МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Львівський національний університет
імені Івана Франка

Кузь Антон Мирославович

УДК 517.95

ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів — 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Науковий керівник: член-кореспондент НАН України
доктор фізико-математичних наук, професор
Пташник Богдан Йосипович,
завідувач відділу математичної фізики
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Пукальський Іван Дмитрович,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

кандидат фізико-математичних наук
Андрусяк Руслан Васильович,
доцент кафедри диференціальних рівнянь
Львівського національного університету імені Івана Франка;

Захист відбудеться "___"_____ 2015 р. о ____ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 35.051.07 Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79001, м. Львів, вул. Університетська, 1, аудиторія 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий "___"_____ 2015 р.

Секретар спеціалізованої вченої ради Остудін Б. А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження задач з інтегральними умовами за виділеною змінною, які є узагальненням дискретних нелокальних умов, для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними розпочалось у другій половині XX століття. Їх вивчення зумовлене як потребою побудови загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними, так і тим, що задачі з інтегральними умовами виникають при математичному моделюванні багатьох фізичних процесів у випадках, коли неможливо виміряти певні фізичні величини, але відомі їхні середні значення.

Задачі з інтегральними умовами для рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними вивчалися в роботах Г. А. Авалішвілі, Д. Г. Гордезіані, В. С. Ільківа, Н. І. Іонкіна, П. І. Каленюка, Л. І. Каминіна, А. М. Нахушева, З. М. Нитребича, О. М. Медвідь, З. О. Мельника, І. Д. Пукальського, Л. С. Пулькіної, М. М. Симотюка, Л. В. Фардиголи, П. І. Штабалюка, A. Bouziani, J. R. Cannon, A. Marhoune, N. Merazga, S. Mesloub та інших авторів, де розглядалися переважно коректно поставлені задачі.

Задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для еволюційних рівнянь почали вивчати у 80-х роках XX-го століття. Це обумовлено, очевидно, тим, що такі задачі, назагал, є некоректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників і не є стійкою щодо малих змін коефіцієнтів задачі та параметрів області.

В останні десятиліття було досліджено коректність задач з інтегральними умовами у вигляді послідовних моментів від шуканої функції за часовою змінною для окремих класів лінійних гіперболічних рівнянь, а також безтипних і псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними, на основі метричного підходу до оцінок знизу малих знаменників.

На сьогоднішній день актуальними є питання коректності задач з інтегральними умовами у вигляді моментів за часовою змінною (або більш загальними умовами, що містять інтеграли від шуканої функції та її похідних) для широких класів еволюційних рівнянь та систем рівнянь (гіперболічних, параболічних та рівнянь мішаного типу, а також рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом — рівнянь типу С. Л. Соболєва). Ці задачі є предметом дослідження дисертаційної роботи. Вони також стали джерелом нових задач метричної теорії діофантових наближень, оскільки при побудові їх розв'язків виникли нові малі знаменники складної нелінійної структури, оцінки знизу яких раніше не розглядалися у метричній теорії чисел.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертації отримані в рамках виконання держбюджетної теми "Дослідження коректності, побудова та вивчення властивостей розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач для некласичних еволюційних рівнянь" (номер держ-

реєстрації № 0110U004817) відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України та проекту № 41.1/004 "Розподіли нулів поліномів і гладких функцій та їх застосування при дослідженні умовно коректних крайових задач математичної фізики" (номери держреєстрації № 0111U006625) Державного Фонду фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України.

Мета і задачі дослідження. *Метою роботи* є дослідження коректності задач з інтегральними умовами за часовою змінною та умовами майже періодичності за просторовими змінними для лінійних еволюційних рівнянь і систем рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами.

Дане дослідження включає такі *завдання*:

– встановлення коректності задач з умовами за часовою змінною, що містять інтегральні доданки у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції, для гіперболічних і параболічних рівнянь та систем рівнянь, для рівнянь мішаного типу та рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною;

– конструктивну побудову розв'язків розглядуваних задач у вигляді рядів і дослідження їх збіжності у різних функціональних просторах;

– встановлення метричних оцінок знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків розглядуваних задач.

Об'єкт дослідження: задачі з інтегральними умовами для гіперболічних і параболічних рівнянь та систем рівнянь, для рівнянь мішаного типу та рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною.

Предмет дослідження: умови коректності розглядуваних задач та конструктивна побудова їх розв'язків, метричний аналіз оцінок знизу малих знаменників, пов'язаних із цими задачами.

Методи дослідження: методи функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь, алгебри та метричної теорії чисел .

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

1) в області, що є декартовим добутком часового інтервалу $(0, T)$ та простору $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, встановлено коректну розв'язність у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій із заданим спектром задач з умовами за часовою змінною, що містять інтегральні доданки у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції та:

а) значення шуканої функції та її похідних парного порядку в точках $t = 0$ та $t = T$ — для рівнянь типу Клейна-Гордона та гіперболічних за Гордінгом рівнянь, а також для гіперболічних за Петровським систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами;

б) значення шуканої функції у довільних точках $t_1, \ldots, t_n$ відрізка $[0, T]$ —

для параболічного за Петровським рівняння зі змінними за часом коефіцієнтами;

в) значення шуканої функції та її послідовних похідних в точці $t = 0$ — для систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами, параболічних за Шиловим;

г) значення шуканої функції та її похідних довільних порядків в точках $t = 0$ та $t = T$ — для рівнянь зі сталими коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом;

2) встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі з інтегральною умовою за часовою змінною для параболо-гіперболічного рівняння у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними;

3) побудовано явні формули для розв'язків задач у вигляді рядів;

4) доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків розглянутих у дисертації задач.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна застосовувати при подальшому вивчені задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними, а також при дослідженні конкретних задач практики, що моделюються розглянутими задачами (гідродинаміка, динаміка популяцій, довгострокове прогнозування погоди, теорія дифузії, теплопровідності, вологопереносу).

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. У спільних із науковим керівником роботах Б. Й. Пташнику належить постановка задач та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на таких наукових конференціях і семінарах: Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 2010, 2012 рр.); Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 2011 р.); Конференція "Дифференциальные уравнения и их приложения" СамДиф-2011 (Самара, Російська Федерація, 2011 р.); Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 2013 р.); Конференція молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача (Львів, 2009 р.); Відкрита наукова конференція Інституту прикладної математики та фундаментальних наук НУ "Львівська політехніка" (Львів, 2012, 2013 рр.); Міжнародна наукова конференції "Сучасні проблеми механіки та математики"(Львів, 2013 р.); Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2014, 2015" (Львів, 2014, 2015 рр.); науковий семінар ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники: член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Б. Й. Пташник, д.ф.-м.н., В. О. Пелих; Львів, 2010-2015 рр.), Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь (керівники: д.ф.-м.н., проф. М. І. Іванчов, д.ф.-м.н., проф. П. І. Каленюк, член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Б. Й. Пташник; Львів,

2013-2015 рр.), науковий семінар кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (керівники: д.ф.-м.н., проф. М. І. Матійчук, д.ф.-м.н., проф. І. Д. Пукальський; Чернівці, 2015 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 7 статтях [1-7], з яких 2 — без співавторів, у фахових наукових журналах з математики; з них 3 статті [3,4,6] — у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз, а також додатково висвітлено у 10 тезах [8-17] наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 154 сторінки, основного тексту — 138 сторінок. Список використаних джерел налічує 132 найменування.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Надалі використовуватимемо такі позначення: $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел; $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел; $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел; $\mathbb{Z}_+$ — множина цілих невід'ємних чисел; $\mathbb{R}_+$ — множина дійсних невід'ємних чисел; $\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел; $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, — p-вимірний дійсний евклідів простір; $\mathbb{Z}_+^p$ — множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$; $dx = dx_1 \cdots dx_p$; $\partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right)$; $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$; $\Delta = \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$; $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$, $x^s = x_1^{s_1} \cdots x_p^{s_p}$; $\hat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \cdots + s_p$; $|\hat{s}|^* = 2s_0 + s_1 + \cdots + s_p$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \cdots + |k_p|$; $\mu_k = (\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}) \in \mathbb{R}^p$; $|\mu_k| = |\mu_{k_1}| + \cdots + |\mu_{k_p}|$; $\|\mu_k\| = \sqrt{\mu_{k_1}^2 + \cdots + \mu_{k_p}^2}$; $(\mu_k, x) = \mu_{k_1} x_1 + \cdots + \mu_{k_p} x_p$; $D^p = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} : t \in (0, T), x \in \mathbb{R}^p\right\}$; $\Pi_H = [0, H]^p$, $H > 0$; $[a]$ — ціла частина числа $a \in \mathbb{R}$; $\mathbf{I}_m$ — одинична матриця розміру m, $\mathbf{O}_{m,n}$ — нульова матриця розміру $m \times n$, $\otimes$ — знак тензорного добутку; C_j, $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, — додатні величини, які не залежать від k та μ_k; $:=$ — дорівнює за означенням.

