Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

На правах рукопису

Кузь Антон Мирославович

УДК 517.95

Задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для еволюційних рівнянь

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Пташник Богдан Йосипович,
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук.
професор

Львів — 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$\mathbb{Z}_+$ — множина цілих невід'ємних чисел;

$\mathbb{R}_+$ — множина дійсних невід'ємних чисел;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, — p-вимірний дійсний евклідів простір;

$\mathbb{Z}_+^p$ — множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами;

$x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$; $dx = dx_1 \cdots dx_p$; $\partial_x = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_p}\right)$; $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$;

$s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$, $x^s = x_1^{s_1} \cdots x_p^{s_p}$;

$\hat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \cdots + s_p$; $|\hat{s}|^* = 2s_0 + s_1 + \cdots + s_p$;

$k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \cdots + |k_p|$, $||k|| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_p^2}$;

$\mu_k = (\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}) \in \mathbb{R}^p$; $|\mu_k| = |\mu_{k_1}| + \cdots + |\mu_{k_p}|$; $\|\mu_k\| = \sqrt{\mu_{k_1}^2 + \cdots + \mu_{k_p}^2}$;

$(\mu_k, x) = \mu_{k_1} x_1 + \cdots + \mu_{k_p} x_p$;

$D^p = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} : t \in (0, T), x \in \mathbb{R}^p\right\} = (0, T) \times \mathbb{R}^p$; $\Pi_H = [0, H]^p$, $H > 0$;

$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^m} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^m$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$;

i — уявна одиниця; $i^2 = -1$, $\arg i = \pi/2$; $[a]$ — ціла частина числа $a \in \mathbb{R}$;

$\mathbf{I}_m, \mathbf{O}_m$ — одинична та нульова матриці розміру m;

S_q — симетрична група всіх перестановок перших q натуральних чисел, ρ_ω — число інверсій у перестановці $\omega = (i_1, \ldots, i_q) \in S_q$;

$\mathcal{J}_n$, $n \in \mathbb{N}$, — множина всеможливих наборів вигляду $J = (j_1, \ldots, j_n)$, $j_l \in \{0, 1\}$, $l \in \{1, \ldots, n\}$;

C_m^n – кількість усіх комбінацій з m елементів по n;

C_j, $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, — додатні величини, які не залежать від k та μ_k;

$:=$ — дорівнює за означенням;

$\square$ — кінець доведення теореми (леми);

ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження задач з інтегральними умовами за виділеною змінною, які є узагальненням дискретних нелокальних умов, для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними розпочалось у другій половині XX століття. Їх вивчення зумовлене як потребою побудови загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними, так і тим, що задачі з інтегральними умовами виникають при математичному моделюванні багатьох фізичних процесів у випадках, коли неможливо виміряти певні фізичні величини, але відомі їхні середні значення.

Задачі з такими умовами для рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними вивчалися в роботах Г. А. Авалішвілі [115], Д. Г. Гордезіані [19], В. С. Ільківа [30], Н. І. Іонкіна [31], П. І. Каленюка [34, 35], Л. І. Каминіна [36], А. М. Нахушева [74], З. М. Нитребича [34, 35], О. М. Медвідь [66–68], З. О. Мельника [70], І. Д. Пукальського [81–83], Л. С. Пулькіної [84–87], М. М. Симотюка [96], Л. В. Фардиголи [104–107], П. І. Штабалюка [111], A. Bouziani [119], J. R. Cannon [123], N. Merazga [120], A. Marhoune [128], S. Mesloub [129] та інших авторів, де розглядалися переважно коректно поставлені задачі.

Задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для еволюційних рівнянь почали вивчати у 80-х роках XX-го століття. Це обумовлено, очевидно, тим, що такі задачі, назагал, є некоректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників і не є стійкою щодо малих змін коефіцієнтів задачі та параметрів області.

В останні десятиліття було досліджено коректність задач з інтегральними умовами у вигляді послідовних моментів від шуканої функції за часовою змінною для окремих класів лінійних гіперболічних рівнянь, а також

безтипних і псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними, на основі метричного підходу до оцінок знизу малих знаменників.

На сьогоднішній день актуальними є питання коректності задач з інтегральними умовами у вигляді моментів за часовою змінною (або більш загальними умовами, що містять інтеграли від шуканої функції та її похідних) для широких класів еволюційних рівнянь та систем рівнянь (гіперболічних, параболічних та рівнянь мішаного типу, а також рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом — рівняння типу С. Л. Соболєва). Ці задачі є предметом дослідження дисертаційної роботи. Вони також стали джерелом нових задач метричної теорії діофантових наближень, оскільки при побудові їх розв'язків виникли нові малі знаменники складної нелінійної структури, оцінки знизу яких раніше не розглядалися у метричній теорії чисел.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертації отримані в рамках виконання держбюджетної теми "Дослідження коректності, побудова та вивчення властивостей розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач для некласичних еволюційних рівнянь" (номер держреєстрації № 0110U004817) відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України та проекту № 41.1/004 "Розподіли нулів поліномів і гладких функцій та їх застосування при дослідженні умовно коректних крайових задач математичної фізики" (номер держреєстрації № 0111U006625) Державного Фонду фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України.

Мета і задачі дослідження. *Метою роботи* є дослідження коректності задач з інтегральними умовами за часовою змінною та умовами майже періодичності за просторовими змінними для лінійних еволюційних рівнянь і систем рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами.

Дане дослідження включає такі *завдання*:

– встановлення коректності задач з умовами за часовою змінною, що містять інтегральні доданки у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції, для гіперболічних і параболічних рівнянь та систем рівнянь, для рівнянь мішаного типу та рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною;

– конструктивну побудову розв'язків розглядуваних задач у вигляді рядів і дослідження їх збіжності у різних функціональних просторах;

– встановлення метричних оцінок знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків розглядуваних задач.

Об'єкт дослідження: задачі з інтегральними умовами для гіперболічних і параболічних рівнянь та систем рівнянь, для рівнянь мішаного типу та рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною.

Предмет дослідження: умови коректності розглядуваних задач та конструктивна побудова їх розв'язків, метричний аналіз оцінок знизу малих знаменників, пов'язаних із цими задачами.

Методи дослідження: методи функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь, алгебри та метричної теорії чисел.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

1) в області, що є декартовим добутком часового інтервалу $(0, T)$ та простору $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, встановлено коректну розв'язність у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій із заданим спектром задач з умовами за часовою змінною, що містять інтегральні доданки у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції та:

а) значення шуканої функції та її похідних парного порядку в точках $t = 0$ та $t = T$ — для рівнянь типу Клейна-Гордона та гіперболічних за Гордінгом рівнянь, а також для гіперболічних за Петровським систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами;

б) значення шуканої функції у довільних точках $t_1, \ldots, t_n$ відрізка $[0, T]$

— для параболічного за Петровським рівняння зі змінними за часом коефіцієнтами;

в) значення шуканої функції та її послідовних похідних в точці $t = 0$ — для систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами, параболічних за Шиловим;

г) значення шуканої функції та її похідних довільних порядків в точках $t = 0$ та $t = T$ — для рівнянь зі сталими коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом;

2) встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі з інтегральною умовою за часовою змінною для параболо-гіперболічного рівняння у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними;

3) побудовано явні формули для розв'язків задач у вигляді рядів;

4) доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків розглянутих у дисертації задач.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна застосовувати при подальшому вивчені задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними, а також при дослідженні конкретних задач практики, що моделюються розглянутими задачами (гідродинаміка, динаміка популяцій, довгострокове прогнозування погоди, теорія дифузії, теплопровідності, вологопереносу).

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. У спільних із науковим керівником роботах Б. Й. Пташнику належить постановка задач та аналіз отриманих результатів.

Апробація роботи. Результати досліджень доповідались та обговорювались на таких наукових конференціях і семінарах: Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2010, 2012 рр.); Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 2011 р.); Конференції "Дифференциальные уравнения и их приложения"

СамДиф-2011 (Самара, Російська Федерація, 2011 р.); Всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу"(Івано-Франківськ, 2013 р.); Конференції молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача (Львів, 2009 р.); Відкритій науковій конференції Інституту прикладної математики та фундаментальних наук НУ "Львівська політехніка" (Львів, 2012, 2013 рр.); Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки та математики"(Львів, 2013 р.); Конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2014, 2015" (Львів, 2014, 2015 рр.); засіданнях наукового семінару ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники: член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Б. Й. Пташник, д.ф.-м.н., В. О. Пелих; Львів, 2010-2015 рр.); засіданнях Львівського міського семінару з диференціальних рівнянь (керівники: д.ф.-м.н., проф. М. І. Іванчов, д.ф.-м.н., проф. П. І. Каленюк, член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Б. Й. Пташник; Львів, 2013-2015 рр.); засіданні наукового семінару кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (керівники: д.ф.-м.н., проф. М. І. Матійчук, д.ф.-м.н., проф. І. Д. Пукальський; Чернівці, 2015 р.);

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 7 статтях [45, 50, 52, 53, 56, 57, 127], з яких — 2 без співавторів, у наукових періодичних фахових виданнях України з математики; з них 3 статті [52, 53, 57] у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз, а також додатково висвітлено в 10 тезах доповідей та матеріалах наукових конференцій [43, 44, 46–49, 51, 54, 55, 58].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 154 сторінки, основного тексту — 138 сторінок. Список використаних джерел складає 132 найменування.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

В останні десятиліття значна увага математиків спрямована на дослідження задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними. Задачі з інтегральними умовами (або більш загальними умовами, що містять інтеграли від шуканої функції) виникають при математичному моделюванні різноманітних фізичних та біологічних процесів. Такі умови використовують у випадках, коли неможливо безпосередньо знайти певні фізичні величини, однак відомі їхні середні значення. Як приклад, можна навести задачі пов'язані з дослідженням дифузії частинок у турбулентній плазмі [92], деяких процесів теплопровідності [36, 123], вологопереносу в капілярно-пористих середовищах [72], проблем математичної біології [74]; при моделюванні процесу зовнішнього гетерування, який використовується при очищенні кремнієвих плат від домішок [71]. Також їх використовують як умови перевизначення при дослідженні деяких обернених задач математичної фізики [28] та ін.

Однією з перших робіт, присвячених задачам з інтегральними умовами, була праця Дж. Кенона (J. Cannon) [123], де розглядалася задача

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, x > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x),$$

$$\int\limits_0^{X(t)} u(t,x)dx = E(t), \quad X(t) > 0.$$

У [123] було встановлено існування і єдиність класичного роз'язку вказаної задачі, якщо $E(t)$, $X(t) \in C[0,T]$.

Результат Дж. Кенона був узагальнений в роботі Л. І. Каминіна [36], де в області $S_T = \{(x,t) : X_1(t) < x < X_2(t), 0 < t < T\}$, що містить криву $x = X_3(t)$, $0 < t < T$, причому $X_1(t) < X_3(t) < X_2(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, досліджено наступну мішану задачу з інтегральною умовою

$$a(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + c(t,x)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(t,x), \quad (t,x) \in S_T,$$

$$u(0,x) = h(x), \quad X_1(0) \leqslant x \leqslant X_2(0),$$

$$u(t, X_2(t)) = \varphi(t), \quad \int\limits_{X_1(t)}^{X_3(t)} g(t,x)u(t,x)dx = E(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

та встановлено існування єдиного, неперервного в $\overline{S}_T$ розв'язку задачі, якщо коефіцієнти рівняння та функції $E(t)$, $X_j(t)$, $j = 1,2,3$, справджують умови Гельдера.

Дослідження задач з інтегральними умовами для параболічних рівнянь були продовжені у роботах Н. І. Іонкіна [31], М. Й. Юрчука [6,113], Б. П. Панеях [76], А. М. Нахушева [72], З. А. Нахушевої [75] та багато інших.

Зокрема, у роботі А. Бузіані (A. Bouziani) [119] у прямокутнику $(0,b) \times (0,T)$ досліджено наступну задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m a(t)\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} = f(x,t),$$

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\int\limits_0^b x^k u(x,t)dx = 0, \quad k = 0,1,\ldots,2m-1,$$

де $a(t)$ — задана обмежена функція; за допомогою методу двосторонніх нерівностей встановлено умови коректної розв'язності розглядуваної задачі.

У праці Л. С. Пулькіної [85] в циліндрі $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$, вивчалась задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(t,x),$$

$$u(0,x)=\varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_T}+\int\limits_{\Omega} K(t,x,\xi,u(t,\xi))d\xi=0, \quad S_T=\partial\Omega\times(0,T).$$

За допомогою методу Гальоркіна було встановлено єдиність та існування узагальненого розв'язку розглядуваної задачі.

У роботі О. Ю. Данілкіної [23] в аналогічному циліндрі Q_T роглядалась задача для параболічного рівняння зі змінним за x коефіцієнтом

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+c(x)u+f(t,x),$$

з умовами

$$u(0,x)=\varphi(x), \quad \int\limits_{\Omega} K(t,x)u(t,x)d\xi=0.$$

Доведено єдиність узагальненого розв'язку задачі.

Мішані задачі з інтегральними умовами за просторовими змінними у різних аспектах вивчались у [2, 24, 40, 92, 121, 128] та ін.

У роботі [61] у прямокутнику $(0,1)\times(0,T)$ встановлено умови коректної розв'язності у просторах Соболєва такої задачі:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}-\mu(t,x)u(t,x)=f(t,x), \quad (t,x)\in(0,1)\times(0,T),$$

$$u(x,0)=0, \quad x\in(0,1),$$

$$u(t,0)=\int\limits_0^1 K_1(t,x)u(t,x)dx, \quad u(t,1)=\int\limits_0^1 K_2(t,x)u(t,x)dx, \quad t\in(0,T).$$

Задачі з інтегральними умовами для гіперболічних рівнянь виникають, зокрема, у математичній біології. Так у [73] в області $\Omega=[0,T]\times[0,l]$ розглядалася наступна задача з динаміки популяцій

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+(\alpha(t)+\beta(t,x)+\gamma(t,x))u(t,x)=0, \ (t,x)\in\Omega,$$

$$u(x,0)=\tau(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l,$$

$$u(0,t)=\varepsilon\int\limits_0^l \gamma(t,\xi)u(t,\xi)d\xi, \quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

де $u(t,x)$ — кількість клітин віку x в одиниці об'єму в момент часу t, α — швидкість притоку клітин, β, γ — питомі швидкості смерті та ділення клітин. Аналогічні моделі популяційної динаміки з інтегральними умовами за просторовою змінною та сингулярними коефіцієнтами вивчались у роботах І. Я. Кміть [125,126] у яких вивчено питання локальної та глобальної розв'язності розглядуваних задач у просторах гладких та узагальнених функцій.

Мішані задачі з інтегральними умовами за просторовою змінною для гіперболічних рівнянь досліджували Г. А. Авалішвілі та Д. Г. Гордезіані [19, 115], З. О. Мельник та В. М. Кирилич [70], Л. С. Пулькіна [84, 86, 87], С. О. Бейлін [117], В. Б. Дмітрієв [25], S. Mesloub [129] та ін.

У роботах [86, 87] в області $Q = (0,l) \times (0,T)$, для одновимірного гіперболічного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(t,x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,l) \times (0,T),$$

з початковими умовами

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in [0,l],$$

та нелокальними умовами

$$\int\limits_0^l K_j(x)u(t,x)dx = 0, \quad j = 1,2,$$

а також з умовами

$$\partial_x u(t,0) - \int\limits_0^l K_1(t,x)u(t,x)dx = 0, \quad \partial_x u(t,l) - \int\limits_0^l K_1(t,x)u(t,x)dx = 0,$$

де $K_j(x)$, $K_j(t,x)$, $j = 1,2$, задані в $\overline{Q}$ та достатньо гладкі функції. За допомогою методу Гальоркіна та апріорних оцінок було встановлено єдиність та існування узагальненого розв'язку розглядуваної задачі.

Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення за просторовими змінними для параболічних рівнянь розглядалися у роботах М. І. Іванчова та його учнів [27, 28], Г. А. Снітко [93], Н. М. Гринців [20], а також А. І. Кожанова [41] та багато інших. У роботі Н. В. Бейліної [4] досліджено обернену задачу про знаходження в циліндрі $Q = \Omega \times (0, T)$, де Ω — обмежена область, розв'язку хвильового рівняння з невідомою функцією у правій частині рівняння.

Задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для гіперболічних, параболічних та безтипних рівнянь та систем рівнянь досліджували П. І. Штабалюк [111], В. М. Борок та Е. Кенне [11, 12], Л. В. Фардигола [104, 105], П. І. Каленюк та З. М. Нитребич [34, 35], В. С. Ільків та Т. Магеровська [29, 30], М. М. Симотюк, О. М. Медвідь [64–69, 96] та ін.

Зокрема, у [110] розглядаються задачі з багатоточковою та інтегральною умовами за часом для лінеаризованої системи Нав'є — Стокса, які виникають при вивченні проблем довгосторокових прогнозів погоди.

У роботах В. М. Борок та її учнів [11,12] встановлено критерій коректності крайової задачі у смузі $[0, T] \times \mathbb{R}$ для загального лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Ці дослідження узагальнені в працях Л. В. Фардіголи [104–107], де у шарі $\Pi(T) = [0, T] \times \mathbb{R}^p$, $T > 0$, досліджено інтегральну задачу

$$\frac{\partial \vec{v}(t,x)}{\partial t} = P(D_x)\vec{v}(t,x) + \vec{f}(t,x), \quad (t,x) \in \Pi(T),$$

$$\int\limits_0^T Q(D_x)\vec{v}(t,x)dt = \vec{v}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^p,$$

де $P(\xi), Q(\xi)$ — матриці розміру $n \times n$, елементами яких є довільні многочлени з комплексними коефіцієнтами, $\xi \in \mathbb{R}^p$; $\vec{f}$, $\vec{v}_0$ — задані вектор-функції.

У працях А. Ю. Попова та І. В. Тіхонова [79, 80] для задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2}, \quad t \in (0, T], \quad x \in \mathbb{R}^p,$$

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T u(t,x)dt = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^p,$$

встановлено єдиність та існування класичного розв'язку у класі функцій експоненційного зростання за просторовими змінними.

У роботах [34, 35] у нескінченному шарі досліджувались задачі

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] U(t,x) = 0, \quad t \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}^s,$$

$$\int\limits_0^T U(t,x)dt = 0, \quad x \in \mathbb{R}^s,$$

та

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^2 U(t,x) = 0, \quad t \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}^s,$$

$$\int\limits_0^T U(t,x)dt = 0, \quad \int\limits_0^T tU(t,x)dt = 0, \quad x \in \mathbb{R}^s,$$

де $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — диференціальний вираз нескінченного порядку з цілим аналітичним символом $a(\nu) \neq const$. На основі диференціально-символьного методу [33] виділено класи існування та єдиності розв'язків розглядуваних задач та побудовано їх у явному вигляді.

У працях І. Д. Пукальського та його учнів [32, 81–83] у циліндричних областях досліджено задачі з нелокальними умовами за часом, що містять інтеграли від невідомої функції, для параболічних рівнянь з виродженням, а також розглянуто задачу оптимального керування. За допомогою апріорних оцінок та принципу максимуму встановлено коректність розглянутих задач у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

У роботі [111] в області D^p розглядалася задача з інтегральними умовами для строго гіперболічного рівняння

$$\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{|s|=\alpha} a_{\alpha,s}\frac{\partial^n u}{\partial t^{n-\alpha}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}} = 0, \quad a_{\alpha,s} \in \mathbb{R},$$

$$\int_0^T t^j u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad j \in \{0,1,\ldots,n-1\}.$$

Було встановлено існування єдиного класичного розв'язку задачі для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел $T > 0$ та для майже всіх векторів $\vec{A}$ складених з коефіцієнтів рівняння у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними.

