МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Львівський національний університет
імені Івана Франка

Репетило Софія Михайлівна

УДК 517.95

ЗАДАЧІ З МІШАНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ І БЕЗТИПНИХ РІВНЯНЬ У ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБЛАСТЯХ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів — 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України та в Національному університеті "Львівська політехніка".

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
Пташник Богдан Йосипович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
завідувач відділу математичної фізики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Кирилич Володимир Михайлович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
завідувач кафедри математичної економіки
та економетрії;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Чмир Оксана Юріївна,
Львівський державний університет
безпеки життєдіяльності,
доцент кафедри прикладної математики і механіки.

Захист відбудеться "___"___________ 2015 р. о ____ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, аудиторія 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий "___"___________ 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Остудін Б. А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Задачі з крайовими умовами, заданими на всій межі області, для гіперболічних і безтипних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними є, назагал, умовно коректними, а їхня розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників і не є стійкою відносно малих змін параметрів задачі. Некоректність таких задач була, мабуть, основною причиною того, що їх почали вивчати порівняно недавно (зі середини XX століття). Дослідження цих задач має вагоме значення для побудови загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними. Крім того, вони виникають у багатьох задачах практики (безмоментна теорія оболонок від'ємної гаусової кривизни, задачі гідродинаміки, процеси коливань тощо). Вивченню задач з даними на всій межі області для гіперболічних і безтипних рівнянь і систем рівнянь присвячено ряд досліджень, зокрема, коли на межі області задано умови Діріхле або типу Діріхле.

Перші дослідження крайових задач з даними на всій межі області для гіперболічних рівнянь були проведені у роботах Дж. Адамара (J. Hadamard), Д. Боржина (D. Bourgin) і Р. Даффіна (R. Duffin), А. Губера (A. Huber), Д. Манжерона (D. Mangeron).

Крайові задачі для рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними в обмежених і необмежених областях вивчались у працях багатьох авторів, зокрема Ю. М. Березанського, В. П. Бурського, М. Л. Горбачука, В. М. Борок, П. І. Каленюка, де переважно виділені випадки коректно поставлених задач, які виключають появу малих знаменників.

У роботах Б. Й. Пташника та його учнів на основі метричного підходу досліджено однозначну розв'язність крайових задач з даними на всій межі області для багатьох класів рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними, при побудові розв'язків яких виникають малі знаменники, однак крайові задачі з мішаними умовами (Діріхле-Неймана) ними не розглядались.

У даній дисертаційній роботі, яка продовжує та розвиває цей напрям досліджень, розглянуто задачі з умовами Діріхле-Неймана за змінною t та певними умовами (періодичності, майже періодичності, умовами типу умов Діріхле та ін.) за змінними $x_1, \ldots, x_p$ для гіперболічних (лінійних і слабко нелінійних) та безтипних (лінійних) рівнянь і систем рівнянь в обмежених та необмежених областях. Розглянуті задачі є новими, а їх дослідження є певним внеском у загальну теорію крайових задач для рівнянь із частинними похідними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертаційного дослідження отримано у рамках виконання бюджетних тем "Дослідження сучасних проблем аналізу, диференціальних рівнянь та теорії ймовірності" (державний реєстраційний номер 0107U009514) кафедри прикладної математики Національного університету "Львівська політехніка" та "Дослідження коректності, побудова та вивчення властивостей розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач для некласичних еволюційних рівнянь" (державний реєстраційний номер 0110U004817) відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження (переважно на базі метричного підходу) задач з мішаними крайовими умовами (Діріхле-Неймана) для гіперболічних і безтипних рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними в обмежених та необмежених циліндричних областях, що передбачає розв'язання таких завдань:

1) встановлення умов існування та єдиності (у різних функційних просторах) та побудова розв'язків наступних задач:

— крайових задач з даними на всій межі області для лінійних гіперболічних рівнянь та систем рівнянь в обмежених областях;

— задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійного гіперболічного оператора високого порядку, збуреного нелінійним доданком (застосовуючи принцип нерухомої точки);

— задач з умовами Діріхле-Неймана за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за іншими змінними для загальних (без обмеження на тип) лінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами;

— задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами у безмежній смузі (застосовуючи диференціально-символьний метод або накладаючи на шуканий розв'язок умову майже періодичності за просторовою змінною);

— задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для рівняння вільних коливань безмежної струни з додатковою умовою Діріхле або Неймана у внутрішній точці часового інтервалу;

— задачі з мішаними умовами (Діріхле-Неймана) на межі області для рівнянь із псевдодиференціальними операторами у безмежному шарі (використовуючи техніку диференціальних операторів нескінченного порядку);

2) доведення метричних лем про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків досліджуваних задач, на підставі яких встановлюються умови коректної розв'язності задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задачі.

Об'єкт дослідження — некласичні крайові задачі для гіперболічних і безтипних рівнянь.

Предмет дослідження — умови однозначної розв'язності у різних функційних просторах задач з мішаними крайовими умовами (Діріхле-Неймана) для гіперболічних і безтипних рівнянь та побудова їх розв'язків.

Методи досліджень. Для розв'язання поставлених задач використовуються методи теорії диференціальних рівнянь, функціонального аналізу, лінійної алгебри та метричної теорії чисел.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

— встановлено умови однозначної розв'язності у різних функційних просторах крайових задач для лінійних гіперболічних рівнянь та систем рівнянь в обмежених циліндричних областях, коли на нижній та верхній основах циліндра задано умови Діріхле та Неймана відповідно або локальні крайові умови третього роду;

— встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійного гіперболічного оператора високого порядку, збуреного нелінійним доданком;

— досліджено умови однозначної розв'язності у різних функційних просторах задач з умовами Діріхле-Неймана за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за іншими змінними для загальних (без обмеження на тип) лінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами;

— встановлено умови коректності у безмежній смузі задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною): 1) для лінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами у класах цілих функцій і в класах майже періодичних функцій за просторовою змінною; 2) для рівняння вільних коливань струни з додатковою умовою Діріхле або Неймана у внутрішній точці часового інтервалу;

— у безмежному шарі досліджено однозначну розв'язність крайової задачі з мішаними умовами (Діріхле-Неймана) на межі області для рівнянь із псевдодиференціальними операторами;

— побудовано точні розв'язки досліджуваних задач у випадках лінійних рівнянь та вказано алгоритм побудови наближеного розв'язку у випадку задачі для слабко нелінійного рівняння;

— доведено метричні леми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків досліджуваних задач.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у подальших дослідженнях різних крайових задач для рівнянь із частинними похідними, а також при розв'язанні конкретних задач практики, математичними моделями яких є досліджені у роботі крайові задачі.

Особистий внесок здобувача. Основні наукові результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У спільних з Б. Й. Пташником роботах [2, 4–8, 13–18] науковому керівнику належить постановка задач, передбачення та аналіз отриманих результатів. У спільних роботах [1, 11] Б. Й. Пташнику належить постановка задачі, аналіз та обговорення усіх отриманих результатів, а Н. І. Білусяк — перевірка та аналіз результатів, які стосуються слабко нелінійного рівняння; у роботах [3, 12] Б. Й. Пташнику належить постановка задачі та обговорення отриманих результатів, а З. М. Нитребичу — доведення леми 1 та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких наукових конференціях і семінарах: Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 2007); Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки та математики імені академіка Я. С. Підстригача (Львів, 2009); Десята відкрита наукова конференція Інституту прикладної математики та фундаментальних наук (ІМФН) (Львів, 2012); Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 2013); Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича (Київ, 2014); П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2014); Конференція молодих учених "Підстригачівські читання-2014" (Львів, 2014); семінар ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники: член-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф. Б. Й. Пташник, д. ф.-м. н., ст. н. с. В. О. Пелих, Львів, 2013, 2015); загальноінститутський математичний семінар Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники: д. ф.-м. н., проф. М. М. Войтович, член-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф. Б. Й. Пташник, д. ф.-м. н., ст. н. с. В. О. Пелих, д. ф.-м. н., ст. н. с. В. М. Петричкович, Львів, 2014); Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь (керівники: д. ф.-м. н., проф. М. І. Іванчов, д. ф.-м. н., проф. П. І. Каленюк, член-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф. Б. Й. Пташник, Львів, 2014); а також були оприлюднені на Дев'ятій відкритій науковій конференції професорсько-викладацького складу Інституту прикладної математики та фундаментальних наук (Львів, 2010) та на Всеукраїнській науковій конференції "Прикладні задачі математики" (Яремче, 2011).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 10 статтях [1–10] (з них 2 без співавторів) у наукових періодичних фахових виданнях України, серед яких 3 статті — у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз, а також додатково висвітлено в тезах доповідей та матеріалах наукових конференцій [11–19].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, який налічує 151 найменування, обсягом 17 сторінок. Загальний обсяг дисертації — 152 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дисертаційної роботи обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету і задачі дослідження, виділено об'єкт, предмет та методи дослідження, висвітлено наукову новизну та апробацію одержаних результатів.