У **вступі** дисертаційної роботи розкрито сутність і стан наукової проблеми, обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету і задачі дослідження, вказано наукову новизну та апробацію одержаних результатів.

У **розділі 1** подано короткий огляд праць за тематикою дослідження.

У першому підрозділі **розділу 2** означено простори майже періодичних функцій із заданим спектром та досліджено їх властивості.

Позначимо:

$$\mathcal{V} := \{\nu_n \in \mathbb{R} : \nu_{-n} = -\nu_n, d_1|n|^{\theta_1} \leqslant |\nu_n| \leqslant d_2|n|^{\theta_2}, n \in \mathbb{Z}\}, \tag{1}$$

де $0 < d_1 \leqslant d_2$, $0 < \theta_1 \leqslant \theta_2$;

$$\mathcal{M} := \{\mu_k \in \mathbb{R}^p : \mu_{k_j} = \nu_{k_j}, \nu_{k_j} \in \mathcal{V},\ j \in \{1, \ldots, p\}, k \in \mathbb{Z}^p\}.$$

З (1) випливає, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконуються оцінки

$$D_1|k|^{\theta_1} \leqslant |\mu_k| \leqslant D_2|k|^{\theta_2}, \tag{2}$$

де $D_1 = d_1 \min\{1, p^{1-\theta_1}\}$, $D_2 = d_2 \max\{1, p^{1-\theta_2}\}$.

Введемо простори майже періодичних за x функцій зі спектром $\mathcal{M}$, які використовуються у дисертаційній роботі.

$\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ — простір поліномів $v(x) = \sum_k v_k \exp(i\mu_k, x)$, $v_k \in \mathbb{C}$, $\mu_k \in \mathcal{M}$. Збіжність послідовності $\{v^n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ до елемента $v \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ визначається так:

1) $\exists n_0, N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > n_0, \quad v^n(x) = \sum_{|k| \leqslant N} v_k^n \exp(i\mu_k, x)$,

2) $\forall k \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| \leqslant N, \quad v_k^n \underset{n\to\infty}{\to} v_k$;

$\mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ — простір формальних рядів $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} f_k \exp(i\mu_k, x)$, який співпадає з простором усіх антилінійних функціоналів над $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$. Дія функціоналу $f \in \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ на елемент v простору $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ задається формулою

$$(f, v) = \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int_{\Pi_H^p} f(x)\overline{v(x)}dx = \sum_k f_k \bar{v}_k.$$

Послідовність $\{f_q\}_{q=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ збігається до $f \in \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$, якщо $(f_q, v) \xrightarrow[q\to\infty]{} (f, v)$ для довільного $v \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$. Елементи простору $\mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ будемо називати узагальненими майже періодичними функціями. Ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} f_k \exp(i\mu_k, x)$, який відповідає елементу $f \in \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$, називається рядом Фур'є узагальненої майже періодичної функції f, числа f_k — коефіцієнтами Фур'є. Легко бачити, що $f_k = (f, \exp(i\mu_k, x))$.

$W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, — простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ за нормою $\|v; W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |v_k|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \exp(2\beta|\mu_k|^{\gamma})\right)^{1/2}$;

$H_{\mathcal{M}}^{\alpha} \equiv W_{\mathcal{M}}^{\alpha,0,0}$; $W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta} \equiv W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,1}$;

Зауважимо, що $W_{\mathcal{M}}^{\alpha_2,\beta_2,\gamma} \subset W_{\mathcal{M}}^{\alpha_1,\beta_1,\gamma}$, $\alpha_2 > \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \beta_1$, причому $\|v; W_{\mathcal{M}}^{\alpha_1,\beta_1,\gamma}\| < < \|v; W_{\mathcal{M}}^{\alpha_2,\beta_2,\gamma}\|$.

$\overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $m \in \mathbb{N}$, — простір вектор-функцій $\vec{v}(x) = \mathrm{col}\left(v^1(x), \ldots, v^m(x)\right)$ таких, що $v^q(x) \in W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $q \in \{1, \ldots, m\}$, із нормою $\|\vec{v}; \overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\alpha,\beta,\gamma}\| = = \sum_{q=1}^{m} \|v^q; W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\|$;

$C^h([c,d]; \mathcal{T}_{\mathcal{M}}) \quad \left(C^h([c,d]; \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})\right)$, $h \in \mathbb{Z}_+$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, — простір таких функцій $v(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k(t) \exp(i\mu_k, x)$, $v_k \in C^h[c,d]$, $k \in \mathbb{Z}^p$, що при кожному фіксованому $t \in [c,d]$ похідні $\partial_t^j v = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k^{(j)}(t) \exp(i\mu_k, x)$, $j \in \{0, 1, \ldots, h\}$, належать простору $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ $(\mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$;

$C^h([c,d], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma})$, $h \in \mathbb{Z}_+$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, — простір функцій $u(t,x) = = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k, x)$, $u_k(t) \in C^h[c,d]$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, таких, що для кожного фіксованого $t \in [c,d]$ похідні $\partial_t^j u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(j)}(t) \exp(i\mu_k, x)$, $j \in \{0, 1, \ldots, h\}$, належать простору $W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}$ і є неперервними за t на $[c,d]$ в нормі цього простору, $\|u; C^n([c,d], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma})\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[c,d]} \|\partial_t^j u(t,x); W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\|$;

$C^h([c,d],\overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m})$, $h \in \mathbb{Z}_+$, — простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}\left(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x)\right)$ таких, що $u^q(t,x) \in C^h([c,d],W^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M}})$, $q \in \{1,\ldots,m\}$, із нормою $\|\vec{u}; C^h([c,d],\overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m})\| = \sum_{q=1}^m \|u^q; C^h([c,d],W^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M}})\|$;

$\overline{C}^{(l,h)}_{\mathcal{M},m}(\overline{D}^p)$ — простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x))$, які є l разів неперервно диференційовними за змінною t та h разів неперервно диференційовними і майже періодичними за x зі спектром $\mathcal{M}$ із нормою

$$\left\|u; C^{(l,h)}_{\mathcal{M}}(\overline{D}^p)\right\| = \sum_{q=1}^m \sum_{\substack{0\leqslant|\hat{s}|\leqslant h\\ s_0\leqslant l}} \max_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}^p} \left|\frac{\partial^{|\hat{s}|}u^q(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}}\right|.$$

$\overline{C}^h_{\mathcal{M},m}(\mathbb{R}^p)$ — підпростір вектор-функцій із $\overline{C}^{(l,h)}_{\mathcal{M},m}(\overline{D}^p)$, які не залежать від t; $\overline{C}^h_{\mathcal{M},m}(\overline{D}^p) \equiv \overline{C}^{(h,h)}_{\mathcal{M},m}(\overline{D}^p)$, $C^{(l,h)}_{\mathcal{M}}(\overline{D}^p) \equiv \overline{C}^{(l,h)}_{\mathcal{M},1}(\overline{D}^p)$, $C^h_{\mathcal{M}}(\overline{D}^p) \equiv \overline{C}^{(h,h)}_{\mathcal{M},1}(\overline{D}^p)$, $C^h_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p) \equiv \bar{C}^h_{\mathcal{M},1}(\mathbb{R}^p)$.