О. М. Медвідь та М. М. Симотюк у [66, 67] розглядали в області $Q_p^T = (0,T) \times \Omega_p$, де $\Omega_p = (\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z})^p$, задачу для безтипного рівняння (системи рівнянь)

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} u(t,x) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\partial_x) \frac{\partial^j}{\partial t^j} u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_p^T$$

$$\int_0^{t_1} t^j u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad j \in \{0,1,\ldots,n-1\}, x \in \Omega_p, t_1 \in (0,T],$$

де $A_j(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, – многочлени з комплексними коефіцієнтами степенів N_j, $N_j \in \mathbb{N}$. Було встановлено існування єдиного 2π-періодичного розв'язку задачі для майже всіх (стосовно міри Гаусдофа) чисел $t_1 \in (0,T)$. Також авторами досліджено коректну розв'язність задачі з аналогічними інтегральними умовами для навантажених рівнянь [68] із частинними похідними та систем рівнянь з відхиленням аргументу [69].

У [29] розглянуто задачу про знаходження розв'язку системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$\sum_{s_0+s_1+\ldots+s_p \leqslant n} A_s(t) \partial_{x_1}^{s_1} \ldots \partial_{x_p}^{s_p} \partial_t^{s_0} \vec{U}(t,x) = 0, \quad t \in (0,T), \quad x \in \Omega_p,$$

$$\int_0^T (\mu(t) + \nu) \partial_t^{j-1} \vec{U}(t,x)dt = \vec{\Phi}_j(x), \quad j = \{1,\ldots,n\}, \quad x \in \Omega_p,$$

де $\vec{U}(t,x) = \mathrm{col}(U^1(t,x),\ldots,U^m(t,x))$, $A_s(t)$ — квадратні матриці розміру $m \times m$, елементами яких є неперервні функції за змінною t на відрізку $[0,T]$,

$A_{n,0,\ldots,0}$ — одинична матриця. Встановлено коректність цієї задачі у шкалі просторів Соболєва для всіх параметрів $\nu \in \mathbb{C}$ (за винятком множини як завгодно малої міри Лебега в $\mathbb{C}$).

Важливим напрямком сучасної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є вивчення задач з нелокальними умовами (в тому числі інтегральними) для некласичних рівнянь математичної фізики, зокрема, для рівнянь не розв'язаних відносно старшої похідної за часом.

Вперше рівняння, що зводяться до рівнянь типу Соболева появились у роботі А. Пуанкаре [130], однак їх систематичне вивчення почалось після публікації робіт С. Л. Соболєва [94, 95], де вивчались малі коливання ідеальної рідини в посудині, що обертається та розглядалось наступне рівняння

$$\left(\partial_t^2 \Delta + \omega^2 \partial_{x_3}^2\right) u(t, x_1, x_2, x_3) = f(t, x_1, x_2, x_3).$$

Рівняння такого типу часто виникають при дослідженні різноманітних задач гідродинаміки: поширення хвиль [131], фільтрація рідин в пористих середовищах [3], динаміка стратифікованих рідин [15] тощо.

Мішані задачі та задача Коші для рівнянь типу Соболєва досліджували багато авторів, зокрема, C. G. Rossby [131], С. Л. Соболєв [94, 95], Г. І. Баренблатт [3] та ін. В школі Б. Й. Пташника у роботах Л. І. Комарницької [42], І. С. Клюс [39], О. Д. Власія [13], І. О. Бобика та М. М. Симотюка [10] вивчались задачі з багатоточковими, нелокальними умовами та умовами типу Діріхле за часовою змінною для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом високого порядку зі сталими та змінними коефіцієнтами і умовами періодичності за просторовими змінними.

Задачі з інтегральними умовами для рівнянь типу С. Л. Соболєва практично не розглядалися. Прямі та обернені задачі з інтегральними умовами за просторовою змінною для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом вивчали Я. Т. Мегралієв та Е. І. Азізбеков [62, 63], A. Bouziani

та N. Merazga [120]. Зокрема, у [120] розглядалася така задача:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t \partial x^2} = F(t,x,u), \quad (x,t) \in (0,1) \times [0,T]$$

$$u(x,0) = u_0(x),$$

$$\int_0^1 u(t,x)dx = E(t), \quad \int_0^1 xu(t,x)dx = G(t).$$

Було встановлено єдиність та існування узагальненого розв'яку задачі та побудовано наближений розв'язок методом часової дискретизації.

У праці [63] в області $D = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ розглядалася задача

$$\partial_t^2(1 - \alpha\partial_x^2)u(t,x) + \partial_x^4 u(t,x) = a(t)u(t,x) + f(t,x),$$

$$u(t,0) - \beta u(t,1) = \mu_1(t), \quad \partial_x u(t,0) - \beta \partial_x u(t,1) = \mu_2(t)$$

$$\partial_t^2 u(t,0) - \beta \partial_t^2 u(t,1) = \mu_3(t), \quad \int_0^1 u(t,x)dx = \mu_4(t),$$

$$u(0,x) - \delta u(T,x) = \mu_1(t), \quad \partial_t u(0,x) - \delta \partial_t u(T,x) = \mu_2(t).$$

Встановлено умови єдиності та існування класичного розв'язку наведеної задачі.

Іншим важливим напрямком сучасної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є теорія крайових задач для рівнянь мішаного типу, які мають важливе застосування в газовій динаміці, в магнітній гідродинаміці, в теорії електричних кіл, в теорії нескінченно малих згинів поверхонь, а також безмоментній теорії оболонок з кривизною змінного знаку та ін. Початок досліджень крайових задач для рівнянь мішаного типу було покладено у роботах Ф. Трікомі (1928 р.) [101] та С. Геллерстедта (1935 р.) [124], де було вперше поставлено та досліджено крайові задачі для модельних рівнянь мішаного типу, які тепер відомі як "задача Трікомі" і "задача Геллерстедта".

Вперше на необхідність розгляду крайових задач для мішаних рівнянь параболо-гіперболічного типу, де на одній частині області задано параболічне рівняння, а на іншій — гіперболічне, було вказано в 1959 р. І. М. Гельфандом [17]. Зокрема, він навів приклад задачі про рух газу по каналу з пористим навколишнім середовищем: рух газу в каналі описувався хвильовим рівнянням, а ззовні — рівнянням дифузії. Також крайові задачі для таких рівнянь виникають в теорії електричних кіл та магнітній гідродинаміці. Вони досліджувались у роботах Г. М. Стручіної [98], Я. С. Уфлянда [102], Л. А. Золіної [26].

В подальшому задачі спряження для мішаних параболо-гіперболічних рівнянь другого порядку, що містять локальні і нелокальні умови (в тому числі інтегральні), розглядалися у роботах А. М. Нахушева та Х. Г. Бжихатлова [7], В. Н. Врагова [14], Н. Ю. Капустіна [37], К. Б. Сабітова [90, 132], Г. Р. Юнусової [114], В. О. Капустяна та І. О. Пишнограєва [38], І. Я. Савки [91] та ін. У багатьох випадках коректна розв'язність таких крайових задач для обмежених областей пов'язана з так званою проблемою малих знаменників, яка розв'язувалась авторами тільки для окремих часткових випадків задач. Тому крайові задачі для параболо-гіперболічних рівнянь, розв'язність яких залежить від діофантових властивостей малих знаменників, залишаються мало дослідженими.

Поряд із отриманими результатами, недостатньо вивченими є задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для загальних гіперболічних, параболічних диференціальних рівнянь і систем рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами, а також для рівнянь мішаного типу та для рівнянь не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. Заповнити вказані прогалини покликана дана дисертаційна робота.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

У першому розділі дисертації наведено короткий огляд робіт присвячених дослідженню задач з інтегральними умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними. Показано актуальність та важливість вивчення таких задач. Вказано на задачі, які залишаються недостатньо вивченими.

РОЗДІЛ 2
ЗАГАЛЬНА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

2.1. Майже періодичні функції та їх простори

Майже періодичні функції є узагальненням періодичних функцій. Теорія майже періодичних функцій була створена, в основному, і опублікована у 1924–1926 рр. Г. Бором [118]. В подальшому теорія майже періодичних функцій Бора була розвивинена А. Безіковичем [116] та іншими вченими.

Позначимо:

$$\mathcal{V} := \{\nu_n \in \mathbb{R} : \nu_{-n} = -\nu_n, d_1|n|^{\theta_1} \leqslant |\nu_n| \leqslant d_2|n|^{\theta_2}, n \in \mathbb{Z}\}, \tag{2.1}$$

де $0 < d_1 \leqslant d_2$, $0 < \theta_1 \leqslant \theta_2$;

$$\mathcal{M} := \{\mu_k \in \mathbb{R}^p : \mu_{k_j} = \nu_{k_j}, \nu_{k_j} \in \mathcal{V},\ j \in \{1, \ldots, p\}, k \in \mathbb{Z}^p\}.$$

З (2.1) та нерівностей Єнсена [108, стор. 301] випливає, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконуються оцінки

$$D_1|k|^{\theta_1} \leqslant |\mu_k| \leqslant D_2|k|^{\theta_2}, \tag{2.2}$$

де $D_1 = d_1 \min\{1, p^{1-\theta_1}\}$, $D_2 = d_2 \max\{1, p^{1-\theta_2}\}$. Також використовуватимемо таку нерівність:

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \quad \|\mu_k\| \leqslant |\mu_k| \leqslant \sqrt{p}\,\|\mu_k\|. \tag{2.3}$$

Введемо простори майже періодичних за x функцій зі спектром $\mathcal{M}$, які використовуються у дисертаційній роботі.

$\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ – простір поліномів $v(x) = \sum_k v_k \exp(i\mu_k, x)$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, з комплексними коефіцієнтами. Збіжність послідовності $\{v^n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ до елемента $v \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ визначається так:

1) $\exists n_0, N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > n_0, \quad v^n(x) = \sum_{|k|\leqslant N} v_k^n \exp(i\mu_k, x)$,

2) $\forall k \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| \leqslant N, \quad v_k^n \underset{n\to\infty}{\to} v_k$;

$\mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ – простір формальних тригонометричних рядів $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} f_k \times$ $\times \exp(i\mu_k, x)$ який співпадає з простором усіх антилінійних функціоналів над $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$. Дія функціоналу $f \in \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ на елемент v простору $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ задається формулою

$$(f, v) = \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int\limits_{\Pi_H^p} f(x)\overline{v(x)}dx = \sum_k f_k \bar{v}_k.$$

Послідовність $\{f^q\}_{q=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ збігається до $f \in \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$, якщо $(f^q, v) \xrightarrow[q\to\infty]{} (f, v)$ для довільного $v \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$.

Елементи простору $\mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ будемо називати узагальненими майже періодичними функціями. Ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} f_k \exp(i\mu_k, x)$, який відповідає елементу $f \in \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$, називається рядом Фур'є узагальненої майже періодичної функції f, числа f_k — коефіцієнтами Фур'є. Легко бачити, що $f_k = (f, \exp(i\mu_k, x))$.

$C^h([c,d]; \mathcal{T}_{\mathcal{M}}) \quad \left(C^h([c,d]; \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})\right)$, $h \in \mathbb{Z}_+$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, — простір таких функцій $v(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k(t) \exp(i\mu_k, x)$, $v_k \in C^h[c,d]$, $k \in \mathbb{Z}^p$, що при кожному фіксованому $t \in [c,d]$ похідні $\partial_t^j v = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k^{(j)}(t) \exp(i\mu_k, x)$, $j \in \{0, 1, \ldots, h\}$, належать простору $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ $(\mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$;

$W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $\alpha, \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, — простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ за нормою

$$\left\| v; W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} \right\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |v_k|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \exp(2\beta|\mu_k|^\gamma) \right)^{1/2};$$

$H_{\mathcal{M}}^{\alpha} \equiv W_{\mathcal{M}}^{\alpha,0,0}$; $W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta} \equiv W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,1}$;

Зауважимо, що $W_{\mathcal{M}}^{\alpha_2,\beta_2,\gamma} \subset W_{\mathcal{M}}^{\alpha_1,\beta_1,\gamma}$, $\alpha_2 > \alpha_1$, $\beta_2 \geqslant \beta_1$, причому

$$\left\| v; W_{\mathcal{M}}^{\alpha_1,\beta_1,\gamma} \right\| < \left\| v; W_{\mathcal{M}}^{\alpha_2,\beta_2,\gamma} \right\|. \tag{2.4}$$

$C^h([c,d], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma})$, $h \in \mathbb{Z}_+$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, — простір функцій $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k, x)$, $u_k(t) \in C^n[c,d]$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, таких, що для кожного фіксованого $t \in [c,d]$ похідні $\partial_t^j u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(j)}(t) \exp(i\mu_k, x)$,

$j \in \{0, 1, \ldots, h\}$, належать простору $W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}$ і є неперервними за t на $[c, d]$ в нормі цього простору,

$$\left\| u; C^n([c,d], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}) \right\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[c,d]} \left\| \partial_t^j u(t,x); W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} \right\|;$$

$\overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $m \in \mathbb{N}$, — простір вектор-функцій $\vec{v}(x) = \operatorname{col}\left(v^1(x), \ldots, v^m(x)\right)$ таких, що $v^q(x) \in W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $q \in \{1, \ldots, m\}$, із нормою

$$\left\| \vec{v}; \overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\alpha,\beta,\gamma} \right\| = \sum_{q=1}^{m} \left\| v^q; W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} \right\|;$$

$C^h([c,d], \overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\alpha,\beta,\gamma})$, $h \in \mathbb{Z}_+$, — простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x) = \operatorname{col}\left(u^1(t,x), \ldots, u^m(t,x)\right)$ таких, що $u^q(t,x) \in C^h([c,d], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma})$, $q \in \{1, \ldots, m\}$, із нормою

$$\left\| \vec{u}; C^h([c,d], \overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\alpha,\beta,\gamma}) \right\| = \sum_{q=1}^{m} \left\| u^q; C^h([c,d], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}) \right\|;$$

$\overline{C}_{\mathcal{M},m}^{h}(\overline{D}^p)$ — простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x) = \operatorname{col}(u^1(t,x), \ldots, u^m(t,x))$, які є h разів неперервно диференційовними в області $\overline{D}^p$ за всіма змінними і майже періодичними за x зі спектром $\mathcal{M}$ рівномірно по $t \in [0, T]$, із нормою

$$\left\| \vec{u}; \overline{C}_{\mathcal{M},m}^{h}(\overline{D}^p) \right\| = \sum_{q=1}^{m} \sum_{0\leqslant|\hat{s}|\leqslant h} \max_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|} u^q(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} \right|;$$

$\overline{C}_{\mathcal{M},m}^{h}(\mathbb{R}^p)$ — підпростір вектор-функцій із $\overline{C}_{\mathcal{M},m}^{h}(\overline{D}^p)$, які не залежать від t.

$C_{\mathcal{M}}^{h}(\overline{D}^p) \equiv \overline{C}_{\mathcal{M},1}^{h}(\overline{D}^p)$; $C_{\mathcal{M}}^{h}(\mathbb{R}^p) \equiv \bar{C}_{\mathcal{M},1}^{h}(\mathbb{R}^p)$.

$C_{\mathcal{M}}^{(l,h)}(\overline{D}^p)$ — простір функцій $u(t,x)$, які є l разів неперервно диференційовними за змінною t та h разів неперервно диференційовними і майже періодичними за x зі спектром $\mathcal{M}$ із нормою

$$\left\| u; C_{\mathcal{M}}^{(l,h)}(\overline{D}^p) \right\| = \sum_{\substack{0\leqslant|\hat{s}|\leqslant h \\ s_0\leqslant l}} \max_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} \right|;$$

Твердження 2.1. *Для довільної узагальненої майже періодичної функції f її ряд Фур'є збігається до f у просторі $\mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$. Навпаки, послідовність частинних сум будь-якого тригонометричного ряду $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} a_k \exp(i\mu_k, x)$, $a_k \in \mathbb{C}$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, збігається у $\mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ до деякого елемента $f \in \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}$ і цей ряд співпадає з рядом Фур'є для f.*

Доведення. Проводиться за схемою доведення теореми 6.2 у [21, §6]. □

Твердження 2.2. *Якщо $\alpha > p/(2\theta_1)$, то справедливі такі вкладення*

$$\overline{H}^{q+\alpha}_{\mathcal{M},m} \subset \overline{C}^{q}_{\mathcal{M},m}(\mathbb{R}^p), \quad C^q([0,T], \overline{H}^{q+\alpha}_{\mathcal{M},m}) \subset \overline{C}^{q}_{\mathcal{M},m}(\bar{D}^p), \quad q \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{2.5}$$

Доведення. Доведення випливає з рузультатів роботи [122] з урахуванням оцінок (2.2). □

Справедливі наступні твердження про оцінку коефіцієнтів Фур'є майже періодичних функцій.

Лема 2.1. *Якщо функція $v \in C^h_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p)$, то для її коефіцієнтів Фур'є справджуються оцінки*

$$|v_k| \leqslant (2p)^h (h+1) \frac{\|v; C^h_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p)\|}{(1+|\mu_k|)^h}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}. \tag{2.6}$$

Доведення. Коефіцієнти Фур'є функції $v(x)$ визначаються формулами [112]

$$v_k = \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int\limits_{\Pi^p_H} v(x) \exp(-i\mu_k,\, x) dx, \quad \mu_k \in \mathcal{M}. \tag{2.7}$$

Якщо $k = \vec{0}$ ($\mu_{\vec{0}} = \vec{0}$), то

$$\begin{aligned} |v_{\vec{0}}| = \left| \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int\limits_{\Pi^p_H} v(x) dx \right| \leqslant \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int\limits_{\Pi^p_H} |v(x)| dx \leqslant \\ \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^p} |v(x)| \leqslant \|v; C^h_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p)\|. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Нехай $k \neq \vec{0}$. Припустимо спочатку, що h – парне число, тобто $h = 2m$. Інтегруючи двічі частинами у виразі (2.7) по кожній змінній $x_1, \ldots, x_p$ та

підсумовуючи результати, отримуємо

$$\|\mu_k\|^2 v_k = -\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^p}\int\limits_{\Pi_H^p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\exp(-i\mu_k,\, x)dx. \tag{2.9}$$

Застосовуючи аналогічну процедуру до виразу (2.9) і т.д., після m-го кроку знаходимо, що

$$\|\mu_k\|^{2m} v_k = (-1)^m \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^p}\int\limits_{\Pi_H^p} V(x)\exp(-i\mu_k,\, x)dx, \tag{2.10}$$

де $V(x) = \sum_{|s|=m}\frac{m!}{s_1!\cdots s_p!}\frac{\partial^{2m}v(x)}{\partial x_1^{2s_1}\cdots\partial x_p^{2s_p}}$.
Врахувавши, що $\sum_{|s|=m}\frac{m!}{s_1!\cdots s_p!} = p^m$ [1, стор. 626], на підставі (2.10), знаходимо

$$\|\mu_k\|^{2m}|v_k| \leqslant \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^p}\int\limits_{\Pi_H^p}|V(x)\exp(-i\mu_k,\, x)|\,dx \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^p}|V(x)| \leqslant$$

$$\leqslant p^m \sup_{|s|=m}\sup_{x\in\mathbb{R}^p}\left|\frac{\partial^{2m}v(x)}{\partial x_1^{2s_1}\cdots\partial x_p^{2s_p}}\right| \leqslant p^m\|v; C_{\mathcal{M}}^{2m}(\mathbb{R}^p)\|. \tag{2.11}$$

Із (2.11), врахувавши (2.3), отримуємо

$$|v_k| \leqslant p^{2m}\frac{\|v; C_{\mathcal{M}}^{2m}(\mathbb{R}^p)\|}{|\mu_k|^{2m}}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}. \tag{2.12}$$

Нехай тепер $h = 2m+1$. Проведемо у виразі (2.10) інтегрування частинами один раз по кожній змінній. Отримуємо рівності

$$\|\mu_k\|^{2m}\mu_{k_j} v_k = (-1)^m i \lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^p}\int\limits_{\Pi_T^p}\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}\exp(-i\mu_k,\, x)dx,\ j = 1,\ldots,p. \tag{2.13}$$

Із (2.13) випливають оцінки

$$\|\mu_k\|^{2m}|\mu_k||v_k| \leqslant \sum_{j=0}^{p}\sup_{x\in\mathbb{R}^p}\left|\frac{\partial V(x)}{\partial x_j}\right| \leqslant$$

$$\leqslant p^{m+1}\|v; C_{\mathcal{M}}^{2m+1}(\mathbb{R}^p)\|, \quad \mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}. \tag{2.14}$$

На підставі (2.14) і (2.3), отримуємо

$$|v_k| \leqslant p^{m+1}\frac{\|v; C^{2m+1}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p)\|}{\|\mu_k\|^{2m}|\mu_k|} < p^{2m+1}\frac{\|v; C^{2m+1}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p)\|}{|\mu_k|^{2m+1}}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}. \quad (2.15)$$

На підставі нерівностей (2.12) та (2.15) отримаємуємо, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ справджуються нерівності

$$|v_k| \leqslant p^h\frac{\|v; C^h_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p)\|}{|\mu_k|^h}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{0\}. \quad (2.16)$$

Враховуючи, що $|\mu_k|^{-h} < 2^h(h+1)(1+|\mu_k|)^{-h}$, $h \in \mathbb{N}$, із (2.8) та (2.16) випливає така оцінка:

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \qquad |v_k| \leqslant (2p)^h(h+1)\frac{\|v; C^h_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p)\|}{(1+|\mu_k|)^n}.$$

Лему доведено. □

Лема 2.2. *Якщо* $y(t,x) \in C^{(l,h)}_{\mathcal{M}}(\overline{D}^p)$, *то для її коефіцієнтів Фур'є справджуються оцінки*

$$\max_{t\in[0,T]}|y_k(t)| \leqslant (2p)^h(h+1)\frac{\|y; C^{(l,h)}_{\mathcal{M}}(\overline{D}^p)\|}{(1+|\mu_k|)^h}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}.$$

Доведення. Аналогічне доведенню леми 2.1. □

Детальніше з теорією майже періодичних функцій та просторами таких функцій можна ознайомитися у [22, 112, 116].