У першому розділі подано короткий огляд праць, які стосуються тематики дисертації.

У другому розділі описано основні методи досліджень розглянутих у дисертаційній роботі задач. Наведено деякі допоміжні відомості з теорії диференціальних рівнянь, функціонального аналізу, лінійної алгебри та метричної теорії чисел, які використовуються у наступних розділах дисертації.

У третьому розділі дисертації досліджено однозначну розв'язність крайових задач для гіперболічних рівнянь і систем рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами в обмежених циліндричних областях.

Позначимо: $x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $p\geq 1$; $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$,

$|k|=|k_1|+\dots+|k_p|$, $||k||=\sqrt{k_1^2+\dots+k_p^2}$; $(k,x)=k_1x_1+\dots+k_px_p$;

$\hat{s}=(s_0,s_1,\dots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|\hat{s}|^*=2s_0+s_1+\dots+s_p$;

$T\in(0,+\infty)$; i — уявна одиниця; $[a]$ — ціла частина числа $a\in\mathbb{R}$;

Ω^p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$; $D^p:=\{(t,x):0<t<T,x\in\Omega^p\}$;

$B^p:=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{p+1}:0<t<T,x\in G\}$; $G\subset\mathbb{R}^p$ — обмежена однозв'язна область з гладкою межею $\partial G=\Gamma$, $\Sigma=\Gamma\times[0,T]$;

$\mathcal{T}$ — простір скінченних тригонометричних поліномів $v(x)=\sum_{|k|\leqslant N}v_k\exp(ik,x)$, $N\in\mathbb{N}$, з комплексними коефіцієнтами, в якому збіжність визначається так: $v^n\underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{T}}{\to}}v$, якщо, починаючи з деякого номера n, $v^n(x)=\sum_{|k|\leqslant N_n}v_k^n\exp(ik,x)$, де всі N_n не перевищують деякого фіксованого числа N_1, і $v_k^n\underset{n\to\infty}{\to}v_k$ для кожного k;

$\mathcal{T}'$ — простір формальних тригонометричних рядів $v(x)=\sum_{|k|\geq 0}v_k\exp(ik,x)$;

$C^r([0,T];\mathcal{T}')$ $(C^r([0,T];\mathcal{T}))$, $r\in\mathbb{Z}_+$, — простір таких функцій $v(t,x)=\sum_{|k|\geq 0}v_k(t)\exp(ik,x)$, $v_k\in C^r([0,T])$, $k\in\mathbb{Z}^p$, що при кожному фіксованому $t\in[0,T]$ $\partial^jv/\partial t^j=\sum_{|k|\geq 0}v_k^{(j)}(t)\exp(ik,x)\in\mathcal{T}'(\mathcal{T})$, $j\in\{0,1,\dots,r\}$;

$H_q(\Omega^p)$, $q\in\mathbb{R}$, — простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}$ за нормою $\|v;H_q(\Omega^p)\|^2:=\sum_{|k|\geq 0}(1+|k|^2)^q|v_k|^2$;

$C^r([0,T],H_q(\Omega^p))\subset C^r([0,T];\mathcal{T}')$, $q\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, — простір функцій v таких, що для кожного $t\in[0,T]$ функції $\partial^jv/\partial t^j$, $j\in\{0,1,\dots,r\}$, належать простору $H_{q-j}(\Omega^p)$ та є неперервними за t у нормі цього простору;

$\|v;C^r([0,T],H_q(\Omega^p))\|:=\sum_{j=0}^r\max\limits_{0\leq t\leq T}\left\|\partial^jv(t,\cdot)/\partial t^j;H_{q-j}(\Omega^p)\right\|$;

$\overline{H}_q(\Omega^p)$ і $\overline{C}^r([0,T],H_q(\Omega^p))$ — відповідні до $H_q(\Omega^p)$ і $C^r([0,T],H_q(\Omega^p))$ простори вектор-функцій, $q\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{Z}_+$;

$C^{j,\nu}$, $0<\nu<1$, — клас визначених в $\overline{G}$ функцій, які мають неперервні до j–ї похідні, а j-та похідна задовольняє в $\overline{G}$ умову Гельдера з показником ν;

$A^{j,\nu}$ — клас областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать класу $C^{j,\nu}$.

У підрозділі 3.1.1 в області D^1 розглядається задача

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2(n-s)} \partial x^{2s}} = f(t,x), \quad a_s \in \mathbb{R}, \quad a_0 = 1, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)} u(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \varphi_r(x), \quad \left.\frac{\partial^{2r-1} u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+r}(x), \quad r \in \{1,\dots,n\}. \tag{2}$$

Припускаємо, що рівняння (1) є строго гіперболічним за Петровським, тобто всі корені рівняння $\sum_{s=0}^{n} a_s \lambda^{2(n-s)} = 0$ є дійсними та різними, а отже, і відмінними від нуля; нехай $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ – додатні корені останнього рівняння.

Означення 3.1. *Розв'язком задачі* (1), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *називатимемо функцію* $u(t,x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t) \exp(ikx)$ *таку, що кожна з функцій* $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, *належить простору* $C^{2n}([0,T])$ *і задовольняє, відповідно, рівності* $\sum\limits_{s=0}^{n} a_s (ik)^{2s} \dfrac{d^{2(n-s)} u_k(t)}{dt^{2(n-s)}} = f_k(t)$, $t \in (0,T)$, *та* $u_k^{(2r-2)}(0) = \varphi_{rk}$, $u_k^{(2r-1)}(T) = \varphi_{n+r,k}$, $r \in \{1,\dots,n\}$.

Теорема 3.1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \forall m \in \mathbb{Z}) \quad \lambda_j T/\pi \neq (2m+1)/(2k), \quad j \in \{1,\dots,n\}. \tag{3}$$

Якщо $f \in C([0,T],\mathcal{T}')$ $(C([0,T],\mathcal{T}))$, $\varphi_j \in \mathcal{T}'$ $(\mathcal{T})$, $j \in \{1,\dots,2n\}$, то за умов (3) існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ $(C^{2n}([0,T],\mathcal{T}))$ (теорема 3.2 і наслідок 3.2). Для проміжних просторів (між $C^{2n}([0,T],\mathcal{T})$ і $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$), зокрема для просторів $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$, $q \in \mathbb{R}$, існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане з проблемою малих знаменників, оскільки модулі виразів $\cos(k\lambda_j T)$, $j \in \{1,\dots,n\}$, які містяться у знаменниках отриманих явних формул для розв'язку задачі і є відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості чисел $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Для оцінки знизу малих знаменників використано метричний підхід (лема 3.1).

Теорема 3.3. *Нехай справджуються умови* (3). *Якщо* $f \in C([0,T],H_{q-2n+1+\alpha_1}(\Omega^1))$, $\varphi_s \in H_{q+\alpha_1}(\Omega^1)$, $\varphi_{n+s} \in H_{q+\alpha_1-1}(\Omega^1)$, $s \in \{1,\dots,n\}$, $\alpha_1 > 1$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* T *та для фіксованих коефіцієнтів рівняння* (1) *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$. *Цей розв'язок справджує нерівність* $\left\|u; C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))\right\| \leq c_1 \left(\sum\limits_{s=1}^{n} \left\|\varphi_s; H_{q+\alpha_1}(\Omega^1)\right\| + \sum\limits_{s=n+1}^{2n} \left\|\varphi_s; H_{q+\alpha_1-1}(\Omega^1)\right\| + \right.$ $\left. + \left\|f; C([0,T],H_{q-2n+1+\alpha_1}(\Omega^1))\right\| \right)$, *де* $c_1 = c_1(n,T,a_0,\dots,a_n)$.

