НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

На правах рукопису

Репетило Софія Михайлівна

УДК 517.95

Задачі з мішаними крайовими умовами для гіперболічних і безтипних рівнянь у циліндричних областях

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Пташник Богдан Йосипович,
доктор фізико-математичних наук,
член-кор. НАН України

Львів — 2015

ЗМІСТ

Стор.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел;

$\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел;

$\mathbb{R}_+$ – множина дійсних невід'ємних чисел;

$\mathbb{R}^p$ – p-вимірний дійсний простір;

$\mathbb{Z}^p$ – множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими координатами;

$\mathbb{Z}_+^p$ – множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами;

$K = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^p$;

$s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$;

$\hat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \cdots + s_p$; $|\hat{s}|^* = 2s_0 + s_1 + \cdots + s_p$;

$x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$;

$(0) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$;

$k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \cdots + |k_p|$, $||k|| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_p^2}$;

$(k, x) = k_1 x_1 + \cdots + k_p x_p$;

i – уявна одиниця;

$[a]$ – ціла частина числа $a \in \mathbb{R}$;

$k_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\tilde{k} = (k_0, k) \in K$, $|\tilde{k}| = k_0 + |k_1| + \cdots + |k_p|$;

$\delta_{r,j}$– символ Кронекера, $\delta_{r,j} = \begin{cases} 1, & r = j, \\ 0, & r \neq j, \end{cases}$ $(r, j \in \mathbb{N})$;

c_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, – додатні сталі, які не залежать від $k \in \mathbb{Z}^p$;

$T \in (0, +\infty)$;

$G \subset \mathbb{R}^p$ — обмежена однозв'язна область з гладкою межею $\partial G = \Gamma$,

$\Sigma := \Gamma \times [0, T]$;

Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$;

$Q^p := \big\{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^p\big\} \equiv (0, T) \times \mathbb{R}^p$;

$D^p := \{(t,x) : 0 < t < T, x \in \Omega^p\} \equiv (0,T) \times \Omega^p$;

$B^p := \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in G\big\} \equiv (0,T) \times G$;

$K_T := \{(t,\tau) : 0 \le t, \tau \le T\} \equiv [0,T] \times [0,T]$;

$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^m} S$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^m$ вимірної множини $S \subset \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, $m \in \mathbb{N}$;

$\mathcal{T}$ – простір скінченних тригонометричних поліномів $v(x) = \sum_{|k| \leqslant N} v_k \exp(ik, x)$, $N \in \mathbb{N}$, з комплексними коефіцієнтами, в якому збіжність послідовності $v^n \in \mathcal{T}$ до $v \in \mathcal{T}$ визначається так: $v^n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{T}}{\to}} v$, якщо, починаючи з деякого номера, $v^n(x) = \sum_{|k| \leqslant N} v_k^n \exp(ik, x)$, $N \le N_1$, N_1 – деяке фіксоване число, і $v_k^n \underset{n\to\infty}{\to} v_k$ для кожного k;

$\mathcal{T}'$ – простір формальних тригонометричних рядів $v(x) = \sum_{|k| \ge 0} v_k \exp(ik, x)$ [39, гл. 2, §6];

$C^r([0,T];\mathcal{T}')$ $(C^r([0,T];\mathcal{T}))$, $r \in \mathbb{Z}_+$, – простір таких функцій $v(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} v_k(t) \exp(ik,x)$, $v_k \in C^r([0,T])$, $k \in \mathbb{Z}^p$, що при кожному фіксованому $t \in [0,T]$ $\partial^j v / \partial t^j = \sum_{|k|\ge 0} v_k^{(j)}(t) \exp(ik,x) \in \mathcal{T}'(\mathcal{T})$, $j \in \{0,1,\ldots,r\}$;

$H_q(\Omega^p)$, $q \in \mathbb{R}$, – простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}$ за нормою

$$\|v; H_q(\Omega^p)\|^2 := \sum_{|k|\ge 0} (1+|k|^2)^q |v_k|^2;$$

$C^r([0,T], H_q(\Omega^p)) \subset C^r([0,T];\mathcal{T}')$, $q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$,– банахів простір функцій v таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\partial^j v/\partial t^j$, $j \in \{0,1,\ldots,r\}$, належать простору $H_{q-j}(\Omega^p)$ та є неперервними за t у нормі цього простору;

$$\|v; C^r([0,T], H_q(\Omega^p))\| := \sum_{j=0}^{r} \max_{0\le t\le T} \left\|\partial^j v(t,\cdot)/\partial t^j; H_{q-j}(\Omega^p)\right\|;$$

$\overline{C}^r([0,T], H_q(\Omega^p))$, $q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ — простір вектор-функцій $v(t,x) = (v_1(t,x), \ldots, v_m(t,x))$, для яких $v_j \in C^r([0,T], H_q(\Omega^p))$, $j \in \{1,\ldots,m\}$;

$$\left\|v; \overline{C}^r([0,T], H_q(\Omega^p))\right\|^2 := \sum_{j=1}^{m} \|v_j; C^r([0,T], H_q(\Omega^p))\|^2;$$

$C^{j,\nu}$, $0<\nu<1$, – клас визначених в $\overline{G}$ функцій, які мають неперервні до j–ї похідні, а j-та похідна задовольняє в $\overline{G}$ умову Гельдера з показником ν;

$A^{j,\nu}$ – клас областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать класу $C^{j,\nu}$;

$C^m(\overline{B}^p)$ — банахів простір функцій $\upsilon\,(t,x)\equiv\upsilon\,(t,x_1,...,x_p)$, неперервних із усіма похідними до порядку m включно в $\overline{B}^p$;

$$\left\|\upsilon;C^m\left(\overline{B}^p\right)\right\|:=\sum_{|\hat{s}|\leq m}\max_{(t,x)\in\overline{B}^p}\left|\frac{\partial^{|\hat{s}|}\upsilon\,(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right|;$$

$C^{(q,r)}\left(\overline{B}^p\right)$ — банахів простір функцій $\upsilon\,(t,x)\equiv\upsilon\,(t,x_1,...,x_p)$, які в області $\overline{B}^p$ є q раз неперервно диференційовними за t та r раз неперервно диференційовними за x,

$$\left\|\upsilon;C^{(q,r)}\left(\overline{B}^p\right)\right\|:=\sum_{|s|\leq r,\,s_0\leq q}\max_{(t,x)\in\overline{B}^p}\left|\frac{\partial^{|\hat{s}|}\upsilon\,(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}}\right|;$$

$L_2\,(G)$ — простір вимірних функцій $\upsilon\,(x)\equiv\upsilon\,(x_1,...,x_p)$, модулі квадратів яких інтегровні в області G;

$$\|\upsilon;L_2\,(G)\|^2:=\int\limits_G|\upsilon(x)|^2\,dx.$$

ВСТУП

Актуальність теми. Задачі з крайовими умовами, заданими на всій межі області, для гіперболічних і безтипних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними є, назагал, умовно коректними, а їхня розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників і не є стійкою відносно малих змін параметрів задачі. Некоректність таких задач була, мабуть, основною причиною того, що їх почали вивчати порівняно недавно (зі середини XX століття). Дослідження цих задач має вагоме значення для побудови загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними. Крім того, вони виникають у багатьох задачах практики (безмоментна теорія оболонок від'ємної гаусової кривизни, задачі гідродинаміки, процеси коливань тощо). Вивченню задач з даними на всій межі області для гіперболічних і безтипних рівнянь і систем рівнянь присвячено ряд досліджень, зокрема, коли на межі області задано умови Діріхле або типу Діріхле.

Перші дослідження крайових задач з даними на всій межі області для гіперболічних рівнянь були проведені у роботах Дж. Адамара (J. Hadamard), Д. Боржина (D. Bourgin) і Р. Даффіна (R. Duffin), А. Губера (A. Huber), Д. Манжерона (D. Mangeron).

Крайові задачі для рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними в обмежених і необмежених областях вивчались у працях багатьох авторів, зокрема Ю. М. Березанського, В. П. Бурського, М. Л. Горбачука, В. М. Борок, П. І. Каленюка, де переважно виділені випадки коректно поставлених задач, які виключають появу малих знаменників.

У роботах Б. Й. Пташника та його учнів на основі метричного підходу досліджено однозначну розв'язність крайових задач з даними на всій межі області для багатьох класів рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними, при побудові розв'язків яких виникають малі знаменники, однак крайові задачі з мішаними умовами (Діріхле-Неймана) ними не розглядались.

У даній дисертаційній роботі, яка продовжує та розвиває цей напрям досліджень, розглянуто задачі з умовами Діріхле-Неймана за змінною t та певними умовами (періодичності, майже періодичності, умовами типу умов Діріхле та ін.) за змінними $x_1, \ldots, x_p$ для гіперболічних (лінійних і слабко нелінійних) та безтипних (лінійних) рівнянь і систем рівнянь в обмежених та необмежених областях. Розглянуті задачі є новими, а їх дослідження є певним внеском у загальну теорію крайових задач для рівнянь із частинними похідними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертаційного дослідження отримано у рамках виконання бюджетних тем "Дослідження сучасних проблем аналізу, диференціальних рівнянь та теорії ймовірності" (державний реєстраційний номер 0107U009514) кафедри прикладної математики Національного університету "Львівська політехніка" та "Дослідження коректності, побудова та вивчення властивостей розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач для некласичних еволюційних рівнянь" (державний реєстраційний номер 0110U004817) відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження (переважно на базі метричного підходу) задач з мішаними крайовими умовами (Діріхле-Неймана) для гіперболічних і безтипних рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними в обмежених та необмежених циліндричних областях, що передбачає розв'язання таких завдань:

1) встановлення умов існування та єдиності (у різних функційних просторах) та побудова розв'язків наступних задач:

— крайових задач з даними на всій межі області для лінійних гіперболічних рівнянь та систем рівнянь в обмежених областях;

— задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійного гіперболічного оператора високого порядку, збуреного нелінійним доданком (застосовуючи принцип нерухомої точки);

— задач з умовами Діріхле-Неймана за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за іншими змінними для загальних (без обмеження на тип) лінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами;

— задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами у безмежній смузі (застосовуючи диференціально-символьний метод або накладаючи на шуканий розв'язок умову майже періодичності за просторовою змінною);

— задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для рівняння вільних коливань безмежної струни з додатковою умовою Діріхле або Неймана у внутрішній точці часового інтервалу;

— задачі з мішаними умовами (Діріхле-Неймана) на межі області для рівнянь із псевдодиференціальними операторами у безмежному шарі (використовуючи техніку диференціальних операторів нескінченного порядку);

2) доведення метричних лем про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків досліджуваних задач, на підставі яких встановлюються умови коректної розв'язності задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задачі.

Об'єкт дослідження – некласичні крайові задачі для гіперболічних і безтипних рівнянь.

Предмет дослідження – умови однозначної розв'язності у різних функційних просторах задач з мішаними крайовими умовами (Діріхле-Неймана) для гіперболічних і безтипних рівнянь та побудова їх розв'язків.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовуються методи теорії диференціальних рівнянь, функціонального аналізу, лінійної алгебри та метричної теорії чисел.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

— встановлено умови однозначної розв'язності у різних функційних просторах крайових задач для лінійних гіперболічних рівнянь та систем рівнянь в обмежених циліндричних областях, коли на нижній та верхній основах циліндра задано умови Діріхле та Неймана відповідно або локальні крайові умови третього роду;

— встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійного гіперболічного оператора високого порядку, збуреного нелінійним доданком;

— досліджено умови однозначної розв'язності у різних функційних просторах задач з умовами Діріхле-Неймана за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за іншими змінними для загальних (без обмеження на тип) лінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами;

— встановлено умови коректності у безмежній смузі задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною): 1) для лінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами у класах цілих функцій і в класах майже періодичних функцій за просторовою змінною; 2) для рівняння вільних коливань струни з додатковою умовою Діріхле або Неймана у внутрішній точці часового інтервалу;

— у безмежному шарі досліджено однозначну розв'язність крайової задачі з мішаними умовами (Діріхле-Неймана) на межі області для рівнянь із псевдодиференціальними операторами;

— побудовано точні розв'язки досліджуваних задач у випадках лінійних рівнянь та вказано алгоритм побудови наближеного розв'язку у випадку задачі для слабко нелінійного рівняння;

— доведено метричні леми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків досліджуваних задач.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у подальших дослідженнях різних крайових задач для рівнянь із частинними похідними, а також при розв'язанні конкретних задач практики, математичними моделями яких є досліджені у роботі крайові задачі.

Особистий внесок здобувача. Основні наукові результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У спільних з Б. Й. Пташником роботах [84–95] науковому керівнику належить постановка задач, передбачення та аналіз отриманих результатів. У спільних роботах [16, 17] Б. Й. Пташнику належить постановка задачі, аналіз та обговорення усіх отриманих результатів, а Н. І. Білусяк — перевірка та аналіз результатів, які стосуються випадку задачі для слабко нелінійного рівняння. У спільних роботах [76, 77] Б. Й. Пташнику належить постановка задачі та обговорення отриманих результатів, а З. М. Нитребичу — доведення леми 1 та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких наукових конференціях і семінарах: Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 2007); Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки та математики імені академіка Я. С. Підстригача (Львів, 2009); Десята відкрита наукова конференція Інституту прикладної математики та фундаментальних наук (ІМФН) (Львів, 2012); Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" (Львів, 2013); Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича (Київ, 2014);

П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2014); Конференція молодих учених "Підстригачівські читання-2014" (Львів, 2014); семінар ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники: член-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф. Б. Й. Пташник, д. ф.-м. н., ст. н. с. В. О. Пелих, Львів, 2013, 2015); загальноінститутський математичний семінар Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники: д. ф.-м. н., проф. М. М. Войтович, член-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф. Б. Й. Пташник, д. ф.-м. н., ст. н. с. В. О. Пелих, д. ф.-м. н., ст. н. с. В. М. Петричкович, Львів, 2014); Львівський міський семінар з диференціальних рівнянь (керівники: д. ф.-м. н., проф. М. І. Іванчов, д. ф.-м. н., проф. П. І. Каленюк, член-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф. Б. Й. Пташник, Львів, 2014); а також були оприлюднені на Дев'ятій відкритій науковій конференції професорсько-викладацького складу Інституту прикладної математики та фундаментальних наук (Львів, 2010) та на Всеукраїнській науковій конференції "Прикладні задачі математики" (Яремче, 2011).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 10 статтях [16, 76, 84–89, 98, 99] (з них 2 без співавторів) у наукових періодичних фахових виданнях України, серед яких 3 статті – у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз, а також додатково висвітлено в тезах доповідей та матеріалах наукових конференцій [17, 77, 90–95, 100].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, який налічує 151 найменування, обсягом 17 сторінок. Загальний обсяг дисертації – 152 сторінки.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Крайові задачі з даними на всій межі області (зокрема з умовами Діріхле, Неймана та мішаними умовами Діріхле-Неймана) для еліптичних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними вивчені досить повно (див., наприклад, [1, 2, 29, 35, 37, 60, 63, 66, 133, 146, 150] та бібліографію в них). Разом із цим, такі задачі для ізотропних стосовно порядку диференціювання за незалежними змінними нееліптичних (гіперболічних і безтипних) рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними залишаються вивченими порівняно мало; це, очевидно, зумовлено тим, що вони є, взагалі, умовно коректними, а їхня розв'язність в обмежених областях здебільшого пов'язана з проблемою малих знаменників (див. [3, 6, 29, 80, 105, 117, 123] і бібліографію там).

У теорії крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними одним із небагатьох загальних результатів є теорема Хермандера [111], відповідно до якої для будь-якого лінійного диференціального оператора з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами в обмеженій області існує розв'язне розширення лінійного оператора, тобто існує деяка коректна крайова задача. Розв'язне розширення оператора визначається певними крайовими умовами, проте теорема Хермандера не описує такі умови для наперед заданого оператора. Деякі результати стосовно знаходження способів опису розв'язних розширень для загальних операторів містять роботи [41, 71]. Таким чином, вивчення конкретних постановок крайових задач для гіперболічних та безтипних диференціальних рівнянь з частинними похідними залишається актуальним.

Перші результати досліджень крайових задач з даними на всій межі області було отримано у роботах Дж. Адамара [120], Д. Боржина і Р. Даффіна [116, 117], А. Губера [121], Д. Манжерона [131], де розглядались задачі для гіперболічних рівнянь. Зокрема, у роботі [117] у прямокутнику

$R : \{0 \leq t \leq T;\ 0 \leq x \leq S\}$ розглянуто задачу Діріхле для рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{1.1}$$

Встановлено, що за умови ірраціональності числа T/S розв'язок задачі є єдиним у класі неперервно диференційовних функцій, які мають в R сумовні за Лебегом похідні другого порядку. Доведено, що многовид межових функцій, за яких існує розв'язок задачі, тим вужчий, чим швидше ірраціональне число T/S апроксимується раціональними числами. Крім цього, у роботі [117] досліджено задачу Неймана для рівняння коливань струни у прямокутнику.

У роботах [33, 34, 105] вивчалась крайова задача для системи рівнянь

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \qquad (0 \leq x \leq X,\ 0 \leq t \leq T,\ \rho = T/X)$$

яка еквівалентна рівнянню коливань струни, з крайовою умовою вигляду

$$[au_1 + bu_2]_\Gamma = f(s)$$

розглядались такі випадки: 1) $a = a(s)$, $b = b(s)$; 2) $a \equiv \sum\limits_{i+j=0}^{N} a_{ij} \dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial t^j}$, $b \equiv \sum\limits_{i+j=0}^{N} b_{ij} \dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial t^j}$.

У роботі П. П. Мосолова [68] в області $\{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1/a; a \geq 1\}$ з межею Γ досліджено крайову задачу

$$P\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x, y) = f(x, y), \quad \left.\frac{\partial^{2r} u}{\partial n_\Gamma^{2r}}\right|_\Gamma = 0, \quad r \in \{0, 1, \ldots, p_0 - 1\}, \tag{1.2}$$

де $P(\xi, \eta)$ – довільний поліном степеня p_0 зі сталими дійсними коефіцієнтами; n_Γ – нормаль до межі Γ; $f(x, y)$ – достатньо гладка за обома аргументами функція, яка на Γ перетворюється в нуль разом зі всіма своїми похідними. Доведено, що для майже всіх прямокутників, тобто для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел a існує єдиний класичний розв'язок задачі (1.2); цей розв'язок можна зобразити у вигляді тригонометричного ряду.

Ю. М. Березанський [4–6] досліджував крайові задачі для загального диференціального оператора другого порядку з дійсними сталими коефіцієнтами. Зокрема, у роботі [4] для крайової задачі

$$Lu := u_{tt} - u_{xx} = f, \quad u|_{\Gamma} = 0, \tag{1.3}$$

де Γ – межа області G, знайдено такі обмежені області G площини (t, x), у яких задача (1.3) має слабкий розв'язок з $L_2(G)$ для довільної правої частини f, причому цей розв'язок є стійким відносно малих змін області.

Крайові задачі для нелінійних гіперболічних рівнянь та систем рівнянь вивчались у різних аспектах у працях [54, 55, 113, 126, 127, 132, 135, 144], де головним чином розглядались задачі для рівнянь і систем рівнянь першого і другого порядків. Зокрема, у роботах В. М. Кирилича та D. G. Schaeffer досліджено задачі в областях з невідомими (вільними) межами для гіперболічних рівнянь та систем рівнянь з локальними і нелокальними крайовими умовами.

Для лінійних та нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку досліджено питання розв'язності двоточкових задач з умовами Діріхле [69, 70, 119] та Діріхле-Неймана [78, 141, 142] за умови періодичності шуканого розв'язку за часовою змінною. Зокрема, у роботі [69] на основі зображення розв'язку крайової періодичної задачі

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t + \omega) = u(x, t)$$

у вигляді $u(x, t) = u^0(x, t) + \tilde{u}(x, t)$, де $u^0(x, t)$ – розв'язок відповідної однорідної задачі, а $\tilde{u}(x, t)$ – точний розв'язок неоднорідного рівняння, такий, що $\tilde{u}(x, t + \omega) = \tilde{u}(x, t)$, одержано умови розв'язності крайової неоднорідної періодичної задачі для конкретних значень періоду ω.

У праці [78] розглянуто математичну модель коливання струни під дією сили, розривної стосовно фазової змінної, за припущення, що один кінець струни закріплений, а інший вільний. Тобто досліджено задачу Діріхле-

Неймана для нелінійного рівняння коливань струни

$$(\partial_{tt} - \partial_{xx})u(x,t) - \mu u(x,t) + g(x,t,u) = f(x,t), \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,2\pi),$$

$$u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \in (0,2\pi),$$

за умови, що $u(x,2\pi) = u(x,0)$, $x \in (0,\pi)$. Для розглянутої задачі встановлено існування 2π-періодичного узагальненого розв'язку.

У роботі [142] досліджено задачу

$$u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f(x,t), \quad u(x,t+2\pi) = u(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $f(x,t)$ – відома 2π-періодична функція. Розглянуто такі два типи крайових умов:

$$u(0,t) = u'(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$u'(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для досліджуваних задач доведено теореми існування класичного розв'язку, за умови, що нелінійний доданок $g(u)$ задовольняє умову нерезонансності.

У працях [124, 125, 128, 129, 136, 137, 140, 147, 151] досліджено у різних аспектах задачі з локальними та нелокальними крайовими умовами для лінійних та квазілінійних безтипних рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними, у [130] розглянуто випадок системи диференціальних рівнянь із дробовими похідними. Умови існування періодичних за часом слабких розв'язків крайових задач для систем безтипних рівнянь першого порядку встановлено у [114, 115]. Майже періодичні розв'язки гіперболічних та безтипних рівнянь з частинними похідними вивчались у працях [62,67,97,145].

У працях В. П. Бурського та його учнів [26–30, 118] досліджено крайові задачі в одиничному крузі для диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами третього та довільного парного порядків та задачу Діріхле для систем таких рівнянь. У випадку задачі Діріхле для гіперболічного рівняння другого порядку В. П. Бурський встановив умови однозначної розв'язності цієї задачі для майже всіх параметрів рівняння.

У роботах В. М. Борок та її учнів [20–24] встановлено класи однозначної розв'язності крайових задач у безмежному шарі $\{t, x : 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n\}$ для еволюційних рівнянь і систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами. За певних умов на поведінку розв'язку на безмежності (за просторовими координатами) для розглянутих задач встановлено класи єдиності та класи коректної розв'язності. Зокрема, в [21] доведено, що задача

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

має нетривіальні розв'язки у класі обмежених функцій.

У праці [23] в залежності від властивостей поліномів $P(s)$ і $Q(s)$ знайдено умови коректної розв'язності задачі

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) = 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,T) = u_T(x),$$

де $0 < t < T$, $x \in \mathbb{R}^n$, $P(s)$, $Q(s)$ – поліноми від $s_1, \ldots, s_n$ зі сталими комплексними коефіцієнтами.

У працях П. І. Каленюка, З. М. Нитребича та їх учнів [49–52, 74, 138] крайові задачі для рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними у безмежній смузі досліджуються за допомогою операційного (диференціально-символьного) методу, розробленого П. І. Каленюком та З. М. Нитребичем на базі узагальненої схеми відокремлення змінних. За допомогою цього методу виділено класи однозначної розв'язності та побудовано у явному вигляді розв'язки досліджуваних задач. Зокрема, З. М. Нитребичем у смузі $(0, h) \times \mathbb{R}$ досліджено [75] некоректну задачу

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n}} + \sum_{s=0}^{n-1} a_s \frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2s} \partial x^{2n-2s}} = f\left(t, x\right), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^{2r-2} u(0,x)}{\partial t^{2r-2}} = \varphi_r\left(x\right), \quad \frac{\partial^{2r-2} u(h,x)}{\partial t^{2r-2}} = \psi_r\left(x\right), \quad r \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1.5}$$

де $a_s \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Задача (1.4), (1.5) характеризується наявністю у поданні її розв'язку знаменників, множина нулів яких є непорожньою. Класи існування і єдиності розв'язку цієї задачі для фіксованої змінної, за якою задано умови типу умов Діріхле, містять аналітичні в крузі функції.

Дослідженню у різних аспектах крайових задач для лінійних еволюційних рівнянь та систем рівнянь із псевдодиференціальними операторами присвячені роботи багатьох авторів, зокрема Ю. А. Дубінського, В. С. Ільківа, В. М. Поліщук, Б. Й. Пташника, Б. О. Салиги, С. Р. Умарова, Е. М. Сайдаматова [42, 45, 47, 48, 57, 101, 102, 143, 148, 149]. За певних умов на символи розглядуваних псевдодиференціальних операторів встановлено умови існування та єдиності розв'язків досліджуваних задач. Зокрема, у працях [42, 57, 102] розглянуто задачі з локальними двоточковими та багатоточковими умовами, а в [45, 47, 48] — з нелокальними багатоточковими умовами за часовою змінною для рівнянь із псевдодиференціальними операторами з аналітичними символами; досліджено [143, 148, 149] задачу Коші та задачі з багатоточковими умовами для рівнянь із дробовими похідними за часом, що містять псевдодиференціальні оператори за просторовими змінними з аналітичними та неаналітичними символами.

У більшості вищенаведених робіт, які стосуються дослідження крайових задач для рівнянь та систем рівнянь із псевдодиференціальними операторами, використано результати праці Ю. А. Дубінського [42], де розроблено конструктивний метод дослідження псевдодиференціальних операторів з аналітичними символами, визначеними в довільній області з $\mathbb{R}^n$. Зокрема, у цій роботі розв'язок задачі Діріхле для рівнння (1.1) з умовами

$$u(-1/2, x) = \varphi_-(x), \quad u(1/2, x) = \varphi_+(x) \tag{1.6}$$

визначено за допомогою дій псевдодиференціальних операторів за формулою

$$u(t,x) = \frac{\cos\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right]}{\cos\left[\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right]}\varphi_+(x) + \frac{\sin\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right]}{\frac{1}{i}\frac{d}{dx}cos\left[\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right]}\varphi_-(x). \tag{1.7}$$

Доведено, що формула (1.7) визначає єдиний розв'язок задачі (1.1), (1.6) для $\varphi_\pm \in H^\infty(G)$, де $G = \{\xi \in \mathbb{R} : \xi \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $H^\infty(G) = \{\varphi \in L_2(G) : \hat{\varphi}$ – фінітне в $G\}, G \subseteq \mathbb{R}^s$.

Зазначимо, що в більшості із згаданих вище робіт розглядались регулярні випадки задач, що виключають появу малих знаменників, або на малі знаменники накладались аксіоматичні умови відокремленості від нуля, які забезпечують розв'язність розглядуваних задач; можливість виконання цих оцінок, як правило, не досліджувалась.

У роботах Б. Й. Пташника та його учнів Н. І. Білусяк, Т. П. Гоя, Л. І. Комарницької, М. М. Симотюка, В. В. Фіголя, П. І. Штабалюка та ін. [10–15,18,19,38,56,59,64,80–83,96,97,102,103] на основі метричного підходу в обмежених циліндричних областях для лінійних та слабко нелінійних гіперболічних та безтипних рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними довільного порядку у нерегулярних випадках вивчались задачі з локальними та нелокальними двоточковими умовами за змінною t та умовами періодичності, майже періодичності або умовами типу умов Діріхле за змінними $x_1, \ldots, x_p$. У перелічених роботах встановлено умови однозначної розв'язності розглядуваних задач у різних функціональних просторах. Показано, що коректність таких задач є нестійкою стосовно параметрів області і (або) коефіцієнтів рівнянь та крайових умов. Для аналізу оцінок знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків досліджуваних задач, авторами використано результати і методи метричної теорії чисел, розробленої В. Г. Спринджуком [104], а також метричні твердження, отримані у працях В. І. Берника, Б. Й. Пташника [7,80] та В. С. Ільківа [46].

Зокрема, в області D^p у роботі [81] досліджено задачу

$$\sum_{|\hat{s}|^*=2n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{2n} u\,(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{2s_1} \dots \partial x_p^{2s_p}} = f\,(t,x)\,, \quad A_{\hat{s}} \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{\partial^{2r} u}{\partial t^{2r}}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{2r} u}{\partial t^{2r}}\right|_{t=T} = 0, \quad r \in \{0,\dots,n-1\}; \tag{1.9}$$

у роботі [43] — задачу

$$\sum_{|\hat{s}|^*=2n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{2n} u\,(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{2s_1} \dots \partial x_p^{2s_p}} = 0, \tag{1.10}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)} u}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad \left.\frac{\partial^{2(r-1)} u}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x), \quad r \in \{1,\dots,n\}, \tag{1.11}$$

де $u = (u_1, \dots, u_m)$, $\varphi_j = (\varphi_{j,1}, \dots, \varphi_{j,m})$, $A_{\hat{s}}$ – $m \times m$-матриці зі сталими дійсними елементами. За припущення, що рівняння (1.8) та система рівнянь (1.10) нестрого гіперболічні за Петровським, встановлено умови однозначної розв'язності задач (1.8), (1.9) та (1.10), (1.11) у шкалах просторів Соболєва.

У роботі [56] в області $[0,T] \times \mathbb{R}$ на базі метричного підходу досліджено триточкову задачу з умовами

$$u(t_1,x) = 0, \quad u(t_2,x) = g(x), \quad u(t_3,x) = 0, \quad 0 \le t_1 < t_2 < t_3 \le T,$$

для рівняння вільних коливань струни.

У працях [19, 103] встановлено умови коректної розв'язності у просторах періодичних функцій експоненційного типу задачі з двома кратними вузлами за виділеною змінною t для лінійного факторизованого рівняння з частинними похідними:

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_j A(D_x) \right) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in D^p,$$

$$\left.\frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j \in \{1,\dots,r\},$$
$$\left.\frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{r+j}(x), \quad j \in \{1,\dots,n-r\},$$

де $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$, $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_p)$, $1 \leq r < n$; а також задачі для лінійної системи безтипних рівнянь з частинними похідними:

$$\frac{\partial^n \vec{u}(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j \frac{\partial^n \vec{u}(t,x)}{\partial t^j \partial x^{n-j}} = \vec{0}, \quad (t,x) \in D^1,$$

$$\left.\frac{\partial^{j-1}\vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} = \vec{\varphi}_j(x), \quad j \in \{1, \ldots, r\},$$
$$\left.\frac{\partial^{j-1}\vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=T} = \vec{\varphi}_{r+j}(x), \quad j \in \{1, \ldots, n-r\},$$

де A_j, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,– квадратні матриці розміру $m \times m$, елементами яких є комплексні числа, $\vec{u}(t,x) = col\left(u^1(t,x), \ldots, u^m(t,x)\right)$, $\vec{\varphi}_j(x) = col\left(\varphi_j^1(x), \ldots, \varphi_j^m(x)\right)$.

Н. І. Білусяк дослідила [10–15] коректність задач з умовами типу умов Діріхле за змінною t та певними умовами за просторовими координатами (умови періодичності, умови типу умов Діріхле) для деяких класів лінійних та слабконелінійних гіперболічних і безтипних рівнянь і систем рівнянь високого порядку у циліндричних областях. Зокрема, в роботі [13] в області $Q := B^p$ досліджено класичну розв'язніcь задачі

$$\frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2j} L^{n-j} u\,(t,x) = f\,(t,x) + \varepsilon \Phi\,(t,x,u\,(t,x))\,, \tag{1.12}$$

$$\left(\partial^{2l}u/\partial t^{2l}\right)\big|_{t=0} = \left(\partial^{2l}u/\partial t^{2l}\right)\big|_{t=b} = 0, \quad l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \tag{1.13}$$

$$L^q u(t,x)\,|_{\partial G} = 0, \quad q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \tag{1.14}$$

де $b \in (0,T)$, $\varepsilon, a_j \in \mathbb{R}$, L — деякий еліптичний в області G диференціальний вираз, $L^0 u = u, L^q u = L\left(L^{q-1}u\right)$, $q = 1, \ldots, n$; $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$; функція $\Phi\,(t,x,u)$ визначена та неперервна за змінною t і досить гладка за x та u в замкненій області $Q_1 = \left\{(t,x,u) : (t,x) \in \overline{Q}, u \in \overline{S}\left(u^0, r\right)\right\}$, де $\overline{S}\left(u^0, r\right) = \left\{u \in C^{2n}\left(\overline{Q}\right) : \left\|u - u^0\right\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \leq r\right\}$, $u^0 := u^0\,(t,x)$ — розв'язок задачі (1.12)–(1.14) при $\varepsilon = 0$.

Крім цього, в [9] в області $D := D^p$ встановлено умови коректної розв'язності у просторах періодичних функцій експоненційного типу такої задачі:

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\sum_{r=1}^{p}a_{jr}\frac{\partial}{\partial x_s}+b_j\right)^2\right]u\left(t,x\right)=f(t,x),$$

$$\left.\frac{\partial^{2l}u\left(t,x\right)}{\partial t^{2l}}\right|_{t=0}=\varphi_l\left(x\right),\ \left.\frac{\partial^{2l}u\left(t,x\right)}{\partial t^{2l}}\right|_{t=T}=\varphi_{n+l}\left(x\right),l\in\{0,1,\ldots,n-1\},$$

де $a_{jr}, b_j \in \mathbb{C}$, $r \in \{1,\ldots,p\}$.

Задачі типу Діріхле для гіперболічних та безтипних рівнянь і систем рівнянь (лінійних та слабко нелінійних) з частинними похідними довільного порядку розглядав і В. В. Фіголь [109,110]. Крім цього, ним вивчалися крайові задачі з наближеними даними на межі області для диференціальних рівнянь і систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Питання стійкості та побудови наближених розв'язків задач типу задачі Діріхле з наближеними вихідними даними для гіперболічних рівнянь розглянуто також у працях [65, 139].

Наведений огляд літератури свідчить про різноманітність аспектів, у яких проводяться дослідження крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Дослідженню таких задач присвячено численні праці, зокрема, у випадку локальних крайових умов досить повно вони вивчені, коли на межі області задано умови Діріхле або типу Діріхле. Поряд із цим, крайові задачі з умовами типу умов Діріхле-Неймана для гіперболічних та безтипних рівнянь з частинними похідними майже не розглядались. Результати дисертаційної роботи частково заповнюють цю прогалину.

Висновки до розділу 1

У першому розділі дисертації наведено короткий огляд результатів досліджень двоточкових крайових задач для деяких класів лінійних та нелінійних гіперболічних і безтипних рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними. Детально проаналізовано наукові праці, що тісно пов'язані з тематикою дисертаційного дослідження.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

У дисертаційній роботі використовуються методи та результати теорії звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу, лінійної алгебри та метричної теорії чисел.

Задачі з розділів 3, 4 та підпункту 5.1.1 об'єднані спільною методикою дослідження. Такі задачі є умовно коректними, а їхня розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

Розглянемо спрощену схему, за якою проводиться дослідження цих задач. Вигляд лінійних диференціальних рівнянь та систем рівнянь, які розглядаються у розділах 3, 4 та підпункті 5.1.1, а також вигляд областей, у яких досліджуються крайові задачі для цих рівнянь та систем рівнянь, дозволяє застосувати класичний метод відокремлення змінних (метод Фур'є) для знаходження розв'язків досліджуваних задач, тобто шукати розв'язки відповідних крайових задач у вигляді ряду (для рівнянь – скалярного, для систем – векторного)

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\,(t)\, X_k\,(x)\,, \tag{2.1}$$

де $\{\ X_k\,(x),\ k \in \mathbb{N}\ \}$ – повна ортогональна система власних функцій деякої задачі на власні значення.

Після відокремлення змінних для знаходження кожної з функцій $u_k\,(t)$, $k \in \mathbb{N}$, одержуємо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння, яку досліджуємо так: шукаємо фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння (системи рівнянь) і обчислюємо характеристичний визначник цієї задачі. За умови відмінності від нуля для всіх $k \in \mathbb{N}$ характеристичного визначника задачі, функції (вектор-функції) $u_k\,(t)$, $k \in \mathbb{N}$, визначаються однозначно, і тоді формула (2.1) зображає формальний розв'язок розглядуваної задачі.

Для досліджуваних задач ряд (2.1) є, взагалі, розбіжним, оскільки містить безмежну кількість членів, що містять у знаменниках у вигляді співмножників вирази, які, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих за модулем значень. Тому питання розв'язності розглядуваних задач пов'язане з проблемою малих знаменників. Для забезпечення збіжності ряду (2.1) в теоремах існування розв'язків задач, крім певних умов на праву частину рівняння (системи рівнянь) та праві частини крайових умов, аксіоматично накладаємо певні оцінки знизу на малі знаменники. Для аналізу можливості виконання вказаних оцінок використано метричний підхід та сучасні методи і результати метричної теорії чисел. Доведено метричні твердження про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків досліджуваних задач. На підставі доведених метричних тверджень встановлюємо умови однозначної розв'язності розглядуваних задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компоненти яких виражаються через параметри області і (або) коефіцієнти рівнянь (систем рівнянь).

Задачу для слабконелінійного гіперболічного рівняння зводимо до еквівалентного їй інтегрального рівняння (з'ясувавши, коли таке зведення можливе), існування розв'язку якого доводимо на основі принципу нерухомої точки Каччопполі-Банаха.

При дослідженні у підпункті 5.1.2 задачі з умовами Діріхле-Неймана за часом для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у смузі застосовано диференціально-символьний метод [52], індукований узагальненою схемою відокремлення змінних. Відповідно до цього методу розв'язок задачі будуємо у вигляді дії в околі нуля диференціальних виразів (загалом нескінченного порядку), символами яких є праві частини крайових умов та рівняння, на деякі мероморфні функції параметрів. Попередньо встановлюємо, що нульове значення параметра не є полюсом цих функцій.

У пункті 5.3 при дослідженні у безмежному шарі крайової задачі з мішаними (Діріхле-Неймана) умовами на межі області для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами за просторовими координатами зі змінними за часом коефіцієнтами, що мають аналітичні символи, використано техніку диференціальних операторів нескінченного порядку, розроблену Ю. А. Дубінським [42].

Наведемо деякі допоміжні відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу, лінійної алгебри та метричної теорії чисел, які використовуватимемо у наступних розділах дисертації.

У крайових задачах для диференціальних рівнянь зі змінними за x коефіцієнтами фігурує лінійний самоспряжений еліптичний в області G диференціальний вираз

$$L := \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - q(x), \tag{2.2}$$

де $q(x) \geq 0$. За умов, що $\overline{G} \in A^{2\delta,\nu}$, $p_{ij}(x) \in C^{2\delta-1,\nu}(\overline{G})$, $i,j \in \{1,...,p\}$, $q(x) \in C^{2\delta-2,\nu}(\overline{G})$, $\delta \in \mathbb{N}$, $0 < \delta < 1$, всі власні значення λ_k, $k \in \mathbb{N}$, задачі

$$LX(x) = -\lambda X(x), \quad X(x)|_{\partial G} = 0, \tag{2.3}$$

множину яких позначимо через Λ, є різними і додатними, а система власних функцій $\Upsilon = \{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$, є повною ортонормованою у просторі $L_2(G)$, при цьому $X_k(x) \in C^{2\delta}\left(\overline{G}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, і справедливі оцінки [44, 72]

$$\tilde{c}_0 k^{2/p} \leq \lambda_k \leq \tilde{c}_1 k^{2/p}, \qquad 0 < \tilde{c}_0 \leq \tilde{c}_1, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}\left|\partial^{|s|}X_k(x) / \left(\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}\right)\right| \leq \tilde{c}_2\lambda_k^{p/4+|s|/2}, \quad \tilde{c}_2 = \tilde{c}_2(|s|), \quad |s| = 0, 1, \ldots, 2\delta. \tag{2.5}$$

При дослідженні крайової задачі для слабконелінійного гіперболічного рівняння використовуємо принцип нерухомої точки Качополлі-Банаха. Зупинимось на його описі детальніше. Нехай Ω – замкнена множина у повному метричному просторі X з метрикою $\rho(x, y)$, а відображення P переводить Ω саму в себе.

Означення 2.1. *Відображення P називається оператором стиску, якщо існує число $\alpha < 1$ таке, що*

$$\rho\left(P(x), P(x')\right) \leq \alpha\rho\left(x, x'\right) \tag{2.6}$$

для всіх x, $x' \in \Omega$.

Теорема 2.1 ([53, с. 605]). *Якщо P є оператором стиску, то в Ω існує єдиний розв'язок x^* рівняння $x = P(x)$. При цьому x^* можна отримати як границю послідовності $\{x_n\}$, де $x_{n+1} = P(x_n)$, $n \in 0, 1, 2, \ldots$, а x_0 – довільний елемент із Ω. Швидкість збіжності послідовності $\{x_n\}$ до розв'язку x^* визначається нерівністю*

$$\rho\left(x_n, x^*\right) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho\left(x_1, x_0\right).$$

Поряд із простором X розглянемо ще один метричний простір Y та замкнену підмножину $Y_0 \in Y$. Припустимо, що кожному $y \in Y_0$ відповідає оператор P_y, що відображає $\Omega \in X$ саму в себе.

Теорема 2.2 ([53, с. 608]). *Якщо при кожному $y \in Y_0$ відображення P_y задовольняє умову (2.6) з α, що не залежить від y, і якщо в точці $y_0 \in Y_0$ відображення P_y є неперервним за y, то при $y = y_0$ розв'язок рівняння $x = P_y(x)$ неперервно залежить від y.*

Наведемо деякі твердження, які використовуються у роботі при дослідженні оцінок знизу малих знаменників.

Лема 2.1 (Борель-Кантеллі, лема 1 із [104, с. 10]). *Нехай A_q, $q \in \mathbb{N}$, – послідовність вимірних множин із $\mathbb{R}^n$, причому $\sum\limits_{q=1}^{\infty} |A_q| < \infty$. Тоді міра множини точок із $\mathbb{R}^n$, які потрапляють у нескінченну кількість множин A_q, дорівнює нулю.*

Теорема 2.3 (теорема 32 з [112, с. 87]). *Нехай $f(x)$ – додатна неперервна функція додатного аргумента x, причому $xf(x)$ – функція* *незростаюча. Тоді нерівність*

$$|\alpha - p/q| < f(q)/q \tag{2.7}$$

має для майже всіх α нескінченну множину розв'язків у цілих числах p і q, $q > 0$, якщо при деякому $c > 0$ інтеграл

$$\int_c^{\infty} f(x)dx \tag{2.8}$$

розбігається; навпаки, нерівність (2.7) має для майже всіх α не більше, ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах p і q, $q > 0$, якщо інтеграл (2.8) збігається.

Теорема 2.4 ([40]). *Нехай m, n – додатні цілі числа, причому $f(x)$ – додатна неперервна функція, визначена при $x > c$, $x^{n-1}f^m(x)$ – монотонно спадна функція, причому $x^n f^m(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$. Тоді для майже всіх точок $\omega = (\omega_{jr})$, $j \in 1, \ldots, m$, $r \in 1, \ldots, n$, mn-вимірного евклідового простору система нерівностей*

$$|\omega_{j1}a_1 + \cdots + \omega_{jn}a_n - b_j| < f(a), \quad a = \max_{1\le r\le n} |a_r|, \quad j \in 1, \ldots, m, \tag{2.9}$$

має нескінченну множину розв'язків у цілих числах $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$, якщо інтеграл

$$\int_c^{\infty} x^{n-1} f^m(x)dx \tag{2.10}$$

є розбіжним; навпаки, система нерівностей (2.9) має для майже всіх ω не більше, ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m$, якщо інтеграл (2.10) збігається.