2.2. Загальна методика досліджень

Всі задачі, розглянуті в дисертаційній роботі об'єднані такою загальною постановкою: у області D^p для еволюційного рівняння (системи рівнянь)

$$N[u](\partial_t, \partial_x) := \left(A_n(\partial_x)\frac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t,\partial_x)\frac{\partial^j}{\partial t^j}\right)u(t,x) = f(t,x), \quad (2.17)$$

потрібно знайти розв'язок, який є майже періодичним за змінними $x_1, \ldots, x_p$, а за змінною t задовольняє умови

$$U_j[u] := \alpha_j L_j[u] + \beta_j \int_0^T t^{r_j}u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \quad (2.18)$$

де $A_q(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}^p$, — многочлени за сукупністю змінних $\eta_1, \ldots, \eta_p$ з комплексними коефіцієнтами степеня N_q, $q \in \{0, 1, \ldots, n\}$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, L_j — лінійні функціонали за змінною t, які можуть містити значення шуканої функції та її похідних за змінною t у точках $t = 0$ та $t = T$ або у деяких точках $t_1, \ldots, t_n$ відрізка $[0, T]$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $r_1 < \ldots < r_n$; $f(t, x)$, $\varphi_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, — майже періодичні за x функції зі заданим спектром $\mathcal{M}$,

$$f(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} f_k(t) \exp(i\mu_k, x), \quad \varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k, x). \tag{2.19}$$

Означення 2.1. *Розв'язком задачі* (2.17), (2.18) *із простору* $C^n([0, T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$ *називаємо ряд*

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k, x), \quad \mu_k \in \mathcal{M}, \tag{2.20}$$

де кожен з коефіцієнтів $u_k(t) \in C^n([0, T])$, $k \in \mathbb{Z}^p$, *задовольняє рівності*

$$\left(A_n(\mu_k) \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t, \mu_k) \frac{d^j}{dt^j} \right) u_k(t) = f_k(t), \tag{2.21}$$

$$U_j[u_k] := \alpha_j L_j[u_k] + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u_k(t) dt = \varphi_{jk}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.22}$$

Нехай функції $u_{qk} := u_{qk}(t)$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (2.21), а

$$\Delta(\mu_k, T) = \det \|U_j[u_{qk}]\|_{j,q=1}^n \tag{2.23}$$

є характеристичним визначником задачі (2.21), (2.22).

Твердження 2.3. *Для того, щоб задача* (2.17), (2.18) *мала не більше одного майже періодичного за* x *із спектром* $\mathcal{M}$ *розв'язку у просторі* $C^n([0, T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \qquad \Delta(\mu_k, T) \neq 0. \tag{2.24}$$

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Припустимо протилежне: умова (2.24) не виконується, тобто для деякого $\bar{\mu}_k \in \mathcal{M}$ $\Delta(\bar{\mu}_k, T) = 0$. Тоді існують нетривіальні розв'язки $u_{\bar{k}}(t) = \sum_{q=1}^{n} C_{q\bar{k}} u_{q\bar{k}}(t)$ однорідної задачі (2.21), (2.22), де сталі $C_{q\bar{k}}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, визначаються з системи алгебричних рівнянь $\sum_{q=1}^{n} C_{q\bar{k}} U_j[u_{q\bar{k}}] = 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, визначник якої збігається з $\Delta(\bar{\mu}_k, T)$. Тому однорідна задача (2.17), (2.18) має нетривіальні розв'язки $u(t,x) = u_{\bar{k}}(t) \exp(i\bar{\mu}_k, x)$, а розв'язок задачі (2.17), (2.18), якщо він існує, не буде єдиним.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай виконується умова (2.24). Припустимо, що існують два розв'язки розв'язки $u_1(t,x), u_2(t,x)$ задачі (2.17), (2.18) з простору $C^n([0,T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$. Тоді функція $\tilde{u}(t,x) = u_2(t,x) - u_1(t,x)$ є розв'язком однорідної задачі (2.17), (2.18) з простору $C^n([0,T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$. Кожний із коефіцієнтів Фур'є $\tilde{u}_k(t)$ функції $\tilde{u}(t,x)$ є розв'язком задачі однорідної задачі (2.21), (2.22). Оскільки $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$, то однорідна задача (2.21), (2.22) має лише тривіальні розв'язки для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ [99], а отже $\tilde{u}_k(t) \equiv 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Звідси отримуємо, що $\tilde{u}(t,x) \equiv 0$ у просторі $C^n([0,T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$, тобто $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$. □

Якщо умова (2.24) виконується, то розв'язок задачі (2.17), (2.18) зображується у вигляді формального ряду

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau + \sum_{q,j=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk} u_{qk}(t) \right) \exp(i\mu_k, x), \tag{2.25}$$

де $G_k(t,\tau)$ — функція Гріна задачі (2.21), (2.22), $\Delta_{jq}(\mu_k, T)$ — алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k, T)$ елемента j-го рядка и q-го стовця.

Із тверджень 2.1 та 2.3 випливає наступне твердження.

Твердження 2.4. *Нехай справджується умова* (2.24). *Якщо* $\varphi_j \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}\,(\mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *та* $f \in C([0,T], \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ $(C([0,T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}))$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (2.17), (2.18) *із простору* $C^n([0,T], \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ $(C^n([0,T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}}))$. *Цей розв'язок зображується формулою* (2.25).

Зауважимо, що твердження 2.3 та 2.4 справедливі для всіх задач, які розглядаються у дисертації.

Питання існування розв'язку задачі (2.17), (2.18) в інших просторах майже періодичних за x функцій у багатьох випадках пов'язане з проблемою малих знаменників, бо вирази $|\Delta(\mu_k, T)|$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Для розв'язання проблеми малих знаменників, які мають складну нелінійну структуру використано метричний підхід. Для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів умов (2.18) встановлюється оцінка вигляду

$$|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(\sigma |\mu_k|^{\nu}).$$

На основі доведених метричних теорем про оцінки знизу малих знаменників (за певний умов на вихідні дані задач) випливає існування єдиного розв'язку (у відповідних просторах) досліджуваних задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів умов (2.18).

2.3. Допоміжні твердження

Наведемо ряд результатів з метричної теорії діофантових наближень, які використовуються при дослідженні оцінок знизу малих знаменників, що виникають у розглядуваних задачах та інші допоміжні співвідношення.

Лема 2.3 ([97]). *Нехай $A_q, q = 1, 2, \ldots,$ – послідовність вимірних за Лебегом множин із $\mathbb{R}^n$, причому*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} A_q < \infty.$$

Тоді міра Лебега множини тих точок із $\mathbb{R}^n$, що потрапляють у нескінченну кількість множин A_q, дорівнює нулеві.

Лема 2.4 ([5]). *Нехай функція $f(x)$ є $(n+1)$ раз неперервно диференційовною на відрізку $[a,b]$ і нехай для всіх $x \in [a,b]$ виконується нерівність*

$$|f^{(n)}(x)| \geqslant C_1 > 0.$$

Тоді міра Лебега множини тих $x \in [a,b]$, для яких

$$|f(x)| < \varepsilon < C_1$$

не перевищує $C_2 \sqrt[n]{\varepsilon/\delta}$, $C_2 = C_2(n)$.

Лема 2.5 ([29]). *Нехай $f(y) = f(y_1, \ldots, y_p)$ – дійснозначна функція, яка є досить гладкою в обмеженій однозв'язній області $G \subset \mathbb{R}^p$, і нехай похідні*

$$\frac{\partial^{|s|} f(y)}{\partial y_1^{s_1} \ldots \partial y_p^{s_p}}, \quad |s| < q,$$

як функції однієї змінної y_m (при решті фіксованих змінних), $1 < m < p$, мають в області G скінченну кількість нулів. Якщо в G

$$\left| \frac{\partial^{|q|} f(y)}{\partial y_1^{q_1} \ldots \partial y_p^{q_p}} \right| \geqslant \delta > 0, \quad q = \sum_{j=1}^{p} q_j, \quad q \geqslant 1, \quad q_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \ldots, p,$$

то міра Лебега в $\mathbb{R}^p$ множини тих $y \in G$, для яких $|f(y)| < \varepsilon$, не перевищує величини $C_3 \sqrt[q]{\varepsilon/\delta}, C_3 = C_3(G, q)$.

Розглянемо квазімногочлен вигляду

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t) \exp(\lambda_j t), \qquad t \in [0, T_0],\ T_0 > 0. \tag{2.26}$$

де $P_j(t)$ – многочлени з комплексними коефіцієнтами степеня не вище $(N_j - 1)$ за змінною t, $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Для квазімногочлена $Q(t)$ позначимо

$$N = N_1 + \cdots + N_m, \quad B = 1 + \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\lambda_j|, \quad M = \min_{1 \leqslant j \leqslant m} \mathrm{Re}\lambda_j,$$

$$\Psi = \max_{t \in [0, T_0]} \exp(-Mt), \quad G = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \left\{ B^{-j} \left| Q^{(j-1)}(t)|_{t=0} \right| \right\}.$$

Лема 2.6 ([65]). *Існують такі сталі C_4, C_5 (які залежать тільки від n та T), що для довільного квазімногочлена вигляду* (2.26) *та для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = C_4 G/(4\Psi B^{N-1})$, виконується нерівність*

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\{t \in [0, T_0] : |Q(t)| < \varepsilon\} \leqslant C_5 B \left(\frac{4\varepsilon\Psi}{C_4 G}\right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Лема 2.7. *Для довільних $x_q, y_q \in \mathbb{C}, q \in \{1, \ldots, n\}$, справедлива рівність*

$$\prod_{q=1}^{n}(x_q + y_q) = \sum_{j_1=0}^{1} \cdots \sum_{j_n=0}^{1} \prod_{q=1}^{n} x_q^{j_q} \prod_{s=1}^{n} y_s^{1-j_s}.$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. При $n = 1$ твердження очевидне. Дійсно

$$x_1 + y_1 = x_1^1 y_1^0 + x_1^0 y_1^1 = \sum_{j_1=0}^{1} x_1^{j_1} y_1^{1-j_1}.$$

Припустимо, що твердження вірне для $n - 1$, тобто

$$\prod_{q=1}^{n-1}(x_q + y_q) = \sum_{j_1=0}^{1} \cdots \sum_{j_{n-1}=0}^{1} \prod_{q=1}^{n-1} x_q^{j_q} \prod_{s=1}^{n-1} y_s^{1-j_s}.$$

Тоді для n маємо

$$\prod_{q=1}^{n}(x_q+y_q) = (x_n+y_n)\prod_{q=1}^{n-1}(x_q+y_q) = (x_n+y_n)\sum_{j_1=0}^{1} \cdots \sum_{j_{n-1}=0}^{1} \prod_{q=1}^{n-1} x_q^{j_q} \prod_{s=1}^{n-1} y_s^{1-j_s} =$$

$$= \sum_{j_n=0}^{1} x_n^{j_n} y_n^{1-j_n} \left(\sum_{j_1=0}^{1} \cdots \sum_{j_{n-1}=0}^{1} \prod_{q=1}^{n-1} x_q^{j_q} \prod_{s=1}^{n-1} y_s^{1-j_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{1} \cdots \sum_{j_n=0}^{1} \prod_{q=1}^{n} x_q^{j_q} \prod_{s=1}^{n} y_s^{1-j_s}.$$

З останньої рівності випливає твердження леми. □

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

У другому розділі дисертації введено простори майже періодичних функцій спектр яких володіє певними асимптотичними властивостями. Встановлено деякі властивості наведених просторів та функцій.

Розглянуто загальну схему дослідження розглядуваних задач. Проведено аналіз структури розв'язків цих задач. Для загальної постановки встановлено єдиність та існування розв'язків розглядуваних задач у просторах скінченних узагальнених тригонометричних поліномів та узагальнених майже періодичних функцій із заданим спектром. Показано, що у цьому випадку у задачах відсутня проблема малих знаменників.

Наведено деякі допоміжні відомості з метричної теорії чисел, які використовуються в наступних розділах дисертації.

Встановлені результати опубліковані у [45, 50, 52].

РОЗДІЛ 3
ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

3.1. Задача для рівняння типу Клейна-Гордона

У $(p+1)$-вимірному шарі у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій вивчається задача з умовами за часовою змінною, частинним випадком яких є інтегральні умови у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції або умови Діріхле, для рівняння типу Клейна-Гордона. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі. Доведено метричні твердження про оцінку знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

3.1.1. В області D^p розглядаємо задачу

$$N[u] := \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - a^2 \Delta u(t,x) + c^2 u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in D^p, \tag{3.1}$$

$$U_j[u] := \alpha_j \, u|_{t=t_j} + \beta_j \int\limits_0^T t^{r_j} u(t,x) dt = \varphi_j(x), \quad j = 1,2, \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{3.2}$$

в якій $a > 0, c > 0$; $t_1 = 0, t_2 = T$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}, \alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0, j = 1,2$; $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_+, r_2 > r_1$; функції $f(t,x)$ та $\varphi_j(x), j = 1,2$, є майже періодичними за x зі заданим спектром $\mathcal{M}$, які розвиваються в ряди Фур'є вигляду (2.19).

3.1.2. Майже періодичний за x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язок задачі (3.1), (3.2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k, \, x). \tag{3.3}$$

Підставивши ряди (2.19), (3.3) у рівняння (3.1) та умови (3.2), отримуємо для знаходження кожного з коефіцієнтів $u_k(t)$, відповідно, таку задачу:

$$l[u_k] := \frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + \left(a^2 \|\mu_k\|^2 + c^2\right) u_k(t) = f_k(t), \tag{3.4}$$

$$U_j[u_k] := \alpha_j u(t_j) + \beta_j \int\limits_0^T t^{r_j} u_k(t) dt = \varphi_{jk}, \quad j = 1, 2. \tag{3.5}$$

Рівняння (3.4) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{1k}(t) = \exp(i\gamma_k t), \quad u_{2k}(t) = \exp(-i\gamma_k t),$$

де

$$\gamma_k = \sqrt{a^2 \|\mu_k\|^2 + c^2}. \tag{3.6}$$

Характеристичний визначник задачі (3.4), (3.5) обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} \Delta(\mu_k, T) = (\alpha_1 + \beta_1 I_{12})(\alpha_2 \exp(-i\gamma_k T) + \beta_2 I_{21}) - \\ - (\alpha_1 + \beta_1 I_{11})(\alpha_2 \exp(i\gamma_k T) + \beta_2 I_{22}), \end{aligned} \tag{3.7}$$

де

$$\begin{aligned} I_{qj} := I_{qj}(\mu_k, T) = \frac{(-1)^{r_q(j+1)} r_q!}{(i\gamma_k)^{r_q+1}} - \\ - \sum_{l=1}^{r_q+1} \frac{(-1)^{(l+1)} r_q!}{(r_q - l + 1)!} \frac{T^{r_q - l + 1}}{(i\gamma_k)^l} \exp((-1)^j i\gamma_k T), \quad q, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Задача (3.4), (3.5) не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ [99].

Теорема 3.1. *Для того, щоб задача* (3.1), (3.2) *мала не більше одного майже періодичного за* x *зі спектром* $\mathcal{M}$ *розв'язку у просторі* $C^2_{\mathcal{M}}(\overline{D}^p)$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (2.24) *у якій* $\Delta(\mu_k, T)$ *зображується формулою* (3.7).

Доведення. Проводиться за схемою доведення твердження 2.3. □

Зауваження 3.1. Якщо в умовах (3.2) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то

$$\Delta(\mu_k, T) = \alpha_1 \alpha_2 (\exp(i\gamma_k T) - \exp(-i\gamma_k T)),$$

і умова (2.24) набуває вигляду

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \ \ \forall m \in \mathbb{N} \qquad a^2 \left\|\mu_k\right\|^2 + c^2 \neq m^2 \left(\pi/T\right)^2.$$

3.1.3. Надалі будемо вважати, що виконується умова (2.24). Тоді для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ існує єдиний розв'язок $u_k(t)$ задачі (3.4), (3.5), який зображується у вигляді суми

$$u_k(t) = V_k(t) + W_k(t), \tag{3.9}$$

де $V_k(t)$ – розв'язок однорідного рівняння (3.4) з умовами (3.5), а $W_k(t)$ – розв'язок рівняння (3.4) з однорідними умовами (3.5).