Результати дослідження задачі (1), (2) частково перенесено на випадок багатовимірної області. В області D^p, $p>1$, для строго гіперболічного рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|^*=2n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|^*} u\,(t,x)}{\partial t^{2s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} = 0, \quad A_{\hat{s}}\in\mathbb{R}, \quad A_{(n,0,\dots,0)}=1, \tag{4}$$

досліджено задачу з умовами вигляду (2).

Зі строгої гіперболічності рівняння (4) випливає, що μ-корені рівняння $\sum_{|\hat{s}|^*=2n} A_{\hat{s}} \left(\frac{k_1}{||k||}\right)^{s_1}\dots\left(\frac{k_p}{||k||}\right)^{s_p}\mu^{2s_0}=0$ є дісними і різними (отже, і відмінними від нуля); очевидно, що ці корені є рівномірно обмеженими для всіх $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$. Нехай $\mu_1\,(k)\,,\dots,\mu_n\,(k)$ — додатні корені останнього рівняння.

Для єдиності розв'язку задачі (2), (4) у просторі $C^{2n}\left([0,T]\,,\mathcal{T}'\right)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$(\forall k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}\,,\ \forall m\in\mathbb{Z}_+) \quad \mu_j\,(k)\,\|k\|\neq\pi(2m+1)/(2T),\ j\in\{1,\dots,n\}\,. \tag{5}$$

Твердження 3.1. *Нехай справджуються умови* (5). *Якщо* $\varphi_s\in H_\chi\left(\Omega^p\right)$, $\varphi_{n+s}\in H_{\chi-1}\left(\Omega^p\right)$, $\chi>q+p$, $s\in\{1,\dots,n\}$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для фіксованих коефіцієнтів рівняння* (4) *у просторі* $C^{2n}\left([0,T]\,,H_q\left(\Omega^p\right)\right)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (2), (4). *Цей розв'язок справджує нерівність*

$$\left\|u;C^{2n}\left([0,T]\,,H_q\left(\Omega^p\right)\right)\right\|\leq c_9\left(\textstyle\sum_{s=1}^{n}\|\varphi_s;H_\chi\|+\sum_{s=n+1}^{2n}\|\varphi_s;H_{\chi-1}\|\right).$$

На прикладі рівняння

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(a_j\frac{\partial}{\partial x}+b_j\right)^2\right]u(t,x)=f(t,x), \quad (t,x)\in D^1, \tag{6}$$

де $a_j>0$, $b_j\in\mathbb{R}$, $a_j\neq a_\ell$, $j\neq\ell$, $j,\ell\in\{1,\dots,n\}$, показано, що наявність у гіперболічному рівнянні молодших членів може послабити умови на вихідні дані у теоремах існування та єдиності розв'язку задачі з умовами вигляду (2).

Наслідок 3.3. *Якщо у рівнянні* (6) *всі числа* b_j, $j\in\{1,\dots,n\}$, *відмінні від нуля, то для довільних* T, a_j, $j\in\{1,\dots,n\}$, *задача* (6), (2) *не може мати двох різних розв'язків із простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$. *Якщо ж* $b_j=0$, $j\in\{j_1,\dots,j_r\}\subset\{1,\dots,n\}$, *то для єдиності розв'язку задачі* (6), (2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\ \ \forall m\in\mathbb{Z}) \quad a_jT/\pi\neq(2m+1)/(2k), \qquad j\in\{j_1,\dots,j_r\}. \tag{7}$$

Теорема 3.5. *Нехай у рівнянні* (6) *всі числа* b_j, $j\in\{1,\dots,n\}$, *відмінні від нуля. Якщо* $f\in C([0,T],\mathcal{T}')$ $(C([0,T],\mathcal{T}))$, $\varphi_s\in\mathcal{T}'$ $(\mathcal{T})$, $s\in\{1,\dots,2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (6), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ $(C^{2n}([0,T],\mathcal{T}))$. *Якщо* $f\in C([0,T],H_{1+q-2n}(\Omega^1))$, $\varphi_s\in H_q(\Omega^1)$, $\varphi_{n+s}\in H_{q-1}(\Omega^1)$, $s\in\{1,\dots,n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (6), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* f *та* φ_s, $s\in\{1,\dots,2n\}$.

Теорема 3.6. *Нехай у рівнянні* (6) $b_j = 0$, $j \in \{j_1, \dots, j_r\} \subset \{1, \dots, n\}$, *і виконуються умови* (7). *Якщо* $f \in C([0,T], \mathcal{T}')$ $(C([0,T], \mathcal{T}))$, $\varphi_s \in \mathcal{T}'$ $(\mathcal{T})$, $s \in \{1, \dots, 2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (6), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}')$ $(C^{2n}([0,T], \mathcal{T}))$. *Якщо* $f \in C([0,T], H_{q+1+\alpha_1-2n}(\Omega^1))$, $\varphi_s \in H_{q+\alpha_1}(\Omega^1)$, $\varphi_{n+s} \in H_{q-1+\alpha_1}(\Omega^1)$, $s \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_1 > 1$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* T *та для фіксованих коефіцієнтів рівняння* (6) *існує єдиний розв'язок задачі* (6), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^1))$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* f *та* φ_s, $s \in \{1, \dots, 2n\}$.

У підрозділі 3.1.2 результати підрозділу 3.1.1 частково перенесено на випадок систем рівнянь. В області D^1 розглянуто задачу

$$L[u] := \sum_{s=0}^{n} A_s \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2(n-s)} \partial x^{2s}} = f(t,x), \tag{8}$$

$$U_r[u] := \left. \frac{\partial^{2r-2} u(t,x)}{\partial t^{2r-2}} \right|_{t=0} = 0, \; U_{n+r}[u] := \left. \frac{\partial^{2r-1} u(t,x)}{\partial t^{2r-1}} \right|_{t=T} = 0, \; r \in \{1, \dots, n\}, \tag{9}$$

де $A_s = [a_{pj}^s]_{p,j=1}^m$ – матриці з дійсними сталими елементами, A_0 — одинична матриця; $u(t,x) = \mathrm{col}\,(u_1(t,x), \dots, u_m(t,x))$, $f(t,x) = \mathrm{col}(f_1(t,x), \dots, f_m(t,x))$.

Припускаємо, що система рівнянь (8) є гіперболічною за Петровським у вузькому сенсі, тобто що всі корені рівняння $\delta(\lambda) := \det \left[\sum_{s=0}^{n} a_{pj}^s \lambda^{2n-2s} \right]_{p,j=1}^m = 0$ є дійсними і різними, а отже, і відмінними від нуля; позначимо через $\lambda_1, \dots, \lambda_{mn}$ додатні корені цього рівняння.

Означення 3.2. *Розв'язком задачі* (8), (9) *з простору* $\overline{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega^1))$, $q \in \mathbb{R}$, *називатимемо вектор-функцію* u *з цього простору, для якої справджуються такі умови:* $\left\| L[u] - f; \overline{C}([0,T], H_{q-2n}(\Omega^1)) \right\| = 0$, $\left\| U_r[u]; \overline{H}_{q-2r+2}(\Omega^1) \right\| = 0$, $\left\| U_{n+r}[u]; \overline{H}_{q-2r+1}(\Omega^1) \right\| = 0$, $r \in \{1, \dots, n\}$.