Лема 2.2 ([80]). *Нехай $\Phi(k) \equiv \Phi(k_1, \ldots, k_p)$ – обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність*

$$\left|\Phi(k) - \frac{la}{\|k\|^{\sigma}}\right| < \frac{1}{|k|^{p+\sigma+\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \sigma > 0,$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a > 0$ має не більше, ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах $k_1, \ldots, k_p$, $l \neq 0, |k| \neq 0$.

У роботі використовуються елементарні нерівності

$$\left(a_1 + \ldots + a_n\right)^2 \le n\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right), \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.11}$$

$$\sin x \ge 2x/\pi, \quad x \in [0, \pi/2], \tag{2.12}$$

та співвідношення

$$|\sin x| = \left|\sin\left(x - \pi l\right)\right|, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{2.13}$$

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації описано основні методи досліджень, що використовуються у наступних розділах дисертаційної роботи при вивченні поставлених задач.

Наведено деякі допоміжні відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу, лінійної алгебри та метричної теорії чисел, які використовуватимемо у наступних розділах дисертації.

РОЗДІЛ 3
КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ РІВНЯНЬ В ОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

У даному розділі досліджено умови однозначної розв'язності крайових задач для гіперболічних рівнянь та систем рівнянь зі сталими та змінними за $x_1, \ldots, x_p$ коефіцієнтами в обмежених циліндричних областях.

У першому підрозділі в області D^1 розглянуто задачі з умовами Діріхле-Неймана за часовою змінною та умовами 2π-періодичності за просторовою змінною для лінійних гіперболічних рівнянь та систем рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами.

У другому підрозділі в області B^p досліджено задачі з даними на всій межі області для лінійних гіперболічних рівнянь другого та високого порядків зі змінними за $x_1, \ldots, x_p$ коефіцієнтами. На прикладі задачі для рівняння високого порядку показано, як отримані в дисертаційній роботі результати для лінійних рівнянь можна перенести на випадок, коли лінійне рівняння збурено нелінійним доданком.

3.1. Задачі Діріхле-Неймана для рівнянь та систем рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами

3.1.1. Випадок одного рівняння .

а) В області D^1 розглянемо задачу

$$L[u] := \sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2(n-s)} \partial x^{2s}} = f(t,x), \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} U_r[u] &:= \left.\frac{\partial^{2(r-1)} u(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \varphi_r(x), \\ U_{n+r}[u] &:= \left.\frac{\partial^{2r-1} u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+r}(x), \end{aligned} \quad r \in \{1,\dots,n\}, \tag{3.2}$$

де $a_s \in \mathbb{R}$, $s \in \{0,1,\dots,n\}$, $a_0 = 1$. Припустимо, що рівняння (3.1) є строго гіперболічним за Петровським, тобто всі корені рівняння

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \lambda^{2(n-s)} = 0 \tag{3.3}$$

є дійсними та різними, а, отже, і відмінними від нуля.

Вигляд області D^1 накладає умови 2π-періодичності за x на розв'язок u та функції f і φ_j, $j \in \{1,\dots,2n\}$. Нехай $f \in C([0,T],\mathcal{T}')$, $\varphi_j \in \mathcal{T}'$ і

$$f(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(t)\exp(ikx), \quad \varphi_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{jk}\exp(ikx), \quad j \in \{1,\dots,2n\}. \tag{3.4}$$

Означення 3.1. *Розв'язком задачі* (3.1), (3.2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *називатимемо функцію*

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t)\exp(ikx) \tag{3.5}$$

таку, що кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, *належить простору* $C^{2n}([0,T])$ *і задовольняє, відповідно, рівності*

$$\sum_{s=0}^{n} a_s (ik)^{2s} \frac{d^{2(n-s)} u_k(t)}{dt^{2(n-s)}} = f_k(t), \qquad t \in (0,T), \tag{3.6}$$

$$u_k^{(2r-2)}(0) = \varphi_{rk}, \qquad u_k^{(2r-1)}(T) = \varphi_{n+r,k}, \qquad r \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.7}$$

Отже, розв'язок розглядуваної задачі шукаємо у вигляді ряду (3.5), де $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, є розв'язком задачі (3.6), (3.7).

Крім задач (3.1), (3.2) та (3.6), (3.7), розглядатимемо відповідні їм однорідні задачі

$$L[u] = 0, \tag{3.8}$$

$$U_r[u] = 0, \qquad U_{n+r}[u] = 0, \qquad r \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3.9}$$

та

$$\sum_{s=0}^{n} a_s (ik)^{2s} \frac{d^{2(n-s)} u_k(t)}{dt^{2(n-s)}} = 0, \tag{3.10}$$

$$u_k^{(2r-2)}(0) = 0, \qquad u_k^{(2r-1)}(T) = 0, \qquad r \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.11}$$

Якщо $k \neq 0$, то характеристичне рівняння $\sum_{s=0}^{n} a_s (ik)^{2s} \eta^{2(n-s)} = 0$, що відповідає рівнянню (3.10), має такі корені: $\eta_j = ik\lambda_j$, $\eta_{n+j}(k) = -ik\lambda_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, де $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – додатні корені рівняння (3.3). Фундаментальна система розв'язків рівняння (3.10) є такою:

$$\{u_{kj}(t) = \exp(ik\lambda_j t),\ u_{k,n+j}(t) = \exp(-ik\lambda_j t),\ j \in \{1, \ldots, n\}\},$$

а характеристичний визначник [73] задачі (3.6), (3.7) має вигляд

$$\Delta(k,T) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \eta_1^2 & \ldots & \eta_n^2 & \eta_1^2 & \ldots & \eta_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_1^{2(n-1)} & \ldots & \eta_n^{2(n-1)} & \eta_1^{2(n-1)} & \ldots & \eta_n^{2(n-1)} \\ \eta_1 e^{\eta_1 T} & \ldots & \eta_n e^{\eta_n T} & -\eta_1 e^{-\eta_1 T} & \ldots & -\eta_n e^{-\eta_n T} \\ \eta_1^3 e^{\eta_1 T} & \ldots & \eta_n^3 e^{\eta_n T} & -\eta_1^3 e^{-\eta_1 T} & \ldots & -\eta_n^3 e^{-\eta_n T} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_1^{2n-1} e^{\eta_1 T} & \ldots & \eta_n^{2n-1} e^{\eta_n T} & -\eta_1^{2n-1} e^{-\eta_1 T} & \ldots & -\eta_n^{2n-1} e^{-\eta_n T} \end{vmatrix}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta(k,T) = (-2i)^n k^{2n^2-n} \prod_{1\le s<l\le n} (\lambda_s^2 - \lambda_l^2)^2 \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j \cos(k\lambda_j T)). \tag{3.12}$$

При $k = 0$ рівняння (3.10) набуває вигляду $\dfrac{d^{2n}u_0(t)}{dt^{2n}} = 0$, а його фундаментальна система розв'язків є такою: $\{u_{0j}(t) = t^{j-1},\ j \in \{1,\dots,2n\}\}$. Характеристичний визначник $\Delta(0,T)$ задачі (3.6), (3.7) при $k = 0$ має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2T & \dots & nT^{n-1} & \dots & (2n-1)T^{2n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n(n-1)(n-2)T^{n-3} & \dots & (2n-1)(2n-2)(2n-3)T^{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \end{vmatrix} \tag{3.13}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta(0,T) = 1!2!\dots(2n-1)!. \tag{3.14}$$

Відомо [73], що задача (3.6), (3.7) для кожного $k \in \mathbb{Z}$ не може мати двох різних розв'язків тоді й лише тоді, коли $\Delta(k,T) \ne 0$. Тому на підставі (3.12) і (3.14) отримуємо таке твердження.

Теорема 3.1. *Для єдиності розв'язку задачі* (3.1), (3.2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \forall m \in \mathbb{Z}) \qquad \frac{\lambda_j T}{\pi} \ne \frac{2m+1}{2k}, \quad j \in \{1,\dots,n\}. \tag{3.15}$$

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що одна з умов (3.15) (при $j = j_0$) порушується, тобто для деяких $k = k_0 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ та $m = m_0 \in \mathbb{Z}$ справджується рівність $\lambda_{j_0}T/\pi = (2m_0+1)/(2k_0)$. Тоді існує нетривіальний розв'язок $u^0(t,x) = \sin((2m_0+1)\pi t/(2T)) \exp(ik_0 x)$ однорідної задачі (3.8), (3.9). Тому розв'язок задачі (3.1), (3.2), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Нехай задача (3.1), (3.2) має два різні розв'язки u_1, u_2 $\in C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$. Тоді функція $\bar{u}(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$, $\bar{u} \in C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$, є нетривіальним розв'язком задачі (3.8), (3.9) і зображується рядом вигляду (3.5), у якому кожен коефіцієнт $\bar{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, є розв'язком задачі (3.10), (3.11), яка за умов (3.15) для кожного $k \in \mathbb{Z}$ має лише тривіальний розв'язок. Отже, $\bar{u}_k(t) \equiv 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Із єдиності розвинення функцій із простору $\mathcal{T}'$ у ряди Фур'є [39] випливає, що $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Наслідок 3.1. *Для єдиності розв'язку задачі* (3.1), (3.2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *достатньо, щоб числа* $\lambda_j T/\pi$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *були ірраціональними.*

Надалі будемо вважати, що справджуються умови (3.15). Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}$ задача (3.6), (3.7) має єдиний розв'язок, який зобразимо у вигляді суми

$$u_k(t) = v_k(t) + w_k(t),$$

де $v_k(t)$ – розв'язок задачі (3.6), (3.11), а $w_k(t)$ – розв'язок задачі (3.10), (3.7), причому $w_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau$, де $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}$, – функція Ґріна задачі (3.6), (3.7).

Розв'язок задачі (3.1), (3.2) зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} \left(v_k(t) + \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau \right) \exp(ikx), \tag{3.16}$$

в якому

$$v_0(t) = \sum_{\ell,s=1}^{2n} (-1)^{\ell+s} \varphi_{\ell 0} \frac{\Delta_{\ell s}(0,T)}{\Delta(0,T)} t^{s-1},$$

$$G_0(t,\tau) = \frac{sgn\,(t-\tau)}{2n-1}(t-\tau)^{2n-1} + \sum_{s=1}^{2n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{s-1}}{1!2!\ldots(2n-2)!(2n-1)} \times$$
$$\times \left(\tau^{2n-2\ell+1} \frac{\Delta_{2\ell-1,s}(0,T)}{(2n-2\ell+1)!} + (T-\tau)^{2n-2\ell} \frac{\Delta_{2\ell,s}(0,T)}{(2n-2\ell)!} \right), \tag{3.17}$$

де $\Delta_{\ell s}(0,T)$ – алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині ℓ-го рядка та s-го стовпця у визначнику $\Delta(0,T)$, визначеного формулою (3.13);

$$v_k(t)=\sum_{q,j=1}^{n}S_{n-j}^{(q)}\frac{\varphi_{jk}\lambda_q k\cos\left(\lambda_q k(T-t)\right)+\varphi_{n+j,k}\sin\left(\lambda_q kt\right)}{(-1)^{n+j}\lambda_q k^{2n-1}\cos\left(k\lambda_q T\right)\prod_{s=1,s\neq q}^{n}(\lambda_s^2-\lambda_q^2)},\quad k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\tag{3.18}$$

$$G_k(t,\tau)=\frac{sgn\,(t-\tau)}{4}\sum_{q=1}^{n}\left(e^{i\lambda_q k(t-\tau)}+(-1)^n e^{-i\lambda_q k(t-\tau)}\right)\times$$

$$\times\left(i\lambda_q k^{2n-1}\prod_{s=1,s\neq q}^{n}(\lambda_s^2-\lambda_q^2)\right)^{-1}+\frac{1}{8}\sum_{s,r,q=1}^{n}(-1)^q iS_{n-r}^{(q)}\lambda_s^{2r-3}k^{2r-4n+1}\times$$

$$\times\left(\lambda_q\prod_{\ell=1,\ell\neq q}^{n}(\lambda_\ell^2-\lambda_q^2)\prod_{h=1,h\neq s}^{n}(\lambda_h^2-\lambda_s^2)\cos\left(k\lambda_q T\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times\{\lambda_q((-1)^{n-1}e^{i\lambda_s k\tau}-e^{-i\lambda_s k\tau})(e^{i\lambda_q k(T-t)}+(-1)^n e^{-i\lambda_q k(T-t)})+$$

$$+\lambda_s((-1)^n e^{i\lambda_q kt}-e^{-i\lambda_q kt})(e^{i\lambda_s k(T-\tau)}+(-1)^{n-1}e^{-i\lambda_s k(T-\tau)})\},\quad k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\tag{3.19}$$

де $S_\ell^{(q)}$, $\ell\in\{1,\dots,n-1\}$ – сума всіх можливих добутків елементів $-(k\lambda_1)^2$, $\dots,-(k\lambda_{q-1})^2,-(k\lambda_{q+1})^2,\dots,-(k\lambda_n)^2$, узятих по ℓ штук у кожному добутку; $S_0^{(q)}\equiv 1$.

Функції Ґріна $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbb{Z}$, у квадраті K_T (крім сторін $\tau=0$, $\tau=T$) визначені формулами (3.17) і (3.19). На стороні $\tau=0$ квадрата K_T кожну з них доозначуємо за неперервністю справа, а на стороні $\tau=T$ – за неперервністю зліва.

На підставі формул (3.16)–(3.19), теореми 3.1 і теореми 6.2 з [39, с. 111] (згідно з якою довільний тригонометричний ряд у просторі $\mathcal{T}'$ є збіжним), отримуємо таке твердження.

Теорема 3.2. *Нехай справджуються умови* (3.15). *Якщо* $f\in C([0,T],\mathcal{T}')$, $\varphi_j\in\mathcal{T}'$, $j\in\{1,\dots,2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3.1), (3.2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$.

Оскільки простір $\mathcal{T}$ неперервно вкладається у простір $\mathcal{T}'$, то з теореми 3.2 випливає такий наслідок.

Наслідок 3.2. *Нехай справджуються умови* (3.15). *Якщо* $f \in C([0,T],\mathcal{T})$, $\varphi_j \in \mathcal{T}$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3.1), (3.2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T})$.

Для проміжних просторів (між $C^{2n}([0,T],\mathcal{T})$ і $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'))$, зокрема для просторів $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$, $q \in \mathbb{R}$, існування розв'язку задачі (3.1), (3.2) пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників, оскільки модулі виразів $\cos(k\lambda_j T)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, які входять знаменниками у формули (3.18) і (3.19) і є відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості чисел $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Для розв'язання проблеми малих знаменників використаємо метричний підхід.

Лема 3.1. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* T *оцінки*

$$|\cos(\lambda_j kT)| \geq |k|^{-\alpha_1}, \qquad \alpha_1 > 1, \qquad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{3.20}$$

виконуються для всіх (*крім скінченної кількості*) *значень* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Доведення. Враховуючи елементарну нерівність (2.12), отримуємо

$$|\cos(\lambda_j kT)| = |\sin|\lambda_j kT - \pi/2 - m_j(k)\pi|| \geq$$

$$\geq |k||2\lambda_j T/\pi - (2m_j(k)+1)/k|, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{3.21}$$

де $m_j(k) \in \mathbb{Z}$ таке, що $|\lambda_j kT - \pi/2 - m_j(k)\pi| \leq \pi/2$.

На підставі нерівності (3.21) і теореми 2.3 отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\beta_j = 2\lambda_j T/\pi$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, справджуються оцінки $|\cos(\lambda_j kT)| \geq |k|^{-(\gamma-1)}$, $\gamma > 2$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Зі сказаного вище, враховуючи те, що при відображеннях $\beta_j \to \beta_j\pi/(2\lambda_j)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, множина з нульовою мірою Лебега переходить знову у множину нульової міри, а також те, що об'єднання скінченої кількості множин міри нуль є множиною міри нуль, випливає доведення леми. $\diamondsuit$

Теорема 3.3. *Якщо* $f \in C([0,T],H_{q-2n+1+\alpha_1}(\Omega^1))$, $\varphi_s \in H_{q+\alpha_1}(\Omega^1)$, $\varphi_{n+s} \in H_{q+\alpha_1-1}(\Omega^1)$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, $\alpha_1 > 1$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега*

в $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для фіксованих коефіцієнтів рівняння* (3.1) *існує єдиний розв'язок задачі* (3.1), (3.2) *з простору* $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$*. Цей розв'язок справджує нерівність* $\left\|u;C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))\right\| \le c_1 \left(\sum_{s=1}^{n}\left\|\varphi_s;H_{\alpha_1+q}(\Omega^1)\right\| + \right.$ $\left. + \sum_{s=n+1}^{2n}\left\|\varphi_s;H_{\alpha_1+q-1}(\Omega^1)\right\| + \left\|f;C([0,T],H_{1-2n+\alpha_1+q}(\Omega^1))\right\|\right),$
$c_1 = c_1(n,T,a_0,\dots,a_n)$.

Доведення. На підставі формул (3.16)–(3.19), леми 3.1 та означення норми у просторі $C^{2n}([0,T],\ H_q(\Omega^1))$, $q\in\mathbb{R}$, отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T справджується оцінка

$$\left\|u;C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))\right\| =$$

$$= \sum_{r=0}^{2n}\max_{0\le t\le T}\sqrt{2\pi\sum_{|k|>0}(1+k^2)^{q-r}\left|v_k^{(r)}(t)+\frac{d^r}{dt^r}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\right|^2} \le$$

$$\le \sqrt{4\pi}\sum_{r=0}^{2n}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}(1+k^2)^{q-r}\max_{0\le t\le T}\left|v_k^{(r)}(t)\right|^2}+$$

$$+\sqrt{4\pi}\sum_{r=0}^{2n}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}(1+k^2)^{q-r}\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^r}{dt^r}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\right|^2} \le$$

$$\le c_2\sqrt{4\pi}\sum_{r=0}^{2n}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}(1+k^2)^{q-r}\sum_{j=1}^{n}\left(|\varphi_{jk}|\,|k|^{r+\alpha_1}+|\varphi_{n+j,k}|\,|k|^{r+\alpha_1-1}\right)^2}+$$

$$+c_3\sqrt{4\pi}\sum_{r=0}^{2n}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}(1+k^2)^{q-r}\ |k|^{r-2n+1+\alpha_1}\ \bar{f}_k^2} \le$$

$$\le \sqrt{4\pi}\,(2n+1)\left(c_2\sqrt{2}\left[\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}(1+k^2)^{\alpha_1+q}\left(\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}|\right)^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}(1+k^2)^{\alpha_1+q-1}\left(\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|\right)^2}\right]+$$

$$\left.+c_3\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}(1+k^2)^{1+\alpha_1+q-2n}\bar{f}_k^2}\right) \le c_4\left(\sqrt{\sum_{s=1}^{n}2\pi\sum_{|k|\ge 0}|\varphi_{sk}|^2(1+k^2)^{\alpha_1+q}}+\right.$$

$$+\sqrt{\sum_{s=n+1}^{2n} 2\pi \sum_{|k|\geq 0} |\varphi_{sk}|^2 \, (1+k^2)^{\alpha_1+q-1} + \left\| f; C([0,T], H_{1+\alpha_1+q-2n}(\Omega^1))\right\|}\ \Bigg) \leq$$

$$\leq c_4 \left(\sum_{s=1}^{n} \left\|\varphi_s; H_{\alpha_1+q}(\Omega^1)\right\| + \sum_{s=n+1}^{2n} \left\|\varphi_s; H_{\alpha_1+q-1}(\Omega^1)\right\| + \right.$$

$$\left. + \quad \left\| f; C([0,T], H_{1-2n+\alpha_1+q}(\Omega^1))\right\| \right), \tag{3.22}$$

де $\bar{f}_k = \max\limits_{t\in[0,T]} |\, f_k(t)\,|\,,\ k \in \mathbb{Z}$, $c_2 = c_2(n, T, a_0, \ldots, a_n)$, $c_3 = c_3(n, T, a_0, \ldots, a_n)$, $c_4 = (2n+1)\sqrt{2}\max\,\{c_2\sqrt{2n}, c_3\}$.

З нерівності (3.22) випливає доведення теореми. $\diamondsuit$

б) В області D^p розглянемо задачу з умовами (3.2) для рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|^*=2n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|^*} u\,(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = 0, \quad A_{\hat{s}} \in \mathbb{R}, \quad A_{(n,0,\ldots,0)} = 1, \tag{3.23}$$

яке є строго гіперболічним за Петровським.

Зі строгої гіперболічності рівняння (3.23) випливає, що μ-корені рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|^*=2n} A_{\hat{s}} \left(\frac{k_1}{||k||}\right)^{s_1} \ldots \left(\frac{k_p}{||k||}\right)^{s_p} \mu^{2s_0} = 0 \tag{3.24}$$

є дісними і різними (отже, і відмінними від нуля), а також рівномірно обмеженими для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$; крім того, для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ справджуються оцінки

$$c_5 \leq \mu_q\,(k) \leq c_6,\ c_7 \leq |\mu_s^2\,(k) - \mu_q^2\,(k)\,| \leq c_8,\ s, q \in \{1, \ldots, n\}\,,\ s \neq q, \tag{3.25}$$

де $\mu_1\,(k)\,, \ldots, \mu_n\,(k)$ – додатні корені рівняння (3.24).

У випадку задачі (3.23), (3.2) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$

$$\Delta(k,T) = (-2i)^n\,||k||^{2n^2-n} \prod_{1\leq s<l\leq n} \left(\mu_s^2\,(k) - \mu_l^2\,(k)\right)^2 \prod_{j=1}^{n} (\mu_j\,(k) \cos\left(||k||\,\mu_j\,(k)\,T\right))\,,$$

а $\Delta\,(0,T) = 1!2!\ldots(2n-1)!$.

Аналогічно, як при доведенні теореми 3.1, встановлюємо, що для єдиності розв'язку задачі (3.23), (3.2) у просторі $C^{2n}\left([0,T],\mathcal{T}'\right)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\left(\forall k\in\mathbb{Z}^p\backslash\left\{(0)\right\},\ \forall m\in\mathbb{Z}_+\right)\quad \mu_j\left(k\right)||k||\neq\frac{\pi}{T}\left(m+1/2\right),\quad j\in\left\{1,\ldots,n\right\}. \tag{3.26}$$

Якщо $\varphi_j\in\mathcal{T}'$, $j\in\left\{1,\ldots,2n\right\}$, то за умов (3.26) розв'язок задачі (3.23), (3.2) з простору $C^{2n}\left([0,T],\mathcal{T}'\right)$ зображає ряд

$$u\left(t,x\right)=\sum_{i,j=1}^{2n}\left(-1\right)^{j+i}\varphi_{j0}\frac{\Delta_{ji}\left(0,T\right)}{\Delta\left(0,T\right)}t^{i-1}+$$

$$+\sum_{|k|>0}\sum_{q,j=1}^{n}\frac{S_{n-j}^{(q)}\left[\varphi_{jk}|k|\mu_q(k)\cos\left(\mu_q(k)|k|\left(T-t\right)\right)-\varphi_{n+j,k}\sin\left(\mu_q(k)|k|t\right)\right]}{\left(-1\right)^{n+j}|k|\mu_q(k)\cos\left(\mu_q(k)|k|T\right)\prod\limits_{s=1,s\neq q}^{n}\left(\mu_s^2(k)-\mu_q^2(k)\right)}e^{(ik,x)}, \tag{3.27}$$

де $S_l^{(q)}$, $l\in\left\{1,\ldots,n-1\right\}$ – сума всіх можливих добутків елементів $\mu_1^2\left(k\right)$, ..., $\mu_{q-1}^2\left(k\right)$, $\mu_{q+1}^2\left(k\right)$, ..., $\mu_n^2\left(k\right)$, узятих по l штук у кожному добутку, $S_0^{(q)}\equiv1$, $\Delta_{ij}\left(0,T\right)$ – алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\Delta\left(0,T\right)$, визначеному формулою (3.13).

Скориставшись схемою доведення леми 3.1, на підставі леми 2.2 , враховуючи елементарну нерівність (2.12) та рівномірну обмеженість $\mu_j\left(k\right)$, $j\in\left\{1,\ldots,n\right\}$, для всіх $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\left\{(0)\right\}$, отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівності

$$\left|\cos\left(\mu_q\left(k\right)||k||\,T\right)\right|\geq T\left|k\right|^{-p-\varepsilon},\quad q\in\left\{1,\ldots,n\right\},\quad 0<\varepsilon<1, \tag{3.28}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\left\{(0)\right\}$.

На підставі формули (3.27), оцінок (3.25) та (3.28) отримуємо наступне твердження.

Твердження 3. 1. *Нехай справджуються умови* (3.26). *Якщо* $\varphi_s\in H_\chi\left(\Omega^p\right)$, $\varphi_{n+s}\in H_{\chi-1}\left(\Omega^p\right)$, $\chi>q+p$, $s\in\left\{1,\ldots,n\right\}$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для фіксованих коефіцієнтів* *рівняння* (3.23) *у просторі* $C^{2n}\left([0,T], H_q\left(\Omega^p\right)\right)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (3.23), (3.2). *Цей розв'язок справджує нерівність*

$$\left\| u; C^{2n}\left([0,T], H_q\left(\Omega^p\right)\right)\right\| \le c_9 \left(\sum\nolimits_{s=1}^{n} \|\varphi_s; H_\chi\| + \sum\nolimits_{s=n+1}^{2n} \|\varphi_s; H_{\chi-1}\|\right).$$

в) Наявність у гіперболічному рівнянні молодших членів може послабити умови на вихідні дані у теоремах існування та єдиності розв'язку задачі з умовами вигляду (3.2). Покажемо це на прикладі рівняння

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(a_j\frac{\partial}{\partial x} + b_j\right)^2\right] u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x)\in D^1, \tag{3.29}$$

де $b_j \in \mathbb{R}$, $a_j > 0$, $a_j \neq a_\ell$, $j \neq \ell$, $j,\ell \in \{1,\dots,n\}$, а функції f та φ_r, $r \in \{1,\dots,2n\}$, визначаються формулами (3.4).

Розв'язок задачі (3.29), (3.2) з простору $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ шукаємо у вигляді ряду (3.5), де кожна з функцій $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}$, є розв'язком крайової задачі з умовами (3.7) для рівняння

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{d^2}{dt^2} - (b_j + ika_j)^2\right] u_k(t) = f_k(t). \tag{3.30}$$

Розв'язавши для кожного $k\in\mathbb{Z}$ задачу (3.30), (3.7), для розв'язку задачі (3.29), (3.2) з простору $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ отримуємо таку формулу:

$$u(t,x) = u_0(t) + \sum_{|k|>0}\left(\sum_{q,j=1}^{n}(-1)^{n+j}S_{n-j}^{(q)}\times\right.$$
$$\times(\varphi_{jk}\gamma_q(e^{\gamma_q(T-t)} + e^{-\gamma_q(T-t)}) + \varphi_{n+j,k}(e^{\gamma_q t} - e^{-\gamma_q t}))\times$$
$$\left.\times\left(\gamma_q(e^{\gamma_q T} + e^{-\gamma_q T})\prod_{s=1, s\neq q}^{n}(\gamma_q^2 - \gamma_s^2)^{-1}\right) + \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)d\tau\right)\exp(ikx), \tag{3.31}$$

де $u_0(t)$ – розв'язок задачі (3.30), (3.7) при $k=0$ (припускаємо, що він єдиний і існує), а

$$G_k(t,\tau) = \frac{sgn(t-\tau)}{4}\sum_{q=1}^{n}(e^{\gamma_q(t-\tau)} + (-1)^n e^{-\gamma_q(t-\tau)})\left(\gamma_q\prod_{s=1,s\neq q}^{n}(\gamma_q^2-\gamma_s^2)\right)^{-1} +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{s,r,q=1}^{n}(-1)^{r+q}S_{n-r}^{(q)}\gamma_s^{2r-3}\left(\gamma_q\prod_{\ell=1,\ell\neq q}^{n}(\gamma_q^2-\gamma_\ell^2)\prod_{h=1,h\neq s}^{n}(\gamma_s^2-\gamma_h^2)(e^{\gamma_q T}+e^{-\gamma_q T})\right)^{-1}\times$$

$$\times(\gamma_q((-1)^{n-1}e^{\gamma_s\tau}-e^{-\gamma_s\tau})(e^{\gamma_q(T-t)}+(-1)^n e^{-\gamma_q(T-t)})+$$

$$+\gamma_s((-1)^n e^{\gamma_q t}-e^{-\gamma_q t})(e^{\gamma_s(T-\tau)}+(-1)^{n-1}e^{-\gamma_s(T-\tau)})),\quad k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\qquad(3.32)$$

$\gamma_j := \gamma_j(k) = b_j + ika_j$, $j \in \{1,\ldots,n\}$; $S_\ell^{(q)}$, $\ell \in \{1,\ldots,n-1\}$ – сума всіх можливих добутків елементів $\gamma_1^2,\ldots,\gamma_{q-1}^2,\ \gamma_{q+1}^2,\ \ldots,\ \gamma_n^2$, узятих по ℓ штук у кожному добутку; $S_0^{(q)} \equiv 1$.

Теорема 3.4. *Для єдиності розв'язку задачі* (3.29), (3.2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \ \forall m\in\mathbb{Z})\quad (b_j+ika_j)T\neq i\pi(m+1/2),\quad j\in\{1,\ldots,n\}.$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 3.1.

Наслідок 3.3. *Якщо у рівнянні* (3.29) *всі числа* b_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *відмінні від нуля, то для довільних* T, a_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *задача* (3.29), (3.2) *не може мати двох різних розв'язків з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$. *Якщо ж* $b_j = 0$, $j \in \{j_1,\ldots,j_r\} \subset \{1,\ldots,n\}$, *то для єдиності розв'язку задачі* (3.29), (3.2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \ \forall m\in\mathbb{Z})\quad \frac{a_jT}{\pi}\neq\frac{2m+1}{2k},\qquad j\in\{j_1,\ldots,j_r\}.\qquad(3.33)$$

Теорема 3.5. *Нехай у рівнянні* (3.29) *всі числа* b_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *відмінні від нуля. Якщо* $f \in C([0,T],\mathcal{T}')$ $(C([0,T],\mathcal{T}))$, $\varphi_s \in \mathcal{T}'\,(\mathcal{T})$, $s \in \{1,\ldots,2n\}$, *то для довільних* T *та фіксованих коефіцієнтів рівняння* (3.29) *існує єдиний розв'язок задачі* (3.29), (3.2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ $(C^{2n}([0,T],\mathcal{T}))$. *Якщо* $f \in C([0,T],H_{1+q-2n}(\Omega^1))$, $\varphi_s \in H_q(\Omega^1)$, $\varphi_{n+s} \in H_{q-1}(\Omega^1)$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3.29), (3.2) *з простору*

$C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* f *та* φ_s, $s\in\{1,\ldots,2n\}$.

Теорема 3.6. *Нехай у рівнянні* (3.29) $b_j=0$, $j\in\{j_1,\ldots,j_r\}\subset\{1,\ldots,n\}$, *і виконуються умови* (3.33). *Якщо* $f\in C([0,T],\mathcal{T}')$ $(C([0,T],\mathcal{T}))$, $\varphi_s\in$ $\in\mathcal{T}'$ $(\mathcal{T})$, $s\in\{1,\ldots,2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3.29), (3.2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ $(C^{2n}([0,T],\mathcal{T}))$. *Якщо* $f\in C([0,T],H_{q+1+\alpha_1-2n}(\Omega^1))$, $\varphi_s\in H_{q+\alpha_1}(\Omega^1)$, $\varphi_{n+s}\in H_{q-1+\alpha_1}(\Omega^1)$, $s\in\{1,\ldots,n\}$, $\alpha_1>1$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* T *та для фіксованих коефіцієнтів рівняння* (3.29) *існує єдиний розв'язок задачі* (3.29), (3.2) *з простору* $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* f *та* φ_s, $s\in\{1,\ldots,2n\}$.

Доведення теорем 3.5 і 3.6 є подібними до доведень теорем 3.2 і 3.3.

Приклад 3.1. В області D^1 розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 u\,(t,x)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u\,(t,x)}{\partial x^2}=0, \tag{3.34}$$

$$u\,(t,x)|_{t=0}=\varphi_1\,(x)\,,\qquad \left.\frac{\partial u\,(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}=\varphi_2\,(x)\,. \tag{3.35}$$

Для єдиності розв'язку задачі (3.34), (3.35) у просторі $C^2\left([0,T]\,,H_q\left(\Omega^1\right)\right)$ необхідно і достатньо, щоб справджувалась умова

$$(\forall k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\,,\forall m\in\mathbb{Z})\qquad \frac{T}{\pi}\neq\frac{2m+1}{2k}. \tag{3.36}$$

Надалі будемо вважати, що справджується умова (3.36). Тоді формальний розв'язок задачі (3.34), (3.35) зображає ряд

$$u\,(t,x)=\varphi_{1,0}+\varphi_{2,0}t+\sum_{|k|>0}\frac{\varphi_{1k}k\cos\left(k\,(t-T)\right)+\varphi_{2k}\sin\left(kt\right)}{k\cos\left(kT\right)}\exp\left(ikx\right). \tag{3.37}$$

Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T оцінка $|\cos\left(kT\right)|\geq 2\,|k|^{-(1+\varepsilon)}$, $\varepsilon>0$, справджується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Твердження 3.2. *Якщо* $\varphi_j\in H_{\gamma_j}\left(\Omega^1\right)$, $\gamma_j=q+2-j+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $j\in\{1,2\}$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T\in(0,+\infty)$

існує єдиний розв'язок задачі (3.34), (3.35) *з простору* $C^2\left([0,T], H_q\left(\Omega^1\right)\right)$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* φ_1 *та* φ_2.

Розглянемо рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}-a_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}-a_2\right)u\left(t,x\right)=0,\quad a_1\geq 0,\, a_2\geq 0,\, a_1\neq a_2. \tag{3.38}$$

У випадку задачі (3.35), (3.38) відповідний характеристичний визначник $\Delta_1\left(k,T\right)$ визначається формулою

$$\Delta_1\left(k,T\right)=\left(-ik+a_2\right)\exp\left(-ikT+a_2T\right)-\left(ik+a_1\right)\exp\left(ikT+a_1T\right). \tag{3.39}$$

Зауважимо, що $\Delta_1\left(0,T\right)=a_2\exp\left(a_2T\right)-a_1\exp\left(a_1T\right)\neq 0$.

Лема 3.2. *Якщо* $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, *то для довільного* $T\in(0,+\infty)$ *справджується оцінка* $\left|\Delta_1\left(k,T\right)\right|\geq c_{10}\left|k\right|$, *де* $c_{10}=\left|\exp\left(a_2T\right)-\exp\left(a_1T\right)\right|$.

Доведення. На підставі формули (3.39) отримуємо

$$\begin{gathered}\left|\Delta_1\left(k,T\right)\right|\geq\left|\left|-ik+a_2\right|\left|\exp\left(-ikT+a_2T\right)\right|-\left|ik+a_1\right|\left|\exp\left(ikT+a_1T\right)\right|\right|=\\=\left|\sqrt{k^2+a_2^2}\exp\left(a_2T\right)-\sqrt{k^2+a_1^2}\exp\left(a_1T\right)\right|\geq\\\geq\sqrt{k^2+a^2}\left|\exp\left(a_2T\right)-\exp\left(a_1T\right)\right|=c_{10}\sqrt{k^2+a^2}\geq c_{10}\left|k\right|,\end{gathered}$$

де $c_{10}=\left|\exp\left(a_2T\right)-\exp\left(a_1T\right)\right|$, $a=\max\{a_1,a_2\}$, для довільних $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $T\in(0,+\infty)$. $\diamondsuit$

Таким чином, задача (3.35), (3.38) не може мати двох різних розв'язків; для довільного $T\in(0,+\infty)$ формальний розв'язок задачі (3.35), (3.38) у класі функцій, 2π-періодичних за змінною x, зображає ряд

$$\begin{gathered}u\left(t,x\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Delta_1^{-1}\left(k,T\right)\exp\left(ikx\right)\times\\\times\left\{\varphi_{1k}\left[\left(-ik+a_2\right)\exp\left(ik\left(t-T\right)+a_1t+a_2T\right)\right.\right.-\\-\left(ik+a_1\right)\exp\left(ik\left(T-t\right)+a_1T+a_2t\right)\left.\right]-\\\left.-\varphi_{2k}\left[\exp\left(t\left(ik-a_1\right)\right)-\exp\left(-t\left(ik+a_2\right)\right)\right]\right\}.\end{gathered} \tag{3.40}$$

Твердження 3.3. *Якщо* $\varphi_j\in H_{\gamma_j}\left(\Omega^1\right)$, $\gamma_j=q+3-j$, $j\in\{1,2\}$, *то для довільного* $T\in(0,+\infty)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (3.35), (3.38) *з простору* $C^2\left([0,T], H_q\left(\Omega^1\right)\right)$. *Цей розв'язок неперервно залежить від* φ_1 *та* φ_2.

3.1.2. Випадок системи рівнянь. В області D^1 розглянемо задачу

$$L[u] := \sum_{s=0}^{n} A_s \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2(n-s)} \partial x^{2s}} = f(t,x), \tag{3.41}$$

$$U_r[u] := \left.\frac{\partial^{2r-2} u(t,x)}{\partial t^{2r-2}}\right|_{t=0} = 0, \;\; U_{n+r}[u] := \left.\frac{\partial^{2r-1} u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = 0, \; r \in \{1,\ldots,n\}, \tag{3.42}$$

де $A_s = [a^s_{pq}]^m_{p,q=1}$ – матриці з дійсними сталими елементами, A_0 – одинична матриця; $u(t,x) = col\left(u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x)\right)$, $f(t,x) = col(f_1(t,x),\ldots,f_m(t,x))$.

Припустимо, що система рівнянь (3.41) є гіперболічною за Петровським у вузькому сенсі, тобто всі корені рівняння

$$\delta(\lambda) := \det\left[\sum_{s=0}^{n} a^s_{pj} \lambda^{2n-2s}\right]^m_{p,j=1} = 0 \tag{3.43}$$

є дійсними і різними, отже, відмінними від нуля. Вигляд області D^1 накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції u і f.

Припустимо, що $f(t,x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f_k(t)\exp(ikx)$, де $f_k(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t,x)\exp(-ikx)dx$, $f_k = col(f_{k1},\ldots,f_{km})$.

Нехай $H_q\left(\Omega^1\right)$, $q \in \mathbb{R}$ – простір 2π-періодичних комплекснозначних функцій $v\left(x\right) = \sum\limits_{|k|\in\mathbb{Z}} v_k \exp\left(ikx\right)$ з нормою $\left\|v; H_q\left(\Omega^1\right)\right\|^2 := 2\pi \sum\limits_{|k|\in\mathbb{Z}} \left(1+k^2\right)^q |v_k|^2$; $\overline{H}_q\left(\Omega^1\right)$, $q \in \mathbb{R}$ – простір вектор-функцій $v\left(t,x\right) = \left(v_1\left(t,x\right),\ldots,v_m\left(t,x\right)\right)$ таких що $v_j \in H_q\left(\Omega^1\right)$, $j \in \{1,\ldots,m\}$; $\left\|v; \overline{H}_q\left(\Omega^1\right)\right\|^2 := \sum_{j=1}^m \left\|v_j; H_q\left(\Omega^1\right)\right\|^2$.

Означення 3.2. *Розв'язком задачі* (3.41), (3.42) *з простору* $\bar{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega^1))$, $q \in \mathbb{R}$, *називатимемо вектор-функцію* u *з цього* *простору, для якої справджуються такі умови:*

$$\left\| L[u]-f;\bar{C}([0,T],H_{q-2n}(\Omega^1))\right\|=0,$$

$$\left\| U_r[u];\bar{H}_{q-2r+2}(\Omega^1)\right\|=0,\quad \left\| U_{n+r}[u];\bar{H}_{q-2r+1}(\Omega^1)\right\|=0,\ \ r\in\{1,\dots,n\}.$$

Розв'язок задачі (3.41), (3.42) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k(t)\exp{(ikx)}, \tag{3.44}$$

де $u_k = col\,(u_{k1},\dots,u_{km})$. Кожна вектор-функція $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}$, із (3.44) є розв'язком, відповідно, такої крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{s=0}^{n}A_s(ik)^{2s}\frac{d^{2(n-s)}u_k(t)}{dt^{2(n-s)}}=f_k(t), \tag{3.45}$$

$$u_k^{(2r-2)}(0)=0,\quad u_k^{(2r-1)}(T)=0,\quad r\in\{1,\dots,n\}. \tag{3.46}$$

Якщо $k=0$, то система (3.45) розпадається на m незалежних рівнянь. Легко показати, що у цьому випадку задача (3.45), (3.46) завжди має єдиний розв'язок $u_0(t)$, компоненти якого зображуються формулами

$$u_{0\ell}(t)=\int_0^T G_0(t,\tau)f_{0\ell}(\tau)\,d\tau,\qquad \ell\in\{1,\dots,m\}, \tag{3.47}$$

в яких $G_0(t,\tau)$ – функція Ґріна крайової задачі

$$\frac{d^{2n}y(t)}{dt^{2n}}=0,\quad y^{2r-2}(0)=0,\quad y^{2r-1}(T)=0,\quad r\in\{1,\dots,n\}. \tag{3.48}$$

Характеристичний визначник Δ задачі (3.48) має вигляд (3.13) і обчислюється за формулою $\Delta=1!2!\dots(2n-1)!$.

Нехай N – номер такого рядка у визначнику $\delta(\lambda)$ (див. (3.43)), не всі алгебричні доповнення $\varphi_q(\lambda):=\delta_{Nq}(\lambda)$, $q\in\{1,\dots,m\}$, елементів якого дорівнюють нулеві; $\varphi(\lambda)=col\,(\varphi_1(\lambda),\dots,\varphi_m(\lambda))$.

Якщо $k\neq 0$, то однорідна система рівнянь

$$\sum_{s=0}^{n}A_s(ik)^{2s}\frac{d^{2(n-s)}u_k(t)}{dt^{2(n-s)}}=0, \tag{3.49}$$

що відповідає системі (3.45), має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$\{u_{kj}(t) = \varphi(\lambda_j)\exp(\gamma_j t),\ u_{k,mn+j}(t) = \varphi(\lambda_j)\exp(-\gamma_j t),\ j \in \{1,\dots,mn\}\},$$

де $\lambda_1,\dots,\lambda_{mn}$ – додатні корені рівняння (3.43), $\gamma_j := \gamma_j(k) = ik\lambda_j$, $j \in \{1,\dots,mn\}$.