Твердження 2.1. *Для довільної узагальненої майже періодичної функції f її ряд Фур'є збігається до f у просторі $\mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$. Навпаки, послідовність частинних сум будь-якого ряду $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} a_k \exp(i\mu_k,x)$, $a_k \in \mathbb{C}$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, збігається у $\mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ до деякого елемента $f \in \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ і цей ряд співпадає з рядом Фур'є для f.*

Твердження 2.2. *Якщо $\alpha > p/(2\theta_1)$, то справедливі такі вкладення:*

$$\overline{H}^{q+\alpha}_{\mathcal{M},m} \subset \overline{C}^q_{\mathcal{M},m}(\mathbb{R}^p), \quad C^q([0,T],\overline{H}^{q+\alpha}_{\mathcal{M},m}) \subset \overline{C}^q_{\mathcal{M},m}(\overline{D}^p), \quad q \in \mathbb{Z}_+.$$

Лема 2.1. *Якщо функція $v \in C^h_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p)$, то для її коефіцієнтів Фур'є справджуються оцінки*

$$|v_k| \leqslant (2p)^h(h+1)\|v; C^h_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p)\|(1+|\mu_k|)^{-h}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}.$$

Лема 2.2. *Якщо $y(t,x) \in C^{(l,h)}_{\mathcal{M}}(\overline{D}^p)$, то для її коефіцієнтів Фур'є справджуються оцінки*

$$\max_{t\in[0,T]} |y_k(t)| \leqslant (2p)^h(h+1)\|y; C^{(l,h)}_{\mathcal{M}}(\overline{D}^p)\|(1+|\mu_k|)^{-h}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}.$$

У **підрозділі 2.2** наведено загальну схему дослідження та встановлено умови коректності розглядуваних у дисертації задач у просторі формальних рядів. Всі задачі, розглянуті в дисертаційній роботі, об'єднані такою загальною постановкою: в області D^p для еволюційного рівняння (системи рівнянь)

$$N(\partial_t,\partial_x)[u] := \left(A_n(\partial_x)\partial_t^n + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t,\partial_x)\partial_t^j\right)u(t,x) = f(t,x), \tag{3}$$

потрібно знайти майже періодичний за змінними $x_1,\ldots,x_p$, розв'язок, який за змінною t задовольняє умови

$$U_j[u] := \alpha_j L_j[u] + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{4}$$

де $A_q(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}^p$, — многочлени за сукупністю змінних $\eta_1, \ldots, \eta_p$ з комплексними коефіцієнтами степеня N_q, $q \in \{0, 1, \ldots, n\}$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, L_j — лінійні функціонали за змінною t, які можуть містити значення шуканої функції та її похідних за змінною t у точках $t = 0$ та $t = T$ або у деяких точках $t_1, \ldots, t_n$ відрізка $[0, T]$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $r_1 < \ldots < r_n$; $f(t, x)$, $\varphi_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, — майже періодичні за x функції зі заданим спектром $\mathcal{M}$,

$$f(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} f_k(t) \exp(i\mu_k, x), \quad \varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k, x), \ j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Означення 2.1. *Розв'язком задачі* (3), (4) *із простору* $C^n([0, T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$ *називаємо ряд*

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k, x), \quad \mu_k \in \mathcal{M},$$

де кожен із коефіцієнтів $u_k \in C^n([0, T])$, $k \in \mathbb{Z}^p$, *задовольняє рівності*

$$\left(A_n(\mu_k) \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t, \mu_k) \frac{d^j}{dt^j} \right) u_k(t) = f_k(t), \tag{5}$$

$$U_j[u_k] := \alpha_j L_j[u_k] + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u_k(t) dt = \varphi_{jk}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{6}$$

Нехай функції $u_{qk} := u_{qk}(t)$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (5), а $\Delta(\mu_k, T) = \det \|U_j[u_{qk}]\|_{j,q=1}^n$ — характеристичний визначник задачі (5), (6).

Твердження 2.3. *Для того, щоб задача* (3), (4) *мала не більше одного майже періодичного за* x *із спектром* $\mathcal{M}$ *розв'язку у просторі* $C^n([0, T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \qquad \Delta(\mu_k, T) \neq 0. \tag{7}$$

За умови (7) розв'язок задачі (3), (4) зображується у вигляді формального ряду

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(\int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau + \sum_{q,j=1}^n \frac{\Delta_{jq}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk} u_{qk}(t) \right) \exp(i\mu_k, x), \tag{8}$$

де $G_k(t, \tau)$ — функція Гріна задачі (5), (6), $\Delta_{jq}(\mu_k, T)$ — алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k, T)$ елемента j-го рядка и q-го стовця.

Твердження 2.4. *Нехай справджується умова* (7). *Якщо* $f(t, x) \in C([0, T], \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ $(C([0, T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}))$, $\varphi_j(x) \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ $(\mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3), (4) *із простору* $C^n([0, T], \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ $(C^n([0, T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}))$. *Цей розв'язок зображується формулою* (8).

Твердження 2.3, 2.4 справедливі для всіх задач, які розглядаються у дисертації.

Питання існування розв'язку задачі (3), (4) в інших просторах майже періодичних за x функцій у багатьох випадках пов'язане з проблемою малих знаменників, бо вирази $|\Delta(\mu_k, T)|$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$. Для розв'язання проблеми малих знаменників, які мають складну нелінійну структуру, використано метричний підхід. На основі доведених метричних теорем про оцінки знизу малих знаменників (за певних умов на вихідні дані задач) випливає існування єдиного розв'язку (у відповідних просторах) досліджуваних задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів умов (4).

У **підрозділі 2.3** наведено деякі допоміжні відомості з метричної теорії чисел, які використовуються в наступних розділах дисертації.

У **розділі 3** встановлено коректну розв'язність задач з умовами за часовою змінною, що містять інтегральні доданки у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції та значення шуканої функції та її похідних парного порядку в точках $t = 0$ та $t = T$, для рівнянь типу Клейна-Гордона та гіперболічних за Гордінгом рівнянь, а також для гіперболічних за Петровським систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

У **підрозділі 3.1** в області D^p розглянуто задачу

$$N[u] := \partial_t^2 u(t,x) - a^2 \Delta u(t,x) + c^2 u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in D^p, \tag{9}$$

$$U_j[u] := \alpha_j \, u|_{t=t_j} + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u(t,x) dt = \varphi_j(x), \quad j = 1,2, \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{10}$$

в якій $a > 0, c > 0$; $t_1 = 0, t_2 = T$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}, \alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0, j = 1,2$; $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_+, r_2 > r_1$; функції $f(t,x)$ та $\varphi_j(x), j = 1,2$, є майже періодичними за x зі заданим спектром $\mathcal{M}$.

Для задачі (9), (10) $\Delta(\mu_k, T) = (\alpha_1 + \beta_1 I_{12})(\alpha_2 \exp(-i\gamma_k T) + \beta_2 I_{21}) - -(\alpha_1 + \beta_1 I_{11})(\alpha_2 \exp(i\gamma_k T) + \beta_2 I_{22})$, де $\gamma_k = \sqrt{a^2 \|\mu_k\|^2 + c^2}$,

$$I_{qj} := \frac{(-1)^{r_q(j+1)} r_q!}{(i\gamma_k)^{r_q+1}} - \sum_{l=1}^{r_q+1} \frac{(-1)^{(l+1)} r_q!}{(r_q - l + 1)!} \frac{T^{r_q - l + 1}}{(i\gamma_k)^l} \exp((-1)^j i\gamma_k T), \; q, j = 1,2.$$

Для єдиності розв'язку задачі (9), (10) у просторі $C^2_{\mathcal{M}}(\overline{D}^p)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (7) (теорема 3.1).