Теорема 3.7. *Для єдиності розв'язку задачі* (8), (9) *у просторі* $\overline{C}^{2n}([0,T], H_{2n}(\Omega^1))$ *необхідно і достатньо, щоб справджувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \forall m \in \mathbb{Z}) \quad \lambda_j T k \neq (m + 1/2)\pi, \quad j \in \{1, \dots, nm\}. \tag{10}$$

Теорема 3.8. *Нехай справджуються умови* (10). *Якщо* $f \in \overline{C}([0,T], H_{q+\chi}(\Omega^1))$, $q \geq 2n$, $\chi > 2 - 2n$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *і для фіксованих матриць* A_s, $s \in \{0, \dots, n\}$, *існує єдиний розв'язок задачі* (8), (9) *з простору* $\overline{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega^1))$. *Цей розв'язок справджує нерівність* $\left\| u; \overline{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega^1)) \right\|^2 \leq c_1 \left\| f; \overline{C}([0,T], H_{q+\chi}(\Omega^1)) \right\|^2$, *де* $c_{11} = c_{11}(n, m, T, a_{pr}^s, 0 \leq s \leq n, 1 \leq p, r \leq m)$.

У підрозділі 3.2.1 в області B^p розглядаємо задачу

$$\partial^2 u\,(t,x)/\partial t^2 - Lu\,(t,x) = f\,(t,x)\,, \tag{11}$$

$$\left. \left(a_1 u(t,x) + a_2 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \right) \right|_{t=0} = \varphi_1(x)\,, \quad \left. \left(b_1 u(t,x) + b_2 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \right) \right|_{t=T} = \varphi_2(x)\,, \tag{12}$$

$$u\left|_{\Sigma}\right. = 0, \tag{13}$$

де a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$; L — самоспряжений, еліптичний в області G, $\overline{G} \in A^{2,\nu}$, диференціальний вираз

$$L := \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}\left(x\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - q\left(x\right), \tag{14}$$

у якому $p_{ij}\left(x\right) \in C^{1,\nu}$, $i, j \in \{1, ..., p\}$, $q\left(x\right) \geq 0$, $q\left(x\right) \in C^{0,\nu}$, $0 < \nu < 1$.

Відомо, що власні значення λ_k, $k \in \mathbb{N}$, задачі $LX\left(x\right) = -\lambda X\left(x\right)$, $X\left(x\right)|_{\Gamma} = 0$, множину яких позначимо через Λ, є різними і додатними, а система власних функцій $\Upsilon = \{X_k\left(x\right), k \in \mathbb{N}\}$, є повною ортонормованою у просторі $L_2\left(G\right)$, при цьому $X_k\left(x\right) \in C^2\left(\overline{G}\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

Встановлено (теорема 3.9), що для єдиності розв'язку задачі (11)–(13) у просторі $C^2\left(\overline{B}^p\right)$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\left(\forall \lambda_k \in \Lambda\right) \qquad \Delta\left(\lambda_k\right) \neq 0, \tag{15}$$

де $\Delta\left(\lambda_k\right) = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 \lambda_k\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right) + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)\sqrt{\lambda}_k\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T\right)$.

Теорема 3.10. *Нехай справджується умова* (15) *і нехай існують сталі* $c_{14} > 0$ *і* $\gamma \in \mathbb{R}_+$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) значень* $\lambda_k \in \Lambda$ *виконується нерівність*

$$\left|\Delta\left(\lambda_k\right)\right| \geq c_{14} k^{-\gamma}. \tag{16}$$

Якщо $\varphi_j \in C^{2r}\left(\overline{G}\right)$, $L^q\varphi_j|_{\Gamma} = 0$, $j = 1, 2$, $f \in C^{(0,2r)}\left(\overline{B}^p\right)$, $L^q f|_{\Gamma} = 0$, $t \in [0, T]$, *де* $q \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, $r = \left[\left(5 + p\left(1,5 + \gamma\right)\right)/2\right] + 1$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (11)–(13) *із простору* $C^2\left(\overline{B}^p\right)$. *Цей розв'язок справджує нерівність* $\left\|u; C^2\left(\overline{B}^p\right)\right\| \leq c_{15}\left(\left\|\varphi_1; C^{2r}\left(\overline{G}\right)\right\| + \left\|\varphi_2; C^{2r}\left(\overline{G}\right)\right\| + \left\|f; C^{(0,2r)}\left(\overline{B}^p\right)\right\|\right)$.

Доведено (теореми 3.11 і 3.12), що нерівність (16) справджується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T, де стала γ визначається вихідними даними задачі.

У підрозділі 3.2.2 в області B^p розглянуто задачу

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2(n-s)}}{\partial t^{2(n-s)}} L^s u\left(t, x\right) = f\left(t, x\right), \quad a_s \in \mathbb{R}, \quad a_0 \neq 0, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)} u\left(t, x\right)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \varphi_r\left(x\right), \quad \left.\frac{\partial^{2r-1} u\left(t, x\right)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+r}\left(x\right), \quad r \in \{1, ..., n\}, \tag{18}$$

$$L^q u\left|_{\Sigma}\right. = 0, \quad q \in \{0, ..., n-1\}, \tag{19}$$

де L — самоспряжений, еліптичний в області G, $\overline{G} \in A^{2n,\nu}$, диференціальний вираз, заданий формулою (14), в якій $p_{ij}\left(x\right) \in C^{2n-1,\nu}$, $i, j \in \{1, ..., p\}$, $q\left(x\right) \in C^{2n-2,\nu}$, $0 < \nu < 1$; $L^0 u = u$, $L^q u = L\left(L^{q-1}u\right)$, $q \in \{1, ..., n\}$.

Встановлено умови єдиності (теорема 3.13) та умови існування (теорема 3.14) класичного розв'язку задачі (17)–(19) для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T.

У підрозділі 3.2.3 показано, як отримані в дисертаційній роботі результати для лінійних рівнянь можна перенести на випадок, коли лінійне рівняння збурено нелінійним доданком. В області B^p досліджено задачу

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2(n-s)}}{\partial t^{2(n-s)}} L^s u(t,x) = f(t,x) + \varepsilon \Phi(t,x,u(t,x)), \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)} u(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{2r-1} u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = 0, \quad r \in \{1,...,n\}, \tag{21}$$

$$L^q u\,|_{\Sigma} = 0, \quad q \in \{0,...,n-1\}, \tag{22}$$

де L — той самий диференціальний вираз, що і в задачі (17)–(19), функція $\Phi(t,x,u)$ визначена та неперервна за змінною t і досить гладка за x, u в замкненій області $Q = \left\{(t,x,u) : (t,x) \in \overline{B}^p, u \in \overline{S}(u^0,r)\right\}$, $\overline{S}(u^0,r) = \{u \in C^{2n}(\overline{B}^p) : \left\|u - u^0; C^{2n}(\overline{B}^p)\right\| \leq r\}$; $u^0 := u^0(t,x)$ — розв'язок задачі (20)–(22) при $\varepsilon = 0$.

Доведено (теорема 3.15), що за умов існування класичного розв'язку задачі (20)–(22) при $\varepsilon = 0$ (див. теорему 3.14), якщо $n \geq [3(p+1)/2] + 1$, функція $\Phi(t,x,u)$ в області Q неперервна за t та має неперервні похідні за змінними x і u до порядку $2h+1$, причому для кожної функції $u \in \bar{S}(u^0,r)$ справджуються умови $L^g \Phi|_{\Sigma} = 0$, $L^g \left.\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right|_{\Sigma} = 0$, $g \in \{0,1,\ldots,h-1\}$, де $h = [5(p+2)/4]$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T і для достатньо малих $|\varepsilon|$ існує єдиний розв'язок задачі (20)–(22). Цей розв'язок належить кулі $\overline{S}(u^0,r) \subset C^{2n}(\overline{B}^p)$ і неперервно залежить від функції f.

Наближений розв'язок задачі (20)–(22) шукаємо методом послідовних наближень; при цьому визначаємо величину похибки n-го наближення $(n = 1,2,...)$ до точного розв'язку цієї задачі.

У четвертому розділі дисертації досліджено задачу з умовами Діріхле-Неймана за виділеною змінною t для загальних (без обмеження на тип) лінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами.