Зауважимо, що матриці

$$Y_{kj}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1+m(j-1)}\exp(\gamma_{1+m(j-1)}t) & \dots & \varphi_{1,jm}\exp(\gamma_{jm}t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m,1+m(j-1)}\exp(\gamma_{1+m(j-1)}t) & \dots & \varphi_{m,jm}\exp(\gamma_{jm}t) \end{bmatrix},$$

$$Y_{k,n+j}(t) = Y_{kj}(-t), \qquad j \in \{1,\dots,n\}, \tag{3.50}$$

де $\varphi_{qj} \equiv \varphi_q(\lambda_j)$, $q \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,mn\}$, утворюють систему $2n$ лінійно незалежних розв'язків для однорідного матричного рівняння

$$\sum_{s=0}^{n} A_s(ik)^{2s}Y_k^{(2n-2s)}(t) = 0. \tag{3.51}$$

Характеристичний визначник $\Delta(k) := \det[U_p(Y_{kj})]_{p,j=1}^{2n}$ задачі (3.46), (3.49) при $k \neq 0$ має вигляд

$$\Delta(k) = \det\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Upsilon}(\gamma) & \boldsymbol{\Upsilon}(\gamma) \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}^{(T)}(\gamma) & \boldsymbol{\Upsilon}^{(-T)}(\gamma) \end{array}\right], \tag{3.52}$$

де

$$\boldsymbol{\Upsilon}(\gamma) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} & \dots & \varphi_{1,nm} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m,1} & \dots & \varphi_{m,nm} \\ \varphi_{1,1}\gamma_1^2 & \dots & \varphi_{1,nm}\gamma_{nm}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m,1}\gamma_1^2 & \dots & \varphi_{m,nm}\gamma_{nm}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{1,1}\gamma_1^{2n-2} & \dots & \varphi_{1,nm}\gamma_{nm}^{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m,1}\gamma_1^{2n-2} & \dots & \varphi_{m,nm}\gamma_{nm}^{2n-2} \end{bmatrix}, \tag{3.53}$$

$$
\boldsymbol{\Upsilon}^{(\pm T)}(\gamma) = \begin{bmatrix}
\pm\,\varphi_{1,1}\gamma_1 e^{\pm\gamma_1 T} & \dots & \pm\,\varphi_{1,nm}\gamma_{nm} e^{\pm\,\gamma_{nm} T} \\
\dots & \dots & \dots \\
\pm\,\varphi_{m,1}\gamma_1 e^{\pm\,\gamma_1 T} & \dots & \pm\,\varphi_{m,nm}\gamma_{nm} e^{\pm\,\gamma_{nm} T} \\
\pm\,\varphi_{1,1}\gamma_1^3 e^{\pm\,\gamma_1 T} & \dots & \pm\,\varphi_{1,nm}\gamma_{nm}^3 e^{\pm\,\gamma_{nm} T} \\
\dots & \dots & \dots \\
\pm\,\varphi_{m,1}\gamma_1^3 e^{\pm\,\gamma_1 T} & \dots & \pm\,\varphi_{m,nm}\gamma_{nm}^3 e^{\pm\,\gamma_{nm} T} \\
\dots & \dots & \dots \\
\pm\,\varphi_{1,1}\gamma_1^{2n-1} e^{\pm\,\gamma_1 T} & \dots & \pm\,\varphi_{1,nm}\gamma_{nm}^{2n-1} e^{\pm\,\gamma_{nm} T} \\
\dots & \dots & \dots \\
\pm\,\varphi_{m,1}\gamma_1^{2n-1} e^{\pm\,\gamma_1 T} & \dots & \pm\,\varphi_{m,nm}\gamma_{nm}^{2n-1} e^{\pm\,\gamma_{nm} T}
\end{bmatrix}. \qquad (3.54)
$$

Обчислюючи визначник (3.52), отримуємо

$$
\Delta(k) = (-\,2)^{nm}(ik)^{mn(2n-1)}\boldsymbol{\Upsilon}^2(\lambda)\prod_{\ell=1}^{nm}[\lambda_\ell\cos{(k\lambda_\ell T)}], \quad k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}. \qquad (3.55)
$$

Визначник матриці $\boldsymbol{\Upsilon}(\lambda)$ (3.53) є відмінним від нуля, оскільки він входить співмножником у вираз для вронскіана системи матриць-функцій (3.50).

Відомо ([73, с. 108]), що задача (3.46), (3.49) має нетривіальний розв'язок тоді і лише тоді, коли $\Delta(k) = 0$. На підставі цього та теореми про єдиність розвинення періодичної функції у ряд Фур'є отримуємо наступне твердження.

Теорема 3.7. *Для єдиності розв'язку задачі* (3.41), (3.42) *у просторі* $\bar{C}^{2n}([0,T], H_{2n}(\Omega^1))$ *необхідно і достатньо, щоб справджувались умови*

$$
(\forall k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \forall m\in\mathbb{Z}) \quad \lambda_j T k \neq (m+1/2)\pi, \quad j\in\{1,\dots,nm\}. \qquad (3.56)
$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 2.1 із [80, с. 97].

Надалі вважатимемо, що справджуються умови (3.56). Тоді для кожного $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ існує єдина матриця Ґріна $G_k(t,\tau) = [p_{k,r,q}(t,\tau)]_{r,q=1}^m$ задачі (3.46), (3.49), за допомогою якої розв'язок задачі (3.45), (3.46) зображає формула [73, гл. 3, §7] $u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\,d\tau$. У квадраті $K_T = \{(t,\tau) : 0 \le t,\ \tau \le T\}$

(крім сторін $\tau = 0$, $\tau = T$) матрицю $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, визначає формула

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) - \frac{1}{\Delta(k)} \sum_{j,\nu=1}^{2n} Y_{kj}(t) V_{kj\nu} U_\nu(g_k),$$

де $V_{kj\nu}$ – матриця, транспонована до матриці m-го порядку, складеної з алгебричних доповнень елементів матриці $U_\nu(Y_{kj})$ у характеристичному визначнику $\Delta(k)$ задачі (3.46), (3.49);

$$g_k(t,\tau) = \frac{sgn\,(t-\tau)}{2W_k(\tau)} \sum_{j=1}^{2n} Y_{kj}(t) W_{kj}(\tau),$$

$W_{kj}(t)$ – матриця, транспонована до матриці m-го порядку, складеної з алгебричних доповнень елементів матриці $Y_{kj}^{(2n-1)}(t)$ у визначнику $W_k(t)$:

$$W_k(t) = \begin{bmatrix} Y_{k1}^{(2n-1)}(t) & \dots & Y_{k2n}^{(2n-1)}(t) \\ Y_{k1}^{(2n-2)}(t) & \dots & Y_{k2n}^{(2n-2)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{k1}(t) & \dots & Y_{k2n}(t) \end{bmatrix}.$$

Здійснивши необхідні обчислення, отримуємо такі формули для визначення елементів матриці $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$:

$$p_{k,r,q}(t,\tau) = \frac{sgn\,(t-\tau)}{4\boldsymbol{\Upsilon}} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \varphi_{r,\ell+m(\mu-1)} \Upsilon_{q,\ell+m(\mu-1)} (e^{ik\lambda_{\ell+m(\mu-1)}(t-\tau)} -$$

$$-(-1)^{nm} e^{-ik\lambda_{\ell+m(\mu-1)}(t-\tau)}) + \frac{sgn(t-\tau)}{8\boldsymbol{\Upsilon}^2} \sum_{j,\nu,\mu=1}^{n} \sum_{\ell,d=1}^{m} \frac{i\varphi_{r,\ell+m(j-1)} \varphi_{r,d+m(\mu-1)} \lambda_{d+m(\mu-1)}^{2\nu-3}}{k^{2n-1} \lambda_{\ell+m(j-1)} \cos\,(k\lambda_{\ell+m(j-1)}T)} \times$$

$$\times \boldsymbol{\Upsilon}_{q+m(n-1),d+m(\mu-1)} \boldsymbol{\Upsilon}_{q+m(\nu-1),\ell+m(j-1)} \times$$

$$\times \{\lambda_{\ell+m(j-1)} (e^{ik\lambda_{d+m(\mu-1)}\tau} + (-1)^{nm-1} e^{-ik\lambda_{d+m(\mu-1)}\tau}) \times$$

$$\times ((-1)^{nm-1} e^{ik\lambda_{\ell+m(j-1)}(T-t)} + e^{-ik\lambda_{\ell+m(j-1)}(T-t)}) +$$

$$+\lambda_{d+m(\mu-1)} (e^{ik\lambda_{d+m(\mu-1)}(T-\tau)} + (-1)^{nm} e^{-ik\lambda_{d+m(\mu-1)}(T-\tau)}) \times$$

$$\times (e^{ik\lambda_{\ell+m(j-1)}t} + (-1)^{nm} e^{-ik\lambda_{\ell+m(j-1)}t})\}, \qquad (3.57)$$

де r, $q \in \{1,\dots,m\}$, $\boldsymbol{\Upsilon}_{\ell j}$ – алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині ℓ-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\boldsymbol{\Upsilon}(\lambda)$ (3.53).

На стороні $\tau = 0$ квадрата K_T кожну матрицю $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, доозначаємо за неперервністю справа, а на стороні $\tau = T$ – за неперервністю зліва.

Таким чином, формальний розв'язок задачі (3.41), (3.42) визначає формула

$$u(t,x) = u_0(t) + \sum_{|k|>0} \exp(ikx) \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau, \tag{3.58}$$

де компоненти вектор-функції $u_0(t)$ зображають формули (3.47), а елементи матриці Ґріна $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ – формули (3.57).

Існування розв'язку задачі (3.41), (3.42) пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників, оскільки модулі виразів $\cos\,(k\lambda_{\ell+m(j-1)}T)$, $\ell \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, які входять множниками у знаменники доданків у формулах (3.57), будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості значень $k \in \mathbb{Z}$.

Лема 3.3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T оцінки*

$$|\cos\,(k\lambda_j T)| \geq (1+|k|)^{-\alpha_2}, \qquad \alpha_2 > 1, \qquad j \in \{1,\dots,mn\}, \tag{3.59}$$

справджуються для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$ та фіксованих коренів $\lambda_1,\dots,\lambda_{mn}$ рівняння (3.43).

Доведення проводимо аналогічно до доведення леми 3.1.

Теорема 3.8. *Нехай справджуються умови* (3.56)*. Якщо $f \in \overline{C}([0,T], H_{q+\chi}(\Omega^1))$, $q \geq 2n$, $\chi > 2-2n$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T і для фіксованих матриць A_s, $s \in \{0,\dots,n\}$, існує єдиний розв'язок задачі* (3.41)*,* (3.42) *з простору $\overline{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega^1))$. Цей розв'язок справджує нерівність $\left\| u; \overline{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega^1)) \right\|^2 \leq c_1 \left\| f; \overline{C}([0,T], H_{q+\chi}(\Omega^1)) \right\|^2$, де $c_{11} = c_{11}(n,m,T,a^s_{pr}, 0 \leq s \leq n, 1 \leq p,r \leq m)$.*

Доведення. З формул (3.57) і леми 3.3 отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$ справджуються такі оцінки:

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^s}{dt^s}\int_0^T p_{k,r,q}(t,\tau)f_{k,q}(\tau)\,d\tau\right| \le c_{12}(1+|k|)^{s-2n+1+\alpha}\max_{0\le t\le T}|f_{k,q}(\tau)|,$$

$$k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\quad r,q\in\{1,\dots,m\},\quad \alpha>1. \tag{3.60}$$

На підставі формули (3.58), оцінок (3.60) і означення норми у просторі $\bar{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))$, $q\in\mathbb{R}$, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T отримуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (3.41), (3.42):

$$\left\|u;\bar{C}^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))\right\|^2=\sum_{j=1}^m\left\|u_j;C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^1))\right\|^2=$$

$$=\sum_{j=1}^m\left(\sum_{r=0}^{2n}\max_{0\le t\le T}\left\|\partial^r u_j/\partial t^r;H_{q-r}(\Omega^1)\right\|\right)^2\le$$

$$\le(2n+1)\sum_{j=1}^m\sum_{r=0}^{2n}\max_{0\le t\le T}\left\|\partial^r u_j/\partial t^r;H_{q-r}(\Omega^1)\right\|^2\le$$

$$\le(2n+1)2\pi\sum_{j=1}^m\sum_{r=0}^{2n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\max_{0\le t\le T}\left|u_{kj}^{(r)}(t)\right|^2(1+k^2)^{q-r}\le$$

$$\le(2n+1)2\pi c_{13}\sum_{j=1}^m\sum_{r=0}^{2n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^{r-2n+1+\alpha_2}\left(\sum_{q=1}^m\max_{0\le t\le T}|f_{kq}(t)|\right)^2(1+k^2)^{q-r}\le$$

$$\le 2\pi c_{13}(2n+1)^2m^2\sum_{q=1}^m\sum_{k=-\infty}^{\infty}\max_{0\le t\le T}|f_{kq}(t)|^2(1+k^2)^{q-2n+1+\alpha_2}=$$

$$=c_{13}(2n+1)^2m^2\sum_{q=1}^m\left\|f_q;C([0,T],H_{q-2n+1+\alpha_2}(\Omega^1))\right\|^2=$$

$$=c_{13}(2n+1)^2m^2\left\|f;\bar{C}([0,T],H_{q-2n+1+\alpha_2}(\Omega^1))\right\|^2,\quad \alpha_2>1.$$

З отриманої оцінки випливає доведення теореми. $\Diamond$

3.2. Задачі з даними на всій межі області для рівнянь зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами

3.2.1. Лінійні рівняння другого порядку. В області B^p розглядаємо задачу

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - Lu(t,x) = f(t,x), \tag{3.61}$$

$$\left(a_1 u(t,x) + a_2 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \left(b_1 u(t,x) + b_2 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)\bigg|_{t=T} = \varphi_2(x), \tag{3.62}$$

$$u\,|_{\Sigma} = 0, \tag{3.63}$$

де $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$; L — еліптичний в області G, $\overline{G} \in A^{2,\nu}$, диференціальний вираз, заданий формулою (2.2), в якій $p_{ij}(x) \in C^{1,\nu}$, $i, j = 1, ..., p$, $q(x) \in C^{0,\nu}$, $0 < \nu < 1$.

Будемо шукати класичні розв'язки задачі (3.61)–(3.63), тобто розв'язки з простору $C^2\left(\overline{B}^p\right)$.

Розв'язок задачі (3.61)–(3.63) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{3.64}$$

де $X_k(x)$ — власні функції задачі (2.3).

Нехай

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{jk} X_k(x), \ j = 1, 2, \quad f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x), \tag{3.65}$$

де

$$\varphi_{jk} = \int_G \varphi_j(x) X_k(x)\, dx, \ j = 1, 2, \quad f_k(t) = \int_G f(t,x) X_k(x)\, dx. \tag{3.66}$$

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, є розв'язком такої задачі:

$$u_k''(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k(t), \tag{3.67}$$

$$a_1 u_k(0) + a_2 u_k'(0) = \varphi_{1k}, \quad b_1 u_k(T) + b_2 u_k'(T) = \varphi_{2k}, \tag{3.68}$$

де λ_k, $k \in \mathbb{N}$, — власні значення задачі (2.3), множину яких позначаємо через Λ.

Характеристичний визначник $\Delta(\lambda_k) := \Delta(T, \lambda_k)$ задачі (3.67), (3.68) має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2\sqrt{\lambda_k} \\ \left(b_1\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T\right) - b_2\sqrt{\lambda_k}\sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right)\right) & \left(b_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right) + b_2\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T\right)\right) \end{vmatrix} \tag{3.69}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 \lambda_k)\sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T\right).$$

Теорема 3.9. *Для єдиності розв'язку задачі* (3.61)–(3.63) *у просторі* $C^2\left(\overline{B}^p\right)$ *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda) \qquad \Delta(\lambda_k) \neq 0. \tag{3.70}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5.3 в [80, гл.2].

Наслідок 3.4. *Якщо* $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, *то для єдиності розв'язку задачі* (3.61)–(3.63) *у просторі* $C^2\left(\overline{B}^p\right)$ *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda, \forall n \in \mathbb{Z}_+) \ \sqrt{\lambda_k}T - \varphi_k \neq \pi/2 + n\pi, \tag{3.71}$$

де

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}(a_1 b_1 + a_2 b_2 \lambda_k)(a_1 b_2 - b_1 a_2)^{-1}\lambda_k^{-1/2}. \tag{3.72}$$

Доведення. За умови даного наслідку визначник (3.69) можна записати у вигляді

$$\Delta(\lambda_k) = \sqrt{\left(a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2\right)\lambda_k + a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \lambda_k^2}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T - \varphi_k\right). \tag{3.73}$$

Очевидно, що

$$\sqrt{\left(a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2\right)\lambda_k + a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \lambda_k^2} \neq 0$$

для довільного $\lambda_k \in \Lambda$. Із теореми 3.9 та формули (3.73) випливає доведення наслідку. $\diamondsuit$

Наслідок 3.5. *Якщо* $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, *то для єдиності розв'язку задачі* (3.61)–(3.63) *у просторі* $C^2\left(\overline{B}^p\right)$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda,\ \forall n \in \mathbb{N}) \qquad \sqrt{\lambda_k}T - n\pi \neq 0. \tag{3.74}$$

Доведення. Розглянемо кожен з випадків, коли виконуються умови даного наслідку:

1. якщо $a_1 = b_1 = 0$, то $\Delta\left(\lambda_k\right) = a_2 b_2 \lambda_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right)$, причому $a_2 b_2 \neq 0$;
2. якщо $a_2 = b_2 = 0$, то $\Delta\left(\lambda_k\right) = a_1 b_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right)$, причому $a_1 b_1 \neq 0$;
3. якщо $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = q$, $0 < |q| < \infty$, то $a_2 b_2 \neq 0$ і

$$\Delta\left(\lambda_k\right) = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 \lambda_k\right) \sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right) = a_2 b_2 \left(q^2 + \lambda_k\right) \sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right). \tag{3.75}$$

З вигляду $\Delta\left(\lambda_k\right)$ у випадках 1–3 та теореми 3.9 випливає доведення наслідку. $\diamondsuit$

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (3.61)–(3.63). Формальний розв'язок задачі зображає ряд

$$u\left(t,x\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\Delta\left(\lambda_k\right)}\left(\varphi_{1k}\left(b_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\left(T-t\right)\right) + b_2\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\left(T-t\right)\right)\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \varphi_{2k}\left(a_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}t\right) - a_2\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)\right)\right) + \int_0^T G_k\left(t,\tau\right) f_k\left(\tau\right) d\tau\right) X_k\left(x\right), \tag{3.76}$$

де кожна з функцій $G_k\left(t,\tau\right)$, $k \in \mathbb{N}$, у квадраті $K_T = \{0 \le t, \tau \le T\}$ (крім сторін $\tau = 0$, $\tau = T$) зображається формулою

$$G_k\left(t,\tau\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}\Delta\left(\lambda_k\right)}\left[\sqrt{\lambda_k}b_2\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\left(\tau - T\right)\right) - b_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\left(\tau - T\right)\right)\right] \times \\ \left[\sqrt{\lambda_k}a_2\cos\left(\sqrt{\lambda_k}t\right) - a_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)\right], \qquad 0 \le t < \tau < T, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}\Delta\left(\lambda_k\right)}\left[\sqrt{\lambda_k}b_2\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\left(t - T\right)\right) - b_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\left(t - T\right)\right)\right] \\ \left[\sqrt{\lambda_k}a_2\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\tau\right) - a_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\tau\right)\right], \qquad 0 < \tau < t \le T. \end{cases} \tag{3.77}$$

На стороні $\tau = 0$ квадрата K_T кожну з функцій $G_k(t, \tau)$, $k \in \mathbb{N}$, довизначаємо за неперервністю справа, а на стороні $\tau = T$ — за неперервністю зліва.

Оскільки величина $|\Delta(\lambda_k)|$, будучи відмінною від нуля, може приймати якзавгодно малі значення для нескінченної кількості значень $\lambda_k \in \Lambda$, то питання про існування розв'язку задачі (3.61)–(3.63) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Теорема 3.10. *Нехай справджується умова* (3.70) *і нехай існують константи* $c_{14} > 0$ *і* $\gamma \in \mathbb{R}_+$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) значень* $\lambda_k \in \Lambda$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\lambda_k)| \geq c_{14} k^{-\gamma}. \tag{3.78}$$

Якщо $\varphi_j \in C^{2r}\left(\overline{G}\right)$, $L^q \varphi_j|_\Gamma = 0$, $j = 1, 2$, $f \in C^{(0,2r)}\left(\overline{B^p}\right)$, $L^q f|_\Gamma = 0$, $t \in [0, T]$, *де* $q = 0, 1, \ldots, r-1$, $r = [(5 + p(1,5 + \gamma))/2] + 1$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3.61)–(3.63) *з простору* $C^2\left(\overline{B^p}\right)$. *Цей розв'язок справджує нерівність* $\|u\|_{C^2\left(\overline{B^p}\right)} \leq c_{15}\left(||\varphi_1||_{C^{2r}\left(\overline{G}\right)} + ||\varphi_2||_{C^{2r}\left(\overline{G}\right)} + ||f||_{C^{(0,2r)}\left(\overline{B^p}\right)}\right)$.

Доведення. На підставі формул (3.76), (3.77) та оцінок (2.5) отримуємо

$$\begin{gathered}\|u(t,x)\|_{C^2\left(\overline{B^p}\right)} \leq \tilde{c}_2 c_{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}|}{\Delta(\lambda_k)} \lambda_k^{3/2} \lambda_k^{p/4+1} + \\ + \tilde{c}_2 c_{17} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{3/2}}{\Delta(\lambda_k)} \max_{0 \leq t \leq T} |f_k(t)| \lambda_k^{p/4+1}.\end{gathered} \tag{3.79}$$

Оскільки диференціальний вираз L є лінійним і самоспряженим, то за умов теореми на функції φ_j, $j = 1, 2$, на підставі другої формули Ґріна для оператора L [36, 44, 72] отримуємо

$$\varphi_{jk} = \int\limits_G \varphi_j X_k dx = -\frac{1}{\lambda_k} \int\limits_G \varphi_j L X_k dx = -\frac{1}{\lambda_k} \int\limits_G L\varphi_j X_k dx = \frac{1}{\lambda_k^2} \int\limits_G L\varphi_j L X_k dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k^2} \int\limits_G L^2 \varphi_j X_k dx = \ldots = (-1)^r \frac{1}{\lambda_k^r} \int\limits_G L^r \varphi_j X_k dx. \tag{3.80}$$

На основі формул (2.5), (3.66), (3.80) та нерівності Коші–Буняковського

[58] отримуємо таку оцінку:

$$|\varphi_{jk}| \leq \frac{1}{\lambda_k^h} \sqrt{\int_G X_k^2 \, dx} \sqrt{\int_G \left(L^h \varphi_j\right)^2 dx} \leq c_{18} \lambda_k^{-r} \left\| \varphi_j \right\|_{C^{2r}\left(\overline{G}\right)}, \quad j = 1, 2. \quad (3.81)$$

Аналогічно для функції $f\left(t, x\right)$ отримуємо таку оцінку:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left| f_k\left(t\right) \right| \leq c_{19} \lambda_k^{-r} \left\| f \right\|_{C^{(0,2r)}\left(\overline{B^p}\right)}. \quad (3.82)$$

На підставі оцінок (2.4), (3.78), (3.79), (3.81) та (3.82) отримуємо

$$\|u\|_{C^2\left(\overline{B^p}\right)} \leq c_{20} \left(||\varphi_1||_{C^{2r}\left(\overline{G}\right)} + ||\varphi_2||_{C^{2r}\left(\overline{G}\right)} + ||f||_{C^{(0,2r)}\left(\overline{B^p}\right)} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^g}, \quad (3.83)$$

де $c_{20} = \tilde{c}_2 \max\left\{c_{16}c_{18}, c_{17}c_{19}\right\}$, $g = \left(2r - 5\right)/p - \gamma - 1/2$. Оскільки за умов теореми $1 < g < 2$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^g}$ є збіжним; позначимо його суму через S. Тоді з (3.83) отримуємо

$$\|u\|_{C^2\left(\overline{B^p}\right)} \leq S c_{20} \left(||\varphi_1||_{C^{2r}\left(\overline{G}\right)} + ||\varphi_2||_{C^{2r}\left(\overline{G}\right)} + ||f||_{C^{(0,2r)}\left(\overline{B^p}\right)} \right),$$

звідки випливає доведення теореми. $\diamondsuit$

Вияснимо, наскільки багата множина чисел T, для яких справедлива нерівність (3.78).

Теорема 3.11. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівність* (3.78) *виконується для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ при:*

1. $\gamma > 1$, якщо $a_2 = b_2 = 0$;

2. $\gamma > 1 - 2/p$, якщо $a_1 = b_1 = 0$ або $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = q$, $0 < |q| < \infty$.

Доведення. Доведення проведемо для випадку, коли $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = q$, $0 < |q| < \infty$. У цьому випадку з формули (3.75) одержуємо

$$\left|\Delta\left(\lambda_k\right)\right| = \left|a_2 b_2\right| \left|q^2 + \lambda_k\right| \left|\sin\left(\sqrt{\lambda_k} T\right)\right|. \quad (3.84)$$

Зауважимо, що для всіх значень $\lambda_k \in \Lambda$ справджується нерівність

$$q^2 + \lambda_k > \lambda_k. \quad (3.85)$$

Врахувавши нерівність (2.12), отримуємо оцінку

$$\left|\sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right)\right| \geq \left|\sin\left|\sqrt{\lambda_k}T - m_k\pi\right|\right| \geq \frac{2}{\pi}\left|\sqrt{\lambda_k}T - m_k\pi\right|, \tag{3.86}$$

де $m_k \in \mathbb{Z}$ таке, що $\left|\sqrt{\lambda_k}T - m_k\pi\right| \leq \pi/2$. Тоді з оцінки (3.86) і леми 2.2 випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівність

$$\left|\sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right)\right| \geq 2T\sqrt[p]{k}\left|\frac{\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt[p]{k}\pi} - \frac{m_k}{\sqrt[p]{k}T}\right| \geq 2Tk^{1/p}\frac{1}{k^{1+1/p+\varepsilon}} = 2Tk^{-1-\varepsilon} \tag{3.87}$$

справджується для всіх (крім скінченної кількості) значень $\lambda_k \in \Lambda$. Таким чином, з оцінок (2.4), (3.85), (3.87) та рівності (3.84) випливає, що для всіх (крім скінченної кількості) значень $\lambda_k \in \Lambda$ справджується нерівність

$$|\Delta(\lambda_k)| \geq c_{14}k^{-(1-2/p+\varepsilon)},$$

де $c_{14} = 2T\tilde{c}_0 > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, що й доводить теорему для випадку, який розглядається. Для інших випадків доведення проводиться аналогічно. Теорему доведено.$\diamondsuit$

Теорема 3.12. *Якщо $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівність* (3.78) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $\lambda_k \in \Lambda$ при:*

1. *$\gamma > 1 - 2/p$, якщо $a_2b_2 \neq 0$;*
2. *$\gamma > 1 - 1/p$, якщо $a_2b_2 = 0$.*

Доведення. Якщо $a_2b_2 \neq 0$, то з формули (3.73) випливає, що

$$|\Delta(\lambda_k)| \geq \lambda_k|a_2b_2|\left|\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T - \varphi_k\right)\right|, \tag{3.88}$$

де φ_k зображується формулою (3.72).

Розглянемо проміжок $T \in (0, T_0]$, де $0 < T_0 < +\infty$, і покажемо, що міра Лебега тих чисел $T \in (0, T_0]$, для яких нерівність

$$\left|\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T - \varphi_k\right)\right| < k^{-\gamma_1}, \quad \gamma_1 > 1, \tag{3.89}$$

справджується для нескінченної множини значень $\lambda_k \in \Lambda$, дорівнює нулю.

Запровадимо такі позначення: $E(T_0)$ – множина тих $T \in (0, T_0]$, для яких нерівність (3.89) є правильною для нескінченної множини значень $\lambda_k \in \Lambda$; $E(T_0, \lambda_{\overline{k}})$ – множина тих $T \in (0, T_0]$, для яких нерівність (3.89) справедлива при фіксованому $\lambda_k = \lambda_{\overline{k}} \in \Lambda$.

Розв'язком нерівності (3.89) відносно T при $\lambda_k = \lambda_{\overline{k}}$ є об'єднання інтервалів

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\overline{k}}}}\left(\arccos\frac{1}{\overline{k}^{\gamma_1}} + \varphi_{\overline{k}} + \pi m\right); \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\overline{k}}}}\left(\pi - \arccos\frac{1}{\overline{k}^{\gamma_1}} + \varphi_{\overline{k}} + \pi m\right)\right), m \in \mathbb{Z}, \tag{3.90}$$

довжина кожного з яких $d_{\overline{k}} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{\overline{k}}}}\left(\pi - 2\arccos\dfrac{1}{\overline{k}^{\gamma_1}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{\lambda_{\overline{k}}}}\arcsin\dfrac{1}{\overline{k}^{\gamma_1}}$. Оскільки функція $\left|\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T - \varphi_k\right)\right|$ є періодичною з періодом $\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda_{\overline{k}}}}$, то для кількості m_0 усіх інтервалів (3.90), що потрапляють в інтервал $(0, T_0]$, справедлива оцінка $m_0 \leq \dfrac{T_0}{\pi}\sqrt{\lambda_{\overline{k}}}$.

Отже, для міри множини $E(T_0, \lambda_{\overline{k}})$ виконується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0, \lambda_{\overline{k}}) \leq \frac{2T_0}{\pi}\arcsin\frac{1}{\overline{k}^{\gamma_1}}. \tag{3.91}$$

Оскільки $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{\overline{k}^{\gamma_1}}\right) = \dfrac{1}{\overline{k}^{\gamma_1}}$, то на підставі нерівності (2.12) отримуємо, що

$$\arcsin\frac{1}{\overline{k}^{\gamma_1}} \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{\overline{k}^{\gamma_1}}. \tag{3.92}$$

Підсумовуючи (3.91) для всіх $\lambda_k \in \Lambda$, із врахуванням нерівності (3.94), отримаємо таку оцінку для міри множини $E(T_0)$:

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0) \leq T_0 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^{\gamma_1}}. \tag{3.93}$$

Оскільки $\gamma_1 > 1$, то ряд у правій частині нерівності (3.93) є збіжним; на підставі леми 2.1 отримуємо, що $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0) = 0$, тобто для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) $T \in (0, T_0]$ нерівність (3.89) виконується не більше, ніж для скінченної кількості значень $\lambda_k \in \Lambda$. Таким чином, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) $T \in (0, T_0]$ нерівність

$$\left|\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T - \varphi_k\right)\right| > k^{-\gamma_1}, \quad \gamma_1 > 1, \tag{3.94}$$

справджується для всіх (крім скінченної кількості) значень $\lambda_k \in \Lambda$. На підставі оцінок (2.4), (3.88) та (3.94), враховуючи, що проміжок $(0, +\infty)$ можна покрити зліченною кількістю відрізків довжиною T_0, отримуємо доведення леми для випадку, коли $a_2 b_2 \neq 0$.

Якщо ж $a_2 b_2 = 0$, то з формули (3.73) випливає, що

$$|\Delta(\lambda_k)| \geq \sqrt{\lambda_k}\sqrt{a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2}\left|\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T - \varphi_k\right)\right|.$$

Далі доведення теореми є аналогічним, як у випадку, коли $a_2 b_2 \neq 0$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

3.2.2. Лінійні рівняння високого порядку. В області B^p розглядаємо задачу

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2(n-s)}}{\partial t^{2(n-s)}} L^s u(t, x) = f(t, x), \tag{3.95}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)} u(t, x)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \varphi_r(x), \quad \left.\frac{\partial^{2r-1} u(t, x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+r}(x), \quad r \in \{1, ..., n\}, \tag{3.96}$$

$$L^q u\,|_{\Sigma} = 0, \quad q = 0, ..., n-1, \tag{3.97}$$

де $a_s \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, L — еліптичний в області G, $\overline{G} \in A^{2n,\nu}$, диференціальний вираз, заданий формулою (2.2), в якій $p_{ij}(x) \in C^{2n-1,\nu}$, $i, j = 1, ..., p$, $q(x) \in C^{2n-2,\nu}$, $0 < \nu < 1$; $L^0 u = u$, $L^q u = L\left(L^{q-1} u\right)$, $q = 1, \ldots, n$.

Будемо шукати класичні розв'язки задачі (3.95)–(3.97), тобто розв'язки з простору $C^{2n}\left(\overline{B}^p\right)$.

Розв'язок задачі (3.95)–(3.97) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x). \tag{3.98}$$

Кожна з функцій $u_k(t),\ k\in\mathbb{N}$, є розв'язком, відповідно, такої крайової задачі:

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \frac{d^{2(n-s)}u_k(t)}{dt^{2(n-s)}}(-\lambda_k)^s = f_k(t), \quad t\in(0,T), \quad \lambda_k\in\Lambda, \tag{3.99}$$

$$u_k^{(2(r-1))}(0)=\varphi_{rk}, \quad u_k^{(2r-1)}(T)=\varphi_{n+r,k}, \quad r=1,\ldots,n, \tag{3.100}$$

де φ_{jk} і $f_k(t)$ — коефіцієнти розвинення функцій $\varphi_j(x)$ та $f(t,x)$, відповідно, в ряди Фур'є за системою власних функцій Υ (див. (3.66)).

Припустимо, що рівняння (3.95) є строго гіперболічним за Петровським в області B^p. Тоді всі корені $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ рівняння

$$\sum_{s=0}^{n} a_s\gamma^{n-s}=0 \tag{3.101}$$

є різними та додатними, і для кожного $\lambda_k\in\Lambda$ фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння, яке відповідає рівнянню (3.99), є такою:

$$\{\, w_{kj}(t)=\exp(\beta_j t), w_{k,n+j}(t)=\exp(-\beta_j t), j=1,\ldots,n \,\},$$

де $\beta_j := \beta_j(\lambda_k) = i\sqrt{\gamma_j\lambda_k}$. При цьому характеристичний визначник $\Delta(\lambda_k) := \Delta(T,\lambda_k)$ задачі (3.99), (3.100) має вигляд

$$\begin{vmatrix}
1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
\beta_1^2 & \ldots & \beta_n^2 & \beta_1^2 & \ldots & \beta_n^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\beta_1^{2(n-1)} & \ldots & \beta_n^{2(n-1)} & \beta_1^{2(n-1)} & \ldots & \beta_n^{2(n-1)} \\
\\
\beta_1 e^{\beta_1 T} & \ldots & \beta_n e^{\beta_n T} & -\beta_1 e^{-\beta_1 T} & \ldots & -\beta_n e^{-\beta_n T} \\
\beta_1^3 e^{\beta_1 T} & \ldots & \beta_n^3 e^{\beta_n T} & -\beta_1^3 e^{-\beta_1 T} & \ldots & -\beta_n^3 e^{-\beta_n T} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\beta_1^{2n-1} e^{\beta_1 T} & \ldots & \beta_n^{2n-1} e^{\beta_n T} & -\beta_1^{2n-1} e^{-\beta_1 T} & \ldots & -\beta_n^{2n-1} e^{-\beta_n T}
\end{vmatrix}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = (-1)^n \prod_{1\le s<t\le n}\left(\beta_t^2-\beta_s^2\right)^2 \prod_{j=1}^{n}\left(\beta_j\left(e^{\beta_j T}+e^{-\beta_j T}\right)\right). \tag{3.102}$$

Задача (3.99)–(3.100) не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta(\lambda_k) \neq 0$.

Теорема 3.13. *Для единості розв'язку задачі* (3.95)–(3.97) *у просторі* $C^{2n}\left(\overline{B}^p\right)$ *необхідно і достатнььо, щоб виконувалась умова*

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda, \forall m \in \mathbb{Z}_+) \quad \sqrt{\gamma_j \lambda_k} T \neq \pi/2 + \pi m, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3.103}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5 з [83, с. 57].

За умов (3.103) розв'язок задачі (3.95)–(3.97) формально зображує ряд

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(v_k(t) + \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau \right) X_k(x), \tag{3.104}$$

де

$$v_k(t) = \sum_{q,j=1}^{n} S_{n-j}^{(q)} \frac{\left[\varphi_{jk}\beta_q \left(e^{\beta_q(T-t)} + e^{-\beta_q(T-t)}\right) + \varphi_{n+j,k}\left(e^{\beta_q t} - e^{-\beta_q t}\right)\right]}{(-1)^{n+j} \beta_q \left(e^{\beta_q T} + e^{-\beta_q T}\right) \prod\limits_{s=1, s\neq q}^{n} \left(\beta_q^2 - \beta_s^2\right)}, \tag{3.105}$$

$S_l^{(q)}$ — сума всеможливих добутків елементів $\beta_1^2, \ldots, \beta_{q-1}^2, \beta_{q+1}^2, \ldots, \beta_n^2$, взятих по l штук у кожному добутку, $S_0^{(q)} \equiv 1$, $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, — функція Ґріна задачі (3.99), (3.100), яка у квадраті $K_T = \{0 \leq t, \tau \leq T\}$ (крім сторін $\tau = 0$, $\tau = T$) визначається формулою

$$\begin{gathered} G_k(t,\tau) = \frac{sgn\,(t-\tau)}{4} \sum_{q=1}^{n} \frac{\left[e^{\beta_q(t-\tau)} + (-1)^n e^{-\beta_q(t-\tau)}\right]}{\beta_q \prod\limits_{s=1, s\neq q}^{n} \left(\beta_q^2 - \beta_s^2\right)} + \\ + \frac{1}{8} \sum_{s,r,q=1}^{n} \frac{(-1)^{r+q} S_{n-r}^{(q)} \beta_s^{2r-3}}{\beta_q \prod\limits_{l=1, l\neq q}^{n} \left(\beta_q^2 - \beta_l^2\right) \prod\limits_{h=1, h\neq s}^{n} \left(\beta_s^2 - \beta_h^2\right) \cos\left(T\sqrt{\gamma_q \lambda_k}\right)} \\ \times \left[\beta_q \left(e^{\beta_s \tau}(-1)^{n-1} - e^{-\beta_s \tau}\right)\left(e^{\beta_q(T-t)} + (-1)^n e^{-\beta_q(T-t)}\right) + \right. \\ \left. + \beta_s \left(e^{\beta_q t}(-1)^n - e^{-\beta_q t}\right)\left(e^{\beta_s(T-\tau)} + (-1)^{n-1} e^{-\beta_s(T-\tau)}\right)\right]. \end{gathered} \tag{3.106}$$

На стороні $\tau = 0$ квадрата K_T кожну з функцій $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, довизначаємо за неперервністю справа, а на стороні $\tau = T$ — за неперервністю зліва.

Лема 3.5. *Для майже всіх(стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *нерівності*

$$\left|\cos\left(T\sqrt{\gamma_q \lambda_k}\right)\right| \geq 2Tk^{-1-\delta}, \quad \delta > 0, \quad q \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3.107}$$

справджуються для всіх (крім скінченної кількості) значень $\lambda_k \in \Lambda$.

Доведення. Врахувавши (2.12), отримуємо оцінки

$$\left|\cos\,(T\sqrt{\gamma_q\lambda_k})\right| = \left|\sin\,(T\sqrt{\gamma_q\lambda_k} - \pi/2)\right| =$$

$$= \left|\sin\left|T\sqrt{\gamma_q\lambda_k} - \pi/2 - m(\lambda_k, q)\pi\right|\right| \geq \frac{2}{\pi}\left|T\sqrt{\gamma_q\lambda_k} - \pi/2 - m(\lambda_k, q)\pi\right| =$$

$$= T\sqrt[p]{k}\left|\frac{2\sqrt{\gamma_q\lambda_k}/\pi}{\sqrt[p]{k}} - \frac{(2m(\lambda_k, q)+1)/T}{\sqrt[p]{k}}\right|, \quad q \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3.108}$$

де $m(\lambda_k, q) \in \mathbb{Z}$ таке, що $\left|T\sqrt{\gamma_q\lambda_k} - \pi/2 - m(\lambda_k, q)\pi\right| \leq \pi/2$.

З оцінок (2.4), (3.108), леми 2.2 і неперервності функції $y = 1/T$ при $T > 0$ випливає доведення леми. $\diamondsuit$

Теорема 3.14. *Нехай коефіцієнти диференціального виразу L є достатньо гладкими, справджується умова (3.103), $\varphi_j \in C^{2h_1}\left(\overline{G}\right)$, $L^{q_1}\varphi_j|_\Gamma = 0$, $q_1 = 0, 1, \ldots, h_1 - 1$, $\varphi_{n+j} \in C^{2h_2}\left(\overline{G}\right)$, $L^{q_2}\varphi_{n+j}|_\Gamma = 0$, $q_2 = 0, 1, \ldots, h_2 - 1$, $j = 1, \ldots, n$; $f \in C^{(0,2h_3)}\left(\overline{B^p}\right)$, $L^{q_3}f|_\Sigma = 0$, $q_3 = 0, 1, \ldots, h_3 - 1$, де $h_1 = [5p/4 + 1/2] + n$, $h_2 = [5p/4] + n$, $h_3 = [5p/4 + 5/2]$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T існує розв'язок задачі (3.95)–(3.97) з простору $C^{2n}\left(\overline{B}^p\right)$. Цей розв'язок справджує нерівність $\|u\|_{C^{2n}(\overline{B}^p)} \leq c_{21}\left(\|f\|_{C^{(0,2h_3)}(\overline{B}^p)} + \sum\limits_{j=1}^{n}\left(||\varphi_j||_{C^{2h_1}(\overline{G})} + ||\varphi_{n+j}||_{C^{2h_2}(\overline{G})}\right)\right)$.*

Доведення. На підставі формул (3.105), (3.106) оцінок (2.4), (2.5) та леми 3.5 отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T справджуються оцінки

$$\max_{0\leq t\leq T}\left|\frac{d^q}{dt^q}v_k(t)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} c_{22}\lambda_k^{q/2+1-j}\left(|\varphi_{jk}| + |\varphi_{n+j,k}|\,\lambda_k^{-1/2}\right)k^{1+\delta}, \quad \delta > 0,$$

$$\max_{0\leq t\leq T}\left|\frac{d^q}{dt^q}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau\right| \leq c_{23}\lambda_k^{(q+3)/2-n}k^{1+\delta}\overline{f}_k, \quad q \in \{0, 1, \ldots, 2n\}, \tag{3.109}$$

де $c_{23} = \frac{1}{8}n^3 \max\limits_{q\in\{1,\ldots,2n\}}\left(\min\limits_{j\in\{1,\ldots,n\}}|\gamma_j|\right)^{q-1/2+n}\left(\min\limits_{\substack{j,q\in\{1,\ldots,n\}\\ j\neq q}}|\gamma_j - \gamma_q|\right)^{-2n+2}$,

$$\overline{f}_k = \max_{t\in[0,T]}|f_k(t)|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки диференціальний вираз L є лінійним і самоспряженим, то, застосовуючи h разів до рівностей (3.66) другу формулу Ґріна [44, 72], отримуємо

$$
\begin{aligned}
\varphi_{jk} &= (-1)^h \frac{1}{\lambda_k^h} \int_G L^h \varphi_j X_k dx, \quad j \in \{1, \dots, 2n\}, \\
f_k(t) &= (-1)^h \frac{1}{\lambda_k^h} \int_G L^h f X_k dx, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
\tag{3.110}
$$

Із формул (3.110), нерівності Коші – Буняковського [58] та нормованості функцій $X_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, випливає, що

$$
|\varphi_{jk}| \le c_{24} \lambda_k^{-h} \|\varphi_j\|_{C^{2h}(\overline{G})}, \quad j \in \{1, \dots, 2n\}, \quad \overline{f}_k \le c_{25} \lambda_k^{-h} \|f(t,x)\|_{C^{(0,2h)}(\overline{B^p})}, \tag{3.111}
$$

де $c_{25} = \sqrt{\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^p} G} \max\{ \max\limits_{i,j \in \{1,\dots,p\}} \|p_{ij}\|_{C^{2h-3}(\overline{G})}, \ \|q\|_{C^{2h-4}(\overline{G})} \}$.