Теорема 3.2. *Нехай справджується умова* (7) *та існує стала* $\eta > 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості)* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| \geqslant (1 + |\mu_k|)^{-\eta}. \tag{11}$$

Якщо $f \in C^{(0,[\eta+p/\theta_1]+2)}_{\mathcal{M}}(\overline{D}^p)$, $\varphi_j \in C^{[\eta+p/\theta_1]+3}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p), j = 1,2$, *де* θ_1 *– стала з оцінок* (2), *то існує єдиний розв'язок задачі* (9), (10) *із простору* $C^2_{\mathcal{M}}(\overline{D}^p)$, *який неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_j(x)$, $j = 1,2$.

Теорема 3.3. *Нехай $\beta_2 \neq 0$. Тоді для довільних фіксованих α_2, β_1, a, c і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ оцінка (11) справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ при*

$$\eta > \begin{cases} 1 + p(3r_2 + r_1 + 2)/\theta_1, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \\ r_1 + 2 + p(3r_2 + r_1 + 2)/\theta_1, & \text{якщо } \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

У **підрозділі 3.2** в області D^p досліджено задачу

$$L[u] := \sum_{|\hat{s}| \leqslant 2n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = 0, \quad n \geqslant 1, \tag{12}$$

$$\begin{cases} U_j[u] := \alpha_j \left. \dfrac{\partial^{2(j-1)} u}{\partial t^{2(j-1)}} \right|_{t=0} + \beta_j \displaystyle\int_0^T t^{r_j} u(t,x) dt = \varphi_j(x), \\ U_{n+j}[u] := \alpha_{n+j} \left. \dfrac{\partial^{2(j-1)} u}{\partial t^{2(j-1)}} \right|_{t=T} + \beta_{n+j} \displaystyle\int_0^T t^{r_{n+j}} u(t,x) dt = \varphi_{n+j}(x), \end{cases} \tag{13}$$

де $j \in \{1, \ldots, n\}$, $A_{\hat{s}} \in \mathbb{C}$, $A_{(2n,0,\ldots,0)} = 1$; $\alpha_l, \beta_l \in \mathbb{R}$, $\alpha_l^2 + \beta_l^2 \neq 0$, $r_l \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \ldots, 2n\}$, $r_q > r_s$, $q > s$, $r = r_1 + \cdots + r_{2n}$; функції $\varphi_l(x), l \in \{1, \ldots, 2n\}$, є майже періодичними зі заданим спектром $\mathcal{M}$. Вважаємо, що оператор L є гіперболічним за Гордінгом.

Нехай λ_{lk}, $l \in \{1, \ldots, m\}$, — різні корені рівняння $\sum_{|\hat{s}| \leqslant 2n} A_{\hat{s}} i^{|\hat{s}|} \mu_k^s \lambda^{s_0} = 0$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, із кратностями n_l відповідно; $\Delta(\mu_k, T) := \det \|U_j[f_{qk}]\|_{j,q=1}^{2n}$, де $\{f_{qk}(t),\ q \in \{1, \ldots, 2n\}\}$ — нормальна (при $t = 0$) фундаментальна система розв'язків рівняння $\sum_{|\hat{s}| \leqslant 2n} A_{\hat{s}} i^{|\hat{s}|} \mu_k^s f^{(s_0)}(t) = 0$; $C_1 = (2n)^p \max_{|\hat{s}| \leqslant 2n} \{A_{\hat{s}}\}$, $\mathcal{D}(\mu_k, \tau) := \Delta(\mu_k, T)|_{T=\tau}$.

Для єдиності розв'язку задачі (12), (13) у шкалі просторів $C^{2n}([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta})$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (7) (теорема 3.4).

Теорема 3.5. *Нехай справджується умова (7) та існують сталі $\eta > 0$ і $\sigma \geqslant 0$ такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\sigma |\mu_k|). \tag{14}$$

Якщо $\varphi_j \in W_{\mathcal{M}}^{4n^2+n+\eta+\alpha+1,\, \beta+\sigma}$, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$, то існує єдиний розв'язок $u(t,x)$ задачі (12), (13) із простору $C^{2n}([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta})$; при цьому $\|u; C^{2n}([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta})\| \leqslant C_6 \sum_{j=1}^{2n} \|\varphi; W_{\mathcal{M}}^{4n^2+n+\eta+\alpha+1,\, \beta+\sigma}\|$.

Лема 3.2. *Існує таке число $\eta_0(\vec{\alpha}) \in \mathbb{Z}_+$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$, що виконуються рівності*

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \quad \left. \frac{\partial^q \mathcal{D}(\mu_k, \tau)}{\partial \tau^q} \right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < \eta_0(\vec{\alpha}), \\ C_9 \eta_0(\vec{\alpha})!, & q = \eta_0(\vec{\alpha}), \end{cases} \tag{15}$$

де C_9 — деяка стала, яка залежить від α_j, β_j, r_j, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$.

Теорема 3.6. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T \in (0, T_0]$, $T_0 > 0$, *нерівність* (14) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$, *коли* $\sigma = 2nC_1T_0$, *а*

$$\eta > \eta_0(\vec{\alpha}) + 1 + (p/\theta_1 + 1)(4^n(1 + r + \sum_{l=1}^{m} n_l(n_l - 1)) - 1),$$

де $\eta_0(\vec{\alpha})$ *— стала, визначена умовами* (15).

Встановлено (теорема 3.7), що якщо виконується умова (7) і для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконуються нерівності $\mathrm{Re}\lambda_{lk} \geqslant -\kappa \ln|\mu_k|$, $l \in \{1, \ldots, m\}$, $\kappa > 0$, а $\varphi_j \in C_{\mathcal{M}}^{[\eta+p/\theta_1]+4n^2+3n+2}(\mathbb{R}^p)$, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$, де η справджує нерівність $\eta > \eta_0(\vec{\alpha}) + 1 + 2n\kappa T + (p/\theta_1+1)(4^n(1+r+\sum_{l=1}^{m} n_l(n_l-1))-1)$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ існує єдиний розв'язок задачі (12), (13) із простору $C_{\mathcal{M}}^{2n}(\overline{D}^p)$. Цей розв'язок неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$.

У **підрозділі 3.3** в області D^p розглянуто таку задачу:

$$\mathbf{L}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial x}\right)[\vec{u}] := \sum_{|\hat{s}|^*=2n} \mathbf{A}_{\hat{s}} \frac{\partial^{2n}\vec{u}(t,x)}{\partial t^{2s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}} = \vec{0}, \quad (t,x) \in D^p, \tag{16}$$

$$\begin{cases} U_j[\vec{u}] := \alpha_j \left.\dfrac{\partial^{2(j-1)}\vec{u}}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=0} + \beta_j \displaystyle\int_0^T t^{r_j}\vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_j(x), \\ U_{n+j}[\vec{u}] := \alpha_{n+j} \left.\dfrac{\partial^{2(j-1)}\vec{u}}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=T} + \beta_{n+j} \displaystyle\int_0^T t^{r_{n+j}}\vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_{n+j}(x), \end{cases} \tag{17}$$

в якій $j \in \{1, \ldots, n\}$; $\mathbf{A}_{\hat{s}} = \left\|a_{q,l}^{\hat{s}}\right\|_{l,q=1}^{m}$, $a_{q,l}^{\hat{s}} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A}_{(n,0,\ldots,0)} = \mathbf{I}_m$; $\alpha_l, \beta_l \in \mathbb{R}$, $\alpha_l^2 + \beta_l^2 \neq 0$, $r_l \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \ldots, 2n\}$; $r_1 < r_2 < \ldots < r_{2n}$; $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}\left(u^1(t,x), \ldots, u^m(t,x)\right)$, вектор-функції $\vec{\varphi}_l(x) = \mathrm{col}\left(\varphi_l^1(x), \ldots, \varphi_l^m(x)\right)$, $l \in \{1, \ldots, 2n\}$, є майже періодичними зі заданим спектром $\mathcal{M}$. Вважаємо, що система (16) — гіперболічна за Петровським у вузькому сенсі. Тоді всі корені γ_{jk}, $j \in \{1, \ldots, 2nm\}$, рівняння $\det \mathbf{L}\left(\gamma^2, i\mu_k\right) = 0$ є дійсними і різними, а отже, відмінними від нуля.