У підрозділі 4.1.1 в області D^p розглянуто задачу

$$\sum_{|\hat{s}|^* \leq 2n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|^*} u(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = 0, \quad A_{\hat{s}} \in \mathbb{C}, \quad A_{(n,0,\ldots,0)} = 1, \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial^{2r-2} u(t,x)}{\partial t^{2r-2}}\right|_{t=0} = \varphi_r(x), \quad \left.\frac{\partial^{2r-1} u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+r}(x), \quad r \in \{1,\ldots,n\}. \tag{24}$$

Означення 4.1. *Розв'язком задачі* (23), (24) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *називатимемо функцію* $u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t) \exp(ik,x)$ *таку, що кожен з коефіцієнтів* $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, *належить простору* $C^{2n}([0,T])$ *і справджує,* *відповідно, рівності* $\sum_{|\hat{s}|^*\le 2n} A_{\hat{s}}\,(ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p}\,d^{2s_0}u_k\,(t)/dt^{2s_0} = 0,\ t\in(0,T)$, та $u_k^{(2r-2)}\,(0) = \varphi_{rk},\ u_k^{(2r-1)}\,(T) = \varphi_{n+r,k},\ r\in\{1,\dots,n\}$.

Припускаємо, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ корені $\eta_1(k),\ \dots,\ \eta_n(k),\ -\eta_1(k),\ \dots,\ -\eta_n(k)$ рівняння $\sum_{|\hat{s}|^*\le 2n} A_{\hat{s}}\,(ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p}\,\eta^{2s_0} = 0$ є різними, а отже, відмінними від нуля; не порушуючи загальності, надалі будемо вважати, що $\operatorname{Re}\eta_j\,(k)\ge 0,\ j\in\{1,\dots,n\},\ k\in\mathbb{Z}^p$.

Теорема 4.1. *Для єдиності розв'язку задачі* (23), (24) *у просторі* $C^{2n}\,([0,T]\,,\mathcal{T}')$ *необхідно і достатньо, щоб справджувались умови*

$$(\forall k\in\mathbb{Z}^p,\ \forall m\in\mathbb{Z})\quad i\eta_j\,(k)\,T\neq\pi\,(m+1/2)\,,\ j\in\{1,\dots,n\}\,. \qquad (25)$$

Теорема 4.2. *Нехай справджуються умови* (25)*. Якщо* $\varphi_j\in\mathcal{T}'\,(\mathcal{T})$, $j\in\{1,\dots,2n\}$*, то існує єдиний розв'язок задачі* (23), (24) *з простору* $C^{2n}\,([0,T]\,;\mathcal{T}')$ $\left(C^{2n}\,([0,T]\,;\mathcal{T})\right)$*; цей розв'язок визначає формула*

$$u\,(t,x)=\sum_{|k|\ge 0}\sum_{q,j=1}^{n} S_{n-j}^{(q)}\frac{\varphi_{jk}\eta_q\left(e^{-\eta_q t}+e^{-2\eta_q T+\eta_q t}\right)+\varphi_{n+j,k}\left(e^{\eta_q t-\eta_q T}-e^{-\eta_q t-\eta_q T}\right)}{(-1)^{n+j}\,\eta_q\,(1+e^{-2\eta_q T})\prod_{s=1,s\neq q}^{n}\left(\eta_q^2-\eta_s^2\right)}e^{(ik,x)},$$

де $S_l^{(q)}$, $l\in\{1,\dots,n-1\}$ *— сума всіх можливих добутків елементів* $\eta_1^2,\dots,\eta_{q-1}^2$, $\eta_{q+1}^2,\dots,\eta_n^2$*, взятих по* l *штук у кожному добутку,* $S_0^{(q)}\equiv 1$.

Теорема 4.3. *Нехай справджуються умови* (25) *та існують такі додатні сталі* c_2, c_3, c_4, α_1, α_2, α_3*, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *правильними є оцінки*

$$|\eta_q\,(k)|\ge c_2\,(1+|k|)^{-\alpha_1}\,,\quad q\in\{1,\dots,n\}\,, \qquad (26)$$

$$\prod_{s=1,s\neq q}^{n}\left|\eta_q^2(k)-\eta_s^2(k)\right|\ge c_3\,(1+|k|)^{-\alpha_2}\,,\quad q\in\{1,\dots,n\}\,, \qquad (27)$$

$$\left|1+e^{-2\eta_q(k)T}\right|\ge c_4\,(1+|k|)^{-\alpha_3}\,,\quad q\in\{1,\dots,n\}\,. \qquad (28)$$

Якщо $\varphi_s\in H_{\chi+q}\,(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s}\in H_{\chi+\alpha_1+q}\,(\Omega^p)$, $s\in\{1,\dots,n\}$, $\chi=2n-2+\alpha_2+\alpha_3$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (23), (24) *з простору* $C^{2n}([0,T]\,,H_q(\Omega^p))$. *Цей розв'язок справджує нерівність* $\left\|u;C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))\right\|\le c_5\left(\sum_{s=1}^{n}\|\varphi_s;H_{\chi+q}\|+\sum_{s=n+1}^{2n}\|\varphi_s;H_{\chi+\alpha_1+q}\|\right)$, де $c_5=c_5(A_{\hat{s}},|\hat{s}|^*\le 2n;n,c_2,c_3,c_4)$.

Виясним можливість виконання оцінок (26)–(28). Позначимо через $b=(b_1,\dots,b_\beta)\in\mathbb{Z}^\beta$ та $d=(d_1,\dots,d_\beta)\in\mathbb{Z}^\beta$ вектори, складені, відповідно, із дійсних та уявних частин коефіцієнтів $A_{(0,s)}$ рівняння (23), де β — кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах нерівності $s_1+s_2+\dots+s_p\le 2n$, а через $l=(l_1,\dots,l_\gamma)\in\mathbb{Z}^\gamma$ та $h=(h_1,\dots,h_\gamma)\in\mathbb{Z}^\gamma$ – вектори, складені, відповідно, із дійсних та уявних частин коефіцієнтів $A_{(s_0,s)}$ рівняння (23), де γ — кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах нерівності $2s_0+s_1+s_2+\dots+s_p\le 2n$.

Лема 4.1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^\beta$*) векторів* b *і довільного фіксованого вектора* d*, або для довільного фіксованого вектора* b *і* *майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\beta}$) векторів d нерівності* (26) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\alpha_1>n+p/2-1$.*

Лема 4.2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\gamma}$) векторів l і довільного фіксованого вектора h, або для довільного фіксованого вектора l і майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\gamma}$) векторів h, нерівності* (27) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\alpha_2>(n-1)p/2$.*

Лема 4.3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{\beta}$) векторів b і довільного фіксованого вектора d (або для майже всіх векторів d і довільного фіксованого вектора b) нерівності* (28) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\alpha_3 > \alpha_1 + p$, де $\alpha_1 > n + p/2 - 1$.*

Наслідок 4.1. *Якщо $\varphi_s\in H_{q+\chi}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s}\in H_{q+\chi+p/2+n-1}(\Omega^p)$, $\chi > pn/2+3n+p-3$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, то, за умов* (25)*, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T та для майже всіх коефіцієнтів рівняння* (23) *у просторі $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$ існує єдиний розв'язок задачі* (23), (24); *причому* $\left\|u;C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))\right\| \le c_{12}\Big(\sum_{s=1}^{n}\|\varphi_s;H_{q+\chi}\|+\sum_{s=n+1}^{2n}\left\|\varphi_s;H_{q+\chi+p/2+n-1}\right\|\Big)$.

Розглянуто частинний випадок задачі (23), (24), коли рівняння (23) є гіперболічним за Гордінгом (приклад 4.1), для якої отримано кращу оцінку знизу малого знаменника, ніж у лемі 4.3, а отже, і слабші умови на вихідні дані у теоремі існування розв'язку зі шкали просторів $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$, $q\in\mathbb{R}$.