Враховуючи оцінки (2.4), (2.5), (3.109), (3.111), отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T справджується така оцінка для норми розв'язку задачі (3.95)–(3.97):

$$
\|u\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0 \le |\hat{s}| \le 2n} \max_{0 \le t \le T} \left| \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} \left(v_k(t) + \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau \right) \right| \times
$$

$$
\times \max_{x \in \overline{G}} \left| \frac{\partial^{|s|} X_k(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right| \le (2n+1)^{p+1} \tilde{c}_2 c_{23} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{3/2-n} k^{1+\delta} \lambda_k^{p/4+n} \overline{f}_k +
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{n} \Bigg((2n+1)^{p+1} \tilde{c}_2 c_{22} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/4+n} k^{1+\delta} \varphi_{jk} +
$$

$$
+ (2n+1)^{p+1} \tilde{c}_2 c_{22} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/4+n-1/2} k^{1+\delta} \varphi_{n+j,k} \Bigg) \le
$$

$$
\le (2n+1)^{p+1} \tilde{c}_2 c_{23} c_{25} \, ||f||_{C^{(0,2h_3)}(\overline{B^p})} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/4+3/2-h_3} k^{1+\delta} +
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{n} \Bigg((2n+1)^{p+1} \tilde{c}_2 c_{22} c_{24} \, ||\varphi_j||_{C^{2h_1}(\overline{B^p})} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/4+n-h_1} k^{1+\delta} +
$$

$$
+ (2n+1)^{p+1} \tilde{c}_2 c_{22} c_{24} \, ||\varphi_{n+j}||_{C^{2h_2}(\overline{B^p})} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/4+n-1/2-h_2} k^{1+\delta} \Bigg) \le
$$

$$\leq (2n+1)^{p+1} c_{26} \left(||f||_{C^{(0,2h_3)}(\overline{B^P})} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{g_3}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \left(||\varphi_j||_{C^{2h_1}(\overline{G})} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{g_1}} + ||\varphi_{n+j}||_{C^{2h_2}(\overline{G})} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{g_2}} \right) \right), \tag{3.112}$$

де $g_1 = (2h_1 - 2n)/p - 3/2 - \delta$, $g_2 = (2h_2 - 2n + 1)/p - 3/2 - \delta$, $g_3 = (2h_3 - 3)/p - 3/2 - \delta$, а δ – як завгодно мале додатне число.

Якщо $0 < \delta < 1/p$, то $1 < g_i < 2$, $i = 1, 2, 3$, тому ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{g_i}}$, $i = 1, 2, 3$, є збіжними. Позначимо їх суми через $K(g_1)$, $K(g_2)$, $K(g_3)$ відповідно. Тоді з оцінки (3.112) отримуємо

$$\|u\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} \leq (2n+1)^{p+1} c_{26} \Big(K(g_3) \|f\|_{C^{(0,2h_3)}(\overline{B^p})} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \Big(K(g_1) ||\varphi_j||_{C^{2h_1}(\overline{G})} + K(g_2) ||\varphi_{n+j}||_{C^{2h_2}(\overline{G})} \Big) \Big). \tag{3.113}$$

З нерівності (3.113) випливає доведення теореми. $\diamondsuit$

Аналогічні результати можна отримати для нестрого гіперболічного рівняння вигляду (3.95), коли корені $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ $(q < n)$ рівняння (3.101) мають кратності $m_1, \ldots, m_q$, відповідно $(m_1 + \ldots + m_q = n)$. У цьому випадку відповідний характеристичний визначник обчислюється за формулою

$$\Delta_1(\lambda_k) = \prod_{1 \leq r < d \leq q} \left(\beta_d^2 - \beta_r^2\right)^{2m_r m_d} \prod_{j=1}^{q} \left(\beta_j^{m_j^2} \left(e^{\beta_j T} + e^{-\beta_j T}\right)^{m_j} \prod_{s=1}^{m_j} 2^{2s-2} (s-1)!^2 \right), \tag{3.114}$$

де $\beta_j = i\sqrt{\gamma_j \lambda_k}$, $j = 1, \ldots, q$.

Приклад 3.2. Розглянемо частинний випадок задачі (3.95)–(3.97), коли $p = 1$, а коефіцієнти рівняння є сталими.

В області $B^1 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, T) \subset \mathbb{R}, x \in (0, l) \subset \mathbb{R}\}$ розглянемо задачу

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2(n-s)} \partial x^{2s}} = f(t,x), \quad a_s \in \mathbb{R}, \tag{3.115}$$

$$\left. \frac{\partial^{2r-2} u(t,x)}{\partial t^{2r-2}} \right|_{t=0} = \varphi_r(x), \quad \left. \frac{\partial^{2r-1} u(t,x)}{\partial t^{2r-1}} \right|_{t=T} = \varphi_{n+r}(x), \quad r = 1, ..., n, \tag{3.116}$$

$$\left.\frac{\partial^{2r}u\,(t,x)}{\partial x^{2r}}\right|_{x=0}=0,\;\left.\frac{\partial^{2r}u\,(t,x)}{\partial x^{2r}}\right|_{x=l}=0,\qquad r=1,...,n. \tag{3.117}$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді ряду

$$u\,(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\,(t)\,X_k^1\,(x)\,, \tag{3.118}$$

де X_k^1 — власні функції задачі

$$(X_k^1\,(x))''+\lambda X_k^1\,(x)=0,\quad X_k^1(0)=X_k^1(l)=0, \tag{3.119}$$

яка має повну ортогональну у просторі $L_2([0,l])$ систему власних фунцій $\Upsilon^1=\{\sin\dfrac{\pi k}{l}x,\ k\in\mathbb{N}\}$ і множину власних значень $\Lambda^1=\{\dfrac{\pi^2k^2}{l^2},\ k\in\mathbb{N}\}$. Коефіцієнти $u_k\,(t)\,,\ k\in\mathbb{N}$, ряду (3.118) є розв'язками рівнянь

$$\sum_{s=0}^{n}a_s\left(\frac{i\pi k}{l}\right)^{2s}\frac{d^{2(n-s)}u_k(t)}{dt^{2(n-s)}}=f_k\,(t)\,,\quad t\in(0,T), \tag{3.120}$$

що задовольняють умови (3.100). Фундаментальна система роз'язків рівняння (3.120) складається з таких функцій: $v_{kj}\,(t)=\exp\left(\sqrt{\gamma_j}i\pi kt/l\right)$, $v_{k,j+n}\,(t)=\exp\left(-\sqrt{\gamma_j}i\pi kt/l\right)$, $j=1,\ldots,n$, де γ_j — додатні корені рівняння (3.101), а характеристичний визначник задачі (3.120), (3.100) обчислюється за формулою (3.102), де $\beta_j=\sqrt{\gamma_j}i\pi k/l$, $j=1,\ldots,n$.

Твердження 3.4. *Для єдиності розв'язку задачі* (3.115)–(3.117) *у просторі* $C^{2n}\left(\overline{B}^1\right)$ *необхідно і достатньо, щоб жодне з рівнянь*

$$kT\sqrt{\gamma_j}/l=1/2+m,\ j=1,\ldots,n,$$

не мало розв'язків у цілих числах k *та* m $(k\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{Z}_+)$.

Теорема існування класичного розв'язку задачі (3.115)–(3.117) формулюється аналогічно до теореми 3.14, де треба покласти $h_1=2n+5/2$, $h_2=2n+2$, $h_3=n+5/2$.

3.2.3. Випадок лінійного оператора високого порядку, збуреного нелінійним доданком. В області B^p розглядаємо задачу

$$\pounds u\equiv\sum_{s=0}^{n}a_s\frac{\partial^{2(n-s)}}{\partial t^{2(n-s)}}L^su\,(t,x)=f\,(t,x)+\varepsilon\Phi\,(t,x,u\,(t,x))\,, \tag{3.121}$$

$$\frac{\partial^{2(r-1)}u\left(0,x\right)}{\partial t^{2(r-1)}}=0,\frac{\partial^{2r-1}u\left(T,x\right)}{\partial t^{2r-1}}=0,\quad r=1,...,n,\tag{3.122}$$

$$L^{q}u\left|_{\Sigma}\right.=0,\quad q=0,...,n-1,\tag{3.123}$$

де $a_s\in\mathbb{R}$, $a_0\neq 0$, L — еліптичний в області G диференціальний вираз, заданий формулою (2.2), в якій $p_{ij}\left(x\right)\in C^{2n-1,\nu}$, $i,j=1,...,p$, $q\left(x\right)\in C^{2n-2,\nu}$, $0<\nu<1$; $L^0u=u, L^qu=L\left(L^{q-1}u\right)$, $q=1,\ldots,n$; $\varepsilon\in\mathbb{R}$; функція $\Phi\left(t,x,u\right)$ визначена та неперервна за змінною t і досить гладка за x, u в замкненій області $Q=\left\{(t,x,u):(t,x)\in\overline{B}^p,u\in\overline{S}\left(u^0,r\right)\right\}$, де

$$\overline{S}\left(u^0,r\right)=\left\{u\in C^{2n}\left(\overline{B}^p\right):\left\|u-u^0\right\|_{C^{2n}\left(\overline{B}^p\right)}\leq r\right\},$$

$u^0:=u^0\left(t,x\right)$ — розв'язок задачі (3.121)–(3.123) при $\varepsilon=0$.

З підпункту 3.2.2 легко бачити, що

$$u^0\left(t,x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T G_k\left(t,\tau\right)f_k\left(\tau\right)\,d\tau\,X_k\left(x\right),\tag{3.124}$$

де кожна з функцій $G_k\left(t,\tau\right)$, $k\in\mathbb{N}$, визначається формулою (3.106)

На стороні $\tau=0$ квадрата K_T кожну з функцій $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbb{N}$, доозначаємо за неперервністю справа, а на стороні $\tau=T$ – за неперервністю зліва.

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}G_k\left(t,\tau\right)X_k\left(x\right)X_k\left(\xi\right)\tag{3.125}$$

рівномірно збігається в області $\overline{B}^p\times\overline{B}^p$ до деякої функції $K\left(t,x,\tau,\xi\right)$, то задача (3.121)–(3.123) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(t,x)=u^0(t,x)+\varepsilon\int_{B^p}K(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\tau\,d\xi.\tag{3.126}$$

Лема 3.6. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T ряд* (3.125) *рівномірно збігається в області $\overline{B}^p\times\overline{B}^p$ при $n\geq[3\left(p+1\right)/2]+1$.*

Доведення. На підставі оцінок (2.4), (2.5), рівностей (3.106) та леми 3.5 отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T

справджуються оцінки

$$\max_{\overline{B}^p\times\overline{B}^p} \left|G_k\left(t,\tau\right)X_k\left(x\right)X_k\left(\xi\right)\right| \leq c_{27}k^{(3-2n)/p+2+\delta}, \quad \delta>0, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.127}$$

Із оцінок (3.127) випливає, що ряд (3.125) мажорується числовим рядом із додатними членами

$$c_{27}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{(2n-3)/p-2-\delta}}. \tag{3.128}$$

Якщо $0<\delta<1/p$, $n\geq\left[3\left(p+1\right)/2\right]+1$, то ряд (3.128) є збіжним. Тому для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T ряд (3.125) є рівномірно збіжним в області $\overline{B}^p\times\overline{B}^p$. Лема доведена. $\diamondsuit$

Запишемо рівняння (3.126) у вигляді операторного рівняння

$$u(t,x)=A_{u^0}u(t,x),$$

де A_v – нелінійний інтегральний оператор, визначений у кулі $\overline{S}(u^0,r)$ формулою

$$A_vu(t,x):=v(t,x)+\varepsilon\int_{B^p}K(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\tau\,d\xi. \tag{3.129}$$

Позначимо

$$\overline{\Phi}=\max_{0\leq|\hat{s}|\leq 2h+1}\max_{Q}\left|\frac{\partial^{|\hat{s}|}\Phi(t,x,u)}{\partial u^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right|,$$

$$\Psi=c_{26}c_{28}(2n+1)^{p+1}(1+r+\rho)^{2h}\overline{\Phi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}},$$

де $\rho=(2n+1)^{p+1}c_{26}K(g_3)\left\|f\right\|_{C^{(0,2h_3)}(\overline{B^p})}$ (див. формулу (3.113)), $c_{28}=c_{28}(h_3,p)$ – кількість доданків у виразі $L^{h_3}(\Phi(t,x,u(t,x)))$; $\alpha=(2h_3-3)/p-3/2-\delta$, $0<\delta<1/p$.

Теорема 3.15. *Нехай $n\geq[3(p+1)/2]+1$, виконуються умови теореми 3.14, функція $\Phi(t,x,u)$ в області Q неперервна за t та має неперервні похідні за змінними x і u до порядку $2h_3+1$, причому для кожної функції $u\in\overline{S}(u^0,r)$ справджуються умови*

$$L^g\Phi|_{\Sigma}=0, \quad L^g\frac{\partial\Phi}{\partial u}\bigg|_{\Sigma}=0, \quad g=0,1,\ldots,h_3-1,$$

де $h_3 = [5(p+2)/4]$. *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *і для всіх* ε *таких, що* $|\varepsilon| < \min\{r/\Psi,\ 1/\Psi\}$*, існує єдиний розв'язок задачі* (3.121)–(3.123). *Цей розв'язок належить кулі* $\overline{S}(u^0, r) \subset C^{2n}(\overline{B^p})$ *і неперервно залежить від функції* f.

Доведення. Нехай $|\varepsilon|\,\Psi < r$. Позначимо через V сукупність функцій $v \in C^{2n}(\overline{B^p})$, для яких

$$\left\|v - u^0\right\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} \le \chi := r - |\varepsilon|\,\Psi.$$

Покажемо, що для довільної функції $v(t,x)$ із V оператор A_v переводить кулю $\overline{S}(u^0, r)$ в себе. Нехай $u \in \overline{S}(u^0, r)$. Тоді

$$\Phi(t,x,u(t,x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t) X_k(x),$$

де

$$\Phi_k(t) = \int_G \Phi(t,x,u(t,x)) X_k(x)\, dx, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.130}$$

За умов теореми, на підставі формули (3.130), рівностей вигляду (3.110), нерівності Коші – Буняковського [58], нормованості функцій $X_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, та правила диференціювання складної функції $\Phi(t,x,u(t,x))$, знаходимо

$$\max_{0\le t\le T} |\Phi_k(t)| = \max_{0\le t\le T} \left| \int_G \Phi(t,x,u(t,x)) X_k(x)\, dx \right| =$$

$$= \max_{0\le t\le T} \left| (-1)^{h_3} \frac{1}{\lambda_k^{h_3}} \int_G L^{h_3} \Phi X_k dx \right| \le$$

$$\le c_{28} \frac{1}{\lambda_k^{h_3}} \max\{ \max_{1\le i,j\le p} \|p_{ij}\|_{C^{2h_3-3}(\overline{G})}, \|q\|_{C^{2h_3-4}(\overline{G})} \}\times$$

$$\times \max_{0\le|\hat{s}|\le 2h_3+1} \max_{Q} \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|}\Phi(t,x,u)}{\partial u^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right| \Big(1 + \|u\|_{C^{2n}(\overline{B^p})}\Big)^{2h_3} \sqrt{\mathrm{mes} G} \le$$

$$\le c_{25} c_{28} (1 + \|u\|_{C^{2n}(\overline{B^p})})^{2h} \overline{\Phi} \lambda_k^{-h} \le c_{25} c_{28} (1 + \left\|u - u^0\right\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} +$$

$$+ \left\|u^0\right\|_{C^{2n}(\overline{B^p})})^{2h} \overline{\Phi} \lambda_k^{-h} \le c_{25} c_{28} (1 + r + \rho)^{2h} \overline{\Phi} \lambda_k^{-h}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.131}$$

Із формули (3.129), враховуючи оцінки (2.4), (2.5), (3.109), (3.131), отримуємо

$$\left\|A_v u(t,x) - u^0(t,x)\right\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} \le \left\|v - u^0\right\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} +$$

$$+ |\varepsilon| \left\| \int_{B^p} K(t,x,\tau,\xi)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\tau\,d\xi \right\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} = \left\|v - u^0\right\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} +$$

$$+ |\varepsilon| \left\| \int_{B^p} \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau)\Phi(\tau,\xi,u(\tau,\xi))X_k(x)X_k(\xi)\,d\tau\,d\xi \right\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} \le$$

$$\le \chi + |\varepsilon| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0\le|\hat{s}|\le 2n} \max_{x\in\overline{G}} \left| \frac{\partial^{|s|}X_k(x)}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}} \right| \max_{0\le t\le T} \left| \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} \int_0^T G_k(t,\tau)\Phi_k(\tau)\,d\tau \right| \le$$

$$\le \chi + |\varepsilon|\,(2n+1)^{p+1}\tilde{c}_2 c_{23} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{3/2-n} k^{1+\delta} \lambda_k^{p/4+n} \max_{0\le t\le T} |\Phi_k(t)| \le$$

$$\le \chi + |\varepsilon|\,(2n+1)^{p+1}\tilde{c}_2 c_{23} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/4+3/2-h_3} k^{1+\delta} c_{25}c_{28}(1+r+\rho)^{2h_3}\overline{\Phi} \le$$

$$\le \chi + |\varepsilon|\, c_{26}c_{28}(2n+1)^{p+1}(1+r+\rho)^{2h_3}\overline{\Phi}\times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(2h_3-3)/p-3/2-\delta}} = \chi + |\varepsilon|\,\Psi = r.$$

Покажемо, що для довільної функції $v \in V$ оператор A_v є оператором стиску, якщо $|\varepsilon| < 1/\Psi$. Нехай $u_1, u_2 \in \overline{S}(u^0, r)$. Позначимо

$$\tilde{u}(t,x) = (1-\Theta)u_1(t,x) + \Theta u_2(t,x), \qquad \Theta \in (0,1).$$

На підставі формули (3.129), враховуючи оцінки (2.4), (2.5), (3.109), рівності вигляду (3.110), нерівність Коші – Буняковського [58], нормованість функцій $X_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, та формулу Лагранжа про скінченні прирости, одержуємо оцінку

$$\|A_v u_1(t,x) - A_v u_2(t,x)\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} =$$

$$= |\varepsilon| \left\| \int_{B^p} K(t,x,\tau,\xi)(\Phi(\tau,\xi,u_1(\tau,\xi)) - \Phi(\tau,\xi,u_2(\tau,\xi)))\,d\tau\,d\xi \right\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} =$$

$$= |\varepsilon| \left\| \int_{B^p} K(t,x,\tau,\xi) \frac{\partial \Phi(\tau,\xi,\tilde{u}(\tau,\xi))}{\partial u} (u_1(\tau,\xi) - u_2(\tau,\xi))\, d\tau\, d\xi \right\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} \le$$

$$\le |\varepsilon| \max_{(t,x)\in\overline{B^p}} |u_1(t,x) - u_2(t,x)| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0\le|\hat{s}|\le 2n} \max_{(t,x)\in\overline{B^p}} \left| \frac{\partial^{|s|} X_k(x)}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} \int_{B^p} G_k(t,\tau) \frac{\partial \Phi(\tau,\xi,\tilde{u}(\tau,\xi))}{\partial u} X_k(\xi)\, d\tau\, d\xi \right| \le |\varepsilon|\, \|u_1 - u_2\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0\le|\hat{s}|\le 2n} \max_{x\in\overline{G}} \left| \frac{\partial^{|s|} X_k(x)}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} \right| \max_{0\le t\le T} \left| \int_G \frac{\partial \Phi(t,\xi,\tilde{u}(t,\xi))}{\partial u} X_k(\xi)\, d\xi \right| \times$$

$$\times \max_{0\le t\le T} \left| \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} \int_0^T G_k(t,\tau)\, d\tau \right| \le |\varepsilon|\, \|u_1 - u_2\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} (2n+1)^{p+1} \tilde{c}_2 c_{23} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/4+n} \lambda_k^{3/2-n} k^{1+\delta} \max_{0\le t\le T} \left| (-1)^{h_3} \frac{1}{\lambda_k^{h_3}} \int_G L^{h_3} \frac{\partial \Phi(\tau,\xi,\tilde{u}(\tau,\xi))}{\partial u} X_k(\xi)\, d\xi \right| \le$$

$$\le |\varepsilon|\, \|u_1 - u_2\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} (2n+1)^{p+1} \tilde{c}_2 c_{23} c_{25} c_{28} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/4+3/2-h_3} k^{1+\delta} \times$$

$$\times (1+r+\rho)^{2h_3} \overline{\Phi} \le |\varepsilon|\, \|u_1 - u_2\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} c_{26} c_{28} (2n+1)^{p+1} (1+r+\rho)^{2h_3} \overline{\Phi} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(2h-3)/p-3/2-\delta}} = |\varepsilon|\, \|u_1 - u_2\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} \Psi. \qquad (3.132)$$

Якщо $|\varepsilon| < 1/\Psi$, то з нерівності (3.132) випливає, що A_v є оператором стиску. Крім того, оператор A_v є неперервним за ν. Тому згідно з теоремами 2.1, 2.2 і 3.14 рівняння (3.126), а разом з ним і задача (3.121)–(3.123) має єдиний розв'язок, який належить кулі $\overline{S}(u^0, r)$ і неперервно залежить від $f(t,x)$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Наближений розв'язок задачі (3.121)–(3.123) можна шукати методом послідовних наближень. Послідовні наближення отримують за формулами

$$u_n(t,x) := u_0(t,x) + \varepsilon \int_{B^p} K(t,x,\tau,\xi) \Phi(\tau,\xi,u_{n-1})\, d\tau\, d\xi\,, \qquad n = 1,2,\dots,$$

де $u_0(t,x)$ – розв'язок задачі (3.121)–(3.123) при $\varepsilon = 0$. Швидкість збіжності послідовності $\{u_n\}$ до точного розв'язку $u^*(t,x)$ задачі (3.121)–(3.123) визначається нерівністю (див. теорему 2.1)

$$\|u_n - u^*\|_{C^{2n}(\overline{B^p})} \le \frac{(\,|\varepsilon|\,\Psi)^n}{1 - |\varepsilon|\,\Psi} \|u_1 - u_0\|_{C^{2n}(\overline{B^p})}\,.$$

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертації в обмежених циліндричних областях встановлено умови коректної розв'язності у різних функційних просторах та побудовано розв'язки крайових задач для лінійних гіперболічних рівнянь та систем рівнянь зі сталими та змінними за $x_1, \ldots, x_p$ коефіцієнтами; досліджено задачу Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі змінними коефіцієнтами, збуреного нелінійним доданком.

Доведено метричні леми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків досліджуваних задач. На підставі доведених лем встановлено умови однозначної розв'язності розглядуваних задач для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) параметрів області та для фіксованих коефіцієнтів рівнянь.

Задачу для слабконелінійного рівняння зведено до еквівалентного їй інтегрального рівняння, попередньо з'ясувавши, коли таке зведення можливе. Використовуючи результати досліджень відповідної задачі для лінійного рівняння, застосувавши принцип нерухомої точки, встановлено умови існування і єдиності розв'язку задачі для слабко нелінійного рівняння при досить малих збуреннях. При цьому наведено алгоритм пошуку наближеного розв'язку досліджуваної задачі.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [16, 84, 87, 88].

РОЗДІЛ 4
ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ БЕЗТИПНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ В ОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

У даному розділі в області, що є декартовим добутком відрізка $0 \leq t \leq T$ на p-вимірний тор, $p \geq 1$, досліджено задачу з умовами Діріхле-Неймана за виділеною змінною t для загальних (без обмеження на тип) лінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами, ізотропних відносно порядку диференціювання за всіма незалежними змінними.

У першому підрозділі розглянуто задачу Діріхле-Неймана для безтипного рівняння високого порядку з молодшими членами, а також її частинні випадки, для яких отримано кращі оцінки знизу малих знаменників (а тому і слабші умови на вихідні дані у теоремах існування розв'язку задачі зі шкали просторів Соболєва), ніж для загального рівняння; у другому підрозділі – задачу для системи рівнянь.

4.1. Випадок одного рівняння

4.1.1. Рівняння парного порядку з молодшими членами. В області D^p розглянемо задачу

$$P\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(t,x\right):=\sum_{|\hat{s}|^*\le 2n}A_{\hat{s}}\frac{\partial^{|\hat{s}|^*}u\left(t,x\right)}{\partial t^{2s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}=0,\ (t,x)\in D^p, \tag{4.1}$$

$$\left.\frac{\partial^{2r-2}u\left(t,x\right)}{\partial t^{2r-2}}\right|_{t=0}=\varphi_r\left(x\right),\ \left.\frac{\partial^{2r-1}u\left(t,x\right)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T}=\varphi_{n+r}\left(x\right),\ r\in\left\{1,\dots,n\right\},\ x\in\Omega^p, \tag{4.2}$$

де $A_{\hat{s}}\in\mathbb{C}$, $A_{(n,0,\dots,0)}=1$.

Вигляд області D^p накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1,\dots,x_p$ на функції u та φ_j, $j\in\{1,\dots,2n\}$. Нехай $\varphi_j\in\mathcal{T}'$,

$$\begin{aligned}&\varphi_j\left(x\right)=\textstyle\sum_{|k|\ge 0}\varphi_{jk}\exp\left(ik,x\right),\\ &\varphi_{jk}=\left(2\pi\right)^{-p}\textstyle\int_{\Omega^p}\varphi_j\left(x\right)\exp\left(-ik,x\right)dx,\end{aligned}\qquad j\in\left\{1,\dots,2n\right\}. \tag{4.3}$$

Означення 4.1. *Розв'язком задачі* (4.1), (4.2) *з простору* $C^{2n}\left(\left[0,T\right],\mathcal{T}'\right)$ *називатимемо функцію*

$$u\left(t,x\right)=\sum_{|k|\ge 0}u_k\left(t\right)\exp\left(ik,x\right) \tag{4.4}$$

таку, що кожен з коефіцієнтів $u_k\left(t\right)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, *належить простору* $C^{2n}\left(\left[0,T\right]\right)$ *і справджує, відповідно, рівності*

$$P\left(\frac{d^2}{dt^2},ik\right)u_k\left(t\right):=\sum_{|\hat{s}|^*\le 2n}A_{\hat{s}}\left(ik_1\right)^{s_1}\dots\left(ik_p\right)^{s_p}\frac{d^{2s_0}u_k\left(t\right)}{dt^{2s_0}}=0,\ t\in\left(0,T\right), \tag{4.5}$$

$$u_k^{(2r-2)}\left(0\right)=\varphi_{rk},\quad u_k^{(2r-1)}\left(T\right)=\varphi_{n+r,k},\quad r\in\left\{1,\dots,n\right\}. \tag{4.6}$$

Отже, розв'язок задачі (4.1), (4.2) з простору $C^{2n}\left(\left[0,T\right],\mathcal{T}'\right)$ шукаємо у вигляді ряду (4.4), де $u_k\left(t\right)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є розв'язком відповідної задачі (4.5), (4.6).

Поряд із умовами (4.2), (4.6) розглядатимемо відповідні їм однорідні умови

$$\left.\frac{\partial^{2r-2}u\left(t,x\right)}{\partial t^{2r-2}}\right|_{t=0}=0,\quad\left.\frac{\partial^{2r-1}u\left(t,x\right)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T}=0,\quad r\in\left\{1,\dots,n\right\}, \tag{4.7}$$

$$u_k^{(2r-2)}(0)=0, \quad u_k^{(2r-1)}(T)=0, \quad r\in\{1,\ldots,n\}. \tag{4.8}$$

Для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ рівнянню (4.5) відповідає характеристичне рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|^*\le 2n} A_{\hat{s}}\,(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}\,\eta^{2s_0}=0, \tag{4.9}$$

η–корені якого є такими:

$$\begin{aligned}&\eta_j := \eta_j(k) = \sqrt{|\lambda_j(k)|}\exp\left(i\arg\lambda_j(k)/2\right),\\ &\eta_{n+j} := \eta_{n+j}(k) = -\eta_j(k),\end{aligned} \qquad j\in\{1,\ldots,n\}, \tag{4.10}$$

де $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$ – корені рівняння

$$P(\lambda, ik) := \sum_{|\hat{s}|^*\le 2n} A_{\hat{s}}\,(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}\,\lambda^{s_0}=0. \tag{4.11}$$

Припустимо, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ корені $\eta_1(k)$, $\ldots$, $\eta_n(k)$, $-\eta_1(k)$, $\ldots$, $-\eta_n(k)$ рівняння (4.9) є різними, а отже, відмінними від нуля; не порушуючи загальності, надалі будемо вважати, що $\operatorname{Re}\eta_j(k)\ge 0$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, $k\in\mathbb{Z}^p$.

Рівняння (4.5) для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$\left\{u_{kj}(t)=\exp\left(\eta_j(k)\,t\right),\ u_{k,n+j}(t)=\exp\left(-\eta_j(k)\,t\right),\ j\in\{1,\ldots,n\}\right\}.$$

Характеристичний визначник [73] задачі (4.5), (4.6) є таким:

$$\Delta(k,T)=\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1 & 1 & \ldots & 1\\ \eta_1^2 & \ldots & \eta_n^2 & \eta_1^2 & \ldots & \eta_n^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \eta_1^{2(n-1)} & \ldots & \eta_n^{2(n-1)} & \eta_1^{2(n-1)} & \ldots & \eta_n^{2(n-1)}\\ & & & & & \\ \eta_1 e^{\eta_1 T} & \ldots & \eta_n e^{\eta_n T} & -\eta_1 e^{-\eta_1 T} & \ldots & -\eta_n e^{-\eta_n T}\\ \eta_1^3 e^{\eta_1 T} & \ldots & \eta_n^3 e^{\eta_n T} & -\eta_1^3 e^{-\eta_1 T} & \ldots & -\eta_n^3 e^{-\eta_n T}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \eta_1^{2n-1} e^{\eta_1 T} & \ldots & \eta_n^{2n-1} e^{\eta_n T} & -\eta_1^{2n-1} e^{-\eta_1 T} & \ldots & -\eta_n^{2n-1} e^{-\eta_n T}\end{vmatrix}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta(k,T) = (-1)^n \prod_{1\le s<l\le n} \left(\eta_l^2 - \eta_s^2\right)^2 \prod_{j=1}^{n} \left(\left(e^{\eta_j T} + e^{-\eta_j T}\right)\eta_j\right), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \quad (4.12)$$

Відомо [73], що задача (4.5), (4.6) для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta(k,T) \neq 0$.

Теорема 4.1. *Для единості розв'язку задачі* (4.1), (4.2) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ *необхідно і достатньо, щоб справджувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p,\ \forall m \in \mathbb{Z}) \quad i\eta_j(k)T \neq \pi(m+1/2),\ j \in \{1,\ldots,n\}. \quad (4.13)$$

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що хоч одна з умов (4.13) (нехай при $j = j_0$, $1 \le j_0 \le n$) порушується, тобто для деяких $k_0 \in \mathbb{Z}^p$ та $m_0 \in \mathbb{Z}$ справджується рівність $i\eta_{j_0}(k_0)T = \pi(m_0 + 1/2)$. Тоді $\Delta(k_0,T) = 0$ (оскільки $e^{\eta_{j_0}(k_0)T} + e^{-\eta_{j_0}(k_0)T} = 0$) та існують нетривіальні розв'язки задачі (4.1), (4.7) $u^0(t,x) = A\sin((2m_0+1)\pi t/(2T))\exp(ik_0,x)$, де A – довільна стала. Тому розв'язок задачі (4.1), (4.2), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Нехай задача (4.1), (4.2) має два різні розв'язки u_1, u_2 з простору $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$. Тоді функція $u_1 - u_2 = \bar{u} \in C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ є розв'язком задачі (4.1), (4.7) і зображується рядом вигляду (4.4), в якому кожен коефіцієнт $\bar{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі (4.5), (4.8), яка для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ за умов (4.13) має лише тривіальний розв'язок. Таким чином, $\bar{u}_k(t) \equiv 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$, тобто $u_{1k}(t) \equiv u_{2k}(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Тоді з теореми 6.2 [39, с. 111], враховуючи, що $u_1,\ u_2 \in C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$, випливає, що для кожного $t \in [0,T]$ функції u_1 і u_2 співпадають між собою. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Зауваження 4.1. *Очевидно, що j-та умова, $j \in \{1,\ldots,n\}$, із* (4.13) *виконується, якщо справджується хоч одна з таких умов:*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p,\ \forall m \in \mathbb{Z}) \quad -\operatorname{Im}\eta_j(k)T \neq \pi(m+1/2), \quad (4.14)$$

або

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p) \quad \operatorname{Re}\eta_j(k)T \neq 0. \quad (4.15)$$

Теорема 4.2. *Нехай справджуються умови* (4.13). *Якщо* $\varphi_j \in \mathcal{T}'$ $(\mathcal{T})$, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (4.1), (4.2) *з простору* $C^{2n}([0,T];\mathcal{T}')$ $\left(C^{2n}([0,T];\mathcal{T})\right)$; *цей розв'язок визначає формула*

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t)\, e^{(ik,x)} :=$$

$$:= \sum_{|k|\geq 0} \sum_{q,j=1}^{n} S_{n-j}^{(q)} \frac{\varphi_{jk}\eta_q\left(e^{-\eta_q t} + e^{-2\eta_q T + \eta_q t}\right) + \varphi_{n+j,k}\left(e^{\eta_q t - \eta_q T} - e^{-\eta_q t - \eta_q T}\right)}{(-1)^{n+j}\,\eta_q\left(1 + e^{-2\eta_q T}\right)\prod_{s=1, s\neq q}^{n}\left(\eta_q^2 - \eta_s^2\right)} e^{(ik,x)}, \tag{4.16}$$

де $S_l^{(q)}$, $l \in \{1,\ldots,n-1\}$, *– сума всіх можливих добутків елементів* $\eta_1^2,\ldots,\eta_{q-1}^2$, $\eta_{q+1}^2,\ldots,\eta_n^2$, *узятих по* l *штук у кожному добутку,* $S_0^{(q)} \equiv 1$.

Доведення теореми грунтується на теоремі 6.2 з [39, с. 111] (згідно з якою у просторі $\mathcal{T}'$ довільний тригонометричний ряд є збіжним) і на тому факті, що простір $\mathcal{T}$ неперервно вкладається у простір $\mathcal{T}'$ [39, с. 110].

Для проміжних просторів (між $C^{2n}([0,T],\mathcal{T})$ і $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$), зокрема для просторів $C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))$, $q \in \mathbb{R}$, існування розв'язку задачі (4.1), (4.2) пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників, бо модулі виразів $\eta_q(k)$, $\eta_q^2(k) - \eta_s^2(k)$, $1 + e^{-2\eta_q T}$, $q, s \in \{1, \ldots, n\}$, $q \neq s$, які входять множниками у знаменники членів ряду (4.16), будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Для λ-коренів рівняння (4.11) (див. [108, с. 101]) отримуємо оцінки

$$|\lambda_j(0)| \leq c_0, \quad |\lambda_j(k)| \leq c_1 |k|^2, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}; \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4.17}$$

де $c_0 = 2 \max\limits_{s_0 \in \{0,\ldots,n-1\}} \sqrt[n-s_0]{\left|A_{(s_0,0,\ldots,0)}\right|}$, $c_1 = 2 \max\limits_{s_0 \in \{0,\ldots,n-1\}} \sqrt[n-s_0]{\sum\limits_{|s|\leq 2(n-s_0)} \left|A_{(s_0,s_1,\ldots s_p)}\right|}$; з формули (4.10) та оцінок (4.17) випливає, що

$$|\eta_j(0)| \leq \sqrt{c_0}, \quad |\eta_j(k)| \leq \sqrt{c_1}\,|k|, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}; \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.18}$$

Теорема 4.3. *Нехай справджуються умови* (4.13) *та існують такі додатні сталі* c_2, c_3, c_4, α_1, α_2, α_3, *що для всіх (крім скінченної кількості)* *векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *правильними є оцінки*

$$|\eta_q(k)| \geq c_2 (1+|k|)^{-\alpha_1}, \quad q\in\{1,\ldots,n\}, \tag{4.19}$$

$$\prod_{s=1, s\neq q}^{n} \left|\eta_q^2(k)-\eta_s^2(k)\right| \geq c_3 (1+|k|)^{-\alpha_2}, \quad q\in\{1,\ldots,n\}, \tag{4.20}$$

$$\left|1+e^{-2\eta_q(k)T}\right| \geq c_4 (1+|k|)^{-\alpha_3}, \quad q\in\{1,\ldots,n\}. \tag{4.21}$$

Якщо $\varphi_s \in H_{\chi+q}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s} \in H_{\chi+\alpha_1+q}(\Omega^p)$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, $\chi = 2n-2+\alpha_2+\alpha_3$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (4.1), (4.2) *з простору* $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$. *Цей розв'язок справджує нерівність* $\left\|u;C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))\right\| \leq c_5\Big(\sum_{s=1}^{n}\|\varphi_s;H_{\chi+q}\|+\sum_{s=n+1}^{2n}\|\varphi_s;H_{\chi+\alpha_1+q}\|\Big)$, де $c_5=c_5(A_{\hat{s}},|\hat{s}|^*\leq 2n;n,c_2,c_3,c_4)$.

Доведення. На підставі формули (4.16) та оцінок (4.18)–(4.21) для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ отримуємо

$$\max_{0\leq t\leq T}\left|u_k^{(q)}(t)\right| \leq c_6\left((1+|k|)^{h_1+q}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}|+c_2^{-1}(1+|k|)^{h_2+q}\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|\right),$$
$$q\in\{0,1,\ldots,2n\}, \tag{4.22}$$

де $h_1=2n-2+\alpha_2+\alpha_3$, $h_2=h_1+\alpha_1$, $c_6=n\left(\max\{c_0,c_1\}\right)^{n-1+q/2}(c_3c_4)^{-1}$.

На підставі формули (4.16), оцінок (4.22) і того факту, що середнє арифметичне скінченної кількості додатних чисел не перевищує їхнього середнього квадратичного, отримаємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (4.1), (4.2):

$$\left\|u;C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))\right\| := \sum_{r=0}^{2n}\max_{0\leq t\leq T}\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}\left|u_k^{(r)}(t)\right|^2\left(1+|k|^2\right)^{q-r}} \leq$$

$$\leq \sum_{r=0}^{2n}\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}c_6^2\left|(1+|k|)^{h_1+r}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}|+c_2^{-1}(1+|k|)^{h_2+r}\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|\right|^2\left(1+|k|^2\right)^{q-r}} \leq$$

$$\leq (2n+1)\sqrt{2}c_6\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}\left(1+|k|^2\right)^{h_1+q}\left|\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}|\right|^2+}$$

$$+\left(2n+1\right)c_6c_2^{-1}\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}\left(1+|k|^2\right)^{h_2+q}\left|\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|\right|^2}\leq$$

$$\leq\left(2n+1\right)\sqrt{2}c_6\sqrt{n\sum_{|k|\geq 0}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{sk}|^2\left(1+|k|^2\right)^{h_1+q}}+$$

$$+\left(2n+1\right)c_6c_2^{-1}\sqrt{n\sum_{|k|\geq 0}\sum_{s=n+1}^{2n}|\varphi_{sk}|^2\left(1+|k|^2\right)^{h_2+q}}\leq$$

$$\leq c_7\left(\sum_{s=1}^{n}\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}|\varphi_{sk}|^2\left(1+|k|^2\right)^{h_1+q}}+\sum_{s=n+1}^{2n}\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}|\varphi_{sk}|^2\left(1+|k|^2\right)^{h_2+q}}\right)=$$

$$=c_7\left(\sum_{s=1}^{n}\|\varphi_s;H_{h_1+q}\|+\sum_{s=n+1}^{2n}\|\varphi_s;H_{h_2+q}\|\right),$$

де $c_7=c_6\sqrt{2n}\left(2n+1\right)\max\left\{1,c_2^{-1}\right\}$.

З отриманої нерівності випливає доведення теореми.$\diamondsuit$

Вияснимо можливість виконання оцінок (4.19)–(4.21). Позначимо через $b=(b_1,\ldots,b_\beta)\in\mathbb{Z}^\beta$ та $d=(d_1,\ldots,d_\beta)\in\mathbb{Z}^\beta$ вектори, складені, відповідно, із дійсних та уявних частин коефіцієнтів $A_{(0,s)}$ рівняння (4.1), де β – кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах нерівності $s_1+s_2+\cdots+s_p\leq 2n$, а через $l=(l_1,\ldots,l_\gamma)\in\mathbb{Z}^\gamma$ та $h=(h_1,\ldots,h_\gamma)\in\mathbb{Z}^\gamma$ – вектори, складені, відповідно, із дійсних та уявних частин коефіцієнтів $A_{(s_0,s)}$ рівняння (4.1), де γ – кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах нерівності $2s_0+s_1+s_2+\cdots+s_p\leq 2n$.

Лема 4.1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b і довільного фіксованого вектора d, або для довільного фіксованого вектора b і майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів d нерівності* (4.19) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\alpha_1>n+p/2-1$.*

Доведення. Вільний член $P_0\left(k\right)$ рівняння (4.11) зобразимо таким чином:

$$P_0\left(k\right):=\sum_{|s|\leq 2n}A_{(0,s)}\left(ik_1\right)^{s_1}\ldots\left(ik_p\right)^{s_p}=A_{(0,2n,0,\ldots,0)}\left(-1\right)^n k_1^{2n}+R_0\left(k\right)=$$

$$= (-1)^n \operatorname{Re} A_{(0,2n,0,\ldots,0)} k_1^{2n} + \operatorname{Re} R_0(k) + i \left[(-1)^n \operatorname{Im} A_{(0,2n,0,\ldots,0)} k_1^{2n} + \operatorname{Im} R_0(k) \right], \tag{4.23}$$

де $k \in \mathbb{Z}^p$, а $R_0(k)$ не містить коефіцієнта $A_{(0,2n,0,\ldots,0)}$.

Аналогічно, як при доведенні теореми 4.4 з [80, с. 61], враховуючи (4.23), отримаємо, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ нерівність

$$|\operatorname{Re} P_0(k)| \geq (1 + |k|)^{-p-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{4.24}$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b та довільного фіксованого вектора d, а нерівність

$$|\operatorname{Im} P_0(k)| \geq (1 + |k|)^{-p-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1 \tag{4.25}$$

– для довільного фіксованого вектора b та майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів d. Таким чином, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b і довільного фіксованого вектора d, або для довільного фіксованого вектора b і майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів d оцінка

$$|P_0(k)| \geq (1 + |k|)^{-p-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{4.26}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

На підставі теореми Вієта отримуємо, що

$$|\lambda_q(k)| = \frac{|P_0(k)|}{|\lambda_1(k) \ldots \lambda_{q-1}(k)\, \lambda_{q+1}(k) \ldots \lambda_n(k)|}, \quad q \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.27}$$

З рівностей (4.27), оцінок (4.17) та (4.26) отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b і довільного фіксованого вектора d, або для довільного фіксованого вектора b і майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів d оцінки $|\lambda_q(k)| \geq c_8 (1 + |k|)^{-(2n+p-2+\varepsilon)}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, $0 < \varepsilon < 1$, справджуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, що із врахуванням формул (4.10) доводить лему.$\diamondsuit$

Лема 4.2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів l і довільного фіксованого вектора h, або для довільного фіксованого вектора*

l і майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів h, нерівності (4.20) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\alpha_2>(n-1)p/2$.*

Доведення. Для дискримінанта $D\,(P)$ полінома $P\ :=\ P\,(\lambda,ik)$ з параметром $k\in\mathbb{Z}^p$ справедливим є таке зображення [61, с. 265]:

$$D\,(P)=\prod_{n\geq i>j\geq 1}\left(\lambda_i(k)-\lambda_j(k)\right)^2, \tag{4.28}$$

де $\lambda_q(k)$, $q\in\{1,\ldots,n\}$, – корені рівняння (4.11).