Для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ розв'язок однорідного рівняння (3.4) з умовами (3.5) зображається формулою

$$V_k(t) = C_{1k} u_{1k}(t) + C_{2k} u_{2k}(t), \tag{3.10}$$

де коефіцієнти C_{1k}, C_{2k} визначаються із системи алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_{1k}(\alpha_1 + \beta_1 I_{12}) + C_{2k}(\alpha_1 + \beta_1 I_{21}) = \varphi_{1k}, \\ C_{1k}(\alpha_2 \exp(i\gamma_k T) + \beta_2 I_{11}) + C_{2k}(\alpha_2 \exp(-i\gamma_k T) + \beta_2 I_{22}) = \varphi_{2k}, \end{cases} \tag{3.11}$$

визначник якої збігається з $\Delta(\mu_k, T)$. Знайшовши розв'язок системи (3.11) за формулами Крамера і підставивши його в (3.10), отримуємо

$$V_k(t) = \sum_{j,q=1}^{2} \frac{\Delta_{qj}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk} \exp((-1)^{q+1} i\gamma_k t), \tag{3.12}$$

де

$$\Delta_{1j}(\mu_k, T) = \alpha_2 \exp((-1)^j \gamma_k T) + \beta_2 I_{2j}, \ \ j = 1, 2, \tag{3.13}$$

$$\Delta_{2j}(\mu_k, T) = \alpha_1 + \beta_1 I_{1j}, \ \ j = 1, 2. \tag{3.14}$$

За умови (2.24) для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ існує єдина функція Гріна $G_k(t, \tau) := G(\mu_k; t, \tau)$ рівняння (3.4) з однорідними умовами (3.5), за допомогою якої розв'язок рівняння (3.4) з однорідними умовами (3.5) зображується формулою

$$W_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{3.15}$$

У квадраті K_T (крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$) функція $G_k(t,\tau)$ визначається формулою

$$G_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2\gamma_k}\sin(\gamma_k(t-\tau)) + \frac{1}{\Delta(\mu_k,T)}\sum_{j=1}^{2} F_j(\tau,\mu_k)\Delta_j(t,\mu_k), \quad (3.16)$$

де

$$\begin{aligned} F_j(\tau,\mu_k) = \frac{1}{2\gamma_k}\Bigg[&\alpha_j \sin(\gamma_k((j-1)T + (-1)^{j+1}\tau)) - \\ &- \frac{\beta_j r_j!}{\gamma_k^{r_j+1}}\sin\left(\frac{r_j+1}{2}\pi - \gamma_k\tau\right) - \\ &- \beta_j \sum_{m=0}^{r_j} \frac{r_j!(T^{r_j-m}\sin(\gamma_k(T-\tau) + (m+1)\frac{\pi}{2})}{(r_j-m)!\gamma_k^{m+2}} + \\ &+ 2\beta_j \sum_{m=0}^{r_j} \frac{\tau^{r_j-m}\sin((m+1)\frac{\pi}{2})}{(r_j-m)!\gamma_k^{m+2}},\Bigg], \quad j = 1,2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1(t,\mu_k) = \exp(i\gamma_k t)(\alpha_2\exp(-i\gamma_k T) + \beta_2 \mathrm{I}_{21}) - \\ - \exp(-i\gamma_k t)(\alpha_2\exp(i\gamma_k T) + \beta_2\mathrm{I}_{22}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\Delta_2(t,\mu_k) = \exp(i\gamma_k t)(\alpha_1 + \beta_1\mathrm{I}_{11}) - \exp(-i\gamma_k t)(\alpha_1 + \beta_1\mathrm{I}_{12}). \quad (3.19)$$

На стороні $\tau = 0$ $(\tau = T)$ квадрата K_T функція $G_k(t,\tau)$ довизначається за неперервністю справа (зліва).

На підставі формул (3.3), (3.9), (3.12), (3.15) отримуємо формальний розв'язок $u(t,x)$ задачі (3.1), (3.2) у вигляді ряду

$$\begin{aligned} u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\Bigg(&\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau + \\ &+ \sum_{j,l=1}^{2}\frac{\Delta_{lj}(\mu_k,T)}{\Delta(\mu_k,T)}\varphi_{jk}\exp((-1)^{l+1}i\gamma_k t)\Bigg)\exp(i\mu_k,x). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ряд (3.20), взагалі, є розбіжним, бо вираз $|\Delta(\mu_k,T)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Теорема 3.2. *Нехай справджується умова* (2.24) *та існує стала* $\eta > 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості)* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| \geqslant (1 + |\mu_k|)^{-\eta}. \tag{3.21}$$

Якщо $f \in C_{\mathcal{M}}^{(0,[\eta+p/\theta_1]+2)}(\overline{D}^p)$, $\varphi_j \in C_{\mathcal{M}}^{[\eta+p/\theta_1]+3}(\mathbb{R}^p), j = 1, 2$, *де* θ_1 *– стала з оцінок* (2.2), *то існує єдиний розв'язок задачі* (3.1), (3.2) *із простору* $C_{\mathcal{M}}^2(\overline{D}^p)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (3.20), *причому*

$$\left\|u; C_{\mathcal{M}}^2(\overline{D}^p)\right\| \leqslant C_1 \left\|f; C_{\mathcal{M}}^{(0,[\eta+p/\theta_1]+2)}(\overline{D}^p)\right\| + C_2 \sum_{j=1}^{2} \left\|\varphi; C_{\mathcal{M}}^{[\eta+p/\theta_1]+3}(\mathbb{R}^p)\right\|.$$

Доведення. На підставі формули (3.20) отримуємо

$$\begin{aligned} \left\|u; C_{\mathcal{M}}^2(\bar{D}^p)\right\| \leqslant C_3 \sum_{|k|\geqslant 0} \Bigg(\sum_{s_0=0}^{2} \max_{t\in[0,T]} \left| \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau \right| |\mu_k|^{2-s_0} + \\ + \sum_{j,q=1}^{2} \frac{|\Delta_{qj}(\mu_k, T)|}{|\Delta(\mu_k, T)|} |\varphi_{jk}| \, |\mu_k|^2 \Bigg), \end{aligned} \tag{3.22}$$

де $C_3 := C_3(a, c)$. Із формул (2.3), (3.12), (3.13), (3.17)-(3.19) випливає, що

$$\begin{aligned} |F_j(\tau, \mu_k)| &\leqslant \sqrt{p/4a^2} \left(|\alpha_1| + |\beta_1| \, (r_j + 1)!(1 + 3T^{r_j})\right) |\mu_k|^{-1} = \\ &= C_4 \, |\mu_k|^{-1}, \qquad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} |\Delta_j(t, \mu_k)| &\leqslant 2\sqrt{p} \left(|\alpha_1| + |\beta_1| \, (r_j + 2)!(1 + T^{r_j})\right) |\mu_k|^{-1} = \\ &= C_5 \, |\mu_k|^{-1}, \qquad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$|\Delta_{lj}(\mu_k, T)| \leqslant C_6, \quad l, j = 1, 2, \tag{3.25}$$

де $C_6 = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} + \max\{|\beta_1|, |\beta_2|\} \, r_2! T^{r_2}$.

На підставі (3.16), (3.23) та (3.24), отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]} \left| \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau \right| \leqslant C_7 \max_{t\in[0,T]} |f_k(t)| \, |\mu_k|^{s_0+\eta-1}, \tag{3.26}$$

де $s_0 = 0, 1, 2$. Із оцінок (3.21), (3.22), (3.25) та (3.26) випливає, що

$$\left\|u; C^2_{\mathcal{M}}(\bar{D}^p)\right\| \leqslant C_1 \sum_{|k|>0} \Bigg(3C_7 \left|\mu_k\right|^{\eta+1} \max_{t\in[0,T]} |f_k(t)| + \\ + 2C_5 \left|\mu_k\right|^{\eta+2} \left(|\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}|\right) \Bigg). \tag{3.27}$$

За умов теореми, на підставі лем 2.1, 2.2 для кожного $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$ справджуються оцінки

$$\max_{t\in[0,T]} |f_k(t)| \leqslant p^{[\eta+p/\theta_1]+2} \left\| f; C^{(0,[\eta+p/\theta_1]+2)}_{\mathcal{M}}(\bar{D}^p) \right\| \left|\mu_k\right|^{-([\eta+p/\theta_1]+2)}, \tag{3.28}$$

$$|\varphi_{jk}| \leqslant p^{[\eta+p/\theta_1]+3} \left\| \varphi_j; C^{[\eta+p/\theta_1]+3}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p) \right\| \left|\mu_k\right|^{-([\eta+p/\theta_1]+3)}, \ j = 1, 2, \tag{3.29}$$

На підставі оцінок (3.27)-(3.29) одержуємо

$$\left\|u; C^2_{\mathcal{M}}(\bar{D}^p)\right\| \leqslant \sum_{|k|>0} |k|^{-z} \Bigg(C_8 \left\| f; C^{(0,[\eta+p/\theta_1]+2)}_{\mathcal{M}}(\bar{D}^p) \right\| + \\ + C_9 \sum_{j=1}^{2} \left\| \varphi_j; C^{[\eta+p/\theta_1]+3}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p) \right\| \Bigg), \tag{3.30}$$

де $z = p + (1 - \{\eta + p/\theta_1\})\theta_1$, $C_8 = 2C_1C_7p^{[\eta+p/\theta_1]+2}$, $C_9 = 2C_1C_5p^{[\eta+p/\theta_1]+3}$. Оскільки $z > p$, то ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |k|^{-z}$ збіжний. Позначимо його суму через S_z. Тоді оцінка (3.30) набуде вигляду

$$\left\|u; C^2_{\mathcal{M}}(\bar{D}^p)\right\| \leqslant C_{10} \left\| f; C^{(0,[\eta+p/\theta_1]+2)}_{\mathcal{M}}(\bar{D}^p) \right\| + \\ + C_{11} \sum_{j=1}^{2} \left\| \varphi_j; C^{[\eta+p/\theta_1]+3}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^p) \right\|, \tag{3.31}$$

де $C_{10} = S_zC_8$, $C_{11} = S_zC_9$. Із (3.31) випливає доведення теореми. □

3.1.4. З'ясуємо, коли виконується оцінка (3.21). Використаємо методику роботи [111] (див. також [89, §7.4]).

Припустимо, що в умовах (3.2) $\alpha_1 \neq 0$ та $\beta_2 \neq 0$. Позначимо

$$\Delta_1(\mu_k, T) = \Delta(\mu_k, T)(i\gamma_k)^{r_2+r_1+2}. \tag{3.32}$$

Враховуючи (3.7), (3.8) та (3.32), отримуємо

$$\Delta_1(\mu_k,T)=Q_1(\mu_k,T)e^{-i\gamma_k T}+Q_2(\mu_k,T)e^{i\gamma_k T}+Q_3(\mu_k,T),$$

де $Q_1(\mu_k,T)$, $Q_2(\mu_k,T)$ — поліноми степеня r_2 відносно T, $Q_3(\mu_k,T)$ — поліном степеня r_2+r_1 відносно T.

Побудуємо функції $g_{kj}:=g_j(\mu_k;T)$, $j=0,1,2$, таким чином:

$$g_{k0}=\frac{d^{r_2+r_1+1}}{dT^{r_2+r_1+1}}\Delta_1(\mu_k,T)=Q_4(\mu_k,T)e^{-i\gamma_k T}+Q_5(\mu_k,T)e^{i\gamma_k T}, \qquad (3.33)$$

де $Q_4(\mu_k,T)$, $Q_5(\mu_k,T)$ — поліноми степеня r_2 за змінною T;

$$g_{k1}=\frac{d^{r_2+1}}{dT^{r_2+1}}\left(e^{i\gamma_k T}g_{k0}\right)=\frac{d^{r_2+1}}{dT^{r_2+1}}\left(Q_4(\mu_k,T)+Q_5(\mu_k,T)e^{2i\gamma_k T}\right)=$$

$$=\left(2^{r_2+1}(\alpha_1(i\gamma_k)^{r_1+1}+\beta_1 r_1!)\beta_2(i\gamma_k)^{3r_2+r_1+2}T^{r_2}+Q_6(\mu_k,T)\right)e^{2i\gamma_k T}, \qquad (3.34)$$

де $Q_6(\mu_k,T)$ — поліном за змінною T, степінь якого менший, ніж r_2;

$$g_{k2}=\frac{d^{r_2}}{dT^{r_2}}\left(e^{-2i\gamma_k T}g_{k1}\right)=2^{r_2+1}r_2!(\alpha_1(i\gamma_k)^{r_1+1}+\beta_1 r_1!)\beta_2(i\gamma_k)^{3r_2+r_1+2}. \qquad (3.35)$$

Оцінимо знизу величину $|g_{k2}|=2^{r_2+1}r_2!\,|\beta_2|\,\gamma_k^{3r_2+r_1+2}\left|\alpha_1(i\gamma_k)^{r_1+1}+\beta_1 r_1!\right|$. Нехай $R(\mu_k)=\left\{\mu_k\in\mathcal{M}:|\mu_k|>\frac{1}{a}\sqrt{(2\,|\beta_1/\alpha_1|\,r_1!)^{2/(r_1+1)}-c^2}\right\}$. Якщо r_1 — непарне число, то для всіх $\mu_k\in R(\mu_k)$ виконується оцінка

$$\left|\alpha_1(i\gamma_k)^{r_1+1}+\beta_1 r_1!\right|\geqslant\left||\alpha_1|\,\gamma_k^{r_1+1}+|\beta_1|\,r_1!\right|\geqslant|\alpha_1/2|\,\gamma_k^{r_1+1}>$$
$$>|\alpha_1/2|\,(a/\sqrt{p})^{r_1+1}\,|\mu_k|^{r_1+1}.$$

Якщо r_1 — парне, то для всіх $\mu_k\in\mathcal{M}$ справедлива нерівність

$$\left|\alpha_1(i\gamma_k)^{r_1+1}+\beta_1 r_1!\right|\geqslant\left|\beta_1 r_1!\pm i\alpha_1\gamma_k^{r_1+1}\right|\geqslant$$
$$\geqslant|\alpha_1|\,\gamma_k^{r_1+1}>|\alpha_1|\,(a/\sqrt{p})^{r_1+1}\,|\mu_k|^{r_1+1}.$$

Отже, для всіх $\mu_k\in R(\mu_k)$, справджується оцінка

$$|g_{k2}|\geqslant C_{12}\,|\mu_k|^{3r_2+2r_1+3},\quad C_{12}=2^{r_2+1}r_2!\,|\alpha_1\beta_2|\,(a/\sqrt{p})^{3r_2+2r_1+3}. \qquad (3.36)$$

Зафіксуємо вектор $\mu_k=\bar{\mu}_k\in R(\mu_k)$. Із нерівності (3.36) випливає, що виконується хоча б одна з нерівностей $|\mathrm{Re}g_{k2}|\geqslant\frac{C_{12}}{\sqrt{2}}\,|\bar{\mu}_k|^{3r_2+2r_1+3}$,

$|\mathrm{Im} g_{k2}| \geqslant \frac{C_{12}}{\sqrt{2}} |\bar{\mu}_k|^{3r_2+2r_1+3}$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що справджується нерівність

$$|\mathrm{Re} g_{k2}| \geqslant \frac{C_{12}}{\sqrt{2}} |\bar{\mu}_k|^{3r_2+2r_1+3}. \tag{3.37}$$

Нехай $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}_+$ — довільний інтервал. Тоді, на підставі (3.34)-(3.37), згідно з лемою 2.4, отримуємо, що при $\mu_k = \bar{\mu}_k$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} \left\{ T \in [t_1, t_2] : \left| \mathrm{Re}(e^{-2i\gamma_k T} g_{k1}) \right| < |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_1} \right\} \leqslant C_{13} |\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_1/r_2)/\theta_1},$$

де $\lambda_1 = -3r_2 - 2r_1 - 3 + pr_2/\theta_1 + \varepsilon_1/\theta_1$, $\varepsilon_1 \in (0, \theta_1/3)$. Тобто існує підмножина $D_0 \subset [t_1, t_2]$, $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} D_0 > t_2 - t_1 - C_{13} |\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_1/r_2)/\theta_1}$, така, що для всіх $T \in D_0$ виконується нерівність $\left| \mathrm{Re}(e^{-2i\gamma_k T} g_{k1}) \right| \geqslant |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_1}$. Враховуючи, що $|g_{k1}| = \left| e^{-2i\gamma_k T} g_{k1} \right| \geqslant \left| \mathrm{Re}(e^{-2i\gamma_k T} g_{k1}) \right|$, отримуємо, що для всіх $T \in D_0$ виконується нерівність

$$|g_{k1}| \geqslant |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_1}. \tag{3.38}$$

Згідно з нерівністю (3.38) множина $D_0 \subset [t_1, t_2]$ розбивається на такі підмножини A_0 і B_0 ($D_0 = A_0 \cup B_0$):

$$\forall T \in A_0 \quad |\mathrm{Re} g_{k1}| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_1}, \tag{3.39}$$

$$\forall T \in B_0 \quad |\mathrm{Im} g_{k1}| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_1}. \tag{3.40}$$

Зауважимо, що множини A_0 і B_0 складаються, відповідно, з інтервалів A_0^j і B_0^m, кількість яких оцінимо нижче.

Враховуючи, що $\mathrm{Re} g_{k1} = \frac{d^{r_2+1}}{dT^{r_2+1}} \mathrm{Re}(e^{i\gamma_k T} g_{k0})$, згідно з лемою 2.4, отримуємо такі оцінки:

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} \left\{ T \in A_0^j : \left| \mathrm{Re}(e^{i\gamma_k T} g_{k0}) \right| < |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_2} \right\} \leqslant C_{14} |\bar{\mu}_k|^{-\frac{(p+1+\varepsilon_2/(r_2+1))}{\theta_1}}, \tag{3.41}$$

де $\lambda_2 = (r_2+1)(p/\theta_1 + 1) + \lambda_1 + \varepsilon_2/\theta_1$, $\varepsilon_2 \in (0, \theta_1/3)$.

Оцінимо зверху кількість інтервалів A_0^j. З нерівності (3.39) випливає, що на кожному з цих інтервалів (крім, можливо, двох крайніх), функція

$y(T) := Re\frac{\partial g_{k1}}{\partial T} = Q_7(\bar{\mu}_k, T)\cos(2\bar{\gamma}_k T) + Q_8(\bar{\mu}_k, T)\sin(2\bar{\gamma}_k T)$, де $Q_j(\bar{\mu}_k, T)$, $j = 7, 8$, — поліноми степеня r_2 за змінною T, $\bar{\gamma}_k$ визначається за формулою (3.6) при $\mu_k = \bar{\mu}_k$, згідно з теоремою Ролля, має хоча б один нуль. Отже для оцінки кількості інтервалів A_0^j достатньо оцінити кількість нулів функції $y(T)$ на відрізку $[t_1, t_2]$. Функція $y(T)$ має на відрізку $[t_1, t_2]$ стільки нулів, скільки нулів має функція

$$\bar{y}(z) = Q_7(\bar{\mu}_k, z/\bar{\gamma}_k)\cos(2z) + Q_8(\bar{\mu}_k, z/\bar{\gamma}_k)\sin(2z)$$

на відрізку $[\bar{\gamma}_k t_1, \bar{\gamma}_k t_2]$. Зауважимо, що функція $\bar{y}(z)$ є розв'язком диференціального рівняння $(d^2/dz^2+4)^{r_2+1}\bar{y}(z) = 0$. З теореми Валле-Пуссена (див. теорему 2.5 із [89]) випливає, що існує додатна стала h_0 така, що інтерполяційна $2r_2 + 2$-точкова задача для цього рівняння на інтервалі довжини h_0 має єдиний розв'язок. Отже функція $\bar{y}(z)$, яка не є тотожнім нулем, на інтервалі довжини h_0 не може мати більше ніж $2r_2+1$ нулів. Тоді на інтервалі довжини $|\bar{\gamma}_k(t_2 - t_1)|$ кількість нулів функції $\bar{y}(z)$ не перевищує числа $|\bar{\gamma}_k(t_2 - t_1)|\,(2r_2 + 1)/h_0$. Зі сказаного вище та (3.6) випливає, що кількість інтервалів A_0^j множини A_0 не перевищує величини $C_{15}\,|\bar{\mu}_k|$.