У підрозділі 4.1.2 в області D^p розглянуто задачу з умовами (24) для рівняння

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\sum_{s=1}^{p}a_{js}\frac{\partial}{\partial x_s}+b_j\right)^2\right]u(t,x)=0,\quad a_{js},b_j\in\mathbb{C}. \tag{29}$$

Нехай $\eta_j^*(k):=b_j+i\sum_{s=1}^{p}a_{js}k_s$, $j\in\{1,\ldots,n\}$. Надалі вважатимемо, що

$$(\forall k\in\mathbb{Z}^p)\quad (\eta_j^*(k))^2\ne(\eta_r^*(k))^2,\quad j,r\in\{1,\ldots,n\},\quad j\ne r.$$

Встановлено (наслідок 4.2), що для єдиності розв'язку задачі (24), (29) у просторі $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ необхідно і достатньо, щоб справджувались умови

$$(\forall k\in\mathbb{Z}^p,\ \forall m\in\mathbb{Z})\quad b_j+i\sum_{s=1}^{p}a_{js}k_s\ne i\pi(m+1/2)/T,\ j\in\{1,\ldots,n\}. \tag{30}$$

За умов (30) для задачі (24), (29) справедливі теореми 4.2, 4.3, у яких замість $\eta_j(k)$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, треба покласти вирази $\eta_j^*(k)$, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Твердження 4.2. *Нехай справджуються умови* (30). *Якщо функції $\varphi_s\in H_{q+\chi}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s}\in H_{q+\chi+p/n}(\Omega^p)$, $\chi>2n+3p+p/n-2$, $s\in\{1,\ldots,n\}$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T та для майже всіх коефіцієнтів рівняння* (29) *у просторі $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$ існує єдиний розв'язок задачі* (24), (29). *Цей розв'язок справджує нерівність*

$$\left\|u;C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))\right\|\le c_{18}\Big(\sum_{s=1}^{n}\|\varphi_s;H_{q+\chi}\|+\sum_{s=n+1}^{2n}\left\|\varphi_s;H_{q+\chi+p/n}\right\|\Big).$$

У підрозділі 4.2 в області D^p розглянуто задачу з умовами вигляду (9) для безтипної системи рівнянь

$$\sum_{|\hat{s}|^* \leq 2n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|^*} u\,(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = f\,(t,x)\,, \tag{31}$$

де A_s – $m{\times}m$-матриці зі сталими дійсними елементами, $\det A_{n,0,\ldots,0} \neq 0$, $u\,(t,x) = col\,(u_1\,(t,x)\,, \ldots, u_m\,(t,x))$, $f\,(t,x) = col\,(f_1\,(t,x)\,, \ldots, f_m\,(t,x))$.

Нехай $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\tilde{k} = (k_0, k)$, $|\tilde{k}| = k_0 + |k_1| + \cdots + |k_p|$; $H_q\,(D^p)$, $q \in \mathbb{Z}_+$, — простір комплекснозначних функцій $v(t,x) = \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{|k| \geq 0} v_{\tilde{k}} \sin\left(\frac{\pi}{T}\left(k_0 + \frac{1}{2}\right)t\right) \exp\,(ik,x)$ зі скінченною нормою $\|v; H_q\,(D^p)\|^2 := 2^{p-1} T \pi^p \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{|k| \geq 0} (1 + |\tilde{k}|^2)^q\, |v_{\tilde{k}}|^2$; $\overline{H}_q\,(D^p)$, $q \in \mathbb{Z}_+$, — відповідний до $H_q\,(D^p)$, $q \in \mathbb{Z}_+$, простір вектор-функцій.

Для задачі, яка розглядається, встановлено умови єдиності розв'язку у просторі $\overline{H}_{2n}\,(D^p)$ (теорема 4.4) та доведено існування розв'язку з простору $\overline{H}_q\,(D^p)$, $q \geq 2n$, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T, якщо $f \in \overline{H}_{q+\gamma}\,(D^p)$, де $\gamma > n\,(m\,(p+2) - 2)$ (теорема 4.6).

У п'ятому розділі досліджено умови однозначної розв'язності у різних функційних просторах задачі з умовами Діріхле-Неймана (за змінною t) для лінійних рівнянь з частинними похідними у безмежній смузі і безмежному шарі.

Введемо такі позначення: $Q^p = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1}:\ 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^p\right\}$;

$M = \{\mu_k \in \mathbb{R}:\ \mu_{-k} = -\,\mu_k,\ \mu_0 = 0,\ d_1|k|^\sigma \leq |\mu_k| \leq d_2|k|^\sigma,\ \sigma > 0,\ d_2 \geq d_1 > 0,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

$\mathcal{T}_M$ — простір тригонометричних поліномів $v(x) = \sum_{|k| \leq N} v_k \exp\,(i\mu_k x)$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $\mu_k \in M$; $\mathcal{T}'_M$ — простір антилінійних неперервних функціоналів над $\mathcal{T}_M$;

$H_q^M(\mathbb{R})$, $q \in \mathbb{R}$, — простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}_M$ за нормою $\left\|v; H_q^M(\mathbb{R})\right\|^2 := \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + \mu_k^2)^q\, |v_k|^2$;

$C^r\,([0,T]\,; \mathcal{T}'_M)$ $(C^r\,([0,T]\,; \mathcal{T}_M))$ і $C^r([0,T], H_q^M(\mathbb{R}))$, $q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, – простори, аналогічні до просторів, введених у розділі 3 для 2π-періодичних за x функцій;

$A_{1,d}$ — клас цілих функцій $g(x)$, порядок яких не перевищує одиниці, причому функції першого порядку мають тип менший, ніж d, $d > 0$;

K_L — клас квазіполіномів $\varphi\,(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\,(x) \exp\,(\alpha_j x)\,,$ де $\alpha_j \in L \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$, $j,k \in \{1, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $Q_j\,(x)$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, — поліноми;

$\mathbf{A}_d^M$ — клас цілих функцій $g(t,x)$, які для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ належать класу $A_{1,d} \bigcup K_{\mathbb{C} \setminus M}$;

$D = (D_1, \ldots, D_p)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$, $j \in \{1, \ldots, p\}$, $D^s = D_1^{s_1} \cdots D_p^{s_p}$;

$A\,(D) := \sum_{|s|=0}^{\infty} a_s D^s$, $a_s \in$C, — псевдодиференціальний оператор, символ якого $A\,(\xi) := \sum_{|s|=0}^{\infty} a_s \xi^s$ є аналітичною функцією в області $\Theta \subset \mathbb{R}_\xi^p$;

$H^{+\infty}(\Theta)$ — простір функцій $v \in L_2(\mathbb{R}_x^p)$, для яких перетворення Фур'є є фінітними в області $\Theta \subset \mathbb{R}_\xi^p$; $[H^{+\infty}(\Theta)]^*$ — простір узагальнених функцій над $H^{+\infty}(\Theta)$;

$H^{-\infty}\,(\Theta) = [H^{+\infty}\,(-\Theta)]^*$, $-\Theta = \{\xi \in \mathbb{R}_\xi^p : -\xi \in \Theta\}$;

$C^k\,([0,T]\,, H^{\pm\infty}\,(\Theta))$ — простір функцій $v\,(t,x)$, які для кожного $t \in [0,T]$ є функціями з простору $H^{\pm\infty}\,(\Theta)$ і неперервно залежать від t разом із похідними за t до порядку k.

У підрозділі 5.1.1 в області Q^1 розглянуто питання однозначної розв'язності задачі (1), (2) у класі функцій, майже періодичних за змінною x, із заданим спектром M.

Означення розв'язку задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_M)$ аналогічне до означення 3.1. Встановлено умови єдиності та існування розв'язку задачі (1), (2) у просторі $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_M)$ ($C^{2n}([0,T],\mathcal{T}_M)$) (теореми 5.1 і 5.2).

Теорема 5.3. *Якщо* $f \in C([0,T],H^M_{q+1-2n+(1+\varepsilon)/\sigma}(\mathbb{R}))$, $\varphi_s \in H^M_{q+(1+\varepsilon)/\sigma}(\mathbb{R})$, $\varphi_{n+s} \in H^M_{q-1+(1+\varepsilon)/\sigma}(\mathbb{R})$, $s \in \{1,\dots,n\}$, $\varepsilon > 0$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* T *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],H^M_q(\mathbb{R}))$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* f *та* φ_s, $s \in \{1,\dots,2n\}$.

У підрозділі 5.1.2 в області Q^1 задачу (1), (2) досліджено за допомогою диференціально-символьного методу.