Аналогічно, як при доведенні теореми 4.5 із [80, с. 62], встановлюємо, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ нерівність

$$|\mathrm{Re}\,D\,(P)|\geq(1+|k|)^{(n-1)(2n-p)-\varepsilon},\quad 0<\varepsilon<1, \tag{4.29}$$

виконується для довільного фіксованого вектора h та майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів l, а нерівність

$$|\mathrm{Im}\,D\,(P)|\geq(1+|k|)^{(n-1)(2n-p)-\varepsilon},\quad 0<\varepsilon<1 \tag{4.30}$$

– для довільного фіксованого вектора l та майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів h. Таким чином, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів l і довільного фіксованого вектора h, або для довільного фіксованого вектора l і майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів h, оцінка

$$|D\,(P)|\geq(1+|k|)^{(n-1)(2n-p)-\varepsilon},\quad 0<\varepsilon<1, \tag{4.31}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$.

На підставі формули (4.28), оцінок (4.17) та (4.31) отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів l і довільного фіксованого вектора h, або для довільного фіксованого вектора l і майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів h, оцінка

$$\left|\prod_{\substack{s=1,\\ s\neq q}}^{n}(\lambda_q(k)-\lambda_s(k))\right|=\left|\frac{\prod\limits_{n\geq i>j\geq 1}(\lambda_i(k)-\lambda_j(k))}{\prod\limits_{\substack{n\geq i>j\geq 1\\ i,j\neq q}}(\lambda_i(k)-\lambda_j(k))}\right|\geq c_9(1+|k|)^{-(n-1)p/2-\varepsilon/2},0<\varepsilon<1,$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, що із врахуванням формул (4.10) доводить лему. $\Diamond$

Лема 4.3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b і довільного фіксованого вектора d (або для майже всіх векторів d і довільного фіксованого вектора b) нерівності* (4.21) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\alpha_3 > \alpha_1 + p$, де $\alpha_1 > n + p/2 - 1$.*

Доведення. Для кожної з нерівностей (4.21) лема доводиться однотипно. Розглянемо q-ту нерівність, $q\in\{1,\dots,n\}$, і позначимо $h(T,k) := \left(1 + e^{-2\eta_q(k)T}\right)$. Легко показати, що для кожного $T \in (0,+\infty)$ і для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ справджується рівність

$$h(T,k) + \frac{\partial h(T,k)}{\partial T}(2\eta_q(k))^{-1} = 1, \tag{4.32}$$

з якої випливає, що

$$\max\left\{|h(T,k)|, \left|\frac{\partial h(T,k)}{\partial T}(2\eta_q(k))^{-1}\right|\right\} \geq \frac{1}{2}, \quad T \in (0,+\infty), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{4.33}$$

Розглянемо функцію

$$z(T,k) := |h(T,k)| - \left|\frac{\partial h(T,k)}{\partial T}(2\eta_q(k))^{-1}\right|, \quad T \in (0,+\infty), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{4.34}$$

як функцію змінної T і параметра k та встановимо кількість її нулів на проміжку $(0,+\infty)$. На підставі (4.32) і (4.34) отримуємо, що нулі функції z збігаються з нулями функції $z_1(T,k) := h(T,k) - \dfrac{\partial h(T,k)}{\partial T}(2\eta_q(k))^{-1} = 2e^{-2\eta_q(k)T} + 1$. Зауважимо, що рівняння $2e^{-2\eta_q(k)T} + 1 = 0$ еквівалентне системі рівнянь

$$\begin{cases} \cos(2\mathrm{Im}\,\eta_q(k)T) = -\frac{1}{2}e^{2\mathrm{Re}\,\eta_q(k)T}, \\ \sin(2\mathrm{Im}\,\eta_q(k)T) = 0, \end{cases} k \in \mathbb{Z}^p. \tag{4.35}$$

Очевидно, що система (4.35) має відносно T розв'язок, причому єдиний, лише при тих значеннях векторного параметра $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких $\mathrm{Re}\,\eta_q(k) \neq 0$, а $\dfrac{\ln 2\,\mathrm{Im}\,\eta_q(k)}{\pi\,\mathrm{Re}\,\eta_q(k)}$ є непарним цілим числом; множину таких векторів $k \in \mathbb{Z}^p$

позначимо через K. Розв'язок системи (4.35) є додатним і зображається так: $\tilde{T}(k) = \dfrac{\ln 2}{2\mathrm{Re}\,\eta_q(k)}$, $k \in K$.

Розглянемо відрізок $(0, T_0]$, де $0 < T_0 < +\infty$, і запровадимо такі позначення: $E(T_0)$ – множина тих значень $T \in (0, T_0]$, для яких нерівність

$$|h(T,k)| < c_4\,(1 + |k|)^{-\alpha_3} \tag{4.36}$$

є правильною для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$; $E\left(T_0, \bar{k}\right)$ – множина тих значень $T \in (0, T_0]$, для яких нерівність (4.36) справедлива при фіксованому $k = \bar{k} \in \mathbb{Z}^p$; $E_1\left(T_0, \bar{k}\right)$ та $E_2\left(T_0, \bar{k}\right)$ – множини тих значень $T \in (0, T_0]$, для яких нерівності $|\mathrm{Re}\,h(T,k)| < c_4\,(1 + |k|)^{-\alpha_3}$ та $|\mathrm{Im}\,h(T,k)| < c_4\,(1 + |k|)^{-\alpha_3}$, відповідно, справедливі при фіксованому $k = \bar{k} \in \mathbb{Z}^p$; $K_1 = \{k \in K : \tilde{T}(k) \geq T_0\}$; $K_2 = (\mathbb{Z}^p \backslash K) \bigcup K_1$.

Якщо $\bar{k} \in K_2$, то на відрізку $(0, T_0]$ функція z не має нулів. Позначимо $K_3 = \{k \in K_2 : z(T,k) > 0, \quad T \in (0, T_0]\}$. Якщо $\bar{k} \in K_3$, то на підставі (4.33), (4.34) отримуємо, що

$$\left|h(T,\bar{k})\right| \geq \frac{1}{2}, \quad T \in (0, T_0]. \tag{4.37}$$

Таким чином,

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}(E(T_0, \bar{k})) = 0, \quad \bar{k} \in K_3, \tag{4.38}$$

коли $c_4 < 1/2$.

Якщо $\bar{k} \in K_2 \backslash K_3$, то $z(T,\bar{k}) < 0$ для всіх $T \in (0, T_0]$; тоді на підставі (4.33), (4.34) отримуємо, що

$$\left|\frac{\partial h(T,\bar{k})}{\partial T}\right| \geq \left|\eta_q(\bar{k})\right|, \quad T \in (0, T_0], \quad \bar{k} \in K_2 \backslash K_3. \tag{4.39}$$

З оцінки (4.39) та леми 4.1 випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b і довільного фіксованого вектора d (або для майже всіх векторів d і довільного фіксованого вектора b) для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\bar{k}$ справджується одна з таких нерівностей:

$$\left|\frac{\partial}{\partial T}\big(\mathrm{Re} h(T,\bar{k})\big)\right| \geq \frac{c_2}{\sqrt{2}}\big(1+|\bar{k}|\big)^{-\alpha_1}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial T}\big(\mathrm{Im} h(T,\bar{k})\big)\right| \geq \frac{c_2}{\sqrt{2}}\big(1+|\bar{k}|\big)^{-\alpha_1}, \tag{4.40}$$

де $T \in (0, T_0]$, $\bar{k} \in K_2 \backslash K_3$.

Згідно з лемою 2.2 [80, с. 15], на підставі оцінок (4.40), отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b і довільного фіксованого вектора d (або для майже всіх векторів d і довільного фіксованого вектора b) для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\bar{k}$ справджується одна з нерівностей

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E_1(T_0, \bar{k}) \le c_{10} \big(1 + |\bar{k}|\big)^{-(\alpha_3 - \alpha_1)}, \ \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E_2(T_0, \bar{k}) \le c_{10} \big(1 + |\bar{k}|\big)^{-(\alpha_3 - \alpha_1)}, \tag{4.41}$$

де $\bar{k} \in K_2 \backslash K_3$; оскільки

$$E(T_0, \bar{k}) \subset E_1(T_0, \bar{k}), \quad E(T_0, \bar{k}) \subset E_2(T_0, \bar{k}), \tag{4.42}$$

то на підставі нерівностей (4.41), отримуємо, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0, \bar{k}) \le c_{10} \left(1 + |\bar{k}|\right)^{-(\alpha_3 - \alpha_1)}, \quad \bar{k} \in K_2 \backslash K_3. \tag{4.43}$$

З формул (4.38) і (4.43) випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b і довільного фіксованого вектора d (або для майже всіх векторів d і довільного фіксованого вектора b) для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\bar{k}$ виконується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0, \bar{k}) \le c_{10} \left(1 + |\bar{k}|\right)^{-(\alpha_3 - \alpha_1)}, \quad \bar{k} \in K_2. \tag{4.44}$$

Якщо $\bar{k} \in K \backslash K_1$, тобто функція z має один нуль $\tilde{T}(\bar{k})$, який належить відрізку $(0, T_0]$, то відрізок $(0, T_0]$ розбиваємо на відрізки $J_1 = (0, \tilde{T})$ і $J_2 = (\tilde{T}, T_0]$. На кожному з них функція z нулів не має. Провівши на кожному з відрізків J_1 і J_2 викладки, аналогічні наведеним вище, отримаємо, що на відрізку $(0, T_0]$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b і довільного фіксованого вектора d (або для майже всіх векторів d і довільного фіксованого вектора b) для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\bar{k}$ справджується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0, \bar{k}) \le 2c_{10} \left(1 + |\bar{k}|\right)^{-(\alpha_3 - \alpha_1)}, \quad \bar{k} \in K \backslash K_1. \tag{4.45}$$

Підсумовуючи оцінки (4.44) і (4.45) за $k \in K_2$ і $k \in K \backslash K_1$, відповідно, для міри множини $E(T_0)$ отримуємо таку оцінку:

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0) \leq c_{11} \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} (1+|k|)^{-(\alpha_3-\alpha_1)}. \tag{4.46}$$

Якщо $\alpha_3 - \alpha_1 > p$, тобто якщо $\alpha_3 > \alpha_1 + p$, то ряд у правій частині нерівності (4.46) є збіжним, тому на підставі леми 2.1 $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(T_0) = 0$, тобто для майже всіх $T \in (0, T_0]$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\beta$) векторів b і довільного фіксованого вектора d (або для майже всіх векторів d і довільного фіксованого вектора b) виконується нерівність, протилежна до нерівності (4.36), для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Враховуючи той факт, що проміжок $(0, +\infty)$ можна покрити зліченною кількістю відрізків довжиною T_0, отримуємо доведення леми. $\diamondsuit$

Із теореми 4.3 та лем 4.1–4.3 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.1. *Якщо* $\varphi_s \in H_{q+\chi}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s} \in H_{q+\chi+p/2+n-1}(\Omega^p)$, $\chi > (pn)/2 + 3n + p - 3$, $s \in \{1, \ldots, n\}$, *то, за умов* (4.13), *для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для майже всіх коефіцієнтів рівняння* (4.1) *у просторі* $C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))$ *існує єдиний розв'язок задачі* (4.1), (4.2); *цей розв'язок справджує нерівність*

$$\left\| u; C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p)) \right\| \leq c_{12} \left(\sum_{s=1}^{n} \|\varphi_s; H_{q+\chi}\| + \sum_{s=n+1}^{2n} \left\| \varphi_s; H_{q+\chi+p/2+n-1} \right\| \right).$$

Наведемо частинний випадок рівняння (4.1), для якого отримано кращу оцінку знизу малого знаменника, ніж у лемі 4.3, а отже, і слабші умови на вихідні дані у теоремах існування розв'язку задачі (4.1), (4.2) зі шкали просторів $C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))$, $q \in \mathbb{R}$.

Приклад 4.1. Розглянемо випадок, коли рівняння (4.1) є гіперболічним за Гордінгом. Тоді, згідно з припущенням, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ корені $\eta_1(k), \ldots, \eta_n(k), -\eta_1(k), \ldots, -\eta_n(k)$ рівняння (4.9) є різними і $\operatorname{Re} \eta_j(k) \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, справджуються оцінки

$$0 \leq \operatorname{Re} \eta_j(k) \leq H, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{4.47}$$

У цьому випадку справджуться теореми 4.1–4.3 та леми 4.1, 4.2, а також наступна лема.

Лема 4.4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для фіксованих коефіцієнтів рівняння* (4.1) *нерівності* (4.21) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_3 > p$.

Доведення. На підставі оцінок (4.47) отримуємо, що

$$\left|1 + e^{-2\eta_j(k)T}\right| \geq e^{-HT}\left|e^{\eta_j(k)T} + e^{-\eta_j(k)T}\right|, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.48}$$

Легко показати, що для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\left|e^{\eta_j(k)T}+e^{-\eta_j(k)T}\right| = \sqrt{\left(\exp(T\mathrm{Re}\,\eta_j(k)) - \exp(-T\mathrm{Re}\,\eta_j(k))\right)^2 + 4\cos^2(T\mathrm{Im}\,\eta_j(k))}. \tag{4.49}$$

Якщо виконується умова (4.14), то з формули (4.49), враховуючи елементарну нерівність $\sin x \geq 2x/\pi$, $x \in [0, \pi/2]$, для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$ отримуємо таку оцінку:

$$\left|e^{\eta_j(k)T}+e^{-\eta_j(k)T}\right| > 2|\cos(T\mathrm{Im}\,\eta_j(k))| = 2|\sin|T\mathrm{Im}\,\eta_j(k) - \pi/2 - m_j(k)\pi|| \geq$$

$$\geq 2T|k|\left|\frac{2\mathrm{Im}\,\eta_j(k)}{\pi|k|} - \frac{(2m_j(k)+1)/T}{|k|}\right|, \tag{4.50}$$

де $m_j(k) \in \mathbb{Z}$ таке, що $|T\mathrm{Im}\,\eta_j(k) - \pi/2 - m_j(k)\pi| \leq \pi/2$. На підставі формул (4.50), оцінок (4.18), леми 2.2 та неперервності функції $y(T) = 1/T$ при $T > 0$ отримуємо, що нерівності

$$\left|e^{\eta_j(k)T} + e^{-\eta_j(k)T}\right| \geq 2T(1+|k|)^{-(p+\varepsilon)}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{4.51}$$

справджуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T для всіх (крім скінченої кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Множина чисел T, для яких умова (4.14) не справджується, є зліченною множиною, і її міра Лебега рівна нулеві.

Із сказаного вище та оцінок (4.48), (4.51) випливає доведення леми. $\diamondsuit$

Твердження 4.1. *Нехай рівняння* (4.1) *є гіперболічним за Гордінгом і справджуються умови* (4.13). *Якщо* $\varphi_s \in H_{q+\chi}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s} \in H_{q+\chi+p/2+n-1}(\Omega^p)$, $\chi > 2(n-1) + p/2(n+1)$, $s \in \{1, \ldots, n\}$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для майже всіх коефіцієнтів рівняння* (4.1) *у просторі* $C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))$ *існує єдиний розв'язок задачі* (4.1), (4.2). *Цей розв'язок справджує нерівність*

$$\left\|u; C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))\right\| \leq c_{13} \left(\sum_{s=1}^{n} \|\varphi_s; H_{q+\chi}\| + \sum_{s=n+1}^{2n} \left\|\varphi_s; H_{q+\chi+p/2+n-1}\right\| \right).$$

4.1.2. Рівняння з факторизованим оператором. Розглянемо задачу з умовами (4.2) для рівняння

$$\prod_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\sum_{s=1}^{p} a_{js} \frac{\partial}{\partial x_s} + b_j \right)^2 \right] u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in D^p, \ a_{js}, b_j \in \mathbb{C}. \tag{4.52}$$

Позначимо: $\eta_j^*(k) := b_j + i \sum_{s=1}^{p} a_{js} k_s$, $j \in \{1, \ldots, n\}$;
$a_{js}^{(1)} = \mathrm{Re} a_{js}$, $a_{js}^{(2)} = \mathrm{Im} a_{js}$, $b_j^{(1)} = \mathrm{Re} b_j$, $b_j^{(2)} = \mathrm{Im} b_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $s \in \{1, \ldots, p\}$;
$\bar{a}_1 = \left(a_{11}^{(1)}/b_1^{(2)}, \ldots, a_{1p}^{(1)}/b_1^{(2)}, a_{21}^{(1)}/b_2^{(2)}, \ldots, a_{2p}^{(1)}/b_2^{(2)}, \ldots, a_{n1}^{(1)}/b_n^{(2)}, \ldots, a_{np}^{(1)}/b_n^{(2)} \right)$,
$\bar{a}_2 = \left(a_{11}^{(2)}/b_1^{(1)}, \ldots, a_{1p}^{(2)}/b_1^{(1)}, a_{21}^{(2)}/b_2^{(1)}, \ldots, a_{2p}^{(2)}/b_2^{(1)}, \ldots, a_{n1}^{(2)}/b_n^{(1)}, \ldots, a_{np}^{(2)}/b_n^{(1)} \right)$.
Надалі вважатимемо, що

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p) \qquad (\eta_j^*(k))^2 \neq (\eta_r^*(k))^2, \qquad j, r \in \{1, \ldots, n\}, \qquad j \neq r.$$

Із теореми 4.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.2. *Для єдиності розв'язку задачі* (4.2), (4.52) *у просторі* $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}')$ *необхідно і достатньо, щоб справджувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p, \ \forall m \in \mathbb{Z}) \quad b_j + i \sum_{s=1}^{p} a_{js} k_s \neq i\pi (m + 1/2)/T, \ j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.53}$$

Очевидно, що j-та умова, $j \in \{1, \ldots, n\}$, із (4.53) виконується, якщо справджується хоч одна з таких умов:

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p, \ \forall m \in \mathbb{Z}) \quad b_j^{(2)} + \sum_{s=1}^{p} a_{js}^{(1)} k_s \neq \pi (m + 1/2)/T, \tag{4.54}$$

або

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p) \quad b_j^{(1)} - \sum_{s=1}^{p} a_{js}^{(2)} k_s \neq 0. \tag{4.55}$$

Для задачі (4.2), (4.52) (за умов (4.53)) справедливі теореми 4.2, 4.3, у яких треба покласти замість $\eta_j(k)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, вирази $\eta_j^*(k)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, а також наступні леми.

Лема 4.5. *Для довільного фіксованого вектора $\bar{a}_1$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{np}$) векторів $\bar{a}_2$, або для довільного фіксованого вектора $\bar{a}_2$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{np}$) векторів $\bar{a}_1$, нерівності*

$$\left| b_j + i\sum_{s=1}^{p} a_{js} k_s \right| \geq c_{14} \left(1 + |k|\right)^{-\alpha_1}, \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{4.56}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\alpha_1 > p/n$.

Доведення. Очевидно, що $\left|\eta_j^*(k)\right| \geq \left|\mathrm{Re}\,\eta_j^*(k)\right| = b_j^{(1)} \left| \frac{a_{j1}^{(2)}}{b_j^{(1)}} k_1 + \cdots + \frac{a_{jp}^{(2)}}{b_j^{(1)}} k_p - 1 \right|$, $\left|\eta_j^*(k)\right| \geq \left|\mathrm{Im}\,\eta_j^*(k)\right| = b_j^{(2)} \left| \frac{a_{j1}^{(1)}}{b_j^{(2)}} k_1 + \cdots + \frac{a_{jp}^{(1)}}{b_j^{(2)}} k_p + 1 \right|$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. За теоремою 2.4, враховуючи збіжність інтегралу $\int_c^\infty x^{p-1} (1+x)^{-\alpha_1 n} dx$ при $\alpha_1 > p/n$, для майже всіх векторів $\bar{a}_1 \in \mathbb{R}^{np}$ ($\bar{a}_2 \in \mathbb{R}^{np}$) система нерівностей

$$\left|\mathrm{Re}\,\eta_j^*(k)\right| \geq c_{15} \left(1+|k|\right)^{-\alpha_1} \quad \left(\left|\mathrm{Im}\,\eta_j^*(k)\right| \geq c_{15} \left(1+|k|\right)^{-\alpha_1}\right), \quad j \in \{1,\ldots,n\},$$

$c_{14} = c_{15}(p,n)$, справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\alpha_1 > p/n$.

Отже, нерівності (4.56) виконуються для довільного фіксованого вектора $\bar{a}_2$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{np}$) векторів $\bar{a}_1$, або для довільного фіксованого вектора $\bar{a}_1$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{np}$) векторів $\bar{a}_2$, для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\alpha_1 > p/n$. Лему доведено. $\diamondsuit$

Лема 4.6. *Для довільного фіксованого вектора $\bar{a}_2$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{(n-1)p}$) векторів $\bar{a}_1$, або для довільного фіксованого* *вектора* $\bar{a}_1$ *та для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{(n-1)p}$*) векторів* $\bar{a}_2$*, нерівності*

$$\prod_{j=1, j\neq m}^{n} \left|(\eta_j^*(k))^2 - (\eta_m^*(k))^2\right| :=$$

$$:= \prod_{j=1, j\neq m}^{n} \left| \left(b_j - b_m + i \sum_{s=1}^{p} (a_{js} - a_{ms})\, k_s \right) \left(b_j + b_m + i \sum_{s=1}^{p} (a_{js} + a_{ms})\, k_s \right) \right| \geq$$

$$\geq c_{16} \left(1 + |k|\right)^{-\alpha_2}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad m \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4.57}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_2 > 2p$.

Доведення проводиться за схемою доведення леми 4.5.

Лема 4.7. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{np)}$*) векторів* $\bar{a}_1$ *і довільного фіксованого вектора* $\bar{a}_2$ *або для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{np)}$*) векторів* $\bar{a}_2$ *і довільного фіксованого вектора* $\bar{a}_1$ *нерівності*

$$\left| 1 + \exp\left[-2T \left(b_j + i \sum_{s=1}^{p} a_{js} k_s \right) \right] \right| \geq c_{17} \left(1 + |k|\right)^{-\alpha_3}, \quad q \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4.58}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_3 > \alpha_1 + p$*, де* $\alpha_1 > p/n$.

Доведення проводиться за схемою доведення леми 4.3 з використанням леми 4.5.

Твердження 4.2. *Нехай справджуються умови* (4.53). *Якщо функції* $\varphi_s \in H_{q+\chi}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s} \in H_{q+\chi+p/n}(\Omega^p)$, $\chi > 2n + 3p + p/n - 2$, $s \in \{1, \ldots, n\}$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для майже всіх коефіцієнтів рівняння* (4.52) *у просторі* $C^{2n}([0, T], H_q(\Omega^p))$ *існує єдиний розв'язок задачі* (4.2), (4.52). *Цей розв'язок справджує нерівність*

$$\left\| u; C^{2n}\left([0, T], H_q(\Omega^p)\right) \right\| \leq c_{18} \left(\sum_{s=1}^{n} \|\varphi_s; H_{q+\chi}\| + \sum_{s=n+1}^{2n} \left\|\varphi_s; H_{q+\chi+p/n}\right\| \right).$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4.3 з використанням лем 4.5 – 4.7.

4.2. Випадок системи рівнянь

В області D^p розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\,(t,x):=\sum_{|\hat{s}|^*\le 2n}A_{\hat{s}}\frac{\partial^{|\hat{s}|^*}u\,(t,x)}{\partial t^{2s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}}=f\,(t,x)\,, \tag{4.59}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)}u\,(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^{2r-1}u\,(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T}=0,\quad r\in\{1,\ldots,n\}\,, \tag{4.60}$$

де $A_{\hat{s}}$ – $m{\times}m$-матриці зі сталими дійсними елементами, причому $\det A_{n,0,\ldots,0}\neq 0$, $u\,(t,x)=col\,(u_1\,(t,x)\,,\ldots,u_m\,(t,x))$, $f\,(t,x)=col\,(f_1\,(t,x)\,,\ldots,f_m\,(t,x))$.

На тип системи рівнянь (4.59) ніяких обмежень не накладаємо. Вигляд області D^p накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1,\ldots,x_p$ на праву частину рівняння (4.59) і на розв'язок задачі (4.59), (4.60).

Зауважимо, що система функцій $\{\exp\,(ik,x)\,,k\in\mathbb{Z}^p\}$ утворює повну ортогональну систему в просторі $L_2\,(\Omega^p)$.

Розглянемо тепер задачу на власні значення (з огляду на умови (4.60)):

$$y''\,(t)+\lambda y\,(t)=0,\quad y\,(0)=y'\,(T)=0. \tag{4.61}$$

Множина власних значень задачі (4.61) є такою: $\Lambda=\{\lambda_{k_0}=(k_0+1/2)^2\,\pi^2/T^2,k_0\in\mathbb{Z}_+\}$, а власні функції утворюють систему $\Upsilon=\{\sin\,((k_0+1/2)\,t\pi/T)\,,k_0\in\mathbb{Z}_+\}$, яка є повною і ортогональною в $L_2\,(0,T)$.

Згідно з лемою з праці [79, с. 217] система функцій

$$\{\,\sin\,((k_0+1/2)\,t\pi/T)\exp\,(ik,x)\;,\quad k_0\in\mathbb{Z}_+,\quad k\in\mathbb{Z}^{\,p}\} \tag{4.62}$$

є повною і ортогональною у просторі $L_2\,(D^p)$.

Введемо такі позначення: $H_q\,(D^p)$, $q{\in}\mathbb{Z}_+$, – простір комплекснозначних функцій $\upsilon\,(t,x)=\sum\limits_{k_0=0}^{\infty}\sum\limits_{|k|\ge 0}\upsilon_{\tilde{k}}\sin\,((k_0+1/2)\,t\pi/T)\exp\,(ik,x)$ зі скінченною нормою $\|\upsilon;H_q\,(D^p)\|^2:=2^{p-1}T\pi^p\sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_{|k|\ge 0}(1+|\tilde{k}|^2)^q\,|\upsilon_{\tilde{k}}|^2$; $\overline{H}_q\,(D^p)$, $q\in$

$\mathbb{Z}_+$, – простір вектор-функцій $\upsilon(t,x) = (\upsilon_1(t,x), \ldots, \upsilon_m(t,x))$, для яких $\upsilon_j \in H_q(D^p)$, $j \in \{1, \ldots, m\}$; $\left\|\upsilon; \overline{H}_q(D^p)\right\|^2 := \sum\limits_{j=0}^{m} \|\upsilon_j; H_q(D^p)\|^2$.

Припустимо, що $f(t,x) \in L_2(D^p)$ і

$$f(t,x) = \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{|k|\geq 0} f_{\tilde{k}} \sin((k_0 + 1/2)\, t\pi/T) \exp(ik,x)\,, f_{\tilde{k}} = col(f_{\tilde{k}1}, \ldots, f_{\tilde{k}m})\,, \tag{4.63}$$

$$f_{\tilde{k}j} = c_{19} \int_0^T \int_{\Omega^p} f_j(t,x) \sin((k_0 + 1/2)\, t\pi/T) \exp(-ik,x)\, dtdx, j \in \{1, \ldots, m\}\,, \tag{4.64}$$

де $c_{19} = 2^{1-p}\big/ (T\pi^p)$.

Розв'язок задачі (4.59), (4.60) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{|k|\geq 0} u_{\tilde{k}} \sin((k_0 + 1/2)\, t\pi/T) \exp(ik,x)\,, \tag{4.65}$$

де $u_{\tilde{k}} = col(u_{\tilde{k}1}, \ldots, u_{\tilde{k}m})$. Очевидно, що кожен член ряду (4.65) задовольняє умови (4.60). Якщо коефіцієнти $u_{\tilde{k}}$ такі, що ряд (4.65) і ряди, отримані з нього почленним диференціюванням до порядку $2n-1$ включно, рівномірно збігаються в D^p, то і функція (4.65) задовольняє умови (4.60).

Підставляючи ряди (4.63) і (4.65) у систему рівнянь (4.59), отримуємо для визначення компонент кожного вектора $u_{\tilde{k}}$, $\tilde{k} \in K$, лінійну систему алгебричних рівнянь

$$\sum_{|s|^* \leq 2n} (-1)^{s_0} A_s (k_0 + 1/2)^{2s_0} (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_p)^{s_p} \omega^{s_0} u_{\tilde{k}} = f_{\tilde{k}}, \tag{4.66}$$

визначник якої позначимо через $\Delta(\tilde{k}, \omega)$, де $\omega = (\pi/T)^2$.

Теорема 4.4. *Для єдиності розв'язку задачі* (4.59), (4.60) *у просторі* $\overline{H}_{2n}(D^p)$ *необхідно і досить, щоб рівняння*

$$\Delta(\tilde{k}, \omega) = 0 \tag{4.67}$$

не мало розв'язків у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$, $\tilde{k} \in K$.

Доведення. Скористаємось схемою доведення теореми 1 з праці [7].

Необхідність. Нехай $\Delta(\tilde{k}^0, \omega) = 0$ для деякого вектора $\tilde{k}^0 \in K$. Тоді у просторі $\overline{H}_{2n}(D^p)$ існує нетривіальний розв'язок задачі з умовами (4.60) для однорідної системи рівнянь

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = 0, \tag{4.68}$$

який визначає формула

$$u(t,x) = u_{\tilde{k}^0} \sin\left(\left(k_0^0 + 1/2\right) t\pi/T\right) \exp\left(ik_1^0, x\right) \cdots \exp\left(ik_p^0, x\right),$$

де вектор $u_{\tilde{k}^0}$ є розв'язком системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{|s|^* \le 2n} (-1)^{s_0} A_s (k_0 + 1/2)^{2s_0} (ik_1)^{s_1} \dots (ik_p)^{s_p} \omega^{s_0} u_{\tilde{k}} = 0, \tag{4.69}$$

якщо $\tilde{k} = \tilde{k}^0$. Отже, розв'язок неоднорідної задачі (4.59), (4.60) у просторі $\overline{H}_{2n}(D^p)$, якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що задача (4.59), (4.60) має два різні розв'язки u_1, $u_2 \in \overline{H}_{2n}(D^p)$. Тоді функція $u_1 - u_2 = u \in \overline{H}_{2n}(D^p)$ є нетривіальним розв'язком задачі (4.68), (4.60) і визначається рядом вигляду (4.65). З рівностей Парсеваля для функцій $[L(\partial/\partial t, \partial/\partial x) u(t,x)]_j$, $j \in \{1, \dots, m\}$, випливає, що компоненти кожного вектора $u_{\tilde{k}}$, $\tilde{k} \in K$, є розв'язками системи рівнянь (4.69), визначник якої дорівнює $\Delta(\tilde{k}, \omega)$. Якщо рівняння (4.67) не має розв'язків у цілих числах, то для всіх векторів $\tilde{k} \in K$ $u_{\tilde{k}} = (\overrightarrow{0})$. Згідно з теоремою про єдиність розвинення функції з $L_2(D^p)$ у ряд Фур'є отримуємо, що $u(t,x) = (\overrightarrow{0})$ для майже всіх точок $(t,x) \in D^p$, тобто $\left\|u_1(t,x) - u_2(t,x); \overline{H}_{2n}(D^p)\right\| = 0$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Зауважимо, що множина чисел $\eta = \pi/T$, для яких рівняння (4.67) має розв'язки в цілих числах $k_0, k_1, \dots, k_p$, $\tilde{k} \in K$, є зліченною, тобто міра Лебега і розмірність Хаусдорфа цієї множини рівні нулю.

Припустимо, що задача (4.59), (4.60) не може мати двох різних розв'язків із простору $\overline{H}_q(D^p)$, $r \ge 2n$. Тоді для кожного вектора $\tilde{k}$, $\tilde{k} \in K$, система рівнянь (4.66) має єдиний розв'язок, який визначають формули

$$u_{\tilde{k}j} = \sum_{q=1}^{m} \frac{\Delta_{qj}(\tilde{k},\omega)}{\Delta(\tilde{k},\omega)} f_{\tilde{k}q}, \quad j \in \{1,\ldots,m\}\,, \tag{4.70}$$

де $\Delta_{qj}(\tilde{k},\omega)$ – алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині q-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\Delta(\tilde{k},\omega)$; при цьому

$$|\Delta_{qj}(\tilde{k},\omega)| \le c_{20}|\tilde{k}|^{2n(m-1)}, \quad q,j \in \{1,\ldots,m\}\,, \quad \tilde{k} \in K, \tag{4.71}$$

де стала $c_{20} > 0$ не залежить від $\tilde{k}$.

З рівностей (4.65) і (4.70) випливає, що компоненти формального розв'язку $u\,(t,x)$ задачі (4.59), (4.60) зображають формули

$$u_j(t,x) = \sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_{|k|\ge 0}\sum_{q=1}^{m} \frac{\Delta_{qj}(\tilde{k},\omega)}{\Delta(\tilde{k},\omega)} f_{\tilde{k}q} \sin\left((k_0+1/2)\,t\pi/T\right)\exp(ik,x),\ j\in\{1,\ldots,m\}\,. \tag{4.72}$$

Питання про існування розв'язку задачі (4.59), (4.60) у шкалі просторів $\overline{H}_r\,(D^p)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, пов'язане з проблемою малих знаменників, бо величина $|\Delta(\tilde{k},\omega)|$, будучи відмінною від нуля, може ставати як завгодно малою для нескінченної множини векторів $\tilde{k}$, $\tilde{k} \in K$.

Теорема 4.5. *Нехай існує така стала $\alpha \in \mathbb{R}_+$, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\tilde{k}$, $\tilde{k} \in K$, справджується нерівність*

$$|\Delta(\tilde{k},\omega)| > |\tilde{k}|^{-\alpha}. \tag{4.73}$$

Якщо $f\in\overline{H}_{r+\gamma}\,(D^p)$, $\gamma=\alpha+2n\,(m-1)$, то існує розв'язок u задачі (4.59), (4.60) з простору $\overline{H}_r\,(D^p)$; його компоненти визначають формули (4.72). Цей розв'язок справджує нерівність $\left\|u;\overline{H}_r\,(D^p)\right\|^2 \le c_{20}m\left\|f;\overline{H}_{r+\alpha+2n(m-1)}(D^p)\right\|^2$.

Доведення. Із формул (4.72), враховуючи оцінки (4.71) і (4.73), отримуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (4.59), (4.60):

$$\left\|u;\overline{H}_r\,(D^p)\right\|^2 = \sum_{j=1}^{m}\|u_j;H_r\,(D^p)\|^2 := 2^{p-1}T\pi^p\sum_{j=1}^{m}\sum_{k_0=0}^{\infty}\sum_{|k|\ge 0}\left(1+|\tilde{k}|^2\right)^r\left|u_{\tilde{k}j}\right|^2 =$$

$$= 2^{p-1}T\pi^p \sum_{j=1}^{m} \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{|k|\geq 0} \left(1+|\tilde{k}|^2\right)^r \left| \sum_{q=1}^{m} \frac{\Delta_{qj}(\tilde{k},\omega)}{\Delta(\tilde{k},\omega)} f_{\tilde{k}q} \right|^2 \leq$$

$$\leq c_{20} 2^{p-1}T\pi^p \sum_{j=1}^{m} \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{|k|\geq 0} \left(1+|\tilde{k}|^2\right)^r \sum_{q=1}^{m} |\tilde{k}|^{2\alpha+4n(m-1)} \left| f_{\tilde{k}q} \right|^2 \leq$$

$$\leq c_{20} m 2^{p-1}T\pi^p \sum_{q=1}^{m} \sum_{k_0=0}^{\infty} \sum_{|k|\geq 0} \left(1+|\tilde{k}|^2\right)^{r+\alpha+2n(m-1)} \left| f_{\tilde{k}q} \right|^2 =$$

$$= c_{20} m \sum_{q=1}^{m} \left\| f_q; H_{r+\alpha+2n(m-1)}\left(D^p\right) \right\|^2 = c_{20} m \left\| f; \overline{H}_{r+\alpha+2n(m-1)}\left(D^p\right) \right\|^2. \quad (4.74)$$

З оцінки (4.74) випливає доведення теореми. $\diamondsuit$

Дослідимо можливість виконання оцінки (4.73).

Лема 4.8. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* ω *нерівність*

$$\left|\Delta(\tilde{k},\omega)\right| < h^{-pmn-\varepsilon}, \quad (4.75)$$

де $h = \max_{j\in\{0,\ldots,p\}} \{\, |k_j| \,\}$, $0 < \varepsilon < 1$, *має не більше ніж скінченну кількість розв'язків у цілих числах* $k_0, k_1, \ldots, k_p$, $\tilde{k} \in K$.

Доведення виконуємо за схемою доведення теореми 2 з праці [7].

З леми 4. 8 і того, що за відображення $\eta^2 \to \eta$ множина з нульовою мірою Лебега переходить знов у множину нульової міри, випливає таке твердження.

Наслідок 4.3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $\eta = \pi/T$ *нерівність* (4.73) *справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\tilde{k}$, $\tilde{k} \in K$, *якщо* $\alpha > nmp$.

З теореми 4.5, наслідку 4.3 та неперервності функції $y(T) = 1/T$ при $T > 0$ випливає така теорема.

Теорема 4.6. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *існує розв'язок задачі* (4.59), (4.60) *з простору* $\overline{H}_r(D^p)$, $r \geq 2n$, *якщо* $f \in \overline{H}_{r+\gamma}(D^p)$, *де* $\gamma > n(m(p+2)-2)$. *Цей розв'язок неперервно залежить від вектор-функції* $f(t,x)$. *Його компоненти визначають формули* (4.72).

Позначимо через $\overline{C}^r\left(\overline{D}^p\right)$ простір вектор-функцій $v\left(t,x\right)=\left(v_1\left(t,x\right),\ldots,v_m\left(t,x\right)\right)$, для яких $v_j\in C^r\left(\overline{D}^p\right)$, $j\in\{1,\ldots,m\}$.

Зауваження 4.2. *Виходячи з формул* (4.72), *легко показати, що якщо* $f\in\bar{C}^r\left(\overline{D^p}\right)$, *де* $r=\left(p+2\right)\left(mn+1\right)$, *причому для всіх* $x\in\Omega^p$ $\left.\dfrac{\partial^{2(g-1)}f_j\left(t,x\right)}{\partial t^{2(g-1)}}\right|_{t=0}=0$, $g\in\{1,\ldots,[(r+1)/2]\}$, $\left.\dfrac{\partial^{2g-1}f_j\left(t,x\right)}{\partial t^{2g-1}}\right|_{t=T}=0$, $g\in\{1,\ldots,[(r-1)/2]\}$, $j\in\{1,\ldots,m\}$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $\eta=\pi/T$ *існує розв'язок задачі* (4.59), (4.60) *з простору* $\bar{C}^{2n}(\overline{D^p})$, *який неперервно залежить від вектор-функції* f.

Зауважимо, що при $\alpha>mnp$ потужність множини A_α (міри нуль) тих чисел ω, для яких нерівність

$$|\Delta(\tilde{k},\omega)|<h^{-\alpha},\quad h=\max_{j\in\{0,\ldots,p\}}\left\{|k_j|\right\},\tag{4.76}$$

має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах $k_0,k_1,\ldots,k_p$, $\tilde{k}\in K$, зменшується із ростом α. Однак це не відображається у термінах міри Лебега. Щоб розрізняти такі множини за різних значень α, застосуємо поняття розмірності Хаусдорфа [8, 122]. Справедливе таке твердження.

Теорема 4.7. *Якщо* $mnp<\alpha<2mnp$, *то нерівність* (4.76) *має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах* $k_0,k_1,\ldots,k_p$, $\tilde{k}\in K$, *для множини дійсних чисел* ω, *розмірність Хаусдорфа якої не перевищує* mnp/α; *якщо* $\alpha\geq 2mnp$, *то нерівність* (4.76) *має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах* $k_0,k_1,\ldots,k_p$, $\tilde{k}\in K$, *для множини дійсних чисел* ω, *розмірність Хаусдорфа якої не перевищує* $mn\left(p+1\right)/\left(\alpha+2mn\right)$.

Доведення виконуємо за схемою доведення теореми 4 з праці [7].

Із леми 4.8 і теорем 4.6 та 4.7 випливає, що, збільшуючи гладкість функції f, можна забезпечити розв'язність задачі (4.59), (4.60) для кожної області D^p, крім множини, розмірність Хаусдорфа якої не перевищує як завгодно малого наперед заданого числа $\varepsilon>0$.

Висновки до розділу 4

У четвертому розділі дисертації встановлено умови коректної розв'язності у різних функційних просторах задач з умовами Діріхле-Неймана за змінною t та умовами 2π-періодичності за змінними $x_1, \ldots, x_p$ для загальних (без обмеження на тип) лінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами, ізотропних відносно порядку диференціювання за всіма незалежними змінними.

Доведено метричні твердження про оцінки знизу малих знаменників, з яких випливає однозначна розв'язність досліджуваних задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів області та для майже всіх коефіцієнтів рівнянь.

У випадку задач для одного рівняння розв'язки побудовано у вигляді рядів за системою ортогональних функцій змінних $x_1, \ldots, x_p$, а у випадку задачі для системи рівнянь – у вигляді ряду за системою ортогональних функцій змінних $t, x_1, \ldots, x_p$.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [86, 89].

РОЗДІЛ 5
ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ У НЕОБМЕЖЕНИХ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ ОБЛАСТЯХ

У даному розділі досліджено умови однозначної розв'язності у різних функційних просторах задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійних рівнянь з частинними похідними у необмежених за просторовими змінними областях.

У першому підрозділі розглянуто задачу Діріхле-Неймана для гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі за умови майже періодичності шуканого розв'язку за просторовою змінною або за певних умов щодо поведінки розв'язку на нескінченності (за просторовою змінною).

У другому підрозділі досліджено задачу Діріхле-Неймана за часовою змінною для рівняння вільних коливань безмежної струни з додатковою умовою Діріхле або Неймана у внутрішній точці часового інтервалу.

У третьому підрозділі у багатовимірному безмежному шарі розглянуто задачу з мішаними умовами (Діріхле-Неймана) на межі області для еволюційного рівняння високого порядку, що містить псевдодиференціальні оператори за просторовими змінними з аналітичними символами.

5.1. Гіперболічні рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами

5.1.1. Існування єдиного розв'язку у класі функцій, які є майже періодичними за просторовою змінною .