Нехай $\vec{h}_{jk}$ — деякий ненульовий стовпець матриці $\mathbf{L}^*(\gamma_{jk}^2, i\mu_k)$, яка є приєднаною до матриці $\mathbf{L}(\gamma_{jk}^2, i\mu_k)$.

Позначимо: $\psi_l(\alpha_l) := 0$, $\alpha_l = 0$, $1 \leqslant l \leqslant 2n$,

$$\psi_l(\alpha_l) := \begin{cases} 2(l-1), & \alpha_l \neq 0, \ 1 \leqslant l \leqslant n, \\ 2(l-n-1), & \alpha_l \neq 0, \ n+1 \leqslant l \leqslant 2n, \end{cases}$$

$$\psi = \psi_1(\alpha_1) + \cdots + \psi_{2n}(\alpha_{2n}), \quad \vartheta_l = m\psi - \psi_l(\alpha_l), \quad l \in \{1, \ldots, 2n\},$$

$$\Delta(\mu_k, T) := \det \left\|U_q[\vec{h}_{jk}\exp(\gamma_{jk}t)]\right\|_{j=1,\ldots,2nm}^{q=1,\ldots,2n}. \tag{18}$$

Для єдиності розв'язку задачі (16), (17) у шкалі просторі $C^{2n}\left([0,T], \overline{H}_{\mathcal{M},m}^{\alpha}\right)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (7) у якій $\Delta(\mu_k, T)$ визначений формулою (18) (теорема 3.8).

Теорема 3.9. *Нехай виконується умова* (7) *та існує стала* $\eta > 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta}. \tag{19}$$

Якщо $\vec{\varphi}_l \in \overline{H}^{\xi_l}_{\mathcal{M},m}$, $\xi_l = \alpha + 2n(2nm(m-1)+1) + \eta + \vartheta_l$, $l \in \{1, \ldots, 2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (16), (17) *із простору* $C^{2n}\left([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},m}\right)$; *при цьому виконується нерівність* $\|u; C^{2n}\left([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M}}\right)\| \leqslant C_6 \sum_{l=1}^{2n} \|\varphi; \overline{H}^{\xi_l}_{\mathcal{M},m}\|$.

Лема 3.5. *Існує число* $\delta(\vec{\alpha}) \in \mathbb{N}$, *таке, що*

$$\left.\frac{d^q \mathcal{D}(\mu_k, \tau)}{d\tau^q}\right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < \delta(\vec{\alpha}), \\ \delta(\vec{\alpha})!\, C_{11} W(\mu_k), & q = \delta(\vec{\alpha}), \end{cases} \tag{20}$$

де $\mathcal{D}(\mu_k, \tau) = \Delta(\mu_k, T)|_{T=\tau}$, C_{11} *— деяка стала, яка залежить від* α_j, β_j, r_j, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$, $W(\mu_k) = \det \|\vec{h}_{jk} \gamma_{jk}^{l-1}\|_{l=1,\ldots,2n}^{j=1,\ldots,2nm}$.

Теорема 3.10. *Нехай існує стала* $\eta_0 \geqslant 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|W(\mu_k)| > C_{13}(1 + |\mu_k|)^{\eta_0}. \tag{21}$$

Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$*) чисел* $T > 0$ *нерівність* (19) *справджується для всіх (крім скінченої кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$, *при*

$$\eta > \delta(\vec{\alpha}) - \eta_0 + 1 + \left(1 + 2^{nm+1}\right)(1 + p/\theta_1)\left(1 + m(r_1 + \cdots + r_{2n})\right).$$

Твердження 3.1. *Якщо* $p = 1$, *тобто область* D^p *є одновимірною за просторовими змінними, то нерівність* (21) *виконується при* $\eta_0 > 4n^2 m(m-1) + nm(2n-1)$.

Твердження 3.2. *Якщо* $m = 1$, *тобто система* (16) *складається з одного рівняння, то нерівність* (21) *виконується при* $\eta_0 = 0$.

У **підрозділі 3.4** результати підрозділу 3.3 поширено на випадок системи рівнянь другого порядку, гіперболічної за Петровським у широкому сенсі.

У області D^3 для системи диференціальних рівнянь, яка описує напружений стан ізотропного та однорідного пружного тіла у переміщеннях (система Ламе)

$$\begin{aligned} &L\left(\partial_t^2, \partial_x\right)\vec{u}(t,x) := \\ &\quad \sigma \partial_t^2 \vec{u}(t,x) = \mu^* \Delta \vec{u}(t,x) + (\lambda^* + \mu^*)\partial_x' \partial_x \vec{u}(t,x), \quad (t,x) \in D^3, \end{aligned} \tag{22}$$

розглядається задача з умовами

$$U_j[u] := \alpha_j \vec{u}(t_j, x) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} \vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_j(x),\ j \in \{1,2\},\ x \in \mathbb{R}^3, \tag{23}$$

де $\vec{u} := \vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x), u^2(t,x), u^3(t,x))$ — вектор переміщень; t — час; $\lambda^* > 0$, $\mu^* > 0$ — коефіцієнти Ламе, $\sigma > 0$ — густина середовища; $\partial_x' = \mathrm{col}(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$; $t_1 = 0$, $t_2 = T$; α_j, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$, $j \in \{1,2\}$;

$r_1,\ r_2 \in \mathbb{Z}_+$, $r_1 < r_2$; вектор-функції $\vec{\varphi}_j(x) = \mathrm{col}(\varphi_j^1(x), \varphi_j^2(x), \varphi_j^3(x))$, $j \in \{1, 2\}$, є майже періодичними зі заданим спектром $\mathcal{M}$.

Встановлено критерій єдиності та достатні умови існування (теореми 3.11, 3.12) розв'язку задачі у шкалі просторів $C^2([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},3})$. Встановлено метричну оцінку знизу для малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку розглядуваної задачі (теорема 3.13).

Розділ 4 дисертації присвячений дослідженню коректності задач з інтегральними умовами за часовою змінною для параболічного за Петровським рівняння зі змінними за часом коефіцієнтами та для параболічної за Шиловим системи рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

У **підрозділі 4.1** в області D^p для параболічного за Петровським рівняння

$$L\left(\partial_t, \Delta\right) u(t,x) := \prod_{j=1}^{n} \left(\partial_t - a_j(t)\Delta\right) u(t,x) = 0, \tag{24}$$

розглядаємо задачу з умовами

$$U_j[u] := \alpha_j u(t_j, x) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u(t,x) dt = \varphi_j(x),\ j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{25}$$