На підставі (3.41), отримуємо таку оцінку:

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\left\{T \in A_0 : \left|\mathrm{Re}(e^{i\gamma_k T} g_{k0})\right| < |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_2}\right\} \leqslant C_{16}\,|\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_2/(r_2+1))/\theta_1}, \quad (3.42)$$

де $C_{16} = C_{14}C_{15}$. Аналогічно отримуємо, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\left\{T \in B_0 : \left|\mathrm{Im}(e^{i\gamma_k T} g_{k0})\right| < |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_2}\right\} \leqslant C_{17}\,|\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_2/(r_2+1))/\theta_1}. \quad (3.43)$$

На основі нерівностей (3.42), (3.43) отримуємо оцінку

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\left\{T \in D_0 : \left|e^{i\gamma_k T} g_{k0}\right| < |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_2}\right\} \leqslant C_{18}\,|\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_2/(r_2+1))/\theta_1},$$

де $C_{18} = C_{16} + C_{17}$. Отже існує така підмножина $D_1 \subset D_0$, $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} D_1 > t_2 - t_1 - C_{13}\,|\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_1/r_2)/\theta_1} - C_{18}\,|\bar{\mu}_k|^{-(p+\varepsilon_2/(r_2+1))/\theta_1}$, що для всіх $T \in D_1$ виконується нерівність

$$|g_{k0}| = \left|e^{i\gamma_k T} g_{k0}\right| \geqslant |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_2}. \quad (3.44)$$

Враховуючи (3.33) і (3.44), аналогічним шляхом отримуємо, що для всіх $T \in D_2 \subset D_1$, $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} D_2 > t_2 - t_1 - C_{13} \left|\bar{\mu}_k\right|^{-(p+\varepsilon_1/r_2)/\theta_1} - C_{18} \left|\bar{\mu}_k\right|^{-(p+\varepsilon_2/(r_2+1))/\theta_1} - -C_{19} \left|\bar{\mu}_k\right|^{-(p+\varepsilon_3/(r_2+r_1+1))/\theta_1}$, справджується оцінка

$$|\Delta_1(\bar{\mu}_k, T)| \geqslant |\bar{\mu}_k|^{-\lambda_2-(r_2+r_1+1)(p/\theta_1+1)-\varepsilon_3}, \quad \varepsilon_3 \in (0, \theta_1/3),$$

яка після підстановки значень $\lambda_2,\ \lambda_1$ запишеться так:

$$|\Delta_1(\bar{\mu}_k, T)| \geqslant |\bar{\mu}_k|^{r_2+r_1+1-(3r_2+r_1+2)p/\theta_1-\varepsilon}, \ \ \varepsilon = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j, \ \ \varepsilon \in (0,1). \qquad (3.45)$$

З останнього твердження випливає, що для всіх $T \in F(\bar{\mu}_k) := [t_1, t_2] \backslash D_2$ виконується нерівність $|\Delta_1(\bar{\mu}_k, T)| < |\bar{\mu}_k|^{r_2+r_1+1-(3r_2+r_1+2)p/\theta_1-\varepsilon}$, причому

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} F(\bar{\mu}_k) \leqslant C_{13} \left|\bar{\mu}_k\right|^{-(p+\varepsilon_1/r_2)/\theta_1} + C_{18} \left|\bar{\mu}_k\right|^{-(p+\varepsilon_2/(r_2+1))/\theta_1} +$$

$$+C_{19} \left|\bar{\mu}_k\right|^{-(p+\varepsilon_3/(r_2+r_1+1))/\theta_1} \leqslant C_{20} \left|\bar{\mu}_k\right|^{-\frac{p}{\theta_1}-\frac{\delta}{\theta_1}},$$

де $\delta = \min\{\varepsilon_1/(r_2\theta_1), \varepsilon_2/((r_2+1)\theta_1), \varepsilon_3/((r_2+r_1+1)\theta_1)\}$. Оскільки ряд $\sum_{|k|>0} \left|\bar{\mu}_k\right|^{-p/\theta_1-\delta/\theta_1}$ є збіжним, то за лемою 2.3, міра тих $T \in [t_1, t_2]$, для яких нерівність $|\Delta_1(\bar{\mu}_k, T)| < |\bar{\mu}_k|^{r_2+r_1+1-(3r_2+r_1+2)p/\theta_1-\varepsilon}$ справджується для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in R(\mu_k)$, рівна нулеві. Отже, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in [t_1, t_2]$ нерівність (3.45) справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$. Оскільки пряму $\mathbb{R}$ можна покрити зліченною кількістю інтервалів $[t_1, t_2]$, то нерівність (3.45) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ та всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

На підставі (2.3), (3.6), (3.32) та (3.45) отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ нерівність

$$|\Delta(\mu_k, T)| = \frac{|\Delta_1(\mu_k, T)|}{\gamma_k^{r_2+r_1+2}} \geqslant C_{21} \left|\mu_k\right|^{-\frac{p(3r_2+r_1+2)}{\theta_1}-1-\varepsilon}, \ \varepsilon \in (0,1),$$

де $C_{21} = \big(p/(2a^2)\big)^{(r_2+r_1+2)/2}$, справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Якщо $\alpha_1 = 0$, то для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ оцінка (3.36) набуває вигляду

$$|g_{k2}| \geqslant C_{22}\,|\mu_k|^{3r_2+r_1+2}, \quad C_{22} = 2^{r_2+1} r_2! r_1!\,|\beta_1\beta_2|\,(a/\sqrt{p})^{3r_2+r_1+2}. \tag{3.46}$$

На підставі (3.46), аналогічними міркуваннями отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ нерівність

$$|\Delta(\mu_k, T)| \geqslant C_{21}\,|\mu_k|^{-\frac{p(3r_2+r_1+2)/\theta_1}{\theta_1} - r_1 - 2 - \varepsilon}, \ \varepsilon \in (0,1),$$

справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Із вище сказаного випливає таке твердження.

Теорема 3.3. *Нехай $\beta_2 \neq 0$. Тоді для довільних фіксованих α_2, β_1, a, c і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ оцінка* (3.21) *справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ при*

$$\eta > \begin{cases} 1 + p(3r_2 + r_1 + 2)/\theta_1, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \\ r_1 + 2 + p(3r_2 + r_1 + 2)/\theta_1, & \text{якщо } \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

3.2. Задача для рівнянь, гіперболічних за Гордінгом

У цьому підрозділі у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій вивчається задача з умовами за часовою змінною, частинним випадком яких є інтегральні умови у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції або умови типу Діріхле, для гіперболічних за Гордінгом рівнянь.

3.2.1. В області D^p розглядаємо задачу

$$L[u] := \sum_{|\hat{s}|\leqslant 2n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = 0, \quad n \geqslant 1, \tag{3.47}$$

$$\begin{cases} U_j[u] := \alpha_j \left.\dfrac{\partial^{2(j-1)} u}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=0} + \beta_j \displaystyle\int_0^T t^{r_j} u(t,x)dt = \varphi_j(x), \\ U_{n+j}[u] := \alpha_{n+j} \left.\dfrac{\partial^{2(j-1)} u}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=T} + \beta_{n+j} \displaystyle\int_0^T t^{r_{n+j}} u(t,x)dt = \varphi_{n+j}(x), \end{cases} \tag{3.48}$$

де $j \in \{1,\ldots,n\}$, $A_{\hat{s}} \in \mathbb{C}$, $A_{(2n,0,\ldots,0)} = 1$; $\alpha_l, \beta_l \in \mathbb{R}$, $\alpha_l^2 + \beta_l^2 \neq 0$, $r_l \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1,\ldots,2n\}$, $r_q > r_s$, $q > s$, $r = r_1 + \cdots + r_{2n}$; функції $\varphi_l(x), l \in \{1,\ldots,2n\}$, є майже періодичними зі заданим спектром $\mathcal{M}$,

$$\varphi_l(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{lk} \exp(i\mu_k,\, x). \tag{3.49}$$

Вважаємо, що оператор L є гіперболічним за Гордінгом [18, стор. 148], тобто для всіх $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_p) \in \mathbb{R}^p$

$$\mathrm{Re}\lambda_j(\xi) \leqslant C_0, \quad j \in \{1,\ldots,2n\}, \tag{3.50}$$

де $\lambda_j(\xi)$ — корені рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|\leqslant 2n} A_{\hat{s}} (i\xi_1)^{s_1} \cdots (i\xi_p)^{s_p} \lambda^{s_0} = 0, \tag{3.51}$$

$C_0 \in \mathbb{R}$ — деяка стала.

3.2.2. Майже періодичний за x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язок задачі (3.47), (3.48) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)\exp(i\mu_k,\, x). \tag{3.52}$$

Підставивши ряди (3.49), (3.52) у рівняння (3.47) та умови (3.48), отримуємо для знаходження кожного з коефіцієнтів $u_k(t)$, відповідно, таку задачу:

$$l[u_k] := \sum_{|\hat{s}|\leqslant 2n} A_{\hat{s}}(i\mu_{k_1})^{s_1}\cdots(i\mu_{k_p})^{s_p}u_k^{(s_0)}(t) = 0, \tag{3.53}$$

$$\begin{cases} U_j[u_k] := \alpha_j \dfrac{d^{2(j-1)}u_k(0)}{dt^{2(j-1)}} + \beta_j \displaystyle\int_0^T t^{r_j}u_k(t)dt = \varphi_{jk}, \\ U_{n+j}[u_k] := \alpha_{n+j} \dfrac{d^{2(j-1)}u_k(T)}{dt^{2(j-1)}} + \beta_{n+j} \displaystyle\int_0^T t^{r_{n+j}}u_k(t)dt = \varphi_{n+j,k}, \end{cases} \tag{3.54}$$

де $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Нехай $\lambda_{lk} := \lambda_l(\mu_k)$, $l \in \{1,\ldots,m\}$, — різні корені рівняння (3.51) при $\xi = \mu_k$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, із кратностями n_l відповідно, $n_1 + \cdots + n_m = 2n$. Для спрощення викладок вважаємо, що числа m і n_l не залежать від μ_k і що $\lambda_l(\mu_k) \neq 0$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, $l \in \{1,\ldots,m\}$. Для коренів λ_{lk} справджуються такі оцінки [103]:

$$|\lambda_{lk}| \leqslant C_1(1+|\mu_k|),\ C_1 = (2n)^p \max_{|\hat{s}|\leqslant 2n}\{A_{\hat{s}}\},\ l \in \{1,\ldots,m\},\ \mu_k \in \mathcal{M}. \tag{3.55}$$

Нехай $\{f_{qk} := f_q(\mu_k,t), q \in \{1,\ldots,2n\}\}$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, — нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння (3.53). Для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ характеристичний визначник задачі (3.53), (3.54) є таким:

$$\Delta(\mu_k,T) := \det\|U_j[f_{qk}]\|_{q,j=1}^{2n} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 f_{1k}(0) + \beta_1 I_{11} & \dots & \alpha_1 f_{2n,k}(0) + \beta_1 I_{2n,1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_n f_{1k}^{(2(n-1))}(0) + \beta_n I_{1n} & \dots & \alpha_n f_{2n,k}^{(2(n-1))}(0) + \beta_n I_{2n,n} \\ & & \\ \alpha_{n+1} f_{1k}(T) + \beta_{n+1} I_{1,n+1} & \dots & \alpha_{n+1} f_{2n,k}(T) + \beta_{n+1} I_{2n,n+1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{2n} f_{1k}^{(2(n-1))}(T) + \beta_{2n} I_{1,2n} & \dots & \alpha_{2n} f_{2n,k}^{(2(n-1))}(T) + \beta_{2n} I_{2n,2n} \end{vmatrix}, \qquad (3.56)$$

де

$$I_{qj} := I_{qj}(\mu_k, T) = \int\limits_0^T t^{r_j} f_{qk}(t)dt, \quad q, j \in \{1, \dots, 2n\}. \qquad (3.57)$$

Теорема 3.4. *Для того, щоб задача* (3.47), (3.48) *мала не більше одного майже періодичного за* x *із спектром* $\mathcal{M}$ *розв'язку у шкалі просторів* $C^{2n}([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta})$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (2.24) *у якій* $\Delta(\mu_k, T)$ *визначений формулою* (3.56).

Доведення. Проводиться за схемою доведення твердження 2.3. □

3.2.3. Надалі вважатимемо, що виконується умова (2.24). Тоді для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ існує єдиний розв'язок задачі (3.53), (3.54), який зображується формулою

$$u_k(t) = \sum_{q,j=1}^{2n} \frac{\Delta_{jq}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk} f_{qk}(t), \qquad (3.58)$$

де $\Delta_{jq}(\mu_k, T)$ — алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k, T)$ елемента j-го рядка та q-го стовпця. На підставі формул (3.52) і (3.58) формальний розв'язок задачі (3.47), (3.48) зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(\sum_{q,j=1}^{2n} \frac{\Delta_{jq}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk} f_{qk}(t) \right) \exp(i\mu_k, x). \qquad (3.59)$$

Умови існування розв'язку задачі (3.47), (3.48) у просторі $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}'_{\mathcal{M}})$ такі ж як і у твердженні 2.4. Однак, в шкалі просторів $C^{2n}([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta})$ існування розв'язку задачі (3.47), (3.48) пов'язане з проблемою малих зна-

менників, бо вираз $|\Delta(\mu_k, T)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Позначимо сталі:

$$C_3 = 4^n C_1 \max\{1, \exp(C_0 T)\},\ C_4 = \max_{1 \leqslant j \leqslant 2n} \left\{ \max \left\{ C_3 |\alpha_j|,\ \frac{|\beta_j| C_3 T^{r_j+1}}{r_j+1} \right\} \right\}.$$

Лема 3.1. *Для алгебричних доповнень елементів визначника* $\Delta(\mu_k, T)$, *справедливі оцінки*

$$|\Delta_{jl}(\mu_k, T)| \leqslant C_5 (1 + |\mu_k|)^{4n^2 - n + l}, \quad j, l \in \{1, \ldots, 2n\}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}, \tag{3.60}$$

де $C_5 = (2n-1)!(C_4)^{2n-1}$.

Доведення. Для кожної з функцій $f_{qk}(t)$, враховуючи (3.50), (3.55) та лему 12.7.7 у [109], отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t \in [0,T]} \left| \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} f_{qk}(t) \right| \leqslant C_3 (1 + |\mu_k|)^{2n+j-q}, \tag{3.61}$$

де $j \in \{1, \ldots, 2n+1\}$, $q \in \{1, \ldots, 2n\}$, $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Для елементів

$$U_j[f_{qk}] = \begin{cases} \alpha_j f_{qk}^{(2(j-1))}(0) + \beta_j I_{qj}, & j \in \{1, \ldots, n\}, \\ \alpha_j f_{qk}^{(2(j-n-1))}(T) + \beta_j I_{qj}, & j \in \{n+1, \ldots, 2n\}, \end{cases}$$

де $q \in \{1, \ldots, 2n\}$, визначника $\Delta(\mu_k, T)$, на підставі (3.57) та (3.61), отримуємо

$$|U_j[f_{qk}]| \leqslant |\alpha_j| |f_q^{(2(j-1))}(\mu_k, 0)| + |\beta_j| |I_{qj}| \leqslant |\alpha_j| + \frac{|\beta_j| C_3 T^{r_j+1}}{r_j+1} (1 + |\mu_k|)^{2n+1-q} \leqslant$$

$$\leqslant C_4 (1 + |\mu_k|)^{2n+1-q}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, q \in \{1, \ldots, 2n\}; \tag{3.62}$$

$$|U_j[f_{qk}]| \leqslant |\alpha_j| |f_q^{(2(j-n-1))}(\mu_k, T)| + |\beta_j| |I_{qj}| \leqslant$$

$$\leqslant C_4 (1 + |\mu_k|)^{4n-1-q}, \quad j \in \{n+1, \ldots, 2n\}, q \in \{1, \ldots, 2n\}. \tag{3.63}$$

На підставі формул (3.62), (3.63) та враховуючи структуру алгебричних доповнень $\Delta_{jl}(\mu_k, T)$, отримуємо

$$|\Delta_{jl}(\mu_k, T)| \leqslant (2n-1)! \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{2n} |U_q[f_{qk}]| \leqslant$$

$\leqslant (2n-1)!(C_4)^{2n-1}(1+|\mu_k|)^{4n^2-n+l} = C_5(1+|\mu_k|)^{4n^2-n+l}$, $j,l \in \{1,\ldots,2n\}$.

З отриманих нерівностей випливає доведення леми. $\square$

Теорема 3.5. *Нехай справджується умова* (2.24) *та існують сталі* $\eta > 0$ *і* $\sigma \geqslant 0$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| > (1+|\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\sigma|\mu_k|). \tag{3.64}$$

Якщо $\varphi_j \in W_{\mathcal{M}}^{4n^2+n+\eta+\alpha+1,\,\beta+\sigma}, j \in \{1,\ldots,2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3.47), (3.48) *із простору* $C^{2n}([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta})$. *Цей розв'язок зображається формулою* (3.59), *причому*

$$\|u; C^{2n}([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta})\| \leqslant C_6 \sum_{j=1}^{2n} \|\varphi; W_{\mathcal{M}}^{4n^2+n+\eta+\alpha+1,\,\beta+\theta}\|.$$

Доведення. На підставі формули (3.52) отримуємо

$$\|u; C^{2n}([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta})\| = \\ = \sum_{l=0}^{2n} \max_{t\in[0,T]} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k^{(l)}(t)|^2 (1+|\mu_k|)^{2\alpha} \exp\left(2\beta|\mu_k|\right) \right)^{1/2}, \tag{3.65}$$

де $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, визначені формулами (3.58). Враховуючи (3.58), (3.61), (3.64) і лему 3.1, отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]} |u_k^{(l)}(t)| \leqslant C_3 \sum_{q,j=1}^{2n} \frac{|\Delta_{jq}(\mu_k,T)|}{|\Delta(\mu_k,T)|} |\varphi_{jk}| (1+|\mu_k|)^{2n+l+1-q} \leqslant \\ \leqslant C_7 \sum_{j=1}^{2n} |\varphi_{jk}| (1+|\mu_k|)^{4n^2-n+l+\eta+1} \exp(\sigma|\mu_k|), \\ l \in \{0,1,\ldots,2n\}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}, \tag{3.66}$$

де $C_7 = 2nC_3C_6$. На підставі (3.65) та оцінок (3.66) дістаємо оцінку

$$\|u; C^{2n}([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta})\| \leqslant \\ \leqslant (2n+1)C_7 \sum_{j=1}^{2n} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |\varphi_{jk}|^2 (1+|\mu_k|)^{2(4n^2+n+\eta+\alpha+1)} \exp\left(2(\beta+\theta)|\mu_k|\right) \right)^{1/2} =$$

$$= (2n+1)C_7 \sum_{j=1}^{2n} \|\varphi_j; W_{\mathcal{M}}^{4n^2+n+\alpha+\eta+1,\,\beta+\theta}\|.$$

З отриманої нерівності випливає доведення теореми. □

3.2.4. Вияснимо можливість виконання нерівності (3.64), скориставшись методикою роботи [65]. Позначимо:

$$\bar{n}_j = n_1 + \ldots + n_{j-1}, \quad j \in \{2, \ldots, m+1\};$$

$$\zeta_q = q - 1 - \bar{n}_l, \quad \theta_q = l, \quad q \in \{1, \ldots, 2n\}, \tag{3.67}$$

де $l := l(q)$ однозначно визначається з нерівності $\bar{n}_l < q \leqslant \bar{n}_{l+1}$.

Функції

$$u_{qk} := u_{qk}(t) = t^{\zeta_q} \exp(\lambda_{\theta_q,k} t), \quad q \in \{1, \ldots, 2n\}, \tag{3.68}$$

де ζ_q, θ_q визначені формулами (3.67), утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.53).

