'ї "зрізаючих" операторів таким чином: його елементом є вимірна функція, образ якої при дії будь-якого з вказаних операторів є елементом простору, що є природною областю визначення оператора варіаційної нерівності. За допомогою тих же "зрізаючих" операторів записано саму варіаційну нерівність. Після цього доведено, що при достатній регулярності правої частини варіаційної нерівності її Т-розв'язок є стандартним розв'язком відповідної стандартної варіаційної нерівності, тобто обґрунтовано, що поняття Т-розв'язку є природним узагальненням стандартного розв'язку на випадок нерегулярної правої частини еліптичної варіаційної нерівності. Далі доведено існування та єдиність Т-розв'язків досліджуваних нерівностей, а також встановлено їх властивості стосовно сумовності, зокрема, показано, як при підсиленні умов на або показники нелінійності і регулярність відповідних вагових функцій, або правих частин підвищується регулярність Т-розв'язків. Також наведено приклади множин обмежень для досліджуваних нерівностей, з яких випливає, що допустимими є множини з

односторонніми, двосторонніми та деякими іншими обмеженнями.

У п'ятому розділі дисертаційної роботи розглянуто задачу Діріхле для вироджуваних анізотропних еліптичних рівнянь другого порядку з  $L^1$ -правими частинами. Спочатку дано означення трьох різного рівня узагальнень розв'язків досліджуваної задачі. Далі доведено існування та єдиність цих розв'язків при відповідних умовах на показники нелінійності та регулярність відповідних вагових функцій. Після цього для рівнянь з певних підкласів класу досліджуваних рівнянь уточнено умови на показники нелінійності та регулярність відповідних вагових функцій, що гарантують існування розв'язків задачі Діріхле, які найбільш близькі до узагальнених розв'язків цієї задачі у випадку регулярних правих частин рівнянь. Слід зазначити, що в основі дослідження, проведеного в п'ятому розділі, лежать результати третього і четвертого розділів.

Основні результати дисертації є новими і мають значний науковий інтерес, бо, як уже було сказано вище, еліптичні рівняння і варіаційні нерівності другого порядку з  $L^1$ -правими частинами, які є одночасно анізотропними та вироджуваними, автором досліджені вперше. Крім того, тут розглянуто більш широкі множини обмежень для варіаційних нерівностей, ніж раніше розглядали у випадку варіаційних нерівностей з  $L^1$ -даними. Варто відзначити, що автору прийшлося перебороти значні ідейні та технічні труднощі на шляху до досягнення мети дисертаційної роботи.

Дисертація написана на високому науковому рівні. Достовірність тверджень забезпечено строгими і акуратними доведеннями, які з достатньою повнотою наведені в дисертації.

Зміст автореферату повністю відповідає основним положенням дисертації.

Основні результати роботи достатньо повно відображені у 6-ти статтях у наукових фахових виданнях та додатково висвітлені в 1 препринті і 7-ми тезах доповідей на математичних конференціях. Автор дисертації добре апробувала свої результати у виступах на конференціях і семінарах.

Дисертаційна робота оформлена акуратно і згідно з чинними вимогами до оформлення дисертацій. Викладення матеріалу чітке, логічне і послідовне, хоч є ряд зауважень стосовно цього:

1) Для зручності читача варто було б означення  $q_i (i = \overline{1, n}), q, q_-, q_+, \bar{q}, \hat{q}, \nu_i (i = \overline{1, n}), p_m$  також дати в списку умовних позначень.

2) Треба було б вказати, наприклад, у списку умовних позначень, що таке  $L^\lambda(\Omega)$  у випадку  $0 < \lambda < 1$ .

3) Варто було б навести конкретні приклади елемента класу  $T^{\circ 1, q}(\nu, \Omega)$  у підрозділі 3.1 і оператора  $\mathcal{A}$  у підрозділі 3.2.

4) Теореми 3.1 (існування T-розв'язку) і 3.2 (єдиність T-розв'язку) варто було б об'єднати в одну теорему (існування та єдиність T-розв'язку), оскільки їх умови повністю однакові, і сформулювати разом з твердженням 3.11 в підрозділі 3.2, а її доведення розбити на дві великі частини і навести відповідно в підрозділах 3.3 і 3.4. Фактично теорема 5.1 і є такою "об'єднаною" теоремою, а тому теорему 5.1, як і твердження 5.2, не варто було б формулювати. Твердження 5.1 було б доречним в підрозділі 3.2, тоді запис варіаційної нерівності можна було б зробити більш "елегантним".

5) Поняття слабкого розв'язку задачі (1.1),(1.2) (с. 17) і  $W$ -розв'язку задачі (5.1),(5.2) (ст. 105), як і формальна постановка цих задач, нічим не відрізняються, але в роботі про це не сказано.

Ці зауваження та описки і мовні огріхи граматичного і стилістичного характеру, які інколи зустрічаються в тексті, не мають принципового значення і не впливають на загальну оцінку роботи.

Дисертація є завершеною науковою роботою. В ній отримані нові науково обґрунтовані результати, що в сукупності вирішують конкретну наукову задачу суттєвого значення для теорії диференціальних рівнянь. Отримані результати можуть бути використані при подальших дослідженнях нелінійних еліптичних рівнянь та варіаційних нерівностей.

Вважаю, що дисертаційна робота Горбань Ю.С. "Існування та властивості розв'язків вироджуваних анізотропних еліптичних рівнянь і варіаційних нерівностей з  $L^1$ -даними" задовольняє чинні вимоги щодо кандидатських дисертацій, а її автор заслуговує присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння.

Доктор фізико-математичних наук

Бокало М.М.

Підпис Бокала М.М. підтверджую

Вчений секретар Львівського національного  
університету імені Івана Франка, доцент

Грабовецька О.С.