де $a_j(t) \in C^{n-j}([0,T])$, $a_j(t) > 0$, $a_q(t) \neq a_s(t)$, $q \neq s$, $t \in [0,T]$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0$; $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$; $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $r_1 < \ldots < r_n$; оператори $(\partial_t - a_j(t)\Delta)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, у рівнянні (24) діють на функцію $u(t,x)$ у порядку зростання індексу j; функції $\varphi_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, є майже періодичними зі заданим спектром $\mathcal{M}$. Запровадимо такі позначення: $I_0(t) \equiv 0$, $I_j(t) = -\int_0^t a_j(\tau) d\tau$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\Theta_q(t) = I_q(t) - I_{q-1}(t)$, $\mathcal{E}_{qk}(\tau) = \exp\left(\Theta_q(\tau)\|\mu_k\|^2\right)$, $q \in \{1, \ldots, n\}$; $f_{1k}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t)$, $f_{2k}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t) \int_0^t \mathcal{E}_{2k}(\tau_1) d\tau_1$, $\ldots$, $f_{nk}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t) \int_0^t \mathcal{E}_{2k}(\tau_1) \times \ldots \left(\int_0^{\tau_{n-2}} \mathcal{E}_{nk}(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1}\right) \ldots d\tau_1$; $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$,

$$\Delta(\mu_k, \vec{t}, T) := \det \|\alpha_j f_{qk}(t_j) + \beta_j I_{jq}\|_{j,q=1}^n,\ I_{jq} := \int_0^T t^{r_j} f_{qk}(t) dt,\ j, q \in \{1, \ldots, n\},$$

$$A_1 := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ \max_{t \in [0,T]} \int_0^t \left(a_j(\tau) - a_{j+1}(\tau)\right) d\tau \right\}, \quad A_2 := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|a_j; C[0,T]\|.$$

Теорема 4.1. *Для того, щоб задача* (24), (25) *мала не більше одного розв'язку у шкалі просторів* $C^n([0,T], W^{\alpha,\beta,2}_{\mathcal{M}})$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \qquad \Delta(\mu_k, \vec{t}, T) \neq 0. \tag{26}$$

Наведено приклади задачі (24), (25), коли умова (26) виконується або порушується.

Теорема 4.2. *Нехай виконується умова* (26) *та існують додатні сталі* η, ν *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\nu |\mu_k|^2). \tag{27}$$

Якщо $\varphi_j \in W_{\mathcal{M}}^{q_1,q_2,2}$, $q_1 = \eta + 2n + \alpha$, $q_2 = \nu + \beta + n(n-1)A_1/2$, $j \in \{1,\dots,n\}$, *то існує розв'язок задачі* (24), (25) *із простору* $C^n([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,2})$, *при цьому* $\|u; C^n([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,2})\| \leqslant C_1 \sum_{j=1}^n \|\varphi_j; W_{\mathcal{M}}^{q_1,q_2,2})\|$.

Теорема 4.3. *Якщо в умовах* (25) $\alpha_j = 0$, $j \in \{1,\dots,n\}$, *то для довільних фіксованих решти параметрів задачі* (24), (25) *оцінка* (27) *виконується при* $\eta > n(n-1)p/(2\theta_1)$, $\nu > n(n+1)A_2T/2$, *для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Теорема 4.4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ *для довільних фіксованих решти параметрів задачі* (24), (25) *оцінка* (27) *виконується при* $\eta > n(n+1)p/(2\theta_1)$ *та* $\nu > n(n+1)A_2T/2$.

Якщо коефіцієнти рівняння (24) є сталими, то встановлено умови існування розв'язку задачі (24), (25) у просторі $C_{\mathcal{M}}^{(n,2n)}(\overline{D}^p)$ (теорема 4.6).

У **підрозділі 4.2** в області D^p для параболічної за Шиловим (з показником параболічності h) системи рівнянь

$$\mathbf{L}\left(\partial_t, \partial_x\right)[u] := \partial_t^n \vec{u}(t,x) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}_j\left(\partial_x\right) \partial_t^j \vec{u}(t,x) = \vec{0}, \quad (t,x) \in D^p, \tag{28}$$

досліджено задачу з умовами

$$U_j[u] := \alpha_j\, \partial_t^{j-1} \vec{u}(t,x)\Big|_{t=0} + \beta_j \int_0^T t^{r_j} \vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_j(x), \qquad x \in \mathbb{R}^p, \tag{29}$$

де $\mathbf{A}_j(\eta) := \|\sum_{|s|\leqslant N} a_{ql,s}^j \eta^s\|_{q,l=1}^m$, $a_{ql,s}^j \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{R}^p$, $N > n$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \{1,\dots,n\}$; $r_1 < r_2 < \dots < r_n$; $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x),\dots, u^m(t,x))$, вектор-функції $\vec{\varphi}_j(x) = \mathrm{col}\left(\varphi_j^1(x),\dots,\varphi_j^m(x)\right)$, $j = \{1,\dots,n\}$, є майже періодичними зі заданим спектром $\mathcal{M}$.

Позначимо: $\mathbf{A} := \mathrm{diag}\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\} \otimes \mathbf{I}_m$, $\mathbf{B} := \mathrm{diag}\{\beta_1,\dots,\beta_n\} \otimes \mathbf{I}_m$,

$$\mathbf{R}(t) := \begin{pmatrix} t^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{r_n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_m,$$

$$\mathcal{L}\left(i\mu_k\right) := \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{m(n-1),m} & \mathbf{I}_{m(n-1)} \\ -\mathbf{A}_0(i\mu_k) & -\mathbf{A}_1(i\mu_k) \cdots - \mathbf{A}_{n-1}(i\mu_k) \end{pmatrix},$$

$$\Delta(\mu_k, T) := \det \left\| \mathbf{A} + \mathbf{B} \int_0^T \mathbf{R}(t) \exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right) dt \right\|, \tag{30}$$

$$\psi_j(\beta_j) := \begin{cases} \max\{0, (mn-1)N - hr_j\}, & \text{якщо } \beta_j \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } \beta_j = 0, \end{cases} \qquad j \in \{1,\dots,n\}.$$

Для єдиності розв'язку задачі (12), (13) у шкалі просторів $C^n([0,T], \overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\alpha,\beta,\gamma})$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (7) в якій $\Delta(\mu_k, T)$ визначений формулою (30)(теорема 4.7).

Теорема 4.8. *Нехай справджується умова* (7) *та існують сталі* $\eta > 0$, $\sigma > 0$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості)* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\sigma |\mu_k|^h). \tag{31}$$

Якщо $\varphi_j \in \overline{W}^{\xi_j,\sigma+\beta,h}_{\mathcal{M},m}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *де* $\xi_j = \alpha + \eta + (2mn + 1)N - \psi_j(\beta_j) + m \sum_{g=1}^{n} \psi_g(\beta_g)$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (28), (29) *із простору* $C^n([0, T], \overline{W}^{\alpha,\beta,h}_{\mathcal{M},m})$; *при цьому* $\|u; C^n([0, T], \overline{W}^{\alpha,\beta,h}_{\mathcal{M},m})\| \leqslant C_6 \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j; \overline{W}^{\xi_j,\sigma,h}_{\mathcal{M},m}\|$.

Якщо в умовах (29) $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{j_1, \ldots, j_l\}$, то встановлено (теорема 4.9), що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in [0, T_0]$, $T_0 > 0$, нерівність (31) справджується для всіх (крім скінченої кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$, коли $\sigma = 2^{N-1} mnC_1T_0$, а $\eta > (m\eta_0(\alpha) + 1)N + 2^{mn}(1 + p/\theta_1)(1 + mr)$, де $C_1 = (nm)^p \max\limits_{|s|\leqslant N} \max\limits_{\substack{1\leqslant q,l\leqslant m \\ 0\leqslant j\leqslant n-1}} \left\{|a^j_{ql,s}|\right\}$, $\eta_0(\alpha) = r_{q_1} + \cdots + r_{q_{n-l}} + q_1 + \cdots + q_{n-l}$, $\{q_1, \ldots, q_{n-l}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_l\}$, а θ_1 — стала з формули (2) .

Якщо система (28) є системою рівнянь першого порядку за змінною t, то існування розв'язку задачі (28), (29) не пов'язане з проблемою малих знаменників. Про це стверджує наступна теорема.