Встановлено (твердження 5.2), що коли $\varphi_j \in A_{1,d}\bigcup K_{\mathbb{C}\setminus M}$, $j \in \{1,\dots,2n\}$, $f \in \mathbf{A}^M_d$, де $M = \left\{(2m+1)(2\lambda_j T)^{-1}\pi i, m \in \mathbb{Z}, j \in \{1,\dots,n\}\right\}$, $d = \pi\,(2T\lambda_n)^{-1}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ — додатні корені рівняння $\sum_{s=0}^n a_s\lambda^{2(n-s)} = 0$, то у класі $\mathbf{A}^M_d$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2). Цей розв'язок зображено у вигляді дії (в околі нуля) диференціальних виразів, символами яких є праві частини крайових умов та рівняння, на деякі мероморфні функції параметрів. Нульові значення параметрів не є полюсами цих функцій.

У підрозділі 5.2 на прикладі рівняння вільних коливань струни показано, що для деяких класів рівнянь, щоб забезпечити коректність задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною), можна не накладати умови за змінною x, а накласти додаткові умови за змінною t у внутрішніх точках часового інтервалу.

В області Q^1 досліджено задачу

$$\partial^2 u\,(t,x)/\partial t^2 - \partial^2 u\,(t,x)/\partial x^2 = 0, \tag{32}$$

$$u\,(t,x)|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u\,(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T} = 0,\ \left.\frac{\partial u\,(t,x)}{\partial t}\right|_{t=\tau} = \varphi\,(x)\,, \quad 0 < \tau < T. \tag{33}$$

Теорема 5.8. *Для єдиності класичного розв'язку задачі* (32), (33) *достатньо, щоб число* τ/T *було ірраціональним.*

Встановлено умови існування класичного розв'язку задачі (32), (33) для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел τ/T (теорема 5.9).

Результати поширено на випадки задач для рівняння (32) з умовами

$$u\,(t,x)|_{t=0} = \varphi_1\,(x)\,,\ \left.\frac{\partial u\,(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T} = \varphi_2\,(x)\,,\ \left.\frac{\partial u\,(t,x)}{\partial t}\right|_{t=\tau} = \varphi_3\,(x)\,,\ 0 < \tau < T,$$

або $u\,(t,x)|_{t=0} = \varphi_1\,(x)\,,\ \left.\dfrac{\partial u\,(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T} = \varphi_2\,(x)\,,\ u\,(t,x)|_{t=\tau} = \varphi_3\,(x)\,,\ 0 < \tau < T.$

У підрозділі 5.3 в області Q^p розглянуто задачу з умовами вигляду (24) для рівняння

$$\frac{\partial^{2n}u\left(t,x\right)}{\partial t^{2n}}+\sum_{k=0}^{2n-1}A_k\left(t,D\right)\frac{\partial^{k}u\left(t,x\right)}{\partial t^{k}}=0, \tag{34}$$

де $A_k\left(t,D\right)$, $k\in\{0,1,\ldots,2n-1\}$ — лінійні диференціальні оператори (назагал, нескінченного порядку) з неперервними за t коефіцієнтами, $t\in[0,T]$. Вважаємо, що для кожного $t\in[0,T]$ символи $A_k\left(t,\xi\right)$ цих операторів є аналітичними за ξ функціями в деякій області $G_1\subset\mathbb{R}^p_\xi$.

Нехай $\Delta\left(\xi\right)$ — характеристичний визначник задачі, яку отримуємо з задачі (24), (34), покладаючи формально $D\leftrightarrow\xi$, де параметр ξ належить області G_1; $\Gamma_1=\{\xi\in G_1:\Delta\left(\xi\right)=0\}$; $G_2=G_1\backslash\Gamma_1$.

Теорема 5.14. *Нехай $\varphi_j\in H^{+\infty}\left(G_2\right)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$. Тоді існує єдиний розв'язок $u\left(t,x\right)$ задачі* (24), (34) *з простору $C^{2n}\left(\left[0,T\right],H^{+\infty}\left(G_2\right)\right)$.*

Доведено (теорема 5.15), що якщо $\varphi_j\in H^{-\infty}\left(G_2\right)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, то існує єдиний розв'язок задачі (24), (34) з простору $C^{2n}\left(\left[0,T\right],H^{-\infty}\left(G_2\right)\right)$.

Для частинних випадків задачі (24), (34), коли в лівій частині рівняння є факторизований оператор другого порядку (приклад 5.2), а також коли коефіцієнти рівняння (34) є сталими (приклад 5.3), область G_2 та розв'язок задачі побудовано у явному вигляді.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню задач з умовами Діріхле-Неймана за виділеною змінною та певними умовами (періодичності, майже періодичності, умовами типу умов Діріхле та ін.) за рештою змінних для гіперболічних (лінійних і слабко нелінійних) та безтипних (лінійних) рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними в обмежених та необмежених циліндричних областях. Більшість розглянутих у дисертаційній роботі задач є, взагалі, умовно коректними, а їхня розв'язність, зазвичай, пов'язана з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої використано метричний підхід.

У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

— досліджено коректність у різних функційних просторах крайових задач для лінійних гіперболічних рівнянь та систем рівнянь в обмежених циліндричних областях, коли на нижній та верхній основах циліндра задано умови Діріхле та Неймана відповідно або локальні крайові умови третього роду;

— досліджено класичну розв'язність задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійного гіперболічного оператора високого порядку, збуреного нелінійним доданком (застосовуючи принцип нерухомої точки);

— досліджено умови однозначної розв'язності у різних функційних просторах задач з умовами Діріхле-Неймана за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за іншими змінними для загальних (без обмеження на тип) лінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами;

— досліджено коректність у безмежній смузі задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами в класах цілих функцій (застосовуючи диференціально-символьний метод) і в класах майже періодичних функцій за просторовою змінною;

— встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для рівняння вільних коливань безмежної струни з додатковою умовою Діріхле або Неймана у внутрішній точці часового інтервалу;

— у безмежному шарі досліджено однозначну розв'язність крайової задачі з мішаними умовами (Діріхле-Неймана) на межі області для рівнянь із псевдодиференціальними операторами (використовуючи техніку диференціальних операторів нескінченного порядку);

— побудовано точні розв'язки досліджуваних задач у випадках лінійних рівнянь та вказано алгоритм побудови наближеного розв'язку у випадку задачі для слабко нелінійного рівняння;

— доведено метричні леми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків досліджуваних задач, на підставі яких встановлено умови коректної розв'язності задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задачі.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у подальших дослідженнях різних крайових задач для рівнянь із частинними похідними, а також при розв'язанні конкретних задач практики, математичними моделями яких є досліджені у роботі крайові задачі.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Білусяк Н. І.* Крайова задача зі змішаними умовами для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь / Н. І. Білусяк, Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, №3. – С. 74–84. (Переклад: Bilusyak N. I. Boundary-value problem with mixed conditions for weakly nonlinear hyperbolic equations / N. I. Bilusyak, B. Yo. Ptashnyk, S. M. Repetylo // J. Math. Sci. – 2012. – **180**, № 1. – P. 68–80.)

2. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, № 3. – С. 15–28. (Переклад: Ptashnyk B. Yo. Dirichlet–Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients / B. Yo. Ptashnyk, S. M. Repetylo // J. Math. Sci. – 2015. – **205**, № 4. – P. 501–517.)

3. *Нитребич З. М.* Задача Діріхле-Неймана для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі / З. М. Нитребич, Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія "математика і інформатика". – 2014. – Вип. 25, № 1. – С. 94–105.

4. *Пташник Б. Й.* Крайова задача з мішаними умовами для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі змінними коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 19–24.

5. *Пташник Б. Й.* Крайова задача зі змішаними умовами для рівнянь із псевдодиференціальними операторами з аналітичними символами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 7–14.

6. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип. 10. – С. 7–14.

7. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – Т. 57, № 2. – С. 25–31.

8. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана для лінійних нееліптичних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Доп. НАН України. – 2015. – № 2. – С. 24–31.

9. *Репетило С. М.* Крайова задача для лінійного гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами / С. М. Репетило // Вісник НУ "Львівська політехніка". Серія "фіз.-мат. науки". – 2009. – Вип. 660, № 660. – С. 28–33.