Для фундаментальної системи (3.68) характеристичний визначник $\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) := \det \|U_j[u_{qk}]\|_{q,j=1}^{2n}$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, задачі (3.53), (3.54) має вигляд

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 P_1^0(0) + \beta_1 \tilde{I}_{11} & \ldots & \alpha_1 P_{2n}^0(0) + \beta_1 \tilde{I}_{2n,1} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_n P_1^{2(n-1)}(0) + \beta_n \tilde{I}_{1n} & \ldots & \alpha_n P_{2n}^{2(n-1)}(0) + \beta_n \tilde{I}_{2n,n} \\ & & \\ \alpha_{n+1} P_1^0(T) + \beta_{n+1} \tilde{I}_{1,n+1} & \ldots & \alpha_{n+1} P_{2n}^0(T) + \beta_{n+1} \tilde{I}_{2n,n+1} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_{2n} P_1^{2(n-1)}(T) + \beta_{2n} \tilde{I}_{1,2n} & \ldots & \alpha_{2n} P_{2n}^{2(n-1)}(T) + \beta_{2n} \tilde{I}_{2n,2n} \end{vmatrix}, \tag{3.69}$$

де

$$P_q^h(t) := \frac{d^h}{dt^h} u_{qk}(t) = \exp(\lambda_{\theta_q,k} t) \sum_{j=0}^{\min\{h,\zeta_q\}} C_h^j \frac{\zeta_q!}{(\zeta_q - j)!} \lambda_{\theta_q,k}^{h-j} t^{\zeta_q - j}, \tag{3.70}$$

$$h \in \{0, 2, \ldots, 2(n-1)\}, \; q \in \{1, \ldots, 2n\};$$

$$\tilde{I}_{qj} := \tilde{I}_{qj}(\lambda_{\theta_q,k}, T) = \int\limits_0^T t^{r_j+\zeta_q} \exp(\lambda_{\theta_q,k} t) dt = \tag{3.71}$$

$$= Q_{qj}(\lambda_{\theta_q,k}, T) \exp(\lambda_{\theta_q,k} T) - Q_{qj}(\lambda_{\theta_q,k}, 0), \quad q, j \in \{1, \ldots, 2n\},$$

$$Q_{qj}(\lambda_{\theta_q,k}, t) = \sum_{h=1}^{r_j+\zeta_q+1} \frac{(-1)^{h+1}(r_j+\zeta_q)!}{(r_j+\zeta_q-h+1)!} \frac{t^{r_j+\zeta_q-h+1}}{(\lambda_{\theta_q,k})^h}, \; q, j \in \{1, \ldots, 2n\}. \tag{3.72}$$

Визначники $\widetilde{\Delta}(\mu_k, T)$ і $\Delta(\mu_k, T)$ пов'язані співвідношенням

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) = W(\mu_k) \Delta(\mu_k, T), \tag{3.73}$$

де

$$W(\mu_k) = \prod_{j=1}^{m} \prod_{q=1}^{n_j-1} q! \prod_{m \geqslant j > l \geqslant 1} (\lambda_j(\mu_k) - \lambda_l(\mu_k))^{n_j n_l} \tag{3.74}$$

є значенням вронскіана системи функцій (3.68) при $t = 0$. Позначимо:

$$\Lambda = (\underbrace{\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{1k}}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_{mk}, \ldots, \lambda_{mk}}_{n_m}) = (\lambda_{\theta_1,k}, \ldots, \lambda_{\theta_{2n},k}),$$

$$\Lambda_\omega = (\lambda_{\theta_{i_1},k}, \ldots, \lambda_{\theta_{i_{2n}},k}), \quad (J, \Lambda_\omega) = j_1 \lambda_{\theta_{i_1},k} + \cdots + j_{2n} \lambda_{\theta_{i_{2n}},k},$$
$$\omega \in S_{2n}, J \in \mathcal{J}_{2n}. \tag{3.75}$$

Для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ визначник (3.69) обчислюється за формулою [60]

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) = \sum_{\omega \in S_{2n}} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{q=1}^{2n} \left(\alpha_q v_{i_q} + \beta_q \tilde{I}_{i_q,q} \right), \tag{3.76}$$

де

$$v_{i_q} = \begin{cases} P_{i_q}^{2(q-1)}(0), & q \in \{1, \ldots, n\}, \\ P_{i_q}^{2(q-n-1)}(T), & q \in \{n+1, \ldots, 2n\}. \end{cases} \tag{3.77}$$

Враховуючи (3.71) та лему 2.7, запишемо рівність (3.76) таким чином:

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) = \sum_{\omega \in S_{2n}} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{q=1}^{2n} \Big(\beta_q Q_{i_q,q}(\lambda_{\theta_{i_q},k}, T) \exp(\lambda_{\theta_{i_q},k} T) +$$
$$+ (\alpha_q v_{i_q} - \beta_q Q_{i_q,q}(\lambda_{\theta_{i_q},k}, 0)) \Big) = \tag{3.78}$$
$$= \sum_{\omega \in S_{2n}} (-1)^{\rho_\omega} \left[\sum_{j_1=0}^{1} \ldots \sum_{j_{2n}=0}^{1} \Delta_1(\omega, J, T) \Delta_2(\omega, J, T) \right],$$

де

$$\Delta_1(\omega, J, T) = \beta(J) Q_J(\Lambda_\omega, T) \exp(J, \Lambda_\omega), \tag{3.79}$$

$$\beta(J) = \prod_{q=1}^{2n} \beta_q^{j_q}, \quad Q_J(\Lambda_\omega, T) = \prod_{q=1}^{2n} Q_{i_q,q}^{j_q}(\lambda_{\theta_{i_q},k}, T), \tag{3.80}$$

$$\Delta_2(\omega, J, T) = \prod_{s=1}^{2n} \left(\alpha_s v_{i_s} - \beta_s Q_{i_s,s}(\lambda_{\theta_{i_s},k}, 0)\right)^{1-j_s}. \tag{3.81}$$

На підставі формул (3.70), (3.72), (3.76) і (3.81) зобразимо $\Delta_2(\omega, J, T)$ у такому вигляді:

$$\Delta_2(\omega, J, T) = P_1(\omega, J, T) \exp\left(\sum_{s=n+1}^{2n} (1 - j_s)\lambda_{\theta_{i_s},k} T\right) + P_2(\omega, J), \tag{3.82}$$

де $P_1(\omega, J, T)$ — многочлен за змінною T з комплексними коефіцієнтами, а доданок $P_2(\omega, J)$ не залежить від T. З (3.70) та (3.77) випливає, що $\deg P_1(\omega, J, T) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{m} n_q(n_q - 1)$.

На підставі формул (3.78), (3.79), (3.80) і (3.82) отримуємо

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) = \sum_{\omega \in S_{2n}} (-1)^{\rho_\omega} \left(\sum_{j_1=0}^{1} \dots \sum_{j_{2n}=0}^{1} \overline{Q}_J(\Lambda_\omega, T) \exp\big((J, \Lambda_\omega)T\big)\right), \tag{3.83}$$

де $\overline{Q}_J(\Lambda_\omega, T)$, $J \in \mathcal{J}_{2n}, \omega \in S_{2n}$, — многочлени за змінною T з комплексними коефіцієнтами, причому

$$\deg \overline{Q}_J(\Lambda_\omega, T) \leqslant \deg Q_J(\Lambda_\omega, T) + \deg P_1(J, T). \tag{3.84}$$

З (3.72) випливає, що $\deg Q_{i_q,q}(\lambda_{lk}, T) = r_q + \zeta_{i_q}$, $q \in \{1, \dots, 2n\}$, звідки, враховуючи (3.80), отримуємо, що

$$\begin{aligned} \deg Q_J(\Lambda_\omega, T) &= \sum_{q=1}^{2n} j_q \deg Q_{i_q,q}(\lambda_{lk}, T) = \sum_{q=1}^{2n} j_q (r_q + \zeta_{i_q}) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{q=1}^{2n} (r_q + \zeta_{i_q}) = \sum_{q=1}^{2n} r_q + \sum_{l=1}^{m} \sum_{q=1}^{n_l - 1} q = \\ &= r + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} n_l(n_l - 1), \quad J \in \mathcal{J}_{2n}, \omega \in S_{2n}, \end{aligned} \tag{3.85}$$

де $r = r_1 + \cdots + r_{2n}$. З нерівностей (3.84), (3.85) випливає, що

$$\deg \overline{Q}_J(\Lambda_\omega, T) \leqslant r + \sum_{l=1}^{m} n_l(n_l - 1), \quad J \in \mathcal{J}_{2n},\, \omega \in S_{2n}. \tag{3.86}$$

З формул (3.73), (3.83) та нерівностей (3.86) випливає, що $\Delta(\mu_k, T)$, як функція змінної T є квазімногочленом відносно T і зображується формулою

$$\Delta(\mu_k, T) = \frac{1}{W(\mu_k)} \sum_{J \in \mathcal{J}_{2n}} \exp((J, \Lambda)T) F_J(T), \tag{3.87}$$

в якому $F_J(T)$ — многочлени з комплексними коефіцієнтами степеня $(N_J - 1)$, де $N_J \leqslant 1 + r + \sum_{l=1}^{m} n_l(n_l - 1)$, а кількість доданків із різними експонентами не перевищує 4^n. Для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ розглянемо функцію $\mathcal{D}_k := \mathcal{D}(\mu_k, \tau)$, яка визначена формулою (3.87) у якій T треба замінити на τ. Через $E(\mathcal{D}_k, \varepsilon, [0, T_0])$ позначимо множину тих $\tau \in [0, T_0]$, $T_0 > 0$, для яких виконується нерівність $|\mathcal{D}(\mu_k, \tau)| \leqslant \varepsilon$. Для квазімногочлена $\mathcal{D}(\mu_k, \tau)$ позначимо

$$N := \sum_{J \in \mathcal{J}_{2n}} N_J \leqslant 4^n \left(1 + r + \sum_{l=1}^{m} n_l(n_l - 1)\right), \tag{3.88}$$

$$B(\mu_k) := 1 + \max_{J \in \mathcal{J}_{2n}} |(J, \Lambda)|, \quad \mu_k \in \mathcal{M}, \tag{3.89}$$

$$\Psi(\mu_k) := \max_{\tau \in [0, T_0]} \exp\left(-\left(\min_{J \in \mathcal{J}_{2n}} \operatorname{Re}(J, \Lambda)\right)\tau\right), \quad \mu_k \in \mathcal{M}, \tag{3.90}$$

$$G(\mu_k) := \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \left\{ \frac{\left|(\partial/\partial\tau)^{j-1} \mathcal{D}(\mu_k, 0)\right|}{B(\mu_k)^j} \right\}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}. \tag{3.91}$$

Враховуючи (3.55), (3.75) і (3.89) отримуємо

$$B(\mu_k) \leqslant 1 + \sum_{l=1}^{m} n_l |\lambda_{lk}| \leqslant C_8(1 + |\mu_k|), \tag{3.92}$$

де $C_8 = 2nC_1 + 1$. На підставі (3.55), (3.75) і (3.90) отримуємо, що

$$\Psi(\mu_k) \leqslant \exp(2nC_1 T_0(|\mu_k| + 1)). \tag{3.93}$$

Щоб оцінити знизу $G(\mu_k)$ нам знадобиться наступна лема.

Лема 3.2. *Існує таке число* $\eta_0(\vec{\alpha}) \in \mathbb{Z}_+$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$, *що виконуються рівності*

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \quad \left.\frac{\partial^q \mathcal{D}(\mu_k, \tau)}{\partial \tau^q}\right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < \eta_0(\vec{\alpha}), \\ C_9 \eta_0(\vec{\alpha})!, & q = \eta_0(\vec{\alpha}), \end{cases} \tag{3.94}$$

де C_9 *— деяка стала, яка залежить від* α_j, β_j, r_j, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$.

Доведення. Позначимо

$$g_{jq}(\mu_k, \tau) = \begin{cases} \alpha_j f_{qk}^{(2(j-1))}(0) + \beta_j I_{qj}, & j \in \{1, \ldots, n\}, \\ \alpha_j f_{qk}^{(2(j-n-1))}(\tau) + \beta_j I_{qj}, & j \in \{n+1, \ldots, 2n\}, \end{cases} \tag{3.95}$$

де $q \in \{1, \ldots, 2n\}$, а I_{qj}, $q, j \in \{1, \ldots, 2n\}$, визначені формулами (3.57) у яких T треба замінити на τ. Для функцій $f_{qk}(t)$, справедливі розвинення

$$f_{qk}(t) = \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} + v_{qk}(t) t^{2n}, \quad q \in \{1, \ldots, 2n\}, \tag{3.96}$$

де $v_{qk}(t)$ – деякі аналітичні в околі точки $t = 0$ функції. З (3.96) отримуємо для кожного $q \in \{1, \ldots, 2n\}$ наступні розвинення

$$f_{qk}^{2(j-1)}(\tau) = \frac{\tau^{q-2j+1}}{(q-2j+1)!} + \tilde{v}_{qk}(\tau) \tau^{2n-2j+2}, \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned} I_{qj} &= \int_0^\tau t^{r_j} f_{qk}(t) dt = \\ &= \frac{\tau^{r_j+q}}{(q-1)!(r_j+q)} + \bar{v}_{jqk}(\tau) \tau^{2n+r_j+1}, \quad j \in \{1, \ldots 2n\}, \end{aligned} \tag{3.98}$$

де $\tilde{v}_{qk}(\tau), \bar{v}_{jqk}(\tau)$ – деякі аналітичні в околі точки $t = 0$ функції. На підставі (3.95), (3.97), (3.98), отримуємо розвинення

$$g_{jq}(\mu_k, \tau) = \tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) + \widetilde{V}_{jqk}(\tau). \tag{3.99}$$

$$\tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) = \begin{cases} \beta_j \dfrac{\tau^{r_j+q}}{(q-1)!(r_j+q)}, & q \neq 2j-1, \\ \alpha_j + \beta_j \dfrac{\tau^{r_j+q}}{(q-1)!(r_j+q)}, & q = 2j-1, \end{cases} \tag{3.100}$$

якщо $j \in \{1, \ldots, n\}$ і

$$\tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) = \begin{cases} \beta_j \dfrac{\tau^{r_j+q}}{(q-1)!(r_j+q)}, & q \leqslant 2(j-n)-2, \\ \alpha_j \dfrac{\tau^{q-2(j-n)+1)}}{(q-2(j-n)+1))!} + & \\ \quad +\beta_l \dfrac{\tau^{r_j+q}}{(q-1)!(r_j+q)}, & 2(j-n)-1 \leqslant q \leqslant 2n, \end{cases} \tag{3.101}$$

якщо $j \in \{n+1, \ldots, 2n\}$,

$$\widetilde{V}_{jqk}(\tau) = \begin{cases} \beta_j \tau^{r_j+2n+1} \bar{v}_{jqk}(\tau), & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ \alpha_j \tilde{v}_{qk}(\tau) \tau^{2n-2j+2} + \beta_j \bar{v}_{jqk}(\tau) \tau^{2n+r_j+1}, & n+1 \leqslant l \leqslant 2n. \end{cases} \tag{3.102}$$

За побудовою функцію $D(\mu_k, \tau)$ можна зобразити формулою

$$D(\mu_k, \tau) = \det \|g_{jq}(\mu_k, \tau)\|_{j,q=1}^{2n}. \tag{3.103}$$

Підставимо в (3.103) отримані розвинення (3.99) і, використавши елементарні властивості визначників, отримаємо

$$\begin{aligned} D(\mu_k, \tau) &= \det \|\tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) + \widetilde{V}_{jqk}(\tau)\|_{j,q=1}^{2n} = \\ &= \det \|\tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau)\|_{j,q=1}^{2n} + \tilde{D}_k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau), \end{aligned} \tag{3.104}$$

де $\tilde{D}_k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau) := \tilde{D}(\mu_k, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau)$ — деяка аналітична в точці $\tau = 0$ функція, яка має в цій точці нуль вищого порядку, ніж функція $\det \|\tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau)\|_{j,q=1}^{2n}$. Це випливає з формул (3.100) – (3.102). Позначимо найменший степінь τ, що входить у вираз для $\det \|\tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau)\|_{j,q=1}^{2n}$ через $\eta_0(\vec{\alpha})$, а коефіцієнт при ньому — через C_9. З отриманого розвинення (3.104) випливає, що виконуються рівності (3.94). Лему доведено. □

Стала $\eta_0(\vec{\alpha})$ у деяких випадках задачі (3.47), (3.48) може бути легко обчислена.

Приклад 3.1. Нехай в умовах (3.48) $\alpha_l = 0$, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$. Тоді з

(3.100), (3.101) отримуємо

$$\tilde{g}_{jq}(0,\beta_j,\tau)=\beta_j\frac{\tau^{r_j+q}}{(q-1)!(r_j+q)},\quad q,j\in\{1,\dots,2n\},$$

$$\begin{aligned}\det\|\tilde{g}_{jq}(0,\beta_j,\tau)\|_{j,q=1}^{2n}&=\det\left\|\beta_j\frac{\tau^{r_j+q}}{(q-1)!(r_j+q)}\right\|_{l,q=1}^{2n}\\&=\prod_{j=1}^{2n}\frac{\beta_j}{(j-1)!}\det\left\|\frac{1}{r_j+q}\right\|_{j,q=1}^{2n}\tau^{r+n(2n+1)},\end{aligned}\tag{3.105}$$

де $r=r_1+\dots+r_{2n}$. Згідно [77, с.110]

$$\det\left\|\frac{1}{r_j+q}\right\|_{j,q=1}^{2n}=\prod_{2n\geqslant j>l\geqslant 1}(r_j-r_l)(j-l)\prod_{j,\,l=1}^{2n}(r_j+l)^{-1}.\tag{3.106}$$

На підставі (3.105), (3.106) отримуємо, що

$$\eta_0(\vec{0})=r+n(2n+1),$$

$$C_9=\left(\prod_{j=1}^{2n}\frac{\beta_j}{(j-1)!}\prod_{2n\geqslant j>l\geqslant 1}(r_j-r_l)(j-l)\prod_{j,\,l=1}^{2n}(r_j+l)^{-1}\right).$$

Приклад 3.1 узагальнює твердження леми 3.1 із [65] у якій розглядався випадок умов (3.48) при $\alpha_l=0$, $r_l=l-1$, $j\in\{1,\dots,2n\}$.

Враховуючи (3.91), (3.92) та (3.94), отримуємо

$$\begin{aligned}G(\mu_k)&=\left|(\partial/\partial\tau)^{\eta_0(\vec{\alpha})}\mathcal{D}(\mu_k,\tau)|_{\tau=0}\right|(B(\mu_k))^{-\eta_0(\vec{\alpha})-1}\geqslant\\&\geqslant C_{10}(1+|\mu_k|)^{-\eta_0(\vec{\alpha})-1},\end{aligned}\tag{3.107}$$

де $C_{10}=C_9(C_8)^{-\eta_0(\vec{\alpha})-1}$.

Теорема 3.6. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T\in(0,T_0]$, $T_0>0$, нерівність* (3.64) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k\in\mathcal{M}$, коли $\sigma=2nC_1T_0$, а $\eta>\eta_0(\vec{\alpha})+1+(p/\theta_1+1)(4^n(1+r+\sum_{l=1}^m n_l(n_l-1))-1)$.*

Доведення. Зафіксуємо вектор $\mu_k=\bar{\mu}_k\in\mathcal{M}$ $(k=\bar{k})$. Нехай $\varepsilon_{\eta,\sigma}(\bar{\mu}_k)=(1+|\bar{\mu}_k|)^{-\eta}\exp(-\sigma|\bar{\mu}_k|)$, Згідно з лемою 2.6 враховуючи (2.2), (3.88), (3.92),

(3.93) та (3.107), отримаємо оцінку

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\mathcal{D}_{\bar{k}}, \varepsilon_{\eta,\sigma}(\mu_k), [0, T_0]) \leqslant$$
$$\leqslant C_{11}(1+|\bar{\mu}_k|)\left(\frac{4(1+|\bar{\mu}_k|)^{-\eta}\exp(2nC_1T_0|\bar{\mu}_k|)}{(1+|\bar{\mu}_k|)^{-\eta_0(\vec{\alpha})-1}\exp(\sigma|\bar{\mu}_k|)}\right)^{\frac{1}{N-1}} =$$
$$= 4^{1/(N-1)}C_{11}(1+|\bar{\mu}_k|)^{\frac{\eta_0(\vec{\alpha})+1-\eta}{N-1}+1} \leqslant 4^{1/(N-1)}C_{11}D_1|\bar{k}|^{\left(\frac{\eta_0(\vec{\alpha})+1-\eta}{N-1}+1\right)\theta_1} =$$
$$= C_{12}|\bar{k}|^{-\left(\frac{\eta-\eta_0(\vec{\alpha})-1}{N-1}-1\right)\theta_1}. \tag{3.108}$$

Позначимо $z = \left(\frac{\eta-\eta_0(\vec{\alpha})-1}{N-1} - 1\right)\theta_1$. Підсумовуючи (3.108) по всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ отримуємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\mathcal{D}_k, \varepsilon_{\eta,\sigma}(\mu_k), [0, T_0]) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} C_{12}|k|^{-z}. \tag{3.109}$$

Оскільки $z > ((p/\theta_1 + 1) - 1)\theta_1 > p$, то ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|k|^{-z}$ збіжний, а отже збіжним є і ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\mathcal{D}_k, \varepsilon_{\eta,\sigma}(\mu_k), [0, T_0])$. Тоді, за лемою 2.3, міра тих $\tau \in (0, T_0]$, які потрапляють у нескінченну кількість множин $E(\mathcal{D}_k, \varepsilon_{\eta,\sigma}(\mu_k), [0, T_0])$ рівна нулю. Тобто нерівність $|\mathcal{D}(\mu_k, \tau)| > \varepsilon_{\eta,\sigma}(\mu_k)$ виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\tau \in (0, T_0]$ та для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$. Оскільки при $\tau = T$ $\mathcal{D}(\mu_k, T) = \Delta(\mu_k, T)$, то нерівність $|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta}\times$ $\times \exp(-\sigma|\mu_k|)$ виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in (0, T_0]$ та для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$, звідки випливає доведення теореми. □

***Наслідок* 3.1.** Нехай для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконуються нерівності

$$\mathrm{Re}\lambda_l(\mu_k) \geqslant -\kappa \ln|\mu_k|, \quad l \in \{1, \ldots, m\}, \tag{3.110}$$

де $\kappa > 0$ — деяка стала, що не залежить від μ_k. Тоді нерівність (3.64) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ та для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$, при $\sigma = 0$ і

$$\eta > \eta_0(\vec{\alpha}) + 1 + 2n\kappa T + (p/\theta_1 + 1)(4^n(1 + r + \sum_{l=1}^{m} n_l(n_l - 1)) - 1), \tag{3.111}$$

де $\eta_0(\vec{\alpha})$ — стала, визначена умовами (3.94).