Теорема 4.10. *Якщо* $n = 1$, *то оцінка*

$$|\Delta(\mu_k, T)| \geqslant \begin{cases} \frac{1}{2^m} |\alpha_1|^m, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \\ \frac{1}{2^m} |\beta_1|^m \left(r_1!(C_1)^{-r_1-1}\right)^m (1 + |\mu_k|)^{-(r_1+1)mN}, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

справджується для довільних фіксованих параметрів задачі (28), (29) *і для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$.

У **розділі 5** дисертації розглянуто задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для рівнянь мішаного типу та рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною.

У **підрозділі 5.1** в області $\mathcal{D}^p = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} : t \in (-T_1, T_2), x \in \mathbb{R}^p\}$, $T_1, T_2 > 0$, досліджено задачу про знаходження майже періодичного за x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язку рівняння мішаного типу

$$\begin{cases} \partial_t u - a\Delta u = 0, & (t, x) \in \mathcal{D}^p \cap \{t > 0\}, \\ \partial_t^2 u - b^2 \Delta u = 0, & (t, x) \in \mathcal{D}^p \cap \{t < 0\}, \end{cases} \tag{32}$$

який справджує умови

$$\alpha u(-T_1, x) + \beta u(T_2, x) + \gamma \int_{-T_1}^{T_2} u(t, x)dt = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{33}$$

$$u \in C^1([-T_1, T_2]; W^{q,s,2}_{\mathcal{M}}) \cap C^2([-T_1, 0], W^{q,s,2}_{\mathcal{M}}), \quad q \in \mathbb{R}, s \geqslant 0, \tag{34}$$

де $a > 0$, $b > 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, $\alpha + \beta + \gamma(T_1 + T_2) \neq 0$, функція $\varphi(x)$ є майже періодичною зі спектром $\mathcal{M}$.

Встановлено критерій єдиності та достатні умови існування (теореми 5.1, 5.2) розв'язку задачі (32)-(34), а також метричні оцінки знизу малих знаменників, що виникли при побудові її розв'язку (теорема 5.4). Якщо в умові (33) $\alpha = 0$, то існування розв'язку задачі не пов'язане з проблемою малих знаменників (теорема 5.3).

У **підрозділі 5.2** в області D^p для рівняння

$$N(\partial_t, \partial_x)[u] := L(\partial_x)\partial_t^n u(t,x) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\partial_x)\partial_t^j u(t,x) = 0,\ (t,x) \in D^p, \tag{35}$$

де $L(\partial_x) = \sum_{|s|=2d} a_s \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}$, $a_s \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, — еліптичний диференціальний вираз, $A_j(\partial_x) = \sum_{|s|\leqslant d_j} b_{j,s} \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}$, $b_{j,s} \in \mathbb{R}$, $d_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, досліджуємо у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними зі спектром M, задачу з умовами

$$\begin{cases} U_j[u] := \alpha_j \partial_t^{\vartheta_j} u(0,x) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}[u] = \varphi_j(x), \ \ j \in \{1, \ldots, \tilde{n}_1\}, \\ U_j[u] := \alpha_j \partial_t^{\vartheta_j} u(T,x) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}[u] = \varphi_j(x), \ \ j \in \{\tilde{n}_1 + 1, \ldots, n\}, \end{cases} \tag{36}$$

де $0 \leqslant \tilde{n}_1 \leqslant n-1$, $\mathcal{I}_{r_j}[u] = \int_0^T t^{r_j} u(t,x)dt, r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $r_1 < \ldots < r_n$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$; $\vartheta_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $0 \leqslant \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_{\tilde{n}_1} \leqslant n-1$, $0 \leqslant \vartheta_{\tilde{n}_1+1} < \ldots < \vartheta_n \leqslant n-1$; функції $\varphi_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, є майже періодичними із заданим спектром $\mathcal{M}$.

Встановлено необхідні та достатні умови єдиності розв'язку задачі (35), (36) у шкалі просторів $C^n([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma})$ (теорема 5.5).

Позначимо: $\lambda_{lk} := \lambda_l(\mu_k)$ — різні корені рівняння $N(\lambda, \mu_k) = 0$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, із кратностями n_l відповідно, $l \in \{1, \ldots, m\}$; $\Delta(\mu_k, T) = \det \|U_j[f_{qk}]\|_{j,q=1}^n$, де $\{f_{qk}(t), q \in \{1, \ldots, n\}\}$ — нормальна (в точці $t = 0$) фундаментальна система розв'язків рівняння $N(d/dt, \mu_k) f^{(s_0)}(t) = 0$, $\mathcal{D}(\mu_k, \tau) := \Delta(\mu_k, T)|_{T=\tau}$,

$$\chi_1 = \max_{0\leqslant j\leqslant n-1} \left\{ \frac{d_j - 2d}{n-j} \right\},\ C_1 = 2 \max_{0\leqslant j\leqslant n-1} \left\{ \left(\frac{\max_{|s|\leqslant d_j}\{|b_{j,s}|\}}{p^{-d} \inf_{\|\xi\|=1} L(\xi)} \right)^{\frac{1}{n-j}} \right\}, \xi \in \mathbb{R}^p.$$

Теорема 5.6. *Нехай у рівнянні* (35) $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}\{d_j\} \geqslant 2d$, *справджуються умови єдиності розв'язку задачі* (35), (36) *та існують сталі* $\eta > 0$ *і* $\sigma \geqslant 0$ *такі, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\sigma |\mu_k|^{\chi_1}). \tag{37}$$

Якщо $\varphi_j \in W_{\mathcal{M}}^{q_1+\alpha,\, q_2+\beta, \chi_1}$, $q_1 = \eta + \chi_1\left((n+1)(n+2)/2 + \gamma - \gamma_j\right)$, $q_2 = \theta + nC_1T$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *то існує розв'язок задачі* (35), (36) *із простору* $C^n([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\chi_1})$; *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

У випадку, коли $m = n$, $n_l = 1$, $l \in \{1, \ldots, m\}$, встановлено (теорема 5.7), що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in (0, T_0]$, $T_0 > 0$, нерівність (37) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$, коли $\theta = nC_\lambda T_0$ і $\eta > \chi_1\eta_0(\vec{\alpha}) + (p/\theta_1 + \chi_1)(2^n(1+r) - 1)$, де $C_\lambda = -\min\left\{0, \inf_{\mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}} \min_{l\in\{1,\ldots,n\}} \left\{\frac{\mathrm{Re}\lambda_{lk}}{|\mu_k|^{\chi_1}}\right\}\right\}$, а стала $\eta_0(\vec{\alpha})$ визначена рівностями

$$\left.\frac{\partial^q \mathcal{D}(\mu_k, \tau)}{\partial \tau^q}\right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < \eta_0(\vec{\alpha}), \\ \eta_0(\vec{\alpha})! C_{\eta_0}, & q = \eta_0(\vec{\alpha}). \end{cases}$$

Існування числа $\eta_0(\vec{\alpha})$ доведено в лемі 5.2.

У випадку $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}\{d_j\} < 2d$ встановлено коректність задачі (35), (36) у шкалі просторів $C^n([0,T], H^\alpha_{\mathcal{M}})$, показано, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ та для всіх (крім скінченної кількості) чисел $T > 0$ виконується оцінка

$$|\Delta(\mu_k, T)| \geqslant \begin{cases} B_1 T^{\frac{n(n+1)}{2}+r}, & T \geqslant 1, \\ B_2 T^{\eta_0(\vec{\alpha})}, & T < 1, \end{cases}$$

де B_1, B_2 — деякі додатні сталі, які залежать від параметрів крайових умов (36), а також показано, що існування її розв'язку не пов'язане з проблемою малих знаменників (теореми 5.8, 5.9).