а) В області Q^1 розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(t,x\right):=\sum_{s=0}^{n}a_s\frac{\partial^{2n}u\left(t,x\right)}{\partial t^{2n-2s}\partial x^{2s}}=f\left(t,x\right),\tag{5.1}$$

$$\left.\frac{\partial^{2r-2}u\left(t,x\right)}{\partial t^{2r-2}}\right|_{t=0}=\varphi_r\left(x\right),\quad \left.\frac{\partial^{2r-1}u\left(t,x\right)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T}=\varphi_{n+r}\left(x\right),\quad r\in\left\{1,\ldots,n\right\},\tag{5.2}$$

де $a_s\in\mathbb{R}$, $s\in\{0,1,\ldots,n\}$, $a_0=1$. Припустимо, що рівняння (5.1) є строго гіперболічним за Петровським, тобто всі корені рівняння

$$\sum_{s=0}^{n}a_s\lambda^{2(n-s)}=0\tag{5.3}$$

є дійсними та різними, а отже, і відмінними від нуля.

Зауважимо, що задача (5.1), (5.2) (як і задача Діріхле) у смузі Q^1, взагалі, не буде коректною, якщо на її розв'язок не накласти певні додаткові обмеження (див. [80, гл. 2; гл. 3], [86, 97]). Такими обмеженнями у цьому підпункті є умови майже періодичності за змінною x.

Дослідимо питання однозначної розв'язності задачі (5.1), (5.2) у класі функцій, майже періодичних за змінною x, із заданим спектром

$$M=\{\mu_k\in\mathbb{R}:\mu_{-k}=-\,\mu_k,\ \mu_0=0,\ d_1\left|k\right|^{\sigma}\leq\left|\mu_k\right|\leq d_2\left|k\right|^{\sigma},$$

$$\sigma>0,\ d_2\geq d_1>0,\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

Введемо такі позначення для функцій, майже періодичних за змінною x: $\mathcal{T}_M$ – простір тригонометричних поліномів $v(x)=\sum_{|k|\leq N}v_k\exp\left(i\mu_k x\right)$, $N\in\mathbb{Z}_+$, $\mu_k\in M$; $\mathcal{T}'_M$ – простір антилінійних неперервних функціоналів над $\mathcal{T}_M$; послідовність $g_q\in\mathcal{T}'_M$ збігається до $g\in\mathcal{T}'_M$, якщо $\langle g_q,v\rangle\underset{q\to\infty}{\to}\langle g,v\rangle$ для довільного $v \in \mathcal{T}_M$, де $\langle g, v\rangle$ позначає дію функціонала $g \in \mathcal{T}'_M$ на елемент $v \in \mathcal{T}_M$; якщо $v \in \mathcal{T}_M$, то елемент $g_v \in \mathcal{T}'_M$, який відповідає елементу v, визначається як $\langle g_v, z\rangle = \lim\limits_{h\to\infty} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h v\,(x)\,\overline{z(x)}dx$ для довільного $z \in \mathcal{T}_M$; для довільної функції $g \in \mathcal{T}'_M$ нерівність $\langle g, \exp(i\mu_k x)\rangle \neq 0$ справджується не більше, ніж для зліченної кількості значень $\mu_k \in M$; ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \exp(i\mu_k x)$, де $g_k = \langle g, \exp(i\mu_k x)\rangle$, називається рядом Фур'є функції $g \in \mathcal{T}'_M$; $C^p([0,T], \mathcal{T}'_M)$ – простір функцій $v(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} v_k(t)\exp(i\mu_k x)$, $\mu_k \in M$, $v_k(t) \in C^p([0,T])$, таких, що $\dfrac{\partial^j v}{\partial t^j} \in \mathcal{T}'_M$, $j \in \{0,1,\ldots,p\}$, при кожному фіксованому $t \in [0,T]$; $H_q^M(\mathbb{R})$, $q \in \mathbb{R}$, – простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}_M$ за нормою $\left\|v; H_q^M(\mathbb{R})\right\|^2 := \sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+\mu_k^2)^q\,|v_k|^2$; $C^r([0,T], H_q^M(\mathbb{R}))$, $q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, – простір функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\dfrac{\partial^j v(t,x)}{\partial t^j}$, $j \in \{0,1,\ldots,r\}$, належать простору $H_{q-j}^M(\mathbb{R})$ і є неперервними за t у нормі $H_q^M(\mathbb{R})$, $\left\|v; C^r([0,T], H_q^M(\mathbb{R})\right\| := \sum_{j=0}^{r} \max\limits_{0\leq t\leq T}\left\|\partial^j v/\partial t^j; H_{q-j}^M(\mathbb{R})\right\|$.

Нехай

$$\varphi_j(x) \in \mathcal{T}'_M, \quad f(t,x) \in C([0,T], \mathcal{T}'_M), \quad f(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(t)\exp(i\mu_k x),$$

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{jk}\exp(i\mu_k x), \qquad j \in \{1,\ldots,2n\}, \tag{5.4}$$

де

$$f_k(t) = \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h f(t,x)\exp(-i\mu_k x)\,dx,$$

$$\varphi_{jk} = \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h \varphi_j(x)\exp(-i\mu_k x)\,dx, \quad j \in \{1,\ldots,2n\}.$$

Означення розв'язку задачі (5.1), (5.2) з простору $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}'_M)$ є аналогічним до означення 3.1.

Майже періодичний за x зі спектром M розв'язок задачі (5.1), (5.2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t)\exp(i\mu_k x). \tag{5.5}$$

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, у (5.5) є розв'язком крайової задачі

$$\sum_{s=0}^{n} a_s (i\mu_k)^{2s} \frac{d^{2(n-s)} u_k(t)}{dt^{2(n-s)}} = f_k(t), \tag{5.6}$$

$$u_k^{(2r-2)}(0) = \varphi_{rk}, \quad u_k^{(2r-1)}(T) = \varphi_{n+r,k}, \quad r \in \{1, \ldots, n\}. \tag{5.7}$$

Характеристичний визначник задачі (5.6), (5.7) для кожного $\mu_k \in M \backslash \{0\}$ обчислюється за формулою

$$\Delta(\mu_k, T) = (-2)^n \prod_{1 \le s < l \le n} \mu_k^4 (\lambda_s^2 - \lambda_l^2)^2 \prod_{j=1}^{n} ((i\mu_k \lambda_j) \cos(\mu_k \lambda_j T)), \tag{5.8}$$

де $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – додатні корені рівняння (5.3), а $\Delta(0, T)$ визначається формулою

$$\Delta(0, T) = 1!2! \ldots (2n-1)!. \tag{5.9}$$

Задача (5.6), (5.7) для кожного $\mu_k \in M$ не може мати двох різних розв'язків тоді й лише тоді, коли $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$. На підставі (5.9) і (5.8) отримуємо таке твердження.

Теорема 5.1. *Для єдиності розв'язку задачі* (5.1), (5.2) *у просторі* $C^{2n}([0, T], \mathcal{T}'_M)$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall \mu_k \in M \backslash \{0\},\ \forall m \in \mathbb{Z}) \ \ \frac{\lambda_j T}{\pi} \neq \frac{2m+1}{2\mu_k}, \qquad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{5.10}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 3.1. $\diamondsuit$

Надалі будемо вважати, що справджується умова (5.10). Тоді розв'язок задачі (5.1), (5.2) з простору $C^{2n}([0, T], \mathrm{T}'_M)$ зображується формулою

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(v_k(t) + \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau \right) \exp(i\mu_k x),$$

у якій $v_0(t)$ і $G_0(t, \tau)$ визначаються формулами (3.16) (див. розділ 3), а

$$v_k(t) = \sum_{q,j=1}^{n} S_{n-j}^{(q)} \frac{\varphi_{jk} \lambda_q \mu_k \cos(\lambda_q \mu_k (T - t)) + \varphi_{n+j,k} \sin(\lambda_q \mu_k t)}{2(-1)^{n+j} \lambda_q \mu_k^{2n-1} \cos(\mu_k \lambda_j T) \prod_{s=1, s \neq q}^{n} (\lambda_s^2 - \lambda_q^2)}, \ k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\},$$

$$G_k(t,\tau)=\frac{sgn(t-\tau)}{4}\sum_{q=1}^{n}(e^{i\lambda_q\mu_k(t-\tau)}+(-1)^n e^{-i\lambda_q\mu_k(t-\tau)})\times$$

$$\times\left(i\lambda_q\mu_k^{2n-1}\prod_{s=1,s\neq q}^{n}(\lambda_s^2-\lambda_q^2)\right)^{-1}+\frac{1}{8}\sum_{r,q,s=1}^{n}(-1)^q iS_{n-r}^{(q)}\lambda_s^{2r-3}\mu_k^{2r-2n+1}\times$$

$$\times\left(\lambda_q\prod_{\ell=1,\ell\neq q}^{n}(\lambda_\ell^2-\lambda_q^2)\prod_{h=1,h\neq s}^{n}(\lambda_h^2-\lambda_s^2)\cos(\mu_k\lambda_q T)\right)^{-1}\times$$

$$\times\{\lambda_q((-1)^{n-1}e^{i\lambda_s\mu_k\tau}-e^{-i\lambda_s\mu_k\tau})(e^{i\lambda_q\mu_k(T-t)}+$$

$$+(-1)^n e^{-i\lambda_q\mu_k(T-t)})+\lambda_s((-1)^n e^{i\lambda_q\mu_k t}-e^{-i\lambda_q\mu_k t})\times$$

$$\times(e^{i\lambda_s\mu_k(T-\tau)}+(-1)^{n-1}e^{-i\lambda_s\mu_k(T-\tau)})\},\qquad k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Аналогічно, як у пункті 3.1.1, доводимо наступне твердження.

Теорема 5.2. *Нехай справджуються умови* (5.10). *Якщо* $f\in C([0,T],\mathrm{T}'_M)$ $(C([0,T],\mathcal{T}_M))$, $\varphi_j\in\mathcal{T}'_M\,(\mathcal{T}_M)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (5.1), (5.2) *з простору* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_M)$ $(C^{2n}([0,T],\mathcal{T}_M))$.

Лема 5.1. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* T *оцінки* $|\cos(\lambda_j\mu_k T)|\geq c_1|k|^{-\alpha_1}$, *де* $\alpha_1>1$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, *виконуються для всіх* (*крім скінченної кількості*) *значень* $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Доведення. Враховуючи елементарну нерівність (2.12), отримуємо

$$|\cos(\lambda_j\mu_k T)|=|\sin|\lambda_j\mu_k T-\pi/2-m_j(k)\pi||\geq$$

$$\geq\frac{2}{\pi}|k|^{\sigma}T\lambda_j\left|\frac{\mu_k}{|k|^{\sigma}}-\frac{(2m_j(k)+1)\pi/(2\lambda_j T)}{|k|^{\sigma}}\right|,\tag{5.11}$$

$j\in\{1,\ldots,n\}$, а $m_j(k)\in\mathbb{Z}$ таке, що $|\lambda_j\mu_k T-\pi/2-m_j(k)\pi|\leq\pi/2$.

Із асимптотики спектра M, оцінок (5.11), леми 2.2 і неперервності функції $y(T)=1/T$ при $T>0$ випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\beta_j=\lambda_j T/\pi$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, нерівності

$$|\cos(\lambda_j\mu_k T)|\geq\frac{c_1}{|k|^{1+\varepsilon}},\quad c_1=\frac{2\lambda_j T}{\pi},\quad 0<\varepsilon<1,$$

справджуються для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Зі сказаного вище, враховуючи те, що при відображеннях $\beta_j \to \beta_j\pi/\lambda_j$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, множина з нульовою мірою Лебега переходить знову у множину нульової міри, а також те, що об'єднання скінченої кількості множин міри нуль є множиною міри нуль, випливає доведення леми. $\diamondsuit$

Теорема 5.3. *Якщо* $f \in C([0,T], H^M_{q+1-2n+(1+\varepsilon)/\sigma}(\mathbb{R}))$, $\varphi_s \in H^M_{q+(1+\varepsilon)/\sigma}(\mathbb{R})$, $\varphi_{n+s} \in H^M_{q-1+(1+\varepsilon)/\sigma}(\mathbb{R})$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, $\varepsilon > 0$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *існує єдиний розв'язок задачі* (3.1), (3.2) *з простору* $C^{2n}([0,T], H^M_q(\mathbb{R}))$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* f *та* φ_s, $s \in \{1,\ldots,2n\}$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 3.3. $\diamondsuit$

б) Розглянемо задачу з умовами (5.2) для рівняння

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(a_j\frac{\partial}{\partial x} + b_j\right)^2\right]u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q^1, \tag{5.12}$$

де $b_j \in \mathbb{R}$, $a_j > 0$, $a_j \neq a_\ell$, $j \neq \ell$, $j,\ell \in \{1,\ldots,n\}$, а функції f та φ_j, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, визначаються формулами (5.4).

Розв'язок задачі (5.2), (5.12) з простору $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}'_M)$ шукаємо у вигляді ряду (5.5), де кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, є розв'язком крайової задачі з умовами (5.7) для рівняння

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{d^2}{dt^2} - (b_j + i\mu_k a_j)^2\right]u_k(t) = f_k(t). \tag{5.13}$$

Розв'язавши для кожного $k \in \mathbb{Z}$ задачу (5.7), (5.13), для розв'язку задачі (5.2), (5.12) з простору $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}'_M)$ отримуємо таку формулу:

$$u(t,x) = u_0(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{q,j=1}^{n}(-1)^{n+j}\left(\gamma_q(e^{\gamma_q T} + e^{-\gamma_q T})\prod_{s=1,s\neq q}^{n}(\gamma_q^2 - \gamma_s^2)\right)^{-1}\times\right.$$

$$\times S^{(q)}_{n-j}\left(\varphi_{jk}\gamma_q\left(e^{\gamma_q(T-t)} + e^{-\gamma_q(T-t)}\right) + \varphi_{n+j,k}\left(e^{\gamma_q t} - e^{-\gamma_q t}\right)\right) +$$

$$+\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau\Bigg)\exp(i\mu_k x), \tag{5.14}$$

де $u_0(t)$ – розв'язок задачі (5.7), (5.13) при $k=0$ (припускаємо, що він єдиний і існує); $\gamma_j := \gamma_j(\mu_k) = b_j + i\mu_k a_j$, $j \in \{1,\ldots,n\}$; $S_\ell^{(q)}$, $\ell \in \{1,\ldots,n-1\}$, – сума всіх можливих добутків елементів $\gamma_1^2,\ldots,\gamma_{q-1}^2$, γ_{q+1}^2, $\ldots$, γ_n^2, узятих по ℓ штук у кожному добутку; $S_0^{(q)} \equiv 1$;

$$G_k(t,\tau) = \frac{sgn(t-\tau)}{4}\sum_{q=1}^n (e^{\gamma_q(t-\tau)}(-1)^n e^{-\gamma_q(t-\tau)})\left(\gamma_q\prod_{s=1,s\neq q}^n(\gamma_q^2-\gamma_s^2)\right)^{-1} +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{s,r,q=1}^n(-1)^{r+q}S_{n-r}^{(q)}\gamma_s^{2r-3}\left(\gamma_q\prod_{\ell=1,\ell\neq q}^n(\gamma_q^2-\gamma_\ell^2)\prod_{h=1,h\neq s}^n(\gamma_s^2-\gamma_h^2)(e^{\gamma_q T}+e^{-\gamma_q T})\right)^{-1}\times$$

$$\times(\gamma_q((-1)^{n-1}e^{\gamma_s\tau}-e^{-\gamma_s\tau})(e^{\gamma_q(T-t)}+(-1)^n e^{-\gamma_q(T-t)})+$$

$$+\gamma_s((-1)^n e^{\gamma_q t}-e^{-\gamma_q t})(e^{\gamma_s(T-\tau)}+(-1)^{n-1}e^{-\gamma_s(T-\tau)})),\quad k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{5.15}$$

Твердження 5.1. *Для єдиності розв'язку задачі* (5.2), (5.12) *у просторі* $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_M)$ *необхідно та достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall\mu_k\in M\backslash\{0\},\ \ \forall m\in\mathbb{Z})\quad (b_j+i\mu_k a_j)T\neq i\pi(m+1/2),\quad j\in\{1,\ldots,n\}.$$

Теореми існування розв'язку задачі (5.2), (5.12) у просторах $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_M)$ та $C^{2n}([0,T],H_q^M(\mathbb{R}))$ формулюються аналогічно до теорем 3.5, 3.6.

5.1.2. Однозначна розв'язність у класах цілих функцій .

а) В області Q^1 розглянемо задачу (5.1), (5.2). Припустимо, що рівняння (5.1) є строго гіперболічним за Петровським, тобто всі корені рівняння

$$\sum_{s=0}^n a_s\lambda^{2n-2s} = 0 \tag{5.16}$$

є дійсними та різними, а отже, і відмінними від нуля. Нехай λ_j, $j\in\{1,\ldots,n\}$, — додатні корені рівняння (5.16), причому $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$.

Поряд із задачею (5.1), (5.2) розглядатимемо відповідну їй однорідну задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\left(t, x\right) = 0, \tag{5.17}$$

$$\left.\frac{\partial^{2r-2} u\left(t, x\right)}{\partial t^{2r-2}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^{2r-1} u\left(t, x\right)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = 0, \quad r \in \{1, \ldots, n\}. \tag{5.18}$$

Розв'язок неоднорідної задачі (5.1), (5.2), якщо він існує, не завжди буде єдиним. Наприклад, однорідна задача

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(t, x) = 0, \quad u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=T} = 0$$

має нетривіальні розв'язки $u(t, x) = \sin \dfrac{(2k+1)\pi t}{2T} \sin \dfrac{(2k+1)\pi x}{2T}$, де $k \in \mathbb{Z}$, тому відповідна неоднорідна задача не може мати єдиного розв'язку.

Розв'язок задачі (5.1), (5.2) зобразимо у вигляді суми

$$u\left(t, x\right) = v\left(t, x\right) + w\left(t, x\right), \tag{5.19}$$

де $v\left(t, x\right)$ — розв'язок задачі (5.1), (5.18), а $w\left(t, x\right)$ — розв'язок задачі (5.17), (5.2).

Дослідимо спочатку задачу (5.17), (5.2). Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) \mathbf{T}\left(t, \nu\right) = 0, \tag{5.20}$$

яке одержуємо з (5.17) формальною заміною $\dfrac{\partial}{\partial x}$ на ν, де ν — деякий параметр, $\nu \in \mathbb{C}$.

Випадок $\nu \neq 0$. Фундаментальна система розв'язків рівняння (5.20) є такою: $\Big\{ \exp\left(\nu \lambda_j t\right), \exp\left(-\nu \lambda_j t\right), \quad j \in \{1, \ldots, n\} \Big\}$.

Загальний розв'язок рівняння (5.20) визначає формула

$$\mathbf{T}\left(t, \nu\right) = \sum_{l=1}^{n} \left(C_l(\nu) \exp\left(\nu \lambda_l t\right) + C_{n+l}(\nu) \exp\left(-\nu \lambda_l t\right)\right),$$

де $C_l(\nu)$, $l \in \{1, \ldots, 2n\}$, — довільні функції параметра ν.

Знайдемо розв'язки $\widetilde{\mathbf{T}}_j(t,\nu)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, рівняння (5.20), які задовольняють умови

$$\left.\frac{d^{2r-2}\widetilde{\mathbf{T}}_j}{dt^{2r-2}}\right|_{t=0}=\delta_{r,j},\quad \left.\frac{d^{2r-1}\widetilde{\mathbf{T}}_j}{dt^{2r-1}}\right|_{t=T}=\delta_{n+r,j},\quad r\in\{1,\ldots,n\}. \tag{5.21}$$

Ці розв'язки зображаємо формулами

$$\widetilde{\mathbf{T}}_j(t,\nu)=\sum_{l=1}^{n}\left\{C_{j,l}(\nu)\exp(\nu\lambda_l t)+C_{j,n+l}(\nu)\exp(-\nu\lambda_l t)\right\},\quad j\in\{1,\ldots,2n\},$$

де $C_{j,l}:=C_{j,l}(\nu)$, $j,l\in\{1,...,2n\}$, — функції параметра ν, які визначаємо зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{l=1}^{n}\left\{C_{j,l}+C_{j,n+l}\right\}(\nu\lambda_l)^{2r-2}=\delta_{r,j},\\ \sum\limits_{l=1}^{n}\left\{C_{j,l}\exp\left[\nu\lambda_l T\right]-C_{j,n+l}\exp(-\nu\lambda_l T)\right\}(\nu\lambda_l)^{2r-1}=\delta_{n+r,j},\end{array}\right. \quad r\in\{1,\ldots,n\}. \tag{5.22}$$

Головний визначник $\Delta(T,\nu)$ системи (5.22) є визначником матриці

$$\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1&\ldots&1\\(\nu\lambda_1)^2&\ldots&(\nu\lambda_n)^2&(\nu\lambda_1)^2&\ldots&(\nu\lambda_n)^2\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\(\nu\lambda_1)^{2(n-1)}&\ldots&(\nu\lambda_n)^{2(n-1)}&(\nu\lambda_1)^{2(n-1)}&\ldots&(\nu\lambda_n)^{2(n-1)}\\ \\ \nu\lambda_1e^{\nu\lambda_1T}&\ldots&\nu\lambda_ne^{\nu\lambda_nT}&-\nu\lambda_1e^{-\nu\lambda_1T}&\ldots&-\nu\lambda_Te^{-\nu\lambda_nT}\\(\nu\lambda_1)^3e^{\nu\lambda_1T}&\ldots&(\nu\lambda_n)^3e^{\nu\lambda_nT}&-(\nu\lambda_1)^3e^{-\nu\lambda_1T}&\ldots&-(\nu\lambda_n)^3e^{-\nu\lambda_nT}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\(\nu\lambda_1)^{2n-1}e^{\nu\lambda_1T}&\ldots&(\nu\lambda_n)^{2n-1}e^{\nu\lambda_nT}&-(\nu\lambda_1)^{2n-1}e^{-\nu\lambda_1T}&\ldots&-(\nu\lambda_n)^{2n-1}e^{-\nu\lambda_nT}\end{pmatrix}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta(T,\nu)=(-2)^n\nu^{2n^2-n}\prod_{1\le s<l\le n}\left(\lambda_s^2-\lambda_l^2\right)^2\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j\operatorname{ch}(\nu\lambda_jT)\right). \tag{5.23}$$

Запишемо множину M тих значень ν, при яких визначник $\Delta(T,\nu)$ перетворюється в нуль, тобто

$$M=\left\{\frac{(2m+1)\pi}{2\lambda_jT}i,\quad m\in\mathbb{Z},\quad i=\sqrt{-1},\quad j\in\{1,\ldots,n\}\right\}. \tag{5.24}$$

Для всіх $\nu \in \mathbb{C}\backslash M$ система рівнянь (5.22) має єдиний розв'язок, і ми отримуємо такі розв'язки задач (5.20), (5.21):

$$\widetilde{\mathbf{T}}_j\left(t,\nu\right)=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\Delta_{j,l}\left(T,\nu\right)}{\Delta\left(T,\nu\right)}\exp\left(\nu\lambda_l t\right)+\frac{\Delta_{j,n+l}\left(T,\nu\right)}{\Delta\left(T,\nu\right)}\exp\left(-\nu\lambda_l t\right)\right),$$

де $\Delta_{j,l}\left(T,\nu\right)$, $j,l\in\{1,...,2n\}$, — алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині j-го рядка та l-го стовпця у визначнику $\Delta\left(T,\nu\right)$.

Спростивши вирази, отримуємо, що для всіх $\nu\in\mathbb{C}\backslash M$ шукані розв'язки задач (5.20), (5.21) $\widetilde{\mathbf{T}}_j\left(t,\nu\right),\widetilde{\mathbf{T}}_{n+j}\left(t,\nu\right),j\in\{1,\ldots,n\}$, набувають вигляду

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{T}}_j\left(t,\nu\right)&=\sum_{l=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{n+j}S_{n-j}^{(l)}\operatorname{ch}\left(\nu\lambda_l\left(T-t\right)\right)}{\nu^{2n-2}\operatorname{ch}\left(\nu\lambda_l T\right)\prod\limits_{s=1,s\neq l}^{n}\left(\lambda_l^2-\lambda_s^2\right)},\\ \widetilde{\mathbf{T}}_{n+j}\left(t,\nu\right)&=\sum_{l=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{n+j}S_{n-j}^{(l)}\operatorname{sh}\left(\nu\lambda_l t\right)}{\nu^{2n-1}\lambda_l\operatorname{ch}\left(\nu\lambda_l T\right)\prod\limits_{s=1,s\neq l}^{n}\left(\lambda_l^2-\lambda_s^2\right)},\end{aligned}\tag{5.25}$$

де $S_q^{(l)}$ — сума всіх можливих добутків елементів $\left(\nu\lambda_1\right)^2$, ..., $\left(\nu\lambda_{l-1}\right)^2$, $\left(\nu\lambda_{l+1}\right)^2$, ... , $\left(\nu\lambda_n\right)^2$, узятих по $q\geq 1$ штук у кожному добутку, $S_0^{(l)}\equiv 1$, $l\in\{1,\ldots,n\}$.

Випадок $\nu=0$***.*** Рівняння (5.20) набуває вигляду

$$\frac{d^{2n}\mathbf{T}(t,0)}{dt^{2n}}=0,\tag{5.26}$$

а $\left\{t^{j-1},\quad j\in\{1,\ldots,2n\}\right\}$ є фундаментальною системою його розв'язків. Розв'язки задачі (5.26), (5.21) є такими поліномами:

$$\widetilde{\mathbf{T}}_j\left(t,0\right)=\sum_{l=1}^{2n}C_{j,l}t^{l-1},\quad j\in\{1,\ldots,2n\},$$

де сталі $C_{j,l}$, $j,l\in\{1,...,2n\}$, для кожного $j\in\{1,\ldots,2n\}$ визначаються зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l}C_{j,2r-1}(2r-2)!=\delta_{r,j},\\ \sum\limits_{l=2r}^{2n}C_{j,l}\dfrac{(l-1)!}{(l-2r)!}T^{l-2r}=\delta_{n+r,j},\end{array}\right. r\in\{1,\ldots,n\},\tag{5.27}$$

з головним визначником $\Delta(T)$ вигляду

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2T & \cdots & (n-1)T^{n-2} & \cdots & (2n-1)T^{2n-2} \\ 0 & 0 & 2\cdot 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)(n-2)(n-3)T^{n-4} & \cdots & (2n-1)(2n-2)(2n-3)T^{2n-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & (2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \end{vmatrix},$$

який обчислюється за формулою $\Delta(T) = 1!\,2!\,\cdots\,(2n-1)!$.

Розв'язуючи систему (5.27), знаходимо шукані функції:

$$\widetilde{\mathbf{T}}_j(t,0) = \sum_{l=1}^{2n} \frac{\Delta_{j,l}\,(T)}{\Delta\,(T)} t^{l-1}, \quad j \in \{1,\dots,2n\}\,, \tag{5.28}$$

де $\Delta_{j,l}\,(T)$, $j,l \in \{1,...,2n\}$, — алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині j-го рядка та l-го стовпця у визначнику $\Delta\,(T)$.

Зауваження 5.1. *Формули* (5.28) *можна одержати з* (5.25) *шляхом граничного переходу при* $\nu \to 0$. *Надалі вважатимемо, що параметр* ν *може набувати довільного значення з множини* $\mathbb{C}\backslash M$ *і на цій множині визначені функції* $\widetilde{\mathbf{T}}_1(t,\,\cdot\,),\dots,\widetilde{\mathbf{T}}_{2n}(t,\,\cdot\,)$ *формулами* (5.25).

Позначимо через $A_{1,d}$ клас цілих функцій, порядок яких не перевищує одиниці, причому функції першого порядку мають тип менший, ніж d, $d>0$, а через $\mathbf{A}_d$ позначимо клас цілих функцій $g(t,x)$, які для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ належать класу $A_{1,d}$.

Для встановлення класу однозначної розв'язності задачі (5.17), (5.2) нам знадобиться наступне твердження.

Лема 5.2. *Нехай* $P(z)$ *— аналітична функція в крузі* $B_d = \{z \in \mathbb{C} : |z| < d\}$, *а* $f(z)$ *належить класу* $A_{1,d}$. *Тоді* $P\left(\frac{d}{dz}\right) f(z)$ *належить класу* $A_{1,d}$.

Доведення. Якщо $P(z) = \sum\limits_{s\geq 0} a_s z^s$ — довільна аналітична в B_d функція, то функція $\widetilde{P}(z) = \sum\limits_{s\geq 0} |a_s| z^s$ також є аналітичною в B_d. Оскільки ціла функція $f(z) = \sum\limits_{r\geq 0} b_r z^r$ належить класу $A_{1,d}$, то

$$\forall d_1 \in (0,d) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall r > N \quad |b_r| < d_1^r / r!.$$

Зобразимо дію виразу $P\left(\frac{d}{dz}\right)$ на $f(z)$ у вигляді $P\left(\frac{d}{dz}\right) f(z) = M_1(z) + M_2(z)$, де $M_1(z) = \sum\limits_{0\leq r\leq N} a_r f^{(r)}(z)$, $M_2(z) = \sum\limits_{r>N} a_r f^{(r)}(z)$.

Функція $M_1(z)$ належить класу $A_{1,d}$ як дія диференціального полінома на $f(z)$ з класу $A_{1,d}$. Покажемо, що функція $M_2(z)$ також належить класу $A_{1,d}$. Оцінимо зверху за модулем коефіцієнти c_s, $s \geq 0$, степеневого ряду $M_2(z) = \sum\limits_{s\geq 0} c_s z^s$, що обчислюються [50] за формулами $c_s = \sum\limits_{r>N} a_r b_{r+s} \frac{(r+s)!}{s!}$, $s\geq 0$:

$$|c_s| \leq \sum_{r>N} |a_r||b_{r+s}| \frac{(r+s)!}{s!} \leq \sum_{r>N} |a_r| \frac{d_1^{r+s}}{(r+s)!} \frac{(r+s)!}{s!} = \sum_{r>N} |a_r| d_1^r \frac{d_1^s}{s!} = \widetilde{P}(d_1) \frac{d_1^s}{s!}.$$

Оскільки $|c_s| \leq \widetilde{P}(d_1) \frac{d_1^s}{s!}$ для довільного $s \geq 0$, то функція $M_2(z)$ належить класу $A_{1,d}$. Отже, функція $P\left(\frac{d}{dz}\right) f(z)$ як сума цілих функцій з класу $A_{1,d}$ є цілою функцією з цього ж класу. Лему доведено. $\diamondsuit$

Теорема 5.4. *Нехай $\varphi_r \in A_{1,d}$, $r \in \{1,\ldots,2n\}$, де $d = \pi\left(2T\lambda_n\right)^{-1}$. Тоді у класі цілих функцій $\mathbf{A}_d$, існує єдиний розв'язок задачі* (5.17), (5.2), *який можна подати у вигляді*

$$w(t,x) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) \left\{ \widetilde{\mathbf{T}}_j(t,\nu) \exp(\nu x) \right\} \Bigg|_{\nu=0}, \tag{5.29}$$

де $\widetilde{\mathbf{T}}_j(t,\nu)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, — функції вигляду (5.25).

Доведення. Диференціальні вирази $\varphi_r\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$, нескінченного порядку визначимо шляхом заміни x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$ у рядах Маклорена для функцій $\varphi_r(x)$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$. Тоді вираз (5.29) є деяким рядом. Цей ряд визначає цілу функцію $w(t,x)$, яка є цілою функцією за змінною t і для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ належить класу $A_{1,d}$, що випливає з рівностей

$$\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right) \left\{ \widetilde{\mathbf{T}}_j(t,\nu) \exp(\nu x) \right\} \Big|_{\nu=0} = \widetilde{\mathbf{T}}_j\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_j(x), \quad j \in \{1,\ldots,2n\},$$

та леми 1. Отже, $w \in \mathbf{A}_d$.

Покажемо тепер, що функція (5.29) є розв'язком задачі (5.17), (5.2) і у класі $\mathbf{A}_d$ не існує інших розв'язків.

Доведемо, що функція (5.29) задовольняє рівняння (5.17). З того, що функції (5.25) є розв'язками рівняння (5.20), випливає

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right) w\left(t,x\right)=L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\widetilde{\mathbf{T}}_j\left(t,\nu\right)\exp\left(\nu x\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0}=$$

$$=\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\widetilde{\mathbf{T}}_j\left(t,\nu\right)\exp\left(\nu x\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0}=$$

$$=\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\exp\left(\nu x\right)L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\widetilde{\mathbf{T}}_j\left(t,\nu\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0}=0.$$

Враховуючи, що функції (5.25) задовольняють умови (5.21), і що для цілих функцій $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, справджуються рівності $\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp\left(\nu x\right)\right\}\big|_{\nu=0}=\varphi_j(x)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, отримуємо

$$\frac{\partial^{2r-2}w}{\partial t^{2r-2}}\bigg|_{t=0}=\frac{\partial^{2r-2}}{\partial t^{2r-2}}\left[\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\widetilde{\mathbf{T}}_j\left(t,\nu\right)\exp\left(\nu x\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0}\right]\Bigg|_{t=0}=$$

$$=\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\left[\frac{\partial^{2r-2}}{\partial t^{2r-2}}\widetilde{\mathbf{T}}_j\left(t,\nu\right)\right]\Bigg|_{t=0}\exp\left(\nu x\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0}=$$

$$=\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\delta_{r,j}\exp\left(\nu x\right)\right\}\Bigg|_{\nu=0}=\sum_{j=1}^{2n}\delta_{r,j}\varphi_j(x)=\varphi_r(x),\quad r\in\{1,\ldots,n\}.$$

Подібно доводимо, що функція (5.29) задовольняє умови (5.2) у точці $t=T$.

Застосовуючи методику праці [25] до задачі (5.1), (5.2), доводимо, що задача (5.17), (5.2) не може мати двох різних розв'язків у класі функцій, які для кожного $t\in[0,T]$ зростають на нескінченності не швидше, ніж $\exp\left(d\left|x\right|\right)$, $d=\pi\left(2T\lambda_n\right)^{-1}$. Позначимо цей клас функцій через E_d.

Оскільки $\mathbf{A}_d\subset E_d$, то з вище сказаного випливає, що клас цілих функцій $\mathbf{A}_d$ є класом однозначної розв'язності задачі (5.17), (5.2). Теорему доведено. $\diamondsuit$

Нехай K_L — клас квазіполіномів вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x) \exp(\alpha_j x), \qquad (5.30)$$

де $\alpha_j \in L \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$, $j, k \in \{1, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $Q_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, — поліноми.

Зауважимо, що кожний квазіполіном $\varphi(x)$ вигляду (5.30) визначає диференціальну операцію $\sum\limits_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{d}{d\nu}\right)$ скінченного порядку на класі цілих функцій $\Phi(\nu)$, а саме $\varphi\left(\frac{d}{d\nu}\right)\Phi(\nu) = \sum\limits_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{d}{d\nu}\right)\Phi(\nu + \alpha_j)$, зокрема,

$$\varphi\left(\frac{d}{d\nu}\right)\Phi(\nu)\bigg|_{\nu=0} = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{d}{d\nu}\right)\Phi(\nu)\bigg|_{\nu=\alpha_j}. \qquad (5.31)$$

Позначимо через $K_{\mathbb{C},\,L}$ клас квазіполіномів двох змінних

$$f(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{N} P_{l,j}(t,x) \exp(\beta_l t + \alpha_j x),$$

де $P_{l,j}(t,x)$ — поліноми змінних t та x, $\beta_l \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in L$, $\beta_l \neq \beta_r$ для $l \neq r$, $l, r \in \{1, \ldots, N\}$, $\alpha_k \neq \alpha_j$ для $k \neq j$, $k, j \in \{1, \ldots, m\}$, $m, N \in \mathbb{N}$.

Теорема 5.5. *Нехай* $\varphi_r \in K_{\mathbb{C}\setminus M}$, $r \in \{1, \ldots, 2n\}$, *де* M *— множина* (5.24). *Тоді у класі квазіполіномів* $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\setminus M}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (5.17), (5.2), *який можна подати у вигляді* (5.29).

Доведення. Згідно з формулою (5.31) за умов теореми випливає, що функціє $\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{\mathbf{T}}_j(t,\nu)\exp(\nu x)\right\}\Big|_{\nu=0}$, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$, належать до $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\setminus M}$. Оскільки функція (5.29) задовольняє рівняння (5.17) і умови (5.2), то в класі $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\setminus M}$ вона є розв'язком задачі (5.17), (5.2).

Єдиність розв'язку задачі (5.17), (5.2) у парі класів $K_{\mathbb{C}\setminus M}$, $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\setminus M}$ доведемо методом від супротивного. Припустимо, що для $\varphi_r \in K_{\mathbb{C}\setminus M}$, $r \in \{1, \ldots, 2n\}$, у класі $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\setminus M}$ існує два розв'язки $w_1(t,x)$, $w_2(t,x)$ задачі (5.17), (5.2) у смузі Q^1; тоді їх можна подати у вигляді

$$w_1(t,x) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{\mathbf{T}}_{1,j}(t,\nu)\exp(\nu x)\right\}\bigg|_{\nu=0},$$

$$w_2(t,x)=\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{\mathbf{T}}_{2,j}(t,\nu)\exp(\nu x)\right\}\Bigg|_{\nu=0},$$

де $\widetilde{\mathbf{T}}_{1,j}(t,\nu)$, $\widetilde{\mathbf{T}}_{2,j}(t,\nu)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, — деякі розв'язки рівняння (5.20). Різниця цих функцій

$$\tilde{w}(t,x)=w_1(t,x)-w_2(t,x)=\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(\widetilde{\mathbf{T}}_{1,j}(t,\nu)-\widetilde{\mathbf{T}}_{2,j}(t,\nu)\right)\exp(\nu x)\right\}\Bigg|_{\nu=0}$$

задовольняє у смузі Q^1 рівняння (5.17) і умови (5.18).

Оскільки $\varphi_r\in K_{\mathbb{C}\setminus M}$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$, то згідно з (5.31) квазіполіном $\tilde{w}(t,x)$ належить до $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\setminus M}$. Цей квазіполіном містить значення $\widetilde{\mathbf{T}}_{1,r}(t,\nu)-\widetilde{\mathbf{T}}_{2,r}(t,\nu)$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$, та значення їх відповідних похідних за ν в точках (t,ν), де $\nu\in\mathbb{C}\setminus M$, $t\in[0,T]$. Оскільки $\widetilde{\mathbf{T}}_{1,r}(t,\nu)-\widetilde{\mathbf{T}}_{2,r}(t,\nu)$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$,— розв'язки рівняння (5.20), які задовольняють однорідні умови (5.21), і $\nu\in\mathbb{C}\setminus M$, то $\Delta(T,\nu)\neq 0$ і ці розв'язки є нульовими, тобто $\widetilde{\mathbf{T}}_{1,r}(t,\nu)-\widetilde{\mathbf{T}}_{2,r}(t,\nu)\equiv 0$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$, на $[0,T]\times(\mathbb{C}\setminus M)$. Отже, $w_1(t,x)\equiv w_2(t,x)$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Розглянемо тепер задачу для неоднорідного рівняння та однорідних умов. Нехай $\left\{\mathbf{T}_k(t,\nu), k\in\{0,\ldots,2n-1\}\right\}$ — нормальна в точці $t=0$ фундаментальна система розв'язків рівняння (5.20). Розглянемо визначену на множині $[0,T]\times\mathbb{C}^2$ функцію

$$\Phi(t,\lambda,\nu)=\frac{\exp(\lambda t)-\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\lambda^k\mathbf{T}_k(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)},\tag{5.32}$$

яка є розв'язком задачі Коші

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\Phi=\exp(\lambda t),\quad \left.\frac{d^k\Phi}{dt^k}\right|_{t=0}=0,\quad k\in\{0,\ldots,2n-1\},\tag{5.33}$$

та визначену на $[0,T]\times\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus M)$ функцію

$$F(t,\lambda,\nu)=\frac{\exp(\lambda t)-\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{2j-2}\widetilde{\mathbf{T}}_j(t,\nu)-\exp(\lambda h)\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{2j-1}\widetilde{\mathbf{T}}_{n+j}(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)},\tag{5.34}$$

де $\widetilde{\mathbf{T}}_j\,(t,\nu)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, — функції (5.25).

Лема 5.3. *Функцію $F\,(t,\lambda,\nu)$ можна подати у такому вигляді:*

$$F\,(t,\lambda,\nu)=\Phi\,(t,\lambda,\nu)-\sum_{m=1}^{n}\left.\frac{d^{2m-1}\Phi}{dt^{2m-1}}\right|_{t=T}\widetilde{\mathbf{T}}_{n+m}(t,\nu). \tag{5.35}$$

Доведення. Елементи нормальної фундаментальної системи розв'язків $\Big\{\mathbf{T}_k(t,\nu),k\in\{0,\ldots,2n-1\}\Big\}$ подамо у вигляді лінійної комбінації елементів фундаментальної системи $\Big\{\widetilde{\mathbf{T}}_j(t,\nu),j\in\{1,\ldots,2n\}\Big\}$:

$$\mathbf{T}_j(t,\nu)=\sum_{m=1}^{n}\Big(c_{j,m}(\nu)\widetilde{\mathbf{T}}_m(t,\nu)+d_{j,m}(\nu)\widetilde{\mathbf{T}}_{n+m}(t,\nu)\Big),\quad j\in\{0,\ldots,2n-1\}. \tag{5.36}$$

Визначимо коефіцієнти $c_{j,m}(\nu)$, $d_{j,m}(\nu)$ на підставі умов (5.21):

$$\left.\frac{d^{2r-2}\mathbf{T}_j}{dt^{2r-2}}\right|_{t=0}=\delta_{j,2r-2}=\sum_{m=1}^{n}c_{j,m}(\nu)\delta_{r,m}=c_{j,r}(\nu),$$

$$\left.\frac{d^{2r-1}\mathbf{T}_j}{dt^{2r-1}}\right|_{t=T}=\sum_{m=1}^{n}d_{j,m}(\nu)\delta_{n+r,n+m}=d_{j,r}(\nu),r\in\{1,\ldots,n\},j\in\{0,\ldots,2n-1\}.$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів $c_{j,r}(\nu)$, $d_{j,r}(\nu)$, $r\in\{1,\ldots,n\}$, $j\in\{0,\ldots,2n-1\}$, у вирази (5.36), одержуємо такі співвідношення:

$$\mathbf{T}_j(t,\nu)=\sum_{m=1}^{n}\Big(\delta_{j,2m-2}\widetilde{\mathbf{T}}_m(t,\nu)+\mathbf{T}_j^{(2m-1)}(T,\nu)\widetilde{\mathbf{T}}_{n+m}(t,\nu)\Big),\ j\in\{0,\ldots,2n-1\}. \tag{5.37}$$

Домноживши обидві частини рівності (5.37) на λ^j та підсумувавши за j, одержуємо

$$\sum_{j=0}^{2n-1}\lambda^j\mathbf{T}_j(t,\nu)=\sum_{m=1}^{n}\lambda^{2m-2}\tilde{\mathbf{T}}_m(t,\nu)+\sum_{m=1}^{n}\tilde{\mathbf{T}}_{n+m}(t,\nu)\sum_{j=0}^{2n-1}\lambda^j\mathbf{T}_j^{(2m-1)}(T,\nu). \tag{5.38}$$

Здійснимо перетворення правої частини формули (5.35):

$$\Phi\,(t,\lambda,\nu)-\sum_{m=1}^{n}\left.\frac{d^{2m-1}\Phi}{dt^{2m-1}}\right|_{t=T}\widetilde{\mathbf{T}}_{n+m}(t,\nu)=$$

$$=\frac{\exp(\lambda t)-\sum\limits_{j=0}^{2n-1}\lambda^j\mathbf{T}_j(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)}-\sum_{m=1}^{n}\frac{\lambda^{2m-1}\exp(\lambda h)-\sum\limits_{j=0}^{2n-1}\lambda^j\mathbf{T}_j^{(2m-1)}(T,\nu)}{L\left(\lambda,\nu\right)}\widetilde{\mathbf{T}}_{n+m}(t,\nu)=$$

$$=\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\lambda^{2m-2}\widetilde{\mathbf{T}}_m\left(t,\nu\right)+\sum\limits_{m=1}^{n}\widetilde{\mathbf{T}}_{n+m}(t,\nu)\sum\limits_{j=0}^{2n-1}\lambda^j\mathbf{T}_j^{(2m-1)}\left(T,\nu\right)-\sum\limits_{j=0}^{2n-1}\lambda^j\mathbf{T}_j\left(t,\nu\right)}{L\left(\lambda,\nu\right)}+$$

$$+F\left(t,\lambda,\nu\right). \tag{5.39}$$

Із (5.39), на підставі формули (5.38), одержуємо рівність (5.35). Лему доведено. $\diamondsuit$

Позначимо через $\mathbf{A}_d^M$ клас цілих функцій $g(t,x)$, які для кожного фіксованого $t\in[0,T]$ належать класу $A_{1,d}\bigcup K_{\mathbb{C}\setminus M}$.