Доведення. На підставі (3.90), (3.110), отримуємо, що

$$\Psi(\mu_k) \leqslant (1+|\mu_k|)^{2n\kappa T_0}. \tag{3.112}$$

Покладемо $\varepsilon_\eta(\mu_k) = (1+|\mu_k|)^{-\eta}$. Тоді, враховуючи (3.88), (3.92), (3.107) та (3.112) для кожного фіксованого $\mu_k \in \mathcal{M}$ отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\mathcal{D}_k(\tau), \varepsilon_\eta(\mu_k), [0,T_0]) &\leqslant C_{13}(1+|\mu_k|)\left(4(1+|\mu_k|)^{-\eta+\eta_0(\vec{\alpha})+1}\right)^{\frac{1}{N-1}} = \\ &= 4^{1/(N-1)} C_{13}(1+|\mu_k|)^{\frac{\eta_0(\vec{\alpha})+1-\eta}{N-1}+1} \leqslant 4^{1/(N-1)} C_{13} D_1 |k|^{\left(\frac{\eta_0(\vec{\alpha})+1-\eta}{N-1}+1\right)\theta_1} = \\ &= C_{14}|k|^{-\left(\frac{\eta-\eta_0(\vec{\alpha})-1}{N-1}-1\right)\theta_1},\end{aligned}$$

де η — справджує нерівність (3.111). Оскільки $\left(\frac{\eta-\eta_0(\vec{\alpha})-1}{N-1}-1\right)\theta_1 > p$, то ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\mathcal{D}_k(\tau), \varepsilon_\eta(\mu_k), [0,T_0])$ збіжний. Зі збіжності ряду $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\mathcal{D}_k(\tau), \varepsilon_\eta(\mu_k), [0,T_0])$ випливає, що нерівність $|\mathcal{D}(\mu_k,\tau)| > \varepsilon_\eta(\mu_k)$ виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\tau \in (0,T_0]$ та для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$. Оскільки дійсну пряму можна покрити зліченною кількістю інтервалів $(0,T_0]$, то нерівність $|\mathcal{D}(\mu_k,\tau)| > \varepsilon_\eta(\mu_k)$ виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\tau > 0$ та для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$, звідки і випливає твердження наслідку. □

Теорема 3.7. *Нехай виконуються умови* (2.24) *і* (3.110). *Якщо* $\varphi_j \in C_{\mathcal{M}}^{[\eta+p/\theta_1]+4n^2+3n+2}(\mathbb{R}^p)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, *де* η *справджує нерівність* (3.111), *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T > 0$ *існує єдиний розв'язок задачі* (3.47), (3.48) *із простору* $C_{\mathcal{M}}^{2n}(\overline{D}^p)$. *Цей розв'язок зображається формулою* (3.59) *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$.

Доведення. Проводиться за схемою доведення теореми 3.2 з урахуванням наслідку 3.1. □

3.3. Задача для системи рівнянь високого порядку, гіперболічної за Петровським у вузькому сенсі

У цьому підрозділі досліджено коректність задачі з умовами за часовою змінною, частинним випадком яких є інтегральні умови у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції та умови типу Діріхле, для системи рівнянь високого порядку, гіперболічної за Петровським у вузькому сенсі у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій.

3.3.1. В області D^p розглянемо задачу про знаходження майже періодичного за x розв'язку задачі

$$L\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial x}\right)[\vec{u}] := \sum_{|\hat{s}|^*=2n} \mathbf{A}_{\hat{s}} \frac{\partial^{2n}\vec{u}(t,x)}{\partial t^{2s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}} = \vec{0}, \quad (t,x)\in D^p, \tag{3.113}$$

$$\begin{cases} U_j[\vec{u}] := \alpha_j \left.\dfrac{\partial^{2(j-1)}\vec{u}}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=0} + \beta_j \displaystyle\int_0^T t^{r_j}\vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_j(x), \\ U_{n+j}[\vec{u}] := \alpha_{n+j} \left.\dfrac{\partial^{2(j-1)}\vec{u}}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=T} + \beta_{n+j} \displaystyle\int_0^T t^{r_{n+j}}\vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_{n+j}(x), \end{cases} \tag{3.114}$$

в якій $j\in\{1,\ldots,n\}$; $\mathbf{A}_{\hat{s}} = \left\|a_{q,l}^{\hat{s}}\right\|_{l,q=1}^m$, $a_{q,l}^{\hat{s}}\in\mathbb{R}$, $\mathbf{A}_{(n,0,\ldots,0)} = \mathbf{I}_m$; $\alpha_l,\beta_l\in\mathbb{R}$, $\alpha_l^2+\beta_l^2\neq 0$, $r_l\in\mathbb{Z}_+$, $l\in\{1,\ldots,2n\}$, $0\leqslant r_1<r_2<\ldots<r_{2n}$; $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}\left(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x)\right)$, вектор-функції $\vec{\varphi}_l(x) = \mathrm{col}\left(\varphi_l^1(x),\ldots,\varphi_l^m(x)\right)$, $l\in\{1,\ldots,2n\}$, є майже періодичними зі заданим спектром $\mathcal{M}$, які розвиваються у векторні ряди Фур'є

$$\vec{\varphi}_l(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \vec{\varphi}_{lk}\exp\left(i\mu_k, x\right), \quad \vec{\varphi}_{lk} = \mathrm{col}\left(\varphi_{lk}^1,\ldots,\varphi_{lk}^m\right). \tag{3.115}$$

Вважаємо, що система (3.113) – гіперболічна за Петровським у вузькому сенсі, тобто для кожного вектора $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_p)\in\mathbb{R}^p\setminus\{\vec{0}\}$ корені $\gamma_j(\eta)$, $j\in\{1,\ldots,2nm\}$, характеристичного рівняння

$$\det L\left(\gamma^2,\eta\right) := \det\left\|\sum_{|\hat{s}|^*=2n}\mathbf{A}_{\hat{s}}\gamma^{2s_0}\eta_1^{s_1}\cdots\eta_p^{s_p}\right\| = 0, \tag{3.116}$$

яке відповідає системі (3.113) є дійсними та різними, а отже (враховуючи вигляд системи (3.113)) і відмінними від нуля.

3.3.2. Майже періодичний за x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язок задачі (3.113), (3.114) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \vec{u}_k(t)\exp(i\mu_k, x), \quad \mu_k \in \mathcal{M}. \tag{3.117}$$

де $\vec{u}_k(t) = \mathrm{col}\left(u_k^1(t), \ldots, u_k^m(t)\right)$. Підставивши ряди (3.115), (3.117) у систему (3.113) та умови (3.114), отримуємо для знаходження кожної з вектор-функцій $\vec{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, відповідно, таку задачу:

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}, i\mu_k\right)\vec{u}_k(t) := \sum_{|\hat{s}|^*=2n} i^{|s|}\mathbf{A}_{\hat{s}}\mu_{k_1}^{s_1}\cdots\mu_{k_p}^{s_p}\frac{d^{2s_0}}{dt^{2s_0}}\vec{u}_k(t) = \vec{0}, \tag{3.118}$$

$$\begin{cases} U_j[\vec{u}_k] := \alpha_j \dfrac{d^{2(j-1)}\vec{u}_k(0)}{dt^{2(j-1)}} + \beta_j \displaystyle\int_0^T t^{r_j}\vec{u}_k(t)dt = \vec{\varphi}_{jk}, \\ U_{n+j}[\vec{u}] := \alpha_{n+j} \dfrac{d^{2(j-1)}\vec{u}_k(T)}{dt^{2(j-1)}} + \beta_{n+j} \displaystyle\int_0^T t^{r_{n+j}}\vec{u}_k(t)dt = \vec{\varphi}_{n+j,k}. \end{cases} \tag{3.119}$$

де $j \in \{1, \ldots, n\}$.

При $k = \vec{0}\,(\mu_{\vec{0}} = \vec{0})$ система (3.118) є такою:

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}, \vec{0}\right)\vec{u}_{\vec{0}}(t) := \mathbf{I}_m \frac{d^{2n}}{dt^{2n}}\vec{u}_{\vec{0}}(t) = \vec{0},$$

тобто кожна компонента $u_{\vec{0}}^q(t)$, $q \in \{1, \ldots, m\}$, розв'язку $\vec{u}_{\vec{0}}(t) = \mathrm{col}\left(u_{\vec{0}}^1(t), \ldots, u_{\vec{0}}^m(t)\right)$ задачі (3.118), (3.119) є розв'язком, відповідно, такої задачі для скалярного рівняння:

$$\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}u_{\vec{0}}^q(t) = 0, \tag{3.120}$$

$$\begin{cases} U_j[u_{\vec{0}}^q] := \alpha_j \dfrac{d^{2(j-1)}u_{\vec{0}}^q(0)}{dt^{2(j-1)}} + \beta_j \displaystyle\int_0^T t^{r_j}u_{\vec{0}}^q(t)dt = \varphi_{j,\vec{0}}^q, \\ U_{n+j}[u_{\vec{0}}^q] := \alpha_{n+j} \dfrac{d^{2(j-1)}u_{\vec{0}}^q(T)}{dt^{2(j-1)}} + \beta_{n+j} \displaystyle\int_0^T t^{r_{n+j}}u_{\vec{0}}^q(t)dt = \varphi_{n+j,\vec{0}}^q, \end{cases} \tag{3.121}$$

Характеристичний визначник $\Delta(\vec{0},T)$ задачі (3.120), (3.121) для кожного q, $q\in\{1,\dots,m\}$, є таким:

$$\Delta(\vec{0},T)=$$

$$=\begin{vmatrix} \alpha_1 S_1^0(0)+\beta_1\dfrac{T^{r_1+1}}{r_1+1} & \dots & \alpha_1 S_{2n}^0(0)+\beta_1\dfrac{T^{r_1+2n}}{r_1+2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_n S_1^{2(n-1)}(0)+\beta_n\dfrac{T^{r_n+1}}{r_n+1} & \dots & \alpha_n S_{2n}^{2(n-1)}(0)+\beta_n\dfrac{T^{r_n+2n}}{r_n+2n} \\ \alpha_{n+1} S_1^0(T)+\beta_{n+1}\dfrac{T^{r_{n+1}+1}}{r_{n+1}+1} & \dots & \alpha_{n+1} S_{n+1}^0(T)+\beta_{n+1}\dfrac{T^{r_{n+1}+2n}}{r_{n+1}+2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{2n} S_1^{2(n-1)}(T)+\beta_{2n}\dfrac{T^{r_{2n}+2}}{r_{2n}+2} & \dots & \alpha_{2n} S_{2n}^{2(n-1)}(T)+\beta_{2n}\dfrac{T^{r_{2n}+2n}}{r_{2n}+2n} \end{vmatrix},$$

де

$$S_j^{2(l-1)}(z)=\begin{cases} 0, & j<2l-1, \\ \dfrac{(j-1)!}{(j-2l+1)!}z^{j-2l+1}, & j\geqslant 2l-1, \end{cases}$$

$$j\in\{1,\dots,2n\},\ l\in\{1,\dots,n\}.$$

За умови $\Delta(\vec{0},T)\neq 0$ завжди існує єдиний розв'язок задачі (3.120), (3.121), для кожного $q\in\{1,\dots,m\}$; ці розв'язки зображуються формулами

$$u_{\vec{0}}^q(t)=\sum_{l,j=1}^{2n}\frac{\Delta_{lj}(\vec{0},T)}{\Delta(\vec{0},T)}\varphi_{l,\vec{0}}^q t^{j-1},\quad q\in\{1,\dots,m\}, \tag{3.122}$$

де $\Delta_{lj}(\vec{0},T)$ – алгебричне доповнення елемента l-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\Delta(\vec{0},T)$.

Зауваження 3.2. Якщо $\Delta(\vec{0},T)=0$, то однорідна задача, що відповідає задачі (3.120), (3.121) має нетривіальний розв'язок $u_{\vec{0}}^*(t)=\operatorname{col}\left(\tilde{u}_{\vec{0}}^1(t),\dots,\tilde{u}_{\vec{0}}^m(t)\right)$, де $\tilde{u}_{\vec{0}}^q(t)$, $q\in\{1,\dots,m\}$, – многочлени степеня $2n-1$ вигляду $\tilde{u}_{\vec{0}}^q(t)=\sum_{j=1}^{2n}C_{j,0}t^{j-1}$, коефіцієнти яких є розв'язками

системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{2n} C_{j,0}\left(\alpha_l S_j^{2(l-1)}(0) + \beta_l \dfrac{T^{r_l+j}}{r_l+j}\right) = \varphi^q_{l,\vec{0}}, \\ \sum\limits_{j=1}^{2n} C_{j,0}\left(\alpha_{n+l} S_j^{2(l-1)}(T) + \beta_{n+l} \dfrac{T^{r_{n+l}+j}}{r_{n+l}+j}\right) = \varphi^q_{n+l,\vec{0}}, \end{cases} \qquad l \in \{1,\dots,n\}.$$

Тепер розглянемо задачу (3.118), (3.119) для всіх $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$. Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає системі (3.118)

$$\det L\left(\gamma^2, i\mu_k\right) := \det \left\| \sum_{|\hat{s}|^*=2n} i^{|s|} \mathbf{A}_{\hat{s}} \gamma^{2s_0} \mu_{k_1}^{s_1} \cdots \mu_{k_p}^{s_p} \right\| = 0,$$

або у розгорнутій формі

$$\det L\left(\gamma^2, i\mu_k\right) = \gamma^{2mn} + \sum_{j=1}^{mn} B_j^{2j}(\mu_k)\, \gamma^{2(mn-j)} = 0, \tag{3.123}$$

де $B_j^{2j}(\mu_k)$, $j \in 1,\dots,mn$, — многочлени степеня не вище $2j$ за сукупністю змінних $\mu_{k_1},\dots,\mu_{k^p}$ з комплексними коефіцієнами. Очевидно, що корені γ_{jk} рівняння (3.123) визначаються формулами

$$\gamma_{jk} = i\gamma_j(\mu_k), \quad j \in \{1,\dots,2nm\}, \tag{3.124}$$

де $\gamma_j(\mu_k)$, $j \in \{1,\dots,2nm\}$, корені рівняння (3.116) при $\eta = \mu_k$. При цьому $\gamma_{nm+q,k} = -\gamma_{qk}, q \in \{1,\dots,nm\}$, та справджуються такі оцінки [103]:

$$|\gamma_{jk}| \leqslant C_1(1+|\mu_k|), \;\; j \in \{1,\dots,2nm\}, \;\; \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}, \tag{3.125}$$

де $C_1 = (2nm)^p \max_{|\hat{s}|^*=2n} \max\limits_{\substack{|\hat{s}|^*=2n \\ 1\leqslant r,q\leqslant m}} \{a_{q,r}^{\hat{s}}\}$. Фундаментальна система розв'язків системи рівнянь (3.118) має такий вигляд (див. [88, стор. 116]):

$$\left\{\vec{u}_{jk}(t) = \vec{h}_{jk} \exp(\gamma_{jk} t), \; j \in \{1,\dots,2nm\}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}, \tag{3.126}$$

де $\vec{h}_{jk}$ — деякий ненульовий стовпець матриці $L^*(\gamma_{jk}^2, i\mu_k)$, яка є приєднаною до матриці $L(\gamma_{jk}^2, i\mu_k)$. Очевидно, що $\vec{h}_{nm+j,k} = \vec{h}_{jk}$, $j \in \{1,\dots,nm\}$.

Розв'язок задачі (3.118), (3.119) зображується формулою

$$\vec{u}_k(t) = \sum_{j=1}^{2nm} C_{jk}\vec{h}_{jk}\exp(\gamma_{jk}t), \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\},$$

де сталі $C_{jk}, j \in \{1, \ldots, 2nm\}$, визначаються зі системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{2nm} C_{jk}\left(\alpha_l P_j^l + \beta_l I_l(\gamma_{jk})\right)\vec{h}_{jk} = \vec{\varphi}_{lk}, \quad l \in \{1, \ldots, 2n\}, \tag{3.127}$$

у якій

$$P_j^l = \begin{cases} \gamma_{jk}^{2(l-1)}, & 1 \leqslant l \leqslant n, \\ \gamma_{jk}^{2(l-n-1)}\exp(\gamma_{jk}T), & n < l \leqslant 2n, \end{cases} \quad j \in \{1, \ldots, 2nm\}, \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned} I_l(z) = \int\limits_0^T t^{r_l}\exp(zt)dt = \frac{(-1)^{r_l}\, r_l!}{z^{r_l+1}} + \\ + \sum_{q=1}^{r_l+1} \frac{(-1)^{q+1} r_l!}{(r_l - q + 1)!}\frac{T^{r_l-q+1}}{z^q}\exp\left(zT\right). \end{aligned} \tag{3.129}$$

Визначник системи (3.127) збігається з характеристичним визначником $\Delta(\mu_k, T), \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$, задачі (3.118), (3.119), що має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta(\mu_k, T) := \det\left\| U_q[\vec{h}_{jk}\exp(\gamma_{jk}t)]\right\|_{j=1,\ldots,2nm}^{q=1,\ldots,2n} = \\ = \det\left\|\vec{h}_{jk}\left(\alpha_q P_j^q + \beta_q I_q(\gamma_{jk})\right)\right\|_{j=1,\ldots,2nm}^{q=1,\ldots,2n}. \end{aligned} \tag{3.130}$$

Теорема 3.8. *Для того, щоб задача* (3.113), (3.114) *мала не більше одного розв'язку у шкалі просторів* $C^{2n}([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},m})$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (2.24) *у якій* $\Delta(\mu_k, T)$ *визначений формулою* (3.130).

Доведення. Проводиться за схемою доведення твердження 2.3. □

3.3.3. Надалі будемо вважати, що виконується умова (2.24). Тоді для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ існує єдиний розв'язок $\vec{u}_k(t)$ задачі (3.118), (3.119), а формальний розв'язок $\vec{u}(t,x)$ задачі (3.113), (3.114) зображується рядом

$$\vec{u}(t,x) = u_{\vec{0}}(t) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}} \left(\sum_{j=1}^{2nm} C_{jk}\vec{h}_{jk} \exp(\gamma_{jk}t) \right) \exp(i\mu_k, x), \qquad (3.131)$$

у якому

$$C_{jk} = \sum_{\tilde{q}=1}^{m} \sum_{l=1}^{2n} \frac{\Delta_{m(l-1)+\tilde{q},j}(\mu_k,T)}{\Delta(\mu_k,T)} \varphi_{lk}^{\tilde{q}}, \quad j \in \{1,\ldots,2nm\}, \qquad (3.132)$$

де $\Delta_{rq}(\mu_k,T)$ – алгебричне доповнення елемента r-го рядка та q-го стовпця у визначнику $\Delta(\mu_k,T)$, а компоненти вектора $u_{\vec{0}}(t)$ визначені формулами (3.122).