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню в $(p+1)$-вимірному шарі задач з інтегральними умовами за часовою змінною та умовами майже періодичності за просторовими змінними для лінійних еволюційних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними. Такі задачі, назагал, є умовно коректними, а їх розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників. Одержано такі нові результати:

1) в області, що є декартовим добутком часового інтервалу $(0, T)$ та простору $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, встановлено коректну розв'язність задач з умовами за часовою змінною, що містять інтегральні доданки у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції та:

а) значення шуканої функції та її похідних парного порядку в точках $t = 0$ та $t = T$ — для рівнянь типу Клейна-Гордона та гіперболічних за Гордінгом рівнянь, а також для гіперболічних за Петровським систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами;

б) значення шуканої функції у довільних точках $t_1, \ldots, t_n$ відрізка $[0, T]$ — для параболічного за Петровським рівняння зі змінними за часом коефіцієнтами;

в) значення шуканої функції та її послідовних похідних в точці $t = 0$ — для систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами, параболічних за Шиловим;

г) значення шуканої функції та її похідних довільних порядків в точках $t = 0$ та $t = T$ — для рівнянь зі сталими коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом;

2) встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі з інтегральною умовою за часовою змінною для параболо-гіперболічного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами;

3) побудовано явні формули для розв'язків задач у вигляді рядів;

4) доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків розглянутих у дисертації задач, на основі яких (за встановлених умов на вихідні дані задач) випливає існування єдиного розв'язку (у відповідних просторах) досліджуваних задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів умов. Виділено часткові випадки задач, в яких відсутня проблема малих знаменників.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна застосовувати у подальших дослідженнях задач з інтегральними умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними, а також при дослідженні конкретних задач практики, які моделюються розглянутими задачами.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна-Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник// Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8 – С. 41–53.

2. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами / А. М. Кузь // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Фізико-математичні науки. – 2012. – № 740. – С. 25–33.

3. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для рівнянь, гіперболічних за Гордінгом / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 252–265. (Переклад: *Kuz' A. M.* A problem with integral conditions with respect to time for Garding hyperbolic equations/ A. M. Kuz', B. I. Ptashnyk // Ukrainian Mathematical Journal – 2013. – **65**, N.2. – P. 277–293.)

4. *Кузь А.М.* Задача з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь динамічної теорії пружності / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 40–53. (Переклад: *Kuz' A. M.* A problem with integral conditions with respect to time for a system of equations of the dynamic elasicity theory/ A. M. Kuz', B. Yo. Ptashnyk // J. Math. Sci. – 2015. – **2**, N.3. – P. 310–326.)

5. *Кузь А.М.* Задача з інтегральними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник// Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 200–224.

6. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для систем рівнянь, параболічних за Шиловим / А. М. Кузь// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 3. – С. 16-28.

7. *Kuz A. M.* Problem for hyperbolic system of equations having constant coefficients with integral conditions with respect to the time variable / A. M. Kuz, B. Yo. Ptashnyk // Carpathian Math. Publ. – 2014. – **6**, N. 2. – P. 282–299.

8. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна-Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими координатами / А. М. Кузь // Конференція молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача (Львів, 25-27 травня 2009р.): Тези доповідей. – Львів, 2009. – С. 215–217.

9. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом бікалоричного рівняння в шарі / А. М. Кузь // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука (Київ, 13-15 травня 2010 р.): матеріали конференції. – Т.1. – Київ, 2010. – С. 231.

10. *Кузь А. М.* Задачи с интегральными условиями по временной переменной для гиперболических уравнений / А. М. Кузь, Б. И. Пташник// Конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения"(СамДиф-2011) (Самара, Российская Федерация, 26-30 июня 2011г.): Тезисы докладов. – Самара, 2011. – С. 65.

11. *Кузь А.М.* Задача з інтегральними умовами для системи рівнянь динамічної теорії пружності / А. М. Кузь // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька (19-23 вересня 2011, Дрогобич, Україна): Тези доповідей. – Львів, 2011. – С. 108.

12. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для полікалоричного рівняння у шарі / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник // Чотирнадцята міжнародна конференція імені академіка М.Кравчука (19-21 квітня 2012 року, Київ): Матеріали конференції. Т.1. – Київ, 2012. – С. 259-260.

13. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами/ А. М. Кузь// Десята відкрита наукова конференція ІМФН: Збірник матеріалів та програма конференції ["PSC-IMFS-10"], (Львів, 17-18 травня 2012 р.) / Національний університет "Львівська політехніка". – Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2012. – С. A23-A24.

14. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом / А. М. Кузь// Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики"(21-25 травня 2013р., Львів): Матеріали конференції. – Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т.3. – С. 136–138.

15. *Кузь А.М.* Задача з інтегральними умовами за часовою змінною для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник// V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу"(19-21 вересня 2013 р., Івано-Франківськ): тези доповідей. – Івано-Франківськ: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В.Стефаника, 2013. – С. 38.

16. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. / А. М. Кузь// Конференція молодих вчених "Підстригачівскі читання-2014"(Львів, 28-30 травня 2014р.): http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Kuz.pdf

17. *Кузь А. М.* Задача з інтегральною умовою за часом для параболо-гіперболічного рівняння / А. М. Кузь // Конференція молодих вчених "Підстригачівскі читання-2015"(Львів, 26-28 травня 2015 р.): http://iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Kuz.pdf

АНОТАЦІЯ

Кузь А. М. *Задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для еволюційних рівнянь* — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2015.

У дисертаційній роботі розглянуто задачі з умовами майже періодичності за просторовими змінними та нелокальними умовами за часовою змінною, що містять інтегральні доданки у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції, для гіперболічних та параболічних рівнянь і систем рівнянь, а також для рівнянь мішаного типу та рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною. Встановлено умови коректності та побудовано явні формули для розв'язків цих задач. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при дослідженні розглянутих у дисертації задач. Виділено часткові випадки задач, в яких відсутня проблема малих знаменників.

Ключові слова: рівняння гіперболічні, параболічні, типу Соболєва, мішаного типу, інтегральні умови, майже періодичні функції, малі знаменники, міра Лебега.

АННОТАЦИЯ

Кузь А. М. *Задачи с интегральными условиями по временной переменной для эволюционных уравнений.* — На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2015.

В диссертационной работе рассмотрены задачи с условиями почти периодичности по пространственным переменным и нелокальными условиями по временной переменной, содержащих интегральные слагаемые в виде моментов произвольного порядка от искомой функции, для гиперболических и параболических уравнений и систем уравнений, а также для уравнений смешанного типа и уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по временной переменной. Установлены условия корректности и построено явные формулы для решений этих задач. Доказано метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, которые возникли при исследовании рассмотренных в диссертации задач. Выделены частные случаи задач, в которых отсутствует проблема малых знаменателей.

Ключевые слова: уравнения гиперболические, параболические, типа Соболева, смешанного типа, интегральные условия, почти периодические функции, малые знаменатели, мера Лебега.

ABSTRACT

Kuz A. M. *Problems with integral conditions with respect to the time variable for evolution equations.* — On the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.02 — Differential equations. — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2015.

The thesis deals with the problems with almost periodicity conditions with respect to the spatial variables and with integral conditions with respect to the time variable, containing integral terms in the form of moments of arbitrary order of the required functions, for hyperbolic and parabolic equations and systems of equations, mixed type equations and equations, not resolved relatively the highest derivative with respect to the time variable. A criterion for the unique solvability of these problems and a sufficient conditions for the existence of its solutions are established. Explicit formulas for solutions of considered problems in the form of series are constructed. To solve the problem of small denominators arising in the construction of solutions of the posed problem the metric approach is used.

From proved metric theorems about estimates from below of small denominators, under certain conditions on initial data, follow existence of the unique solution of considered problems in corresponding functional spaces for almost all (with respect to the Lebesgue measure) parameters of boundary conditions.

The results of the thesis are of theoretical importance. They can be used in further investigations of the problems with integral conditions for partial differential equations and system of such equations as well as in research of specific practice problems which are modeled with help of considered problems.

Key words: hyperbolic, parabolic, Sobolev type, mixed type equations, integral conditions, almost periodic functions, small denominators, Lebesgue measure.