Теорема 5.6. *Нехай* $f\left(t,x\right)$ *належить класу* $\mathbf{A}_d^M$, *де* $d=\pi\left(2T\lambda_n\right)^{-1}$, *а* M *— множина* (5.24). *Тоді у класі цілих функцій* $\mathbf{A}_d^M$ *існує єдиний розв'язок задачі* (5.1), (5.18), *який можна подати у вигляді*

$$v\left(t,x\right)=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{F\left(t,\lambda,\nu\right)\exp\left(\nu x\right)\right\}\Big|_{\lambda=0,\ \nu=0}, \tag{5.40}$$

де функцію $F\left(t,\lambda,\nu\right)$ *визначає формула* (5.34).

Доведення. Згідно з теоремою Пуанкаре [106, с. 59] про аналітичну залежність розв'язку задачі Коші від параметрів, функція $\Phi\left(t,\lambda,\nu\right)$, яка визначена рівністю (5.32), як розв'язок задачі (5.33) є цілою стосовно λ і ν. З леми 5.3 випливає, що $F\left(t,\lambda,\nu\right)$ — мероморфна стосовно ν функція, полюсами якої є точки множини M, а стосовно λ — ціла функція першого порядку скінченного типу. За цілою функцією $f(t,x)$ визначаємо диференціальний вираз нескінченного порядку $f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ шляхом формальної заміни t на $\frac{\partial}{\partial\lambda}$, а x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$ у ряді Маклорена для функції $f(t,x)$. Тоді вираз (5.40) є деяким рядом, що визначає цілу функцію $v\left(t,x\right)$, яка є цілою за змінною t, а для кожного фіксованого $t\in[0,T]$ є цілою функцією класу $A_{1,d}$, тобто $v\left(t,x\right)$ належить класу $\mathbf{A}_d^M$.

Покажемо, що функція (5.40) задовольняє рівняння (5.1):

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)v\,(t,x)=L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{F\,(t,\lambda,\nu)\exp\,(\nu x)\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}\right)=$$

$$=f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\{F\,(t,\lambda,\nu)\exp\,(\nu x)\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0}=$$

$$=f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\exp\,(\nu x)\,L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)F\,(t,\lambda,\nu)\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}. \tag{5.41}$$

Оскільки функції (5.25) задовольняють рівняння (5.20), то

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)F\,(t,\lambda,\nu)=$$

$$=L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\frac{\exp\,(\lambda t)-\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{2j-2}\widetilde{\mathbf{T}}_j\,(t,\nu)-\exp\,(\lambda T)\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{2j-1}\widetilde{\mathbf{T}}_{n+j}\,(t,\nu)}{L\,(\lambda,\nu)}=$$

$$=L^{-1}\,(\lambda,\nu)\left\{L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\exp\,(\lambda t)-\sum_{j=1}^{n}\lambda^{2j-2}L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\widetilde{\mathbf{T}}_j\,(t,\nu)-\right.$$

$$\left.-\exp\,(\lambda T)\sum_{j=1}^{n}\lambda^{2j-1}L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\widetilde{\mathbf{T}}_{n+j}(t,\nu)\right\}=L^{-1}(\lambda,\nu)L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\exp\,(\lambda t)=\exp\,(\lambda t)\,. \tag{5.42}$$

Із (5.41) та (5.42) випливає, що

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)v\,(t,x)=f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{\exp\,(\lambda t+\nu x)\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}=f(t,x).$$

Покажемо, що функція (5.40) справджує умови (5.18). Дійсно, враховуючи (5.21) і (5.34), для $r\in\{1,\ldots,n\}$ отримуємо

$$\frac{\partial^{2r-2}v}{\partial t^{2r-2}}\Big|_{t=0}=\left[\frac{\partial^{2r-2}}{\partial t^{2r-2}}\,f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{F\,(t,\lambda,\nu)\exp\,(\nu x)\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}\right]\Big|_{t=0}=$$

$$=f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left[\left\{\exp\,(\nu x)\,\frac{\partial^{2r-2}}{\partial t^{2r-2}}F\,(t,\lambda,\nu)\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}\right]\Big|_{t=0}=$$

$$=f\left(\frac{\partial}{\partial \lambda},\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\exp\,(\nu x)\,\frac{\lambda^{2r-2}-\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{2j-2}\delta_{r,j}-0}{L\,(\lambda,\nu)}\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\,\nu=0}=0.$$

Подібно показуємо, що функція (5.40) задовольняє умови (5.18) також у точці $t = T$.

Встановимо єдиність розв'язку задачі (5.1), (5.18) у класі функцій $\mathbf{A}_d^M$. У підкласі функцій, які для кожного фіксованого $t \in [0, T]$ належать до $A_{1,d}$, єдиність доводимо подібно до доведення єдиності розв'язку в теоремі 5.4.

Покажемо тепер, що у підкласі $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\backslash\mathrm{M}}$ класу $\mathbf{A}_d^M$ немає інших розв'язків задачі (5.1), (5.18), окрім (5.40). Припустимо, що для $f \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\backslash\mathrm{M}}$ у класі $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\backslash M}$ існує два розв'язки v_1, v_2 задачі (5.1), (5.18) у смузі Q^1; тоді їх можна подати у вигляді

$$v_1\,(t,x) = f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{F_1\,(t,\lambda,\nu)\exp\,(\nu x)\}\bigg|_{\lambda=0,\;\nu=0},$$

$$v_2\,(t,x) = f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{F_2\,(t,\lambda,\nu)\exp\,(\nu x)\}\bigg|_{\lambda=0,\;\nu=0},$$

де $F_1\,(t,\lambda,\nu)$, $F_2\,(t,\lambda,\nu)$ — деякі розв'язки рівняння $L\left(\dfrac{d}{dt},\nu\right)F = \exp(\lambda t)$, які задовольняють однорідні умови

$$\left.\frac{d^{2r-2}F}{dt^{2r-2}}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^{2r-1}F}{dt^{2r-1}}\right|_{t=T} = 0.$$

Функція $\tilde{v}\,(t,x) = v_1\,(t,x) - v_2\,(t,x)$ у смузі Q^1 задовольняє рівняння (5.17) та умови (5.18). Провівши далі міркування, аналогічні доведенню єдиності в теоремі 5.4, отримуємо, що $F_1\,(t,\lambda,\nu) - F_2\,(t,\lambda,\nu) \equiv 0$ на $[0,T] \times \mathbb{C} \times (\mathbb{C}\backslash M)$. Отже, $v_1(t,x) \equiv v_2(t,x)$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Оскільки розв'язок задачі (5.1), (5.2) ми можемо подати у вигляді (5.19), то з теорем 5.4–5.6 випливає таке твердження.

Твердження 5.2. *Нехай* $\varphi_j \in A_{1,d} \bigcup K_{\mathbb{C}\backslash M}$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, $f \in \mathbf{A}_d^M$, *де* M *— множина* (5.24), *а* $d = \pi\,(2T\lambda_n)^{-1}$. *Тоді у класі* $\mathbf{A}_d^M$ *існує єдиний розв'язок задачі* (5.1), (5.2), *який є сумою функцій* (5.29) *та* (5.40).

Приклад 5.1. У смузі Q^1 розв'язати задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\exp(x+t), \tag{5.43}$$

$$u\big|_{t=0} = \exp(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=T} = \cos(x). \tag{5.44}$$

Для побудови розв'язку задачі (5.43), (5.44) скористаємось загальними формулами (5.29) та (5.40), зауваживши, що в задачі (5.43), (5.44)

$$\varphi_1(x) = \exp(x), \quad \varphi_2(x) = \cos(x), \quad f(t,x) = t\exp(x+t),$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}_1(t,\nu) = \frac{\operatorname{ch}(\nu(T-t))}{\operatorname{ch}(\nu T)}, \quad \widetilde{\mathbf{T}}_2(t,\nu) = \frac{\operatorname{sh}(\nu t)}{\nu\operatorname{ch}(\nu T)},$$

$$F(t,\lambda,\nu) = \frac{1}{\lambda^2-\nu^2}\left(\exp(\lambda t) - \frac{\nu\operatorname{ch}(\nu(T-t)) + \lambda\exp(\lambda T)\operatorname{sh}(\nu t)}{\nu\operatorname{ch}(\nu T)}\right).$$

Тоді отримаємо

$$u(t,x) = \varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{\mathbf{T}}_1(t,\nu)\exp(\nu x)\right\}\Big|_{\nu=0} +$$

$$+\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{\mathbf{T}}_2(t,\nu)\exp(\nu x)\right\}\Big|_{\nu=0} + f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{F(t,\lambda,\nu)\exp(\nu x)\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0} =$$

$$= \exp\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\operatorname{ch}(\nu(T-t))}{\operatorname{ch}(\nu T)}\exp(\nu x)\right\}\Big|_{\nu=0} +$$

$$+\cos\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\operatorname{sh}(\nu t)}{\nu\operatorname{ch}(\nu T)}\exp(\nu x)\right\}\Big|_{\nu=0} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\exp\left(\frac{\partial}{\partial\nu}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{\nu\exp(\lambda t)\operatorname{ch}(\nu T) - \nu\operatorname{ch}(\nu(T-t)) - \lambda\exp(\lambda T)\operatorname{sh}(\nu t)}{\nu(\lambda^2-\nu^2)\operatorname{ch}(\nu T)(\exp(\nu x))^{-1}}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0} =$$

$$= \left\{\frac{\operatorname{ch}(\nu(T-t))\exp(\nu x)}{\operatorname{ch}(\nu T)}\right\}\Big|_{\nu=1} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left\{\frac{\operatorname{sh}(\nu t)\exp(\nu x)}{\nu\operatorname{ch}(\nu T)}\right\}\Big|_{\nu=i} + \left\{\frac{\operatorname{sh}(\nu t)\exp(\nu x)}{\nu\operatorname{ch}(\nu T)}\right\}\Big|_{\nu=-i}\right) +$$

$$+\left\{\exp(\nu x)\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\nu\exp(\lambda t)\operatorname{ch}(\nu T) - \nu\operatorname{ch}(\nu(T-t)) - \lambda\exp(\lambda T)\operatorname{sh}(\nu t)}{\nu(\lambda^2-\nu^2)\operatorname{ch}(\nu T)}\right\}\Big|_{\lambda=1,\,\nu=1}. \tag{5.45}$$

Провівши обчислення у (5.45), отримуємо таку формулу для розв'язку задачі (5.43), (5.44):

$$u(t,x) = \frac{\operatorname{ch}(T-t)}{\operatorname{ch}(T)}\exp(x) + \frac{\sin(t)\cos(x)}{\cos(T)} +$$

$$+\frac{(t^2-t)\operatorname{ch}(T)\exp(t)-(T^2+T-1)\operatorname{sh}(t)\exp(T)}{4\operatorname{ch}(T)}\exp(x).$$

На підставі теорем 5.4–5.6 знайдений розв'язок є єдиним у класі $\mathbf{A}_d^M$, де $d=\dfrac{\pi}{2T}$, а $M=\left\{\dfrac{\pi i}{T}\left(m+\dfrac{1}{2}\right),\ m\in\mathbb{Z}\right\}$. ▲

б) В області Q^1 розглянемо задачу з умовами (5.2) для рівняння

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x):=\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(a_j\frac{\partial}{\partial x}+b_j\right)^2\right]u(t,x)=f(t,x), \quad (5.46)$$

де $b_j\in\mathbb{R}$, $a_j>0$, $a_j\neq a_l$, $j,l\in\{1,\ldots,n\}$, $j\neq l$.

Поряд із задачею (5.46), (5.2) розглядатимемо відповідну їй однорідну задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)=0, \quad (5.47)$$

$$\left.\frac{\partial^{2r-2}u(t,x)}{\partial t^{2r-2}}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^{2r-1}u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T}=0,\quad r\in\{1,\ldots,n\}. \quad (5.48)$$

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\mathbf{T}(t,\nu)=0, \quad (5.49)$$

яке одержуємо з (5.47) формальною заміною $\partial/\partial x$ на ν, де ν — деякий параметр, $\nu\in\mathbb{C}$.

Позначимо $\gamma_j=b_j+\nu a_j$, $j\in\{1,\ldots,n\}$. Надалі вважатимемо, що $\gamma_j^2\neq\gamma_r^2$, $j,r\in\{1,\ldots,n\}$, $j\neq r$, для довільного $\nu\in\mathbb{C}$.

Нехай $\nu\neq -b_j/a_j$, $j\in\{1,\ldots,n\}$**.** Тоді фундаментальна система розв'язків рівняння (5.49) є такою: $\{\exp(\gamma_j t),\ \exp(-\gamma_j t),\ j\in\{1,\ldots,n\}\}$. Загальний розв'язок рівняння (5.49) визначає формула

$$\mathbf{T}(t,\nu)=\sum_{l=1}^{n}\left(C_l(\nu)\exp(\gamma_l t)+C_{n+l}(\nu)\exp(-\gamma_l t)\right),$$

де $C_l(\nu)$, $l\in\{1,\ldots,2n\}$, — довільні функції параметра ν.

Розв'язки $\widetilde{\mathbf{T}}_j(t,\nu)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, рівняння (5.49), які задовольняють умови

$$\left.\frac{d^{2r-2}\widetilde{\mathbf{T}}_j}{dt^{2r-2}}\right|_{t=0}=\delta_{r,j},\quad \left.\frac{d^{2r-1}\widetilde{\mathbf{T}}_j}{dt^{2r-1}}\right|_{t=T}=\delta_{n+r,j},\quad r\in\{1,\ldots,n\},$$

зображають формулами

$$\widetilde{\mathbf{T}}_j\left(t,\nu\right)=\sum_{l=1}^{n}\left\{C_{j,l}(\nu)\exp\left(\gamma_l t\right)+C_{j,n+l}(\nu)\exp\left(-\gamma_l t\right)\right\},\quad j\in\left\{1,\ldots,2n\right\},$$

де $C_{j,l}:=C_{j,l}(\nu),\ j,l\in\{1,...,2n\}$, — функції параметра ν, які визначаємо зі системи лінійних алгебричних рівнянь, головний визначник $\Delta_1\left(T,\nu\right)$ якої обчислюється за формулою

$$\Delta\left(T,\nu\right)=(-2)^n\prod_{1\le s<l\le n}\left(\gamma_s^2-\gamma_l^2\right)^2\prod_{j=1}^{n}\left(\gamma_j\operatorname{ch}\left(\gamma_j T\right)\right).\tag{5.50}$$

Запишемо множину M_1 тих значень ν, при яких визначник $\Delta_1\left(h,\nu\right)$ перетворюється в нуль:

$$M_1=\left\{\frac{-2b_l T+i\pi\left(2m+1\right)}{2a_l T},\ m\in\mathbb{Z},\ i=\sqrt{-1},\ l\in\left\{1,\ldots,n\right\}\right\}.\tag{5.51}$$

Для всіх $\nu\in\mathbb{C}\backslash M_1$

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbf{T}}_j\left(t,\nu\right)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{n+j}S_{n-j}^{(l)}\operatorname{ch}\left(\gamma_l\left(T-t\right)\right)}{\operatorname{ch}\left(\gamma_l T\right)\prod\limits_{s=1,s\ne l}^{n}\left(\gamma_l^2-\gamma_s^2\right)},\\ &\widetilde{\mathbf{T}}_{n+j}\left(t,\nu\right)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{n+j}S_{n-j}^{(l)}\operatorname{sh}\left(\gamma_l t\right)}{\gamma\operatorname{ch}\left(\gamma_l T\right)\prod\limits_{s=1,s\ne l}^{n}\left(\gamma_l^2-\gamma_s^2\right)},\end{aligned}\quad j\in\left\{1,\ldots,n\right\},\tag{5.52}$$

де $S_q^{(l)}$ – сума всіх можливих добутків елементів $\left(\gamma_1\right)^2$, ..., $\left(\gamma_{l-1}\right)^2$, $\left(\gamma_{l+1}\right)^2$, ..., $\left(\gamma_n\right)^2$, узятих по $q\ge 1$ штук у кожному добутку, $S_0^{(l)}\equiv 1$, $l\in\{1,\ldots,n\}$.

Нехай $\nu=-b_j/a_j,\quad j\in\{1,\ldots,n\}$**.** Тоді аналогічно, як у пункті **а)**, можна показати, що формули для $\widetilde{\mathbf{T}}_j(t,0), j\in\{1,\ldots,n\}$, можна одержати з (5.52) шляхом граничного переходу при $\nu\to-b_j/a_j,\quad j\in\{1,\ldots,n\}$. Надалі вважатимемо, що параметр ν може набувати довільного значення з множини $\mathbb{C}\backslash M_1$ і на цій множині визначені функції $\widetilde{\mathbf{T}}_1(t,\cdot),\ldots,\widetilde{\mathbf{T}}_{2n}(t,\cdot)$, які задають формули (5.52).

Теорема 5.7. *Нехай* $\varphi_j\in A_{1,d_1}\bigcup K_{\mathbb{C}\backslash M_1}$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, $f\in\mathbf{A}_{d_1}^{M_1}$, *де* $d_1=\left(\pi^2+4T^2\min\limits_{j\in\{1,\ldots,n\}}\left\{b_j^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2T\max\limits_{j\in\{1,\ldots,n\}}\left\{a_j\right\}\right)^{-1}$, а множина M_1

визначена формулою (5.51). *Тоді у класі* $\mathbf{A}_{d_1}^{M_1}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (5.46), (5.2), *який можна подати у вигляді*

$$u(t,x)=\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{\mathbf{T}}_j(t,\nu)\exp(\nu x)\right\}\Big|_{\nu=0}+f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{F(t,\lambda,\nu)\exp(\nu x)\}\Big|_{\lambda=0,\nu=0}, \tag{5.53}$$

де функції $\widetilde{T}_j(t,\nu)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, *визначені формулами* (5.52), *а*

$$F(t,\lambda,\nu)=\frac{\exp(\lambda t)-\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{2j-2}\widetilde{\mathbf{T}}_j(t,\nu)-\exp(\lambda T)\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{2j-1}\widetilde{\mathbf{T}}_{n+j}(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)}.$$

5.2. Задача для рівняння вільних коливань струни з додатковою умовою за часовою змінною

а) В області Q^1 розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=0, \tag{5.54}$$

$$u(t,x)|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=\tau}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}=0,\quad 0<\tau<T. \tag{5.55}$$

Задача (5.54), (5.55) не може мати двох різних класичних розв'язків тоді і лише тоді, коли відповідна однорідна задача з умовами

$$u(t,x)|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=\tau}=0,\quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}=0,\quad 0<\tau<T, \tag{5.56}$$

не має нетривіальних розв'язків.

Теорема 5.8. *Для єдиності класичного розв'язку задачі* (5.54), (5.55) *достатньо, щоб число* τ/T *було ірраціональним.*

Доведення. Розв'язок задачі (5.54), (5.55) має вигляд

$$u(t,x)=\chi(x+t)+\psi(x-t), \tag{5.57}$$

де функції $\chi(x)$ та $\psi(x)$ визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} \chi(x) + \psi(x) = 0, \\ \chi'(x+\tau) - \psi'(x-\tau) = 0, \\ \chi'(x+T) - \psi'(x-T) = 0. \end{cases} \tag{5.58}$$

Система рівнянь (5.58) рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} \psi(x) = -\chi(x), \\ \chi(x+2\tau) + \chi(x) = b_1, \\ \chi(x+2T) + \chi(x) = b_2, \end{cases} \tag{5.59}$$

де b_1, b_2 — константи інтегрування.

Якщо функція $\chi(x)$ задовольняє друге і третє рівняння системи (5.59), то ця функція задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} \chi(x+4\tau) = \chi(x), \\ \chi(x+4T) = \chi(x), \end{cases} \tag{5.60}$$

з якої видно, що функція $\chi(x)$ — двояко періодична з періодами 4τ та $4T$.

Відомо [3], що якщо відношення τ/T є ірраціональним числом, то неперервна функція $\chi(x)$, яка має два несумірні періоди, є константою, тобто $\chi(x) = b_3$. Тоді $\psi(x) = -b_3$, і задача (5.54), (5.55) має лише тривіальний розв'язок. $\diamondsuit$

Класичний розв'язок задачі (5.54), (5.55) зображає формула (5.57), де $\chi(x)$ та $\psi(x)$ є двічі неперервно диференційовними функціями, які визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} \chi(x) + \psi(x) = 0, \\ \chi'(x+\tau) - \psi'(x-\tau) = \varphi(x), \\ \chi'(x+T) - \psi'(x-T) = 0, \end{cases} \tag{5.61}$$

яка рівносильна такій системі:

$$\begin{cases} \psi(x) = -\chi(x), \\ \chi'(x+\tau) - \psi'(x-\tau) = \varphi(x), \\ \chi(x+2T) + \chi(x) = b_4, \end{cases} \tag{5.62}$$

де b_4 — константа інтегрування.

Третє рівняння системи (5.62) задовольняють функції $\chi(x)$, що є періодичними функціями з періодом $4T$, вигляду $\chi(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \chi_k \exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right)$.

Тоді із першого рівняння системи (5.62) видно, що $\psi(x)$ буде $4T$-періодичною, а отже, і функція $\varphi(x)$ теж повинна бути $4T$-періодичною, тобто

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k \exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right),$$

$$\varphi_k = \frac{1}{4T}\int\limits_0^{4T} \varphi(x)\exp\left(-ikx\frac{\pi}{2T}\right)dx. \tag{5.63}$$

Для розв'язності системи (5.61) необхідно накласти умову $\int\limits_0^{4T}\varphi(x)\,dx = 0$. За цієї умови $\chi_k\left(ik\frac{\pi}{T}\cos\left(k\tau\frac{\pi}{2T}\right)\right) = \varphi_k$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Зауваження 5.2. *Для однозначного визначення коефіцієнтів χ_k, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, необхідно і достатньо, щоб справджувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \forall m \in \mathbb{Z}) \quad \frac{\tau}{T} \neq \frac{2m+1}{k}. \tag{5.64}$$

Надалі вважатимемо, що справджується умова (5.64). Тоді

$$\chi(x) = \chi_0 + \sum_{|k|>0} \varphi_k \frac{T}{k\pi i\cos(\tau k\pi/(2T))}\exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right),$$

а формальний розв'язок задачі (5.54), (5.55) зображає ряд

$$u(t,x) = \sum_{|k|>0} \varphi_k \frac{2T}{k\pi}\frac{\sin(tk\pi/(2T))}{\cos(\tau k\pi/(2T))}\exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right). \tag{5.65}$$

Якщо $\varphi(x)$ — тригонометричний многочлен вигляду $\varphi(x) = \sum_{k=-N}^{N}\varphi_k\exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right)$, то завжди існує єдиний розв'язок задачі (5.54), (5.55), який є скінченною сумою

$$u(t,x) = \sum_{k=-N}^{N} \varphi_k \frac{2T}{k\pi}\frac{\sin(tk\pi/(2T))}{\cos(\tau k\pi/(2T))}\exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right).$$

У загальному випадку величини $|\cos(\tau k\pi/(2T))|$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості чисел $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, тому питання існування класичного розв'язку задачі (5.54), (5.55) пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників.

Лема 5.4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел τ/T нерівність $|\cos(\tau k\pi/(2T))| \geq c_2 |k|^{-\alpha_2}$, $\alpha_2 > 1$, виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.*

Доведення проводиться за схемою доведення леми 5.1. $\diamondsuit$

Теорема 5.9. *Нехай справджується умова (5.64). Якщо φ — періодична з періодом $4T$ функція з класу $C^h([0,4T])$, де $h = [2+\alpha_2]+1$, $\alpha_2 > 1$, така, що $\int\limits_0^{4T} \varphi(x)\,dx = 0$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел τ/T існує класичний розв'язок задачі* (5.54), (5.55). *Цей розв'язок неперервно залежить від функції φ.*

Доведення. За умов теореми із формули (5.63) випливають оцінки

$$|\varphi_k| \leq (2T/\pi)^h |k|^{-h} \|\varphi(x); C^h([0,4T])\|, \qquad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{5.66}$$

де $h = [2+\alpha_2]+1$, $\alpha_2 > 1$.

На основі формули (5.65), леми 5.4 та оцінок (5.66) отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел τ/T справджується така оцінка для норми розв'язку задачі (5.54), (5.55):

$$\|u(t,x); C^2(Q^1)\| \leq \sum_{|k|>0} \frac{|\varphi_k| k\pi}{2Tc_2|k|^{-\alpha_2}} \leq$$

$$\leq \sum_{|k|>0} c_2^{-1}(2T/\pi)^{h-1}|k|^{-h+\alpha_2+1}\|\varphi(x); C^h([0,4T])\| = Sc_3\|\varphi(x); C^h([0,4T])\|, \tag{5.67}$$

де S — сума ряду $\sum\limits_{|k|>0} |k|^{-h+\alpha_2+1}$, $c_3 = c_2^{-1}(2T/\pi)^{h-1}$. З оцінки (5.67) випливає доведення леми. $\diamondsuit$

В області Q^1 розглянемо задачу з умовами

$$u(t,x)|_{t=0} = 0, \quad u(t,x)|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T} = 0, \quad 0 < \tau < T, \tag{5.68}$$

для рівняння (5.54).

Аналогічно, як для задачі (5.54), (5.55), можна довести наступну теорему.

Теорема 5.10. *Для единості класичного розв'язку задачі* (5.54), (5.68) *достатньо, щоб число* τ/T *було ірраціональним.*

Для однозначної побудови формального розв'язку задачі (5.54), (5.68) необхідно і достатньо, щоб справджувались умови

$$(\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \forall m \in \mathbb{Z}) \qquad \tau/T \neq 2m/k. \tag{5.69}$$

За виконання умови (5.69) формальний розв'язок задачі (5.54), (5.68) зображає формула

$$u(t,x) = \sum_{|k|>0} \varphi_k \frac{\sin(tk\pi/(2T))}{\sin(\tau k\pi/(2T))} \exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right). \tag{5.70}$$

Теорема 5.11. *Нехай справджується умова (5.69). Якщо* φ *— періодична з періодом* $4T$ *функція з класу* $C^h([0,4T])$*, де* $h = [3+\alpha_2]+1$*,* $\alpha_2 > 1$*, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* τ/T *існує класичний розв'язок задачі* (5.54), (5.55)*. Цей розв'язок неперервно залежить від функції* φ*.*

б) Результати пункту **а)** поширено на випадки крайових задач для рівняння (5.54) з умовами

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi_1(x), \ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=\tau} = \varphi_3(x), \ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T} = \varphi_2(x), \ 0<\tau<T, \tag{5.71}$$

або

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi_1(x), \ u(t,x)|_{t=\tau} = \varphi_3(x), \ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T} = \varphi_2(x), \ 0<\tau<T. \tag{5.72}$$

Розв'язки задач (5.54), (5.71) та (5.54), (5.72) знайдено у вигляді

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) + u_3(t,x), \tag{5.73}$$

де кожна з функцій $u_i(t,x)$, $i \in \{1,2,3\}$, є розв'язком задачі (5.54), (5.71) чи (5.54), (5.72), коли $\varphi_j(x) \equiv 0$, $j \in \{1,2,3\}$, $j \neq i$.

Для задач (5.54), (5.71) та (5.54), (5.72) встановлено справедливість наступних теорем.

Теорема 5.12. *Нехай число* τ/T *є ірраціональним. Якщо* φ_j, $j \in \{1,2,3\}$, *— періодична з періодом* ω_j *функція з класу* $C^{h_j}([0,\omega_j])$, *де* $\omega_1 = 2(T-\tau)$, $h_1 = [3+\alpha_2]+1$, $\omega_2 = 4\tau$, $h_2 = h_3 = [2+\alpha_2]+1$, $\omega_3 = 4T$, $\alpha_2 > 1$, *причому* $\int\limits_0^{\omega_3} \varphi_3(x)\,dx = 0$, $\int\limits_0^{\omega_2} \varphi_2(x)\,dx = 0$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* τ/T *існує класичний розв'язок задачі* (5.54), (5.71). *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* φ_i, $i\in\{1,2,3\}$ *і зображається формулою* (5.73), *де*

$$u_1(t,x) = \sum_{|k|>0} \varphi_{1k} \frac{\cos(\pi k(t-\tau)/(T-\tau))}{\cos(\pi k\tau/(T-\tau))} \exp\left(ikx\frac{\pi}{T-\tau}\right),$$

$$u_2(t,x) = \frac{2\tau}{\pi} \sum_{|k|>0} \varphi_{2k} \frac{\sin(tk\pi/(2\tau))}{k\cos(Tk\pi/(2\tau))} \exp\left(ikx\frac{\pi}{2\tau}\right),$$

$$u_3(t,x) = \frac{2T}{\pi} \sum_{|k|>0} \varphi_{3k} \frac{\sin(tk\pi/(2T))}{k\cos(\tau k\pi/(2T))} \exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right).$$

Теорема 5.13. *Нехай число* τ/T *є ірраціональним. Якщо* φ_j, $j \in \{1,2,3\}$, *— періодична з періодом* ω_j *функція з класу* $C^{h_j}([0,\omega_j])$, *де* $\omega_1 = 4(T-\tau)$, $h_1 = h_3 = [3+\alpha_2]+1$, $\omega_2 = 2\tau$, $h_2 = [2+\alpha_2]+1$, $\omega_3 = 4T$, $\alpha_2 > 1$, *причому* $\int\limits_0^{\omega_2} \varphi_2(x)\,dx = 0$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* τ/T *існує класичний розв'язок задачі* (5.54), (5.71). *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* φ_i, $i\in\{1,2,3\}$ *і зображається формулою* (5.73), *де*

$$u_1(t,x) = \sum_{|k|>0} \varphi_{1k} \frac{\cos(\pi k(T-t)/(2(T-\tau)))}{\cos(\pi kT/(2(T-\tau)))} \exp\left(ikx\frac{\pi/2}{(T-\tau)}\right),$$

$$u_2(t,x) = \frac{\tau}{\pi} \sum_{|k|>0} \varphi_{2k} \frac{\sin(tk\pi/\tau)}{k\cos(Tk\pi/\tau)} \exp\left(ikx\frac{\pi}{\tau}\right),$$

$$u_3(t,x) = \sum_{|k|>0} \varphi_{3k} \frac{\sin(tk\pi/(2T))}{\sin(\tau k\pi/(2T))} \exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right).$$

Зауваження 5.3. *Якщо* $\varphi_i(x)$, $i \in \{1,2,3\}$, *є тригонометричними многочленами вигляду* $\varphi_i(x) = \sum\limits_{k=-N}^{N} \varphi_{ik} \exp(ikx2\pi/\omega_i)$, *а число* τ/T *є ірраціональним, то завжди існують розв'язки задач* (5.54), (5.71) *та* (5.54), (5.72), *які є скінченними тригонометричними сумами за змінною* x.

5.3. Рівняння з псевдодиференціальними операторами за просторовими змінними

У цьому пункті використовуватимемо такі позначення та допоміжні відомості [42]: $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p_\xi$, $\xi^s = \xi_1^{s_1} \cdots \xi_p^{s_p}$, $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_p\xi_p$;

$Q^p = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^p_x\}$,

$D = (D_1, \ldots, D_p)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$, $j \in \{1, \ldots, p\}$, $D^s = D_1^{s_1} \cdots D_p^{s_p}$;

$A(D) := \sum_{|s|=0}^{\infty} a_s D^s$, $a_s \in \mathbb{C}$, – псевдодиференціальний оператор, символ якого $A(\xi) := \sum_{|s|=0}^{\infty} a_s \xi^s$ є аналітичною функцією в області $\Theta \subset \mathbb{R}^p_\xi$;

$\tilde{v}(\xi)$ – перетворення Фур'є функції $v(x)$;

$H^{+\infty}(\Theta)$ – простір функцій $v \in L_2(\mathbb{R}^p_x)$, для яких $\tilde{v}(\xi)$ є фінітними в області $\Theta \subset \mathbb{R}^p_\xi$; $[H^{+\infty}(\Theta)]^*$ – простір узагальнених функцій над $H^{+\infty}(\Theta)$;

$H^{-\infty}(\Theta) = [H^{+\infty}(-\Theta)]^*$, $-\Theta = \{\xi \in \mathbb{R}^p_\xi : -\xi \in \Theta\}$; $C^k([0, T], H^{\pm\infty}(\Theta))$ – простір функцій $v(t, x)$, які для кожного $t \in [0, T]$ є функціями з простору $H^{\pm\infty}(\Theta)$ і неперервно залежать від t разом із похідними за t до порядку k.

Якщо $v \in H^{+\infty}(\Theta)$, то $A(D)v(x) := (2\pi)^{-p} \int_\Theta A(\xi)\tilde{v}(\xi) \exp(ix, \xi)\, d\xi$; якщо $v \in [H^{+\infty}(\Theta)]^*$, то для кожної функції $\phi \in H^{+\infty}(\Theta)$ справджується $\langle A(D)v(x), \phi(x)\rangle := \langle v(x), A(-D)\phi(x)\rangle$. Простір $H^{+\infty}(\Theta)$ ($[H^{+\infty}(\Theta)]^*$) інваріантний відносно оператора $A(D)$ ($A(-D)$).

Для довільної аналітичної в Θ функції $A(\xi)$ відображення $A(D)$: $H^{\pm\infty}(\Theta) \to H^{\pm\infty}(\Theta)$ (де знакові «+» відповідає знак «+», а знакові «-» – знак «-») є неперервними і утворюють неформальну алгебру псевдодиференціальних операторів, що ізоморфна алгебрі аналітичних у Θ функцій.

Довільний функціонал $\upsilon \in [H^{+\infty}(\Theta)]^*$

$$\upsilon(x) = A_0(-D)\,\upsilon_0(x), \tag{5.74}$$

де $A_0(-D)$ – деякий псевдодиференціальний оператор, такий, що функція $A_0(\xi)$ аналітична в Θ, а $\upsilon_0 \in L_2(\mathbb{R}^p_x)$.

В області Q^p розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u(t,x) := \frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} A_k(t,D)\,\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k} = 0, \tag{5.75}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)}u(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \varphi_r(x), \ \left.\frac{\partial^{2r-1}u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+r}(x), \ r \in \{1,\ldots,n\}, \tag{5.76}$$

де $A_k(t,D)$, $k \in \{0,1,\ldots,2n-1\}$ – лінійні диференціальні оператори (взагалі, нескінченного порядку) з неперервними за t коефіцієнтами, $t \in [0,T]$. Вважатимемо, що для кожного $t \in [0,T]$ символи $A_k(t,\xi)$ цих операторів є аналітичними за ξ функціями в деякій області $G_1 \subset \mathbb{R}^p_\xi$.

У задачі (5.75), (5.76) покладемо формально $D \leftrightarrow \xi$, де $\xi \in G_1$, і розглянемо таку сім'ю $2n$ крайових задач для звичайного диференціального рівняння з параметром ξ:

$$\frac{d^{2n}w_j(t,\xi)}{dt^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} A_k(t,\xi)\,\frac{d^k w_j(t,\xi)}{dt^k} = 0, \tag{5.77}$$

$$\left.\frac{d^{2(r-1)}w_j(t,\xi)}{dt^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \delta_{rj}, \quad \left.\frac{d^{2r-1}w_j(t,\xi)}{dt^{2r-1}}\right|_{t=T} = \delta_{n+r,j}, \quad r \in \{1,\ldots,n\}, \tag{5.78}$$

де $j \in \{1,\ldots,2n\}$, δ_{pq} – символ Кронекера. Позначимо через $v_1(t,\xi)$, ..., $v_{2n}(t,\xi)$ нормальну фундаментальну систему розв'язків рівняння (5.77). Оскільки для кожного $t \in [0,T]$ функції $A_k(t,\xi)$ аналітично залежать від ξ в області G_1, то, згідно з теоремою Пуанкаре [106] про аналітичну залежність від параметра розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння, кожна функція $v_j(t,\xi)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, аналітична за ξ в області G_1 для кожного $t \in [0,T]$. Для кожного $j \in \{1,\ldots,2n\}$ характеристичний визначник [73] задачі (5.77), (5.78) такий:

$$\Delta(\xi)=\begin{vmatrix} v_1(0,\xi) & \ldots & v_{2n}(0,\xi) \\ \partial^2 v_1(0,\xi)/\partial t^2 & \ldots & \partial^2 v_{2n}(0,\xi)/\partial t^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial^{2n-2} v_1(0,\xi)/\partial t^{2n-2} & \ldots & \partial^{2n-2} v_{2n}(0,\xi)/\partial t^{2n-2} \\ \partial v_1(T,\xi)/\partial t & \ldots & \partial v_{2n}(T,\xi)/\partial t \\ \partial^3 v_1(T,\xi)/\partial t^3 & \ldots & \partial^3 v_{2n}(T,\xi)/\partial t^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial^{2n-1} v_1(T,\xi)/\partial t^{2n-1} & \ldots & \partial^{2n-1} v_{2n}(T,\xi)/\partial t^{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \xi \in G_1. \tag{5.79}$$

Для кожного $\xi \in G_1$ розв'язки задач (5.77), (5.78) зображають формули

$$w_j(t,\xi) = \sum_{l=1}^{2n} C_{jl} v_l(t,\xi), \quad j \in \{1,\ldots,2n\},$$

де C_{jl}, $l \in \{1,...,2n\}$, визначають зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{l=1}^{2n} C_{jl} \left.\dfrac{d^{2r-2} v_1(t,\xi)}{dt^{2r-2}}\right|_{t=0} = \delta_{rj}, \\ \sum\limits_{l=1}^{2n} C_{jl} \left.\dfrac{d^{2r-1} v_1(t,\xi)}{dt^{2r-1}}\right|_{t=T} = \delta_{n+r,j}, \end{array} \right. \quad r \in \{1,\ldots,n\},$$

визначник якої збігається з визначником $\Delta(\xi)$.

Позначимо: $G_2 = G_1 \backslash \Gamma_1$, де $\Gamma_1 = \{\xi \in G_1 : \Delta(\xi) = 0\}$. Для кожної із задач (5.77), (5.78), якщо $\xi \in G_2$, існує єдиний розв'язок із класу $C^{2n}([0,T])$. Ці розв'язки визначають формули

$$w_j(t,\xi) = \sum_{l=1}^{2n} \frac{\Delta_{jl}(\xi)}{\Delta(\xi)} v_l(t,\xi), j \in \{1,\ldots,2n\}, \tag{5.80}$$

де $\Delta_{jl}(\xi)$, $j,l \in \{1,\ldots,2n\}$ – алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\xi)$ елемента, який стоїть на перетині l-го стовпця та j-го рядка. З формул (5.79), (5.80) видно, що функції $w_j(t,\xi)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, для кожного $t \in [0,T]$ є аналітичними за ξ в області G_2.

Теорема 5.14. *Нехай* $\varphi_j \in H^{+\infty}(G_2)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u(t,x)$ *задачі* (5.75), (5.76) *з простору* $C^{2n}([0,T], H^{+\infty}(G_2))$.

Доведення. Кожній функції $w_j(t,\xi)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$, із (5.80) поставимо у відповідність псевдодиференціальний оператор $W_j(t,D) = \sum\limits_{l=1}^{2n} \dfrac{\Delta_{jl}(D)}{\Delta(D)} v_l(t,D)$, дію якого на $v \in H^{+\infty}(G_2)$ визначає формула

$$W_j(t,D)\,v(x) := (2\pi)^{-p} \int_{G_2} W_j(t,\xi)\,\tilde{v}(\xi)\exp(ix,\xi)\,d\xi. \qquad (5.81)$$

Враховуючи (5.81), безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що функція

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{2n} W_j(t,D)\,\varphi_j(x) \qquad (5.82)$$

є розв'язком задачі (5.75), (5.76) з простору $C^{2n}([0,T], H^{+\infty}(G_2))$.

Для доведення єдиності роз'язку розглянемо перетворення Фур'є $\tilde{u}(t,\xi)$ функції $u(t,x)$, визначеної формулою (5.82). Функція $\tilde{u}(t,\xi)$ є розв'язком такої крайової задачі:

$$\frac{d^{2n}\tilde{u}(t,\xi)}{dt^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} A_k(t,\xi)\,\frac{d^k\tilde{u}(t,\xi)}{dt^k} = 0, \qquad (5.83)$$

$$\left.\frac{d^{2(r-1)}\tilde{u}(t,\xi)}{dt^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \tilde{\varphi}_r(\xi), \left.\frac{d^{2r-1}\tilde{u}(t,\xi)}{dt^{2r-1}}\right|_{t=T} = \tilde{\varphi}_{n+r}(\xi), r \in \{1,\dots,n\}, \qquad (5.84)$$

де $\tilde{\varphi}_j(\xi)$ – перетворення Фур'є функції $\varphi_j(\xi)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$. Характеристичним визначником задачі (5.83), (5.84) є визначник (5.79). Якщо $\xi \in G_2$, то $\Delta(\xi) \neq 0$, і тому задача (5.83), (5.84) не може мати двох різних розв'язків із простору $C^{2n}([0,T])$. Отже, задача (5.75), (5.76) не може мати двох різних розв'язків із простору $C^{2n}([0,T], H^{+\infty}(G_2))$. Теорему доведено.

Теорема 5.15. *Нехай* $\varphi_j \in H^{-\infty}(G_2)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u \in C^{2n}([0,T], H^{-\infty}(G_2))$ *задачі* (5.75), (5.76), *який визначає формула* (5.82).