10. *Репетило С. М.* Задача Діріхле-Неймана для лінійних гіперболічних рівнянь другого порядку у смузі / С. М. Репетило // Вісник НУ "Львівська політехніка". Серія "фіз.-мат. науки". – 2013. – Вип. 769, № 769. – С. 26–33.

11. *Білусяк Н. І.* Крайова задача з мішаними умовами для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами / Н. І. Білусяк, С. М. Репетило // Конф. молодих вчених з сучасних проблем мех. і мат. ім. акад. Я. С. Підстригача: тези доповідей, Львів, 25–27 травня, 2009р. – Львів, 2009. – С. 198 – 199.

12. *Нитребич З. М.* Задача Діріхле-Неймана у смузі для рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / З. М. Нитребич, Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // XV міжнар. наук. конф. ім. акад. Михайла Кравчука: матеріали конференції I, Київ, 15–17 травня, 2014 р. – К.: НТУУ "КПІ" , 2014. – С. 231.

13. *Пташник Б. Й.* Крайова задача з мішаними умовами для лінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Міжнар. мат. конф. ім. В. Я. Скоробогатька: тези доповідей, Дрогобич, Україна, 24–28 вересня, 2007 р. – Львів, 2007. – С. 235.

14. *Пташник Б. Й.* Крайова задача з мішаними умовами для рівнянь із псевдодиференціальними операторами з аналітичними символами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Дев'ята наук. конф. професорсько-викладацького складу ІМФН НУ "Львівська політехніка": тези доповідей, Львів, 18–19 листопада, 2010 р. – Львів, 2010. – С. 22.

15. *Пташник Б. Й.* Крайова задача зі змішаними умовами для безтипного рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник,

С. М. Репетило // Всеукр. наук. конф. "Прикладні задачі математики": матеріали конференції, Яремче, 13–15 жовтня, 2011 р. – Івано-Франківськ, 2011. – С. 90–92.

16. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана для безтипної системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // PSC-IMFS-10: тези доповідей, Львів, 17–18 травня, 2012 р. – Львів, 2012. – С. А.10 – А.11.

17. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана для лінійних гіперболічних рівнянь у смузі / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. / Під заг. ред. Р. М. Кушніра, Б. Й. Пташника. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 3. – С. 153 – 156.

18. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Міжнар. мат. конф. "Диф. рівн., обчисл. мат., теор. функцій та мат. методи механіки"до 100-річчя від дня нар. чл.-кор. НАН України Г. М. Положого: матеріали конференції, Київ, 23–24 квітня, 2014 р. – К.: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2014. – С. 109.

19. *Репетило С. М.* Задача Діріхле-Неймана у смузі для факторизованого гіперболічного оператора зі сталими коефіцієнтами / С. М. Репетило // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання-2014", Львів, 28–30 травня, 2014 р.: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/.

АНОТАЦІЯ

Репетило С. М. *Задачі з мішаними крайовими умовами для гіперболічних і безтипних рівнянь у циліндричних областях.* — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Львівський національний університет імені Івана Франка. — Львів, 2015.

У дисертаційній роботі розглянуто задачі з мішаними крайовими умовами (Діріхле-Неймана) за виділеною змінною та певними умовами за рештою змінних (періодичності, майже періодичності, умовами типу умов Діріхле та ін.) для гіперболічних та загальних (без обмеження на тип) рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними високого порядку, а також для деяких класів рівнянь із псевдодиференціальними операторами, в обмежених та необмежених циліндричних областях.

Встановлено умови однозначної розв'язності задач у різних функційних просторах. У випадку лінійних рівнянь та систем рівнянь побудовано точні розв'язки задач, а у випадку слабко нелінійного гіперболічного рівняння вказано алгоритм побудови наближеного розв'язку. Доведено нові метричні леми про оцінки знизу малих знаменників, що виникли при дослідженні розглянутих задач, на підставі яких встановлено умови коректності задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задачі.

Ключові слова: гіперболічні, безтипні, слабко нелінійні рівняння; крайові умови, малі знаменники, міра Лебега, псевдодиференціальні оператори, майже періодичні функції, метод Фур'є, диференціально-символьний метод.

АННОТАЦИЯ

Репетило С. М. *Задачи со смешанными краевыми условиями для гиперболических и безтипных уравнений в цилиндрических областях.* — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Львовский национальный университет имени Ивана Франко. — Львов, 2015.

В диссертационной работе рассмотрены задачи со смешанными краевыми условиями (Дирихле-Неймана) по выделенной переменной и определенными условиями по остальным переменным (периодичности, почти периодичности, условиями типа условий Дирихле и др.) для гиперболических и общих (без ограничения на тип) уравнений и систем уравнений с частными производными высокого порядка, а также для некоторых классов уравнений с псевдодифференциальными операторами, в ограниченных и неограниченных цилиндрических областях.

Установлены условия однозначной разрешимости задач в различных функциональных пространствах. В случае линейных уравнений и систем уравнений построены точные решения задач, а в случае слабо нелинейного гиперболического уравнения указан алгоритм построения приближенного решения. Доказано новые метрические леммы об оценках снизу малых знаменателей, возникших при исследовании рассматриваемых задач, на основании которых установлены условия корректности задач для почти всех (в смысле меры Лебега) параметров задачи.

Ключевые слова: гиперболические, безтипные, слабо нелинейные уравнения; краевые условия, малые знаменатели, мера Лебега, псевдодифференциальние операторы, почти периодические функции, метод Фурье, дифференциально-символьный метод.

ABSTRACT

Repetylo S. M. *Problems with mixed boundary conditions for hyperbolic and typeless equations in cylindrical domains.* — Manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics: speciality 01.01.02 — Differential Equations. — Ivan Franko National University of Lviv. — Lviv, 2015.

The present thesis considers the problems with mixed boundary conditions (Dirichlet-Neumann) in the chosen variable and certain conditions in the other variables (periodicity, almost periodicity, conditions of Dirichlet type et al.) for hyperbolic and general (no type restriction) partial differential equations and systems of

high order, and also for some classes of equations with pseudo-differential operators, in bounded and unbounded cylindrical domains.

The following new results have been obtained in the present thesis:

– the conditions of unique solvability in various functional spaces of the boundary value problems for linear hyperbolic equations and systems in bounded cylindrical domains, when Dirichlet and Neumann conditions are set on the lower and the upper bases of the cylinder, respectively, or the local boundary condition of the third kind, have been established;

– the conditions of existence and uniqueness of classic solution to Dirichlet-Neumann problem (with respect to the time variable) for a linear hyperbolic operator of high order, perturbed by a nonlinear summand, have been established;

– the conditions of unique solvability in various functional spaces of problems with Dirichlet-Neumann conditions in the chosen variable and conditions of 2π-periodicity in the other variables for the general partial differential equations and systems of high order with constant coefficients have been investigated;

– the conditions of correctness in unlimited strip of Dirichlet-Neumann problem (in the time variable) 1) for linear hyperbolic equations of high order with constant coefficients in the classes of entire functions and in the classes of almost periodic functions in the space variable, and 2) for the equation of free vibrations of a string with the additional Dirichlet or Neumann condition at an interior point time interval have been established;

– unique solvability of boundary value problem with mixed conditions on the boundary of domain for equations with pseudo-differential operators has been researched in a boundless layer;

– in the case of linear equations and systems of equations explicit formulas for solutions have been constructed, and in the case of a weakly nonlinear equation the algorithm for constructing an approximate solution has been indicated;

– new metric lemmas on lower estimates small denominators arising in the construction of solutions to the problems under consideration have been proven, and on their basis the correctness of problems for almost all (with respect to Lebesgue measure) parameters of these problems has been set.

The results of the thesis are theoretical and can be applied in further investigations of various boundary value problems for partial differential equations, as well as in specific applied problems, modeled mathematically by the boundary value problems investigated in the present thesis.

Keywords: hyperbolic, typeless, weakly nonlinear equations; boundary conditions, small denominators, Lebesgue measure, pseudo-differential operators, almost periodic functions, Fourier method, differential-character method.