Доведення. Нагадаємо, що $W_j(t,D)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$ — псевдодиференціальні оператори, символи яких $w_j(t,\xi)$ є розв'язками задач (5.77), (5.78). Зауважимо, що для псевдодиференціальних операторів $A_k(t,D)$, $k \in \{0,1,\dots 2n-1\}$, та $W_j(t,D)$ спряженими є оператори $A_k(t,-D)$ та $W_j(t,-D)$, відповідно. Очевидно [42], що якщо для довільної функції $\varphi \in H^{+\infty}(G_2)$ функція $w_j(t,x) = W_j(t,D)\varphi(x)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^{2n} w(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} A_k(t,D)\frac{\partial^k w(t,x)}{\partial t^k} = 0,$$

то для довільної функції $\psi \in H^{+\infty}(-G_2)$ функція $w_j^*(t,x) = W_j(t,-D)\psi(x)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^{2n} w^*(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} A_k(t,-D)\frac{\partial^k w^*(t,x)}{\partial t^k} = 0.$$

Покажемо, що якщо $\varphi_j \in H^{-\infty}(G_2)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$, то функція $u(t,x) = \sum\limits_{j=1}^{2n} W_j(t,D)\varphi_j(x)$ є розв'язком задачі (5.75), (5.76) з простору $C^{2n}([0,T], H^{-\infty}(G_2))$.

Враховуючи сказане вище, для довільної функції $\psi \in H^{+\infty}(-G_2)$ отримуємо:

$$\left\langle L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u, \psi\right\rangle = \left\langle L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)\left(\sum_{j=1}^{2n} W_j(t,D)\varphi_j(x)\right), \psi(x)\right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\left[\left\langle \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} W_j(t,D)\varphi_j(x), \psi(x)\right\rangle + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{2n-1}\left\langle A_k(t,D)\frac{d^k}{dt^k} W_j(t,D)\varphi_j(x), \psi(x)\right\rangle\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\left[\left\langle \varphi_j(x), \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} W_j(t,-D)\psi(x)\right\rangle + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{2n-1}\left\langle \varphi_j(x), A_k(t,-D)\frac{d^k}{dt^k} W_j(t,-D)\psi(x)\right\rangle\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\left\langle \varphi_j(x), \frac{\partial^{2n} w_j^*(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} A_k(t,-D)\frac{\partial^k w_j^*(t,x)}{\partial t^k}\right\rangle = \sum_{j=1}^{2n}\langle \varphi_j(x), 0\rangle = 0,$$

тобто функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (5.75) з простору $C^{2n}([0,T], H^{-\infty}(G_2))$. Покажемо тепер, що ця функція задовольняє умови (5.76). Враховуючи (5.78), бачимо, що для операторів $W_j(t,D)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, виконуються рівності

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)}W_j(t,D)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \delta_{rj}\mathrm{I}, \quad \left.\frac{\partial^{2r-1}W_j(t,D)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \delta_{r+n,j}\mathrm{I}, \quad r \in \{1,\ldots,n\},$$

де I– тотожний оператор у просторі $H^{+\infty}(G_2)$. Звідси аналогічно, як у [42], отримуємо:

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)}W_j(t,-D)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \delta_{rj}\mathrm{I},$$

$$\left.\frac{\partial^{2r-1}W_j(t,-D)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \delta_{r+n,j}\mathrm{I}, \quad r \in \{1,\ldots,n\}, \quad j \in \{1,\ldots,2n\}.$$

Тоді для довільної функції $\psi \in H^{+\infty}(-G_2)$ виконуються такі рівності:

$$\left.\left\langle \frac{\partial^{2(r-1)}u(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}}, \psi(x) \right\rangle\right|_{t=0} = \left.\left\langle \frac{\partial^{2(r-1)}}{\partial t^{2(r-1)}} \sum_{j=1}^{2n} W_j(t,D)\,\varphi_j(x), \psi(x) \right\rangle\right|_{t=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \left\langle \left.\frac{d^{2(r-1)}W_j(t,D)}{dt^{2(r-1)}}\right|_{t=0} \varphi_j(x), \psi(x) \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \left\langle \varphi_j(x), \left.\frac{d^{2(r-1)}W_j(t,-D)}{dt^{2(r-1)}}\right|_{t=0} \psi(x) \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \langle \varphi_j(x), \delta_{rj}\mathrm{I}\,\psi(x)\rangle = \langle \varphi_r(x),\, \psi(x)\rangle,$$

$$\left.\left\langle \frac{\partial^{2r-1}u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}, \psi(x) \right\rangle\right|_{t=T} = \sum_{j=1}^{2n} \langle \varphi_j(x), \delta_{r+n,j}\mathrm{I}\,\psi(x)\rangle =$$

$$= \langle \varphi_{r+n}(x), \psi(x)\rangle, \quad r \in \{1,\ldots,n\},$$

тобто функція $u(t,x)$ задовольняє умови (5.76) у просторі $C^{2n}([0,T], H^{-\infty}(G_2))$.

Доведемо тепер єдиність розв'язку задачі. Нехай $u(t,x)$ – розв'язок задачі (5.75), (5.76) з простору $C^{2n}([0,T], H^{-\infty}(G_2))$. Тоді, згідно з формулою (5.74), справедливе зображення $u(t,x) = A_0(t,D)\,u_0(t,x)$, де $A_0(t,D)$ –

такий псевдодиференціальний оператор, що функція $A_0(t,\xi)$ для кожного $t\in[0,T]$ є аналітичною за ξ в області G_2, причому функції $\partial^s A_0(t,\xi)/\partial t^s$, $s\in\{0,1,\ldots,2n\}$, неперервні за $t\in[0,T]$ і аналітичні за ξ в області G_2, а функція $u_0(t,x)$ належить простору $C^{2n}([0,T],\ L_2(\mathbb{R}^p_x))$ і для кожного $t\in[0,T]$ її x-перетворення Фур'є фінітне в області G_2. Отже, для кожного $t\in[0,T]$ перетворення Фур'є $\tilde u(t,\xi)=A_0(t,\xi)\,\tilde u_0(t,\xi)$ функції $u(t,x)$ за змінною x є звичайною функцією, локально інтегровною з квадратом в області G_2. Оскільки функція $\tilde u(t,\xi)$ є розв'язком задачі (5.83), (5.84), де $\varphi_j\in H^{-\infty}(G_2)$, то зі сказаного вище отримаємо, що цей розв'язок єдиний у просторі $C^{2n}([0,T])$, якщо $\xi\in G_2$. Звідси випливає єдиність розв'язку задачі (5.75), (5.76) у просторі $C^{2n}([0,T],H^{-\infty}(G_2))$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

У наведених нижче прикладах побудовано явно область G_2 та розв'язки задач.

Приклад 5.2. Розглянемо в області Q^p задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A_1(t,D)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-A_2(t,D)\right)u(t,x)=0, \tag{5.85}$$

$$u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi_1(x), \quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}=\varphi_2(x), \tag{5.86}$$

де $A_k(t,D)$, $k\in\{1,2\}$ – ті самі оператори, що і у рівнянні (5.75), причому $A_1(t,D)$ і $A_2(t,D)$ не збігаються. Розв'язок задачі зображає формула

$$u(t,x)=\left(\exp\left(\int_0^t A_2(\tau,D)\,d\tau\right)-A_2(T,D)\,(\Delta_1(D))^{-1}\exp\left(\int_0^T A_2(\tau,D)\,d\tau\right)\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^t\exp\left(\int_0^\tau a(\tau_1,D)\,d\tau_1\right)d\tau\,\exp\left(\int_0^t A_2(\tau,D)\,d\tau\right)\right)\varphi_1(x)+$$
$$+(\Delta_1(D))^{-1}\int_0^t\exp\left(\int_0^\tau a(\tau_1,D)\,d\tau_1\right)d\tau\,\exp\left(\int_0^t A_2(\tau,D)\,d\tau\right)\varphi_2(x),$$

де

$$\Delta_1(\xi)=\exp\left(\int_0^T A_2(\tau,\xi)\,d\tau\right)\times$$
$$\times\left(A_2(T,\xi)\int_0^T\exp\left(\int_0^\tau a(\tau_1,\xi)\,d\tau_1\right)d\tau+\exp\left(\int_0^T a(\tau,\xi)\,d\tau\right)\right),$$

$$a(t,\xi)=A_1(t,\xi)-A_2(t,\xi)\,,$$

а

$$G_2=G_1\backslash\Gamma_1=G_1\backslash\left\{\xi\in G_1: A_2(T,\xi)=-\frac{\exp\left(\int_0^T a(\tau,\xi)\,d\tau\right)}{\int_0^T\exp\left(\int_0^\tau a(\tau_1,\xi)\,d\tau_1\right)d\tau}\right\}.$$

Нехай $a(t,\xi)\equiv\alpha(\xi)$ і $\mathrm{P}=\{\xi\in G_1:\alpha(\xi)=0\}$. Якщо Р – порожня множина, то $\Gamma_1=\left\{\xi\in G_1: e^{\alpha(\xi)T}=A_2(T,\xi)/A_1(T,\xi)\right\}$; якщо множина Р не є порожньою, то $\Gamma_1=\Gamma_2\cup\Gamma_3$, де $\Gamma_2=\{\xi\in P:\ A_2(T,\xi)=-1/T\}$, $\Gamma_3=\left\{\xi\in G_1\backslash P: e^{\alpha(\xi)T}=A_2(T,\xi)/A_1(T,\xi)\right\}$.

Якщо $A_1(t,D)\equiv A_2(t,D)$, то $G_2=G_1\backslash\{\xi\in G_1: A_1(T,\xi)=-1/T\}$.

Приклад 5.3. В області Q^p розглядаємо задачу

$$L_1\left(\frac{\partial}{\partial t},D\right)u(t,x):=\frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial t^{2n}}+\sum_{k=0}^{n-1}A_k(D)\frac{\partial^{2k}u(t,x)}{\partial t^{2k}}=0, \tag{5.87}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)}u(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0}=\varphi_r(x)\,,\ \left.\frac{\partial^{2r-1}u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T}=\varphi_{n+r}(x)\,,\ r\in\{1,\ldots,n\}\,, \tag{5.88}$$

де $A_k(D)$, $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ – псевдодиференціальні оператори, символи $A_k(\xi)$ яких є аналітичними функціями в області $\Theta\subset\mathbb{R}^p_\xi$.

Позначимо $G_1=\Theta\backslash\Gamma$, де $\Gamma=\{\xi\in\Theta: R_\lambda(L_1(\lambda,\xi),\partial L_1(\lambda,\xi)/\partial\lambda)=0\}$, $R_\lambda(\sigma_1,\sigma_2)$ – результант поліномів $\sigma_1(\lambda)$ і $\sigma_2(\lambda)$ [107]; $\pm\lambda_l(\xi)$, $l\in\{1,\ldots,n\}$ – корені рівняння $L_1(\lambda,\xi)=0$.

Розв'язок задачі (5.87), (5.88) зображає формула

$$u(t,x)=\sum_{j,l=1}^{n}\left(\frac{\Delta_{jl}(D)}{\Delta_2(D)}e^{\lambda_j(D)t}+\frac{\Delta_{j,n+l}(D)}{\Delta_2(D)}e^{-\lambda_j(D)t}\right)\varphi_j(x)+$$

$$+\sum_{j=n+1}^{2n}\sum_{l=1}^{n}(-1)^n\left(\frac{\Delta_{jl}(D)}{\Delta_2(D)}e^{\lambda_j(D)t}+\frac{\Delta_{j,n+l}(D)}{\Delta_2(D)}e^{-\lambda_j(D)t}\right)\varphi_j(x)\,,$$

де $\Delta_2(\xi)$ має вигляд

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^2(\xi) & \ldots & \lambda_n^2(\xi) & \lambda_1^2(\xi) & \ldots & \lambda_n^2(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{2(n-1)}(\xi) & \ldots & \lambda_n^{2(n-1)}(\xi) & \lambda_1^{2(n-1)}(\xi) & \ldots & \lambda_n^{2(n-1)}(\xi) \\ & & & & & \\ \lambda_1(\xi)\, e^{\lambda_1(\xi)T} & \ldots & \lambda_n(\xi)\, e^{\lambda_n(\xi)T} & -\lambda_1(\xi)\, e^{-\lambda_1(\xi)T} & \ldots & -\lambda_n(\xi)\, e^{-\lambda_n(\xi)T} \\ \lambda_1^3(\xi)\, e^{\lambda_1(\xi)T} & \ldots & \lambda_n^3(\xi)\, e^{\lambda_n(\xi)T} & -\lambda_1^3(\xi)\, e^{-\lambda_1(\xi)T} & \ldots & -\lambda_n^3(\xi)\, e^{-\lambda_n(\xi)T} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{2n-1}(\xi)e^{\lambda_1(\xi)T} & \ldots & \lambda_n^{2n-1}(\xi)e^{\lambda_n(\xi)T} & -\lambda_1^{2n-1}(\xi)e^{-\lambda_1(\xi)T} & \ldots & -\lambda_n^{2n-1}(\xi)e^{-\lambda_n(\xi)T} \end{array}\right|$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta_2(\xi) = (-1)^n \prod_{1\le s<r\le n} \left(\lambda_r^2(\xi) - \lambda_s^2(\xi)\right)^2 \prod_{j=1}^{n} \left(\lambda_j(\xi)\left(e^{\lambda_j(\xi)T} + e^{-\lambda_j(\xi)T}\right)\right),$$

а $\Delta_{rs}(\xi)$, $r, s \in \{1, ..., 2n\}$ – алгебричне доповнення у визначнику $\Delta_2(\xi)$ елемента, який стоїть на перетині s-го стовпця і r-го рядка.

При цьому $G_2 = G_1 \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \gamma_m$, $\gamma_m = \{\xi \in G_1 : L_1((2m+1)\pi/2T, \xi) = 0\}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Висновки до розділу 5

У п'ятому розділі дисертації у необмежених за просторовими змінними областях встановлено умови коректності у різних функційних просторах та побудовано розв'язки задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійних рівнянь з частинними похідними зі сталими та змінними за t коефіцієнтами.

Доведено метричні леми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків задач для гіперболічних рівнянь. На підставі доведених лем встановлено умови існування єдиного розв'язку розглянутих задач для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) параметрів області та для фіксованих коефіцієнтів рівнянь.

За допомогою диференціально-символьного методу [52] побудовано розв'язки задач для гіперболічних рівнянь високого порядку у вигляді дії диференціальних виразів (загалом нескінченного порядку), символами яких є праві частини крайових умов та рівняння, на деякі мероморфні функції параметрів. Встановлено, що класами однозначної розв'язності задачі є цілі функції, порядок яких не перевищує одиниці.

Встановлено однозначну розв'язність у просторах основних і узагальнених функцій, які запроваджені та вивчені Ю. А. Дубінським у праці [42], та побудовано розв'язок крайової задачі з мішаними умовами на межі області для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами за просторовими змінними, що мають аналітичні символи.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [76, 85, 87, 98, 99].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню задач з умовами Діріхле-Неймана за виділеною змінною та певними умовами (періодичності, майже періодичності, умовами типу умов Діріхле та ін.) за рештою змінних для гіперболічних (лінійних і слабко нелінійних) та безтипних (лінійних) рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними в обмежених та необмежених циліндричних областях. Більшість розглянутих у дисертаційній роботі задач є, взагалі, умовно коректними, а їхня розв'язність, зазвичай, пов'язана з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої використано метричний підхід.

У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

— досліджено коректність у різних функційних просторах крайових задач для лінійних гіперболічних рівнянь та систем рівнянь в обмежених циліндричних областях, коли на нижній та верхній основах циліндра задано умови Діріхле та Неймана відповідно або локальні крайові умови третього роду;

— досліджено класичну розв'язність задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійного гіперболічного оператора високого порядку, збуреного нелінійним доданком (застосовуючи принцип нерухомої точки);

— досліджено умови однозначної розв'язності у різних функційних просторах задач з умовами Діріхле-Неймана за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за іншими змінними для загальних (без обмеження на тип) лінійних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами;

— досліджено коректність у безмежній смузі задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для лінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами в класах цілих функцій (застосовуючи диференціально-символьний метод) і в класах майже періодичних функцій за просторовою змінною;

— встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі Діріхле-Неймана (за часовою змінною) для рівняння вільних коливань безмежної струни з додатковою умовою Діріхле або Неймана у внутрішній точці часового інтервалу;

— у безмежному шарі досліджено однозначну розв'язність крайової задачі з мішаними умовами (Діріхле-Неймана) на межі області для рівнянь із псевдодиференціальними операторами (використовуючи техніку диференціальних операторів нескінченного порядку);

— побудовано точні розв'язки досліджуваних задач у випадках лінійних рівнянь та вказано алгоритм побудови наближеного розв'язку у випадку задачі для слабко нелінійного рівняння;

— доведено метричні леми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків досліджуваних задач, на підставі яких встановлено умови коректної розв'язності задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задачі.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у подальших дослідженнях різних крайових задач для рівнянь із частинними похідними, а також при розв'язанні конкретних задач практики, математичними моделями яких є досліджені у роботі крайові задачі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Агман С.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы / С. Агман, А. Дуглис, Л. Ниренберг. – М.: ИЛ, 1962. – 104 с.
2. *Агранович М. С.* К теории задач Дирихле и Неймана для линейных сильно эллиптических систем в липшицевых областях / М. С. Агранович // Функциональный анализ и его приложения. – 2007. – **41**, № 4. – С. 1 – 21.
3. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. 1. Об отображении окружности на себя / В. И. Арнольд // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21—86.
4. *Березанский Ю. М.* О задаче типа Дирихле для уравнения колебания струны / Ю. М. Березанский // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, № 4. – С. 363–372.
5. *Березанский Ю. М.* Некоторые примеры "неклассических"краевих задач для уравнений в частных производных / Ю. М. Березанский // Докл. АН СССР. – 1960. – **131**, № 3. – С. 478–481.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. – К.: Наук. думка, 1965. – 798 с.
7. *Берник В. И.* Краевая задача для системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами / В. И. Берник, Б. И. Пташник // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 2. – С. 273–279.
8. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация / П. Биллингслей. – М.: Мир, 1969. – 238 с.
9. *Білусяк Н. І.* Крайові задачі для лінійних і слабконелінійних гіперболічних та безтипних рівнянь у циліндричних областях: Автореф. дис. …канд. фіз.-мат. наук / Н. І. Білусяк. – Л., 2003. – 17 с.
10. *Білусяк Н. І.* Крайова задача для гіперболічного рівняння, збуреного нелінійним інтегро-диференціальним оператором / Н. І. Білусяк // Вісник державного університету "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – 1, № 337. – С. 76–79.

11. *Білусяк Н. І.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, нерозв'язних відносно старшої похідної за часом / Н. І. Білусяк, Л. І. Комарницька, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592–1602.

12. *Білусяк Н. І.* Задача з умовами типу умов Діріхле для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь / Н. І. Білусяк, Б. Й. Пташник // Вісник Прикарпатського університету. Математика. Фізика. Хімія. – 1999. – Вип. 1. – С. 22 – 32.

13. *Білусяк Н. І.* Крайова задача з даними на всій границі області для слабконелінійних гіперболічних рівнянь / Н. І. Білусяк, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2001. – 53, № 2. – С. 244–249.

14. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача для систем слабко нелінійних гіперболічних рівнянь / Н. І. Білусяк, Б. Й. Пташник // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – №12. – С. 26–31.

15. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача для слабко нелінійних рівнянь із нерозв'язною відносно старшої похідної лінійною частиною / Н. І. Білусяк, Б. Й. Пташник // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 3. – С. 7–15.

16. *Білусяк Н. І.* Крайова задача зі змішаними умовами для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь / Н. І. Білусяк, Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2010. — Т. 53, № 3. — С. 74–84. (Переклад: Bilusyak N. I. Boundary-value problem with mixed conditions for weakly nonlinear hyperbolic equations / N. I. Bilusyak, B. Yo. Ptashnyk, S. M. Repetylo // J. Math. Sci. — 2012. — **180**, № 1. — P. 68–80.)

17. *Білусяк Н. І.* Крайова задача з мішаними умовами для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами / Н. І. Білусяк, С. М. Репетило // Конф. молодих вчених з сучасних проблем мех. і мат. ім. акад. Я. С. Підстригача: тези доповідей, Львів, 25–27 травня, 2009р. – Львів, 2009. – С. 198 – 199.

18. *Бобик І. О.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / І. О. Бобик, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 795–802.

19. *Бобик І. О.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь з частинними похідними / І. О. Бобик, М. М. Симотюк// Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. Фізико-математичні науки. – 2010. – Вип. 687. – С. 11–19.

20. *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами / В. М. Борок // Мат. сб. – 1969. – **79**, № 2. – С. 293–304.

21. *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое / В. М. Борок // Докл. АН СССР. – 1968. – **183**, № 5. – С. 995–998.

22. *Борок В. М.* Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных / В. М. Борок // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1971. – **35**, № 1. – С. 185—201.

23. *Борок В. М.* О корректной разрешимости краевой задачи в бесконечном слое для линейных уравнений с постоянными коэффициентами / В. М. Борок // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1971. – **35**, № 4. – С. 922—939.

24. *Борок В. М.* Регулярные граничные задачи в полосе / В. М. Борок, С. В. Евдокимова // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. – 1989. – Вып. 51. – С. 31–37.

25. *Борок В. М.* О класах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое / В. М. Борок, М. А. Перельман // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.

26. *Бурский В. П.* О некоторых краевых задачах для дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков в круге / В. П. Бурский // Мат. физика и нелин. мех. – 1985. – Вип. 4. – С. 76–81.

27. *Бурский В. П.* Краевые задачи для гиперболического уравнения второго порядка в круге / В. П. Бурский // Изв. вузов. Мат. – 1987. – № 2. – С. 22–29.

28. *Бурский В. П.* Единственность решения задачи Дирихле в шаре для волнового уравнения / В. П. Бурский // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 6. – С. 1038–1039.

29. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений / В. П. Бурский. – К.: Наук. думка, 2002. – 315 с.

30. *Буряченко Е. А.* Разрешимость однородной задачи Дирихле в круге для уравнений порядка $2m$ в случае кратных характеристик, имеющих углы наклона / Е. А. Буряченко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 33–41.

31. *Вайнерман Л. И.* О граничных задачах для дифференциального уравнения второго порядка гипнрболического типа в гильбертовом пространстве / Л. И. Вайнерман, М. Л. Горбачук // Докл. АН СССР. – 1975. – **221**, № 4. – С. 763–766.

32. *Вахания Н. Н.* О приближённом решении задачи Дирихле для уравнения струны / Н. Н. Вахания // Тр. ВЦ АН ГССР. – 1960. – **1**. – С. 41–49.

33. *Вахания Н. Н.* Об одной краевой задаче с данными на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны / Н. Н. Вахания // Докл. АН СССР. – 1957. – **116**, № 6. – С. 906–909.

34. *Вирабян Г. В.* Об операторах, связанных с системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Г. В. Вирабян. – Ереван, 1965. – 11 с.

35. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений / М. И. Вишик. – Тр. ММО. – 1952. – **1**. – С. 187 – 246.

36. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

37. *Гилбарг Д.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

38. *Гой Т. П.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь / Т. П. Гой, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, № 2. – С. 186–195.

39. *Горбачук В. И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.

40. *Грошев А. В.* Теорема о системе линейных форм / А. В. Грошев. – Докл. АН СССР, 1938. – **19**, № 3. – С. 151–152.

41. *Дезин А. А.* Неклассические граничные задачи / А. А. Дезин, В. Н. Масленникова// Дифференциальние уравнения с частными производными. Тр. симпоз. посвящ. 60-летию акад. С. Л. Соболева. М.: Наука, 1970. – С. 81–95.

42. *Дубинский Ю. А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике / Ю. А. Дубинский // Успехи матем. наук. – 1982. – **37**, вып. 5. – С. 97–159.

43. *Жук В. Й.* Краевая задача для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами / В. Й. Жук, Б. Й. Пташник // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 1979. – вып. 9. – С. 3–9.

44. *Ильин В. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных / В. А. Ильин, И. А. Шишмарев// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 6. – С. 883–896.

45. *Илькив В. С.* Возмущения нелокальной задачи для дифференциальных уравнений с псевдодифференциальными коэффициентами / В. С. Илькив // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 11. – С. 1962–1971.

46. *Илькив В. С.* Продовження за часовою змінною розв'язку нелокальної багатоточкової задачі для диференціального рівняння з з частинними похідними і сталими коефіцієнтами / В. С. Илькив // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 78–82.

47. *Илькив В. С.* Нелокальная краевая задача для систем псевдодифференциальных уравнений / В. С. Илькив, В. Н. Полищук, Б. И. Пташник // Методы исследования дифференц. и интегр. операторов. – К.: Наук. думка, 1989. – С. 75–79.

48. *Илькив В. С.* Нелокальная многоточечная задача для псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами / В. С. Илькив, В. Н. Полищук, Б. И. Пташник, Б. О. Салига // Укр. матем. журн. – 1986. – **38**, № 5. – С. 582–587.

49. *Каленюк П. І.* Обобщенный метод разделения переменных / П. І. Каленюк, Я. Е. Баранецький, З. М. Нитребич. – К.: Наук. думка, 1993. – 232 с.

50. *Каленюк П. І.* Про дію диференціального виразу нескінченного порядку у класах цілих функцій багатьох комплексних змінних / П. І. Каленюк, З. М. Нитребич // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 11–16.

51. *Каленюк П. І.* Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними / П. І. Каленюк, І. В. Когут, З. М. Нитребич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 4. – С. 7–17.

52. *Каленюк П. І.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод / П. І. Каленюк, З. М. Нитребич. – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

53. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва: Наука, 1977. – 742 с.

54. *Кирилич В. М.* Деякі нелінійні задачі з вільними межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь / В. М. Кирилич // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 113–123.

55. *Кирилич В. М.* Достатні умови глобальної неперервної розв'язності задачі з невідомими межами для виродженої квазілінійної гіперболічної системи / В. М. Кирилич // Матем. вісн. НТШ. – 2009. – Т. 6. – С. 123–139.

56. *Клюс І. С.* Триточкова задача для хвильового рівняння / І. С. Клюс, Б. Й. Пташник // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 40. – С. 78–86.

57. *Клюс І. С.* Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь / І. С. Клюс, Б. Й. Пташник // Укр. матем. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 22–29.

58. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

59. *Комарницька Л. І.* Крайові задачі для диференціального рівняння з частинними похідними, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом / Л. І. Комарницька, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 9. – С. 1197–1208.

60. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками / В. А. Кондратьев // Тр. ММО. – 1967. – **16**. – С. 209 – 292.

61. *Кострыкин А. И.* Введение в алгебру / А. И. Кострыкин. – М.: Наука, 1977. – 495 с.

62. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна–Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8. – С. 41–53.

63. *Ладыженская О. А.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 576.

64. *Мельник О. М.* Задача типу Діріхле для неізотропних рівнянь із частинними похідними / О. М. Мельник, А. Д. Миколик,

Б. Й. Пташник // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. Прикладна математика. – 2000. – Вип. 211. – С. 248–253.

65. *Мельникова И. В.* О регуляризации краевой задачи для уравнения колебаний / И. В. Мельникова, А. Ю. Фрейберг // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1985. – Т. 25, №5. – С. 783-789.

66. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. – М.: ИЛ, 1957. – 256 с.

67. *Мосеенков В. Б.* Майже періодичні розв’язки нелінійних хвильових рівнянь. / В. Б. Мосеенков // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 1. – С. 112–118.

68. *Мосолов П. П.* О задаче Дирихле для уравнений в частных производных / П. П. Мосолов // Изв. вузов. Математика. – 1960. – №3. – С. 213-218.

69. *Митропольський Ю. О.* Умови існування розв’язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I / Ю. О. Митропольський, С. Г. Хома-Могильська // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 912–921.

70. *Митропольський Ю. О.* Розв’язки крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку / Ю. О. Митропольський, Г. П. Хома, С. Г. Хома-Могильська // Доповіді Національної академії наук України. – 2008. – № 5. – С. 30 – 36.

71. *Мамян А. Х.* Построение разрешимых расширений в параллелепипеде для линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами / А. Х. Мамян // Дифференц. уравнения. – 1970. – **6**, № 2. – С. 358 – 370.

72. *Михайлов В. П.* Дифференциальние уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

73. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.

74. *Нитребич З. М.* Крайова задача для неоднорідного гіперболічного рівняння із частинними похідними / З. М. Нитребич // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – № 346. – С. 35–39.

75. *Нитребич З. М.* Диференціально-символьний метод розв'язування задач для рівнянь із частинними похідними: Автореф. дис. ...докт. физ.-мат. наук / З. М. Нитребич. – К., 2013. – 36 с.

76. *Нитребич З. М.* Задача Діріхле-Неймана для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі / З. М. Нитребич, Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія "математика і інформатика". – 2014. – Вип. 25, № 1. – С. 94–105.

77. *Нитребич З. М.* Задача Діріхле-Неймана у смузі для рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / З. М. Нитребич, Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // XV міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: матеріали конференції I, Київ, 15–17 травня, 2014 р. – К.: НТУУ "КПІ" , 2014. – С. 231.

78. *Павленко В. Н.* Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью / В. Н. Павленко, Т. А. Петраш // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – **18**, № 2. – С. 199–204.

79. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.

80. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

81. *Пташник Б. Й.* Про одну крайову задачу для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / Б. И. Пташник // Доп. АН УРСР. Сер А. – 1971. – № 6. – С. 522–526.

82. *Пташник Б. И.* Періодична крайова задача для гіперболічного оператора, що розпадається на лінейні множники першого порядку / Б. И. Пташник // Доп. АН УРСР. Сер А. – 1973. – № 11. – С. 985–989.

83. *Пташник Б. Й.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

84. *Пташник Б. Й.* Крайова задача з мішаними умовами для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі змінними коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 19–24.

85. *Пташник Б. Й.* Крайова задача зі змішаними умовами для рівнянь із псевдодиференціальними операторами з аналітичними символами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Прикл. проблеми мех. і мат.– 2011. – Вип. 9. – С. 7 – 14.

86. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип. 10. – С. 7 – 14.

87. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, № 3. – С. 15–28. (Переклад: Ptashnyk B. Yo. Dirichlet–Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients / B. Yo. Ptashnyk, S. M. Repetylo // J. Math. Sci. — 2015. — **205**, № 4. — P. 501–517.)

88. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – Т. 57, № 2. – С. 25–31.

89. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана для лінійних нееліптичних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Доп. НАН України. – 2015. – № 2. – С. 24–31.

90. *Пташник Б. Й.* Крайова задача з мішаними умовами для лінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Міжнар. мат. конф. ім. В. Я. Скоробагатька: тези доповідей, Дрогобич, Україна, 24–28 вересня, 2007 р. – Львів, 2007. – С. 235.

91. *Пташник Б. Й.* Крайова задача з мішаними умовами для рівнянь із псевдодиференціальними операторами з аналітичними символами /

Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Дев'ята наук. конф. професорсько-викладацького складу ІМФН НУ "Львівська політехніка": тези доповідей, Львів, 18–19 листопада, 2010 р. – Львів, 2010. – С. 22.

92. *Пташник Б. Й.* Крайова задача зі змішаними умовами для безтипного рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Всеукр. наук. конф. "Прикладні задачі математики" : матеріали конференції, Яремче, 13–15 жовтня, 2011 р. – Івано-Франківськ, 2011. – С. 90–92.

93. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана для безтипної системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // PSC-IMFS-10: тези доповідей, Львів, 17–18 травня, 2012 р. – Львів, 2012. – С. А.10 – А.11.

94. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана для лінійних гіперболічних рівнянь у смузі / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. / Під заг. ред. Р. М. Кушніра, Б. Й. Пташника. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 3. – С. 153 – 156.

95. *Пташник Б. Й.* Задача Діріхле-Неймана для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, С. М. Репетило // Міжнар. мат. конф. "Диф. рівн., обчисл. мат., теор. функцій та мат. методи механіки"до 100-річчя від дня нар. чл.-кор. НАН України Г. М. Положого: матеріали конференції, Київ, 23–24 квітня, 2014 р. – К.: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2014. – С. 109.

96. *Пташник Б. И.* Краевая задача для системы интегро–дифференциальных уравнений гиперболического типа / Б. И. Пташник, В. В. Фиголь// Мат. Методы и физ.–мех. поля. –1985. – Вып. 22. – С. 7–11.

97. *Пташник Б. Й.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным / Б. Й. Пташник, П. И. Штабалюк // Дифференц. уравнения. – 1986 – **22**, № 4. – С. 669–678.

98. *Репетило С. М.* Крайова задача для лінійного гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами / С. М. Репетило // Вісник НУ "Львівська політехніка". Серія "фізико-математичні науки". – 2009. – Вип. 660, № 660. – С. 28–33.

99. *Репетило С. М.* Задача Діріхле-Неймана для лінійних гіперболічних рівнянь другого порядку у смузі / С. М. Репетило // Вісник НУ "Львівська політехніка". Серія "фізико-математичні науки". – 2013. – Вип. 769, № 769. – С. 26–33.

100. *Репетило С. М.* Задача Діріхле-Неймана у смузі для факторизованого гіперболічного оператора зі сталими коефіцієнтами / С. М. Репетило // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2014", Львів, 28–30 травня, 2014 р.: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/.

101. *Сайдаматов Э. М.* О корректности неоднородных граничных задач для псевдодифференциальных уравнений / Э. М. Сайдаматов // Узбекс. матем. журн. – 1995. – № 2. – С. 77–88.

102. *Салига Б. О.* Многоточечная задача для дифференциальных уравнений с частными производными: Автореф. дис. …канд. физ.-мат. наук / Б. О. Салига. – Донецк, 1986. – 14 с.

103. *Симотюк М. М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних систем рівнянь з частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання / М. М. Симотюк // Мат. вісн. НТШ. – 2004. – **1**. – С. 130–148.

104. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений / В. Г. Спринджук. – М.: Наука, 1977. – 144 с.

105. *Соболев С. Л.* Пример корректорной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе / С. Л. Соболев. – Докл. АН СССР, 1956. – **109**, № 4. – С. 707–709.

106. *Тихонов А. Н.* Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М.: Наука, 1980. – 232 с.

107. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре: Уч. пос. для вузов / Д. К. Фаддеев. – М.: Наука, 1984. – 416 с.

108. *Фаддеев Д. К.* Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – М.: Наука, 1972. – 304 с.

109. *Фiголь В. В.* Краевая задача с приближенными граничными данными для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами / В. В. Фiголь. – Докл. АН УССР. Сер. А, 1985. – №2. – С. 18–21.

110. *Фиголь В. В.* Краевые задачи с данными на всей границе для дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического и составного типов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. В. Фiголь. – Донецк, 1985. – 16 с.

111. *Хермандер Л. К.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. К. Хермандер. – М.: ИЛ, 1959. – 131 с.

112. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби / А. Я. Хинчин. – Москва: Наука, 1978. – 112 с.

113. *Ben-Naoum A. K.* On the Dirichlet problem for the nonlinear wave equation in bounded domains with corner points / A. K. Ben-Naoum // Bull. Belg. Math. Soc. – 1996. – No 3.– P. 345–361.

114. *Bostan M.* Boundary value problem for the three dimensional time periodic Vlasov–Maxwell system / M. Bostan // Comm. math. sci. – 2005. – **3**, № 4. – P. 621–663.

115. *Bostan M.* Boundary value problem for the n dimensional time periodic Vlasov–Poisson system / M. Bostan // Math. Methods in the Appl. Sci. – 2006. – **29**, № 15. – P. 1801–1848.

116. *Bourgin D. G.* The Dirichlet problem for the damped wave equation / D. G. Bourgin // Duke Math. J.– 1940.– No 7.– P. 97–120.

117. *Bourgin D. G.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation / D. G. Bourgin, R. Duffin // Bull. Amer. Math. Soc.– 1939.– **45**, No 12.– P. 851–858.

118. *Buryachenko E. A.* Solvability of the homogeneous Dirichlet problem in a disk for equations of order 2m in the case of multiple characteristics with inclination angles / E. A. Buryachenko // J. Math. Sciences. – 2009. – **160**, No 3. – P. 319–329.

119. *Gentile G.* Periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations with Dirichlet boundary conditions / G. Gentile, V. Mastropietro, M. Procesi // Commun. Math. Phys. – 2005. – **256**, No. 2. – P. 437–490.

120. *Hadamard J.* On some topics connected with linear partial differential equations / J. Hadamard // Proceedings, Benares Math. Society – 1921. – **3**. – P. 39–48.

121. *Huber A.* Die erste Randwertaufgabe fur geschlossene Bereiche bei der Gleichung $u_{xy} = f(x, y)$ / A. Huber // Monatsh. Math. und Phys. – 1932. – **39**. – S. 79–100.

122. *Hausdorff F.* Dimension und дusseres Mass / F. Hausdorff // Math. Ann. – 1918. – **79**. – P. 157–179.

123. *John F.* The Dirichlet problem for a hyperbolic equation / F. John. – Amer. J. Math. – 1941. – 63, N 1. – P. 141–154.

124. *Kaliev I. A.* The third boundary value problem for the systems of equations of linear thermoelasticity / I. A. Kaliev, M. F. Mugafarov// J. of appl. and industrial math. – 2008. – **2**, № 4. – P. 501–507.

125. *Kengne E.* Nonlocal Boundary Value-Problem for Partial Differential Equations with Variable Coefficients / E. Kengne // Focus on African diaspora mathematics. – 2008. – P. 97–108.

126. *Kiguradze T.* On solvability and well-posedness of boundary value problems for nonlinear hyperbolic equations of the fourth order / T. Kiguradze // Georg. Math. J. – 2008. – 15, No. 3. – P. 555–569.

127. *Kiguradze T.* On solvability of boundary value problems for higher order nonlinear hyperbolic equations / T. Kiguradze, I. Kiguradze // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2008. – **69**, Issue 7. – P. 1914—1933.

128. *Kilbas A. A.* Solvability of a boundary value problem for a mixed-type equation with a partial Riemann-Liouville fractional derivative / A. A. Kilbas, O. A. Repin // Differ. Equat. – 2010. – **46**, No 10. – P. 1457–1464.

129. *Korzyuk V. I.* Strong solution of boundary value problems in cylindrical domains for a four-order equation of composite type / V. I. Korzyuk, O. A. Konopel'ko // Differ. Equat. – 2010. – **46**, No 5. – P. 690—701.

130. *Mamchuev M. O.* Boundary value problem for a system of fractional partial differential equations / M. O. Mamchuev // Differential equations. – 2008. – **44**, № 12. – P. 1737–1749.

131. *Mangeron D.* Sorpa un problema al contorno per un' equazion differenziale alle derivate parziali quardo ordine con le caratteristiche realidoppie / D. Mangeron // Rend. Accad. sci. fis. e mat. Soc. naz. sci. lett. et arti Napoli. – 1932. – № 2. – P. 29–40.

132. *Matthews J. V.* A Well-Posed Free Boundary Value Problem for a Hyperbolic Equation with Dirichlet Boundary Conditions / J. V. Matthews, D. G. Schaeffer // SIAM J. Math. Anal. – 2004. – **36**, Issue 1. – P. 256–271.

133. *Mazya V.* Schauder estimates for solutions to a mixed boundary value problems for Stokes system in polyhedral domains / V. Mazya, J. Rossmann // Math. Methods in the Appl. Sci. – 2006. – **29**, № 9. – P. 965–1017.

134. *Nguyen Manh Hung.* On the smoothness of a solution of the Dirihlet problem for hyperbolic systems in domains with a non–smooth boundary / Nguyen Manh Hung // Russian Math. Surveys. – 1998. – **53**, No 2. – P. 387–389.

135. *Nowakowski A.* Dirichlet problem for semilinear hyperbolic equation / A. Nowakowski, I. Nowakowska // Nonlinear Analysis. – 2005. – **63**, Issues 5-7. – P. e43–e52.

136. *Nurmamedov M. A.* On the solvability of a boundary value problem for quasi-linear system equations of mixed and composite type in a multidimensional domain / M. A. Nurmamedov // Vladikavkaz. Math. Zh. – 2010. – **12**, № 2. – P. 46–61.

137. *Nurmamedov M. A.* On the solvability of a boundary value problem for linear system equations of non-classical type in multidimensional domain / M. A. Nurmamedov // J. Qafqaz Univ. Math. Comput. Sci. – 2010. – No. 29. – P. 71–79.

138. *Nytrebych Z. M.* A boundary-value problem in an unbounded strip / Z. M. Nytrebych // J. Math. Sciences. – 1996. – **79**, № 6. – P. 1388–1392.

139. *Papi Frosalies G.* On the stability of the Dirichlet problem for the vibrating string equation / G. Papi Frosalies // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat. – 1979. – v. 6, № 4. – P. 719–728.

140. *Rebbani F.* Boundary value problem for a partial differential equation with non-local boundary conditions / F. Rebbani, N. Boussetila, F. Zouyed // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2001. – **10**. – С. 122–125.

141. *Rudakov I. A.* A nontrivial periodic solution of the nonlinear wave equation with homogeneous boundary conditions / I. A. Rudakov // Differ. Equat. – 2005. – **41**, No. 10. – P. 1467–1475.

142. *Rudakov I. A.* Periodic solutions of a nonlinear wave equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions / I. A. Rudakov // Russian Math. – 2007. – **51**, No. 2. – P. 44–52.

143. *Saydamatov E. M.* Well-posedness of general nonlocal nonhomogeneous boundary value problems for pseudodifferential equations with partial derivatives / E. M. Saydamatov // Siberian Advances in Mathematics. – 2007. – **17**, № 3. – P. 213–226.

144. *Schaeffer D. G.* Unloading near a shear band: a free boundary problem for the wave equation / D. G. Schaeffer, M. Shearer // Communications in Partial Differential Equations. – 1993. – **18**, № 7-8. – P. 1271–1298.

145. *Shirikyan A. R.* On classical almost-periodic solutions of nonlinear hyperbolic equations / A. R. Shirikyan // Mathematical Notes. – 1993. – **54**, No. 6. – P. 146–148.

146. *Sybil Yu.* The mixed Dirichlet-Neumann problem for the elliptic equation of the second order in domain with thin inclusion / Yu. Sybil // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2012. – **109**, No. 3. – P. 133–138.

147. *TongKeun Chang.* Boundary value problem of a non-stationary Stokes system in a bounded smooth cylinder [Електронний ресурс] / TongKeun Chang, Bum Ja Jin // Cornell University Library. – 2012. – Режим доступу: arXiv:1203.6519v1 [math.AP].

148. *Umarov S.* Cauchy and nonlocal multi–point problems for distributed order pseudo–differential equations, part one / S. Umarov, R. Gorenflo // J. for analysis and its appl. – 2005. – **24**, № 3. – P. 449–466.

149. *Umarov S.* Partial pseudo–differential equations of partial order: well–posedness of the Cauchy and multi–point value problems / S. Umarov, Yu. Luchko, R. Gorenflo. – Berlin, 2000. – 36 p. – (Preprint / Fachbereich Mathematik und Informatik, Freie Universit: PR-A-00-05).

150. *Yuanyuan L.* Positive solutions for singular elliptic equations with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions / L. Yuanyuan, R. Bernhard, G. Qianqiao, N. Pengcheng // Math. Nachr. – 2013. – P. 1—24.

151. *Zikirov O. S.* A non-local boundary value problem for third-order linear partial differential equation of composite type / O. S. Zikirov // Math. Modelling and Analysis. – 2009. – **47**, No 3. – P. 407–421.