При доведенні існування розв'язку задачі (3.113), (3.114) у просторах $C^{2n}([0,T],\overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M}})$ нам знадобляться наступні твердження.

Позначимо

$$C_2 := C_{2n+p+1}^{2n} C_1 \max_{\substack{|\hat{s}|^*=2n \\ 1\leqslant r,q\leqslant m}} \{a_{q,r}^{\hat{s}}\}.$$

Лема 3.3. *Для компонент векторів* $\vec{h}_{jk} = \mathrm{col}(h_{jk}^1,\ldots,h_{jk}^m)$, $j \in \{1,\ldots,$ $\ldots,nm\}$, *справджуються оцінки*

$$|h_{jk}^q| \leqslant C_3(1+|\mu_k|)^{2n(m-1)}, \quad q \in \{1,\ldots,m\}, \quad C_3 = (m-1)!\,(C_2)^{m-1}.$$

Доведення. Позначимо через $l_{q,r}(\gamma_{jk})$, $q,r \in \{1,\ldots,m\}$, елемент матриці $L(\gamma_{jk}^2, i\mu_k)$, $j \in \{1,\ldots,nm\}$, який стоїть на перетині q-го рядка та r-го стовпця

$$l_{q,r}(\gamma_{jk}) = \sum_{|\hat{s}|^*=2n} i^{|s|} a_{q,r}^{\hat{s}} \gamma_{jk}^{2s_0} \mu_{k_1}^{s_1} \cdots \mu_{k_p}^{s_p}.$$

Для кожного $l_{q,r}(\gamma_{jk})$, $q,r \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,nm\}$, справедливі оцінки

$$|l_{q,r}(\gamma_{jk})| \leqslant C_{2n+p+1}^{2n} C_1 \max_{\substack{|\hat{s}|^*=2n \\ 1\leqslant r,q\leqslant m}} \{a_{q,r}^{\hat{s}}\}(1+|\mu_k|)^{2n} = C_2(1+|\mu_k|)^{2n}. \qquad (3.133)$$

Зафіксуємо деякий стовпець з номером $r = r^*$ матриці $L(\gamma_{jk}^2, i\mu_k)$. Тоді компоненти h_{jk}^q вектора $\vec{h}_{jk}$ є алгебричними доповненнями, відповідно, елементів $l_{q,r^*}(\gamma_{jk})$ матриці $L(\gamma_{jk}^2, i\mu_k)$. На підставі (3.133), враховуючи структуру алгебричних доповнень, отримуємо

$$|h_{jk}^q| \leqslant (m-1)! \prod_{\substack{r=1\\ r\neq r^*}}^{m} \max_{\substack{\kappa\in\{1,\dots,m\}\\ \kappa\neq q}} |l_{\kappa,r}(\gamma_{jk})| \leqslant (m-1)!(C_2)^{m-1}\left(1+|\mu_k|\right)^{2n(m-1)} =$$

$$= C_3(1+|\mu_k|)^{2n(m-1)}, \quad j\in\{1,\dots,nm\}, q\in\{1,\dots,m\}.$$

З останніх нерівностей випливає доведення леми. □

Позначимо

$$\psi_l(\alpha_l) := 0, \;\; \alpha_l = 0, \;\; 1 \leqslant l \leqslant 2n,$$

$$\psi_l(\alpha_l) := \begin{cases} 2(l-1), & \alpha_l \neq 0, \;\; 1\leqslant l\leqslant n, \\ 2(l-n-1), & \alpha_l\neq 0, \;\; n+1\leqslant l\leqslant 2n, \end{cases}$$

$$\psi = \psi_1(\alpha_1) + \dots + \psi_{2n}(\alpha_{2n}), \quad \vartheta_l = m\psi - \psi_l(\alpha_l), \quad l\in\{1,\dots,2n\};$$

$$C_4 := (2nm-1)!\left(C_2 \max_{1\leqslant l\leqslant 2n}\left\{\max\left\{|\alpha_l|(C_1)^{2(n-1)}, |\beta_l|\frac{T^{r_l+1}}{r_l+1}\right\}\right\}\right)^{2nm-1}.$$

Лема 3.4. *Для алгебричних доповнень* $\Delta_{m(l-1)+\tilde{q},j}(\mu_k, T)$, $\tilde{q} = \{1,\dots,2n\}$, $l\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,2nm\}$, *елементів визначника* $\Delta(\mu_k, T)$, $\mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}$, *справедливі оцінки*

$$|\Delta_{m(l-1)+\tilde{q},j}(\mu_k, T)| \leqslant C_4(1+|\mu_k|)^{2n(m-1)(2nm-1)+\vartheta_l}.$$

Доведення. Спочатку проведемо допоміжні оцінки. З формули (3.128), враховуючи (3.125), для кожного $j\in\{1,\dots,2nm\}$ та для довільного $t\in[0,T]$ отримуємо оцінку

$$\left|P_j^l\right| \leqslant \begin{cases} (C_1)^{2(l-1)}(1+|\mu_k|)^{2(l-1)}, & 1\leqslant l\leqslant n, \\ (C_1)^{2(l-n-1)}(1+|\mu_k|)^{2(l-n-1)}, & n<l\leqslant 2n. \end{cases} \tag{3.134}$$

На підставі (3.129) випливають такі оцінки:

$$|I_l(\gamma_{jk})| \leqslant \int\limits_0^T \max_{t\in[0,T]} |t^{r_l} \exp(\gamma_{jk}t)|\, dt \leqslant \int\limits_0^T T^{r_l} dt = \frac{T^{r_l+1}}{r_l+1}, \tag{3.135}$$

де $l \in \{1,\ldots,2n\}$, $j \in \{1,\ldots,nm\}$.

Позначимо через $\delta_{rj}(\mu_k)$, $r,j \in \{1,\ldots,2nm\}$, елемент визначника $\Delta(\mu_k,T)$, який стоїть на перетині r-го рядка та j-го стовпця. З (3.130) випливає, що $\delta_{rj}(\mu_k)$ зображується формулою

$$\delta_{rj}(\mu_k) = (\alpha_l P_j^l + \beta_l I_l(\gamma_{jk}))h_{jk}^q, \tag{3.136}$$

де r,q та l пов'язані співвідношенням $r = m(l-1)+q$, $l \in \{1,\ldots,2n\}$, $q \in \{1,\ldots,m\}$. На підставі (3.134), (3.135), (3.136) та леми 1 отримуємо

$$|\delta_{rj}(\mu_k)| < (|\alpha_l|\left|P_j^l\right| + |\beta_l|\,|I_l(\gamma_{jk})|)|h_{jk}^q| < C_5(1+|\mu_k|)^{2n(m-1)+\psi(\alpha_l)}, \tag{3.137}$$

де $C_5 = C_3 \max_{1\leqslant l\leqslant 2n} \max\{|\alpha_l|(C_1)^{2(n-1)}, |\beta_l|T^{r_l+1}/(r_l+1)\}$.

На підставі (3.137) отримуємо,що

$$|\Delta_{m(l-1)+\tilde{q},j}(\mu_k,T)| \leqslant (2nm-1)! \prod_{\substack{r=1\\ r\neq m(l-1)+\tilde{q}}}^{2nm} |\delta_{r,r}(\mu_k)| \leqslant$$
$$\leqslant C_4(1+|\mu_k|)^{2n(m-1)(2nm-1)+\theta_l},$$

де $l = \{1,\ldots,2n\}$, $\tilde{q} \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,2nm\}$. З отриманої нерівності випливає твердження леми. □

Ряд (3.131), взагалі, є розбіжним, бо вираз $|\Delta(\mu_k,T)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Теорема 3.9. *Нехай виконується умова* (2.24) *та існує стала* $\eta > 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k,T)| > (1+|\mu_k|)^{-\eta}. \tag{3.138}$$

Якщо $\vec{\varphi}_l \in \overline{H}^{\xi_l}_{\mathcal{M},m}$, $\xi_l = \alpha + 2n(2nm(m-1)+1) + \eta + \vartheta_l$, $l \in \{1,\dots,2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3.113), (3.114) *із простору* $C^{2n}\left([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},m}\right)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (3.131), *причому виконується нерівність*

$$\|u; C^{2n}\left([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},m}\right)\| \leqslant C_6 \sum_{l=1}^{2n} \|\varphi; \overline{H}^{\xi_l}_{\mathcal{M}}\|.$$

Доведення. На підставі формули (3.131) отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{u}; C^{2n}([0,T]\ , \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},m})\right\| &= \sum_{q=1}^{m}\sum_{r=0}^{2n} \max_{t\in[0,T]} \left(\left|\frac{d^r}{dt^r} u^q_{\vec{0}}(t)\right|^2 + \right. \\
&\left. + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}} \left|\frac{d^r}{dt^r} u^q_k(t)\right|^2 (1+|\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{q=1}^{m}\sum_{r=0}^{2n} \left(\max_{t\in[0,T]} \left|\frac{d^r}{dt^r} u^q_{\vec{0}}(t)\right|^2 + \right. \\
&\left. + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}} \max_{t\in[0,T]} \left|\frac{d^r}{dt^r} u^q_k(t)\right|^2 (1+|\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{3.139}$$

в якій $u^q_{\vec{0}}(t)$ визначені формулами (3.122), а

$$u^q_k(t) = \sum_{j=1}^{2nm} C_{jk} h^q_{jk} \exp(\gamma_{jk} t), \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}, \tag{3.140}$$

де h^q_{jk}, $q \in \{1,\dots,m\}$, — компоненти вектора $\vec{h}_{jk}$, C_{jk} — визначені формулами (3.132).

З формули (3.122) випливає, що

$$\max_{t\in[0,T]} \left|\frac{d^r}{dt^r} u^q_{\vec{0}}(t)\right|^2 \leqslant C_7 \sum_{j=1}^{2n} \left|\varphi^q_{j,\vec{0}}\right|^2, \quad q \in \{1,\dots,m\}, \tag{3.141}$$

де стала C_7 залежить від T та α_l, β_l, r_l, $l \in \{1,\dots,2n\}$.

Із (3.125), (3.132), (3.140) та леми 1 отримуємо, що

$$\max_{t\in[0,T]} \left|\frac{d^r}{dt^r} u^q_k(t)\right| \leqslant C_8 \sum_{j=1}^{2nm}\sum_{\tilde{q}=1}^{m}\sum_{l=1}^{2n} \frac{\left|\Delta_{m(l-1)+\tilde{q},j}(\mu_k,T)\right|}{|\Delta(\mu_k,T)|} \left|\varphi^{\tilde{q}}_{lk}\right| (1+|\mu_k|)^{2n(m-1)+r}, \tag{3.142}$$

де $l \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Враховуючи (3.138), (3.142) та лему 2, отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]} \left| \frac{d^r}{dt^r} u_k^q(t) \right| \leqslant 2nmC_8 \sum_{\tilde{q}=1}^{m} \sum_{l=1}^{2n} \left| \varphi_{lk}^{\tilde{q}} \right| (1 + |\mu_k|)^{4mn^2(m-1)+\vartheta_l+\eta+r}. \quad (3.143)$$

З оцінок (3.139), (3.141) та (3.143) випливає така оцінка:

$$\left\| \vec{u}; C^{2n}([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},m}) \right\| \leqslant C_9 \sum_{l=1}^{2n} \sum_{\tilde{q}=1}^{m} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \left| \varphi_{lk}^{\tilde{q}} \right|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\xi_l} \right)^{1/2} =$$

$$= C_9 \sum_{l=1}^{2n} \left\| \vec{\varphi}_l; \overline{H}^{\xi_l}_{\mathcal{M},m} \right\|.$$

де $C_9 = 2nm \max\{C_7, 2nmC_8\}$. З отриманої нерівності випливає доведення теореми. □

Зауваження 3.3. Якщо в теоремі 3.9 $\alpha > 2n + p/(2\theta_1)$, то, згідно з (2.5), справедливе вкладення $C^{2n}\left([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},m}\right) \subset \overline{C}^{2n}_{\mathcal{M},m}\left(\overline{D}^p\right)$ і розв'язок задачі (3.113), (3.114) буде класичним.

3.3.4. Вияснимо можливість виконання нерівності (3.138). Для цього покажемо, що $\Delta(\mu_k, T)$, як функція змінної T, є квазімногочленом. Позначимо:

$$A = (\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{m}, \ldots, \underbrace{\alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{2n}}_{m}), \quad B = (\underbrace{\beta_1, \ldots, \beta_1}_{m}, \ldots, \underbrace{\beta_{2n}, \ldots, \beta_{2n}}_{m}),$$

$$R = (\underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{m}, \ldots, \underbrace{r_{2n}, \ldots, r_{2n}}_{m}), \quad \Gamma_k = (\gamma_{1k}, \ldots, \gamma_{nm,k}, -\gamma_{1k}, \ldots, -\gamma_{nm,k}),$$

$A_q, B_q, R_q, \Gamma_{qk}$, $q \in \{1, \ldots, 2nm\}$, — координати векторів A, B, R та Γ_k відповідно; $\Gamma_{\omega,k} = (\Gamma_{i_1,k}, \ldots, \Gamma_{i_{2nm},k})$, $\omega = (i_1, \ldots, i_{2nm}) \in S_{2nm}$,

$$V_j = (\underbrace{P_j^1, \ldots, P_j^1}_{m}, \ldots, \underbrace{P_j^{2n}, \ldots, P_j^{2n}}_{m}), \quad j \in \{1, \ldots, 2nm\},$$

$H(k)$ — квадратна матриця розміру $2nm$, побудована наступним чином:

$$H(k) = \|H_{qj}\|_{q,j=1}^{2nm} = \begin{pmatrix} \vec{h}_{1k} & \dots & \vec{h}_{nm,k} & \vec{h}_{1k} & \dots & \vec{h}_{nm,k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{h}_{1k} & \dots & \vec{h}_{nm,k} & \vec{h}_{1k} & \dots & \vec{h}_{nm,k} \end{pmatrix}.$$

Для кожного $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$ визначник $\Delta(\mu_k, T)$ можна зобразити формулою [60]

$$\Delta(\mu_k, T) = \sum_{\omega \in S_{2nm}} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{q=1}^{2nm} H_{i_q,q} \left(A_q V_{i_q,q} + B_q I \left(R_q, \Gamma_{i_q,k} \right) \right), \tag{3.144}$$

де $V_{i_q,q}$ — елемент під номером q вектора V_{i_q}, а

$$\begin{aligned} I(R_q, \Gamma_{i_q,k}) &= \int_0^T t^{R_q} \exp\left(\Gamma_{i_q,k} t\right) dt = \\ &= Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, T) \exp\left(\Gamma_{i_q,k} T\right) - Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, 0), \end{aligned} \tag{3.145}$$

$$Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, t) = \sum_{l=1}^{R_q+1} \frac{(-1)^{l+1} R_q!}{(R_q - l + 1)!} \frac{t^{R_q - l + 1}}{(\Gamma_{i_q,k})^n}, \quad q \in \{1, \dots, 2nm\}. \tag{3.146}$$

На підставі (3.144), (3.145) отримуємо

$$\begin{aligned} \Delta(\mu_k, T) = \sum_{\omega \in S_{2nm}} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{q=1}^{2nm} H_{i_q,q} \big(&[A_q V_{i_q,q} - B_q Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, 0)] + \\ &+ B_q Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, T) \exp(\Gamma_{i_q,k} T) \big). \end{aligned} \tag{3.147}$$

Використавши лему 2.7 із (3.147) отримуємо

$$\Delta(\mu_k, T) = \sum_{\omega \in S_{2nm}} (-1)^{\rho_\omega} \sum_{J \in \mathcal{J}_{2nm}} \Delta_{1k}(\omega, J, T) \Delta_{2k}(\omega, J, T), \tag{3.148}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_{1k}(\omega, J, T) &= \prod_{q=1}^{2nm} \left(H_{i_q,q} B_q Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k}, T) \exp(\Gamma_{i_q,k} T) \right)^{j_q} = \\ &= B(J) Q_J(\Gamma_{\omega,k}, T) \exp((J, \Gamma_{\omega,k}) T), \end{aligned} \tag{3.149}$$

$$B(J)=\prod_{q=1}^{2nm}(B_q)^{j_q}\,,\qquad Q_J(\Gamma_{\omega,k},T)=\prod_{q=1}^{2nm}\left(H_{i_q,q}Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k},T)\right)^{j_q}\,,\tag{3.150}$$

$$(J,\Gamma_{\omega,k})=\sum_{q=1}^{2nm}j_q\Gamma_{i_q,k},\quad J\in\mathcal{J}_{2nm},\ \omega\in S_{2nm};\tag{3.151}$$

$$\Delta_{2k}(\omega,J,T)=\prod_{l=1}^{2nm}\left(H_{i_l,l}(A_lV_{i_l,l}-B_lQ_{R_l}(\Gamma_{i_l,k},0))\right)^{1-j_l}\,.\tag{3.152}$$

Формулу (3.152) можна подати у такому вигляді:

$$\Delta_{2k}(\omega,J,T)=P_{1k}(\omega,J)\exp\left(\sum_{l=nm+1}^{2nm}(1-j_l)\Gamma_{i_l,k}T\right)+P_{2k}(\omega,J),\tag{3.153}$$

де величини $P_{1k}(\omega,J),P_{2k}(\omega,J)$ не залежать від T.

Із (3.147), враховуючи (3.149), (3.153), отримуємо

$$\Delta(\mu_k,T)=\sum_{\omega\in S_{2nm}}(-1)^{\rho_\omega}\sum_{J\in\mathcal{J}_{2nm}}\bar{Q}_J(\Gamma_{\omega,k},T)\exp((J,\Gamma_{\omega,k})T),\tag{3.154}$$

де $\bar{Q}_J(\Gamma_{\omega,k},T)$, $J\in\mathcal{J}_{2nm}$, — многочлен за змінною T із комплексними коефіцієнтами; при цьому використавши (3.146) та (3.150) отримаємо

$$\deg\bar{Q}_J(\Gamma_{\omega,k},T)\leqslant\max_{J\in\mathcal{J}_{2nm}}\{\deg Q_J(\Gamma_{\omega,k},T)\}=$$

$$=\sum_{q=1}^{2nm}\deg Q_{R_q}(\Gamma_{i_q,k},T)=\sum_{q=1}^{2nm}R_q=m(r_1+\cdots+r_{2n}),\tag{3.155}$$

$$\omega\in S_{2nm},J\in\mathcal{J}_{2nm}.$$

З (3.154) випливає, що $\Delta(\mu_k,T)$ є квазімногочленом за змінною T.

Для кожного $\mu_k\in\mathcal{M}\backslash\{\vec{0}\}$ розглянемо функцію $\mathcal{D}(\mu_k,\tau)$, яка визначена на інтервалі $(0,\infty)$ формулою (3.154), в якій T замінено на τ. На підставі формули (3.154) та нерівностей (3.155) $\mathcal{D}(\mu_k,\tau)$ можна зобразити у вигляді

$$\mathcal{D}(\mu_k,\tau)=\sum_{J\in\mathcal{J}_{2nm}}F_J(\tau)\exp((J,\Gamma_k)\tau),\tag{3.156}$$

де $F_J(\tau)$ — многочлен з комплексними коефіцієнтами степінь якого $N_J\leqslant m(r_1+\cdots+r_{2n})$, а кількість доданків із різними експонентами не

перевищує $1+2^{nm+1}$. Через $E(D,\varepsilon,[0,b])$ позначимо множину тих $\tau\in[0,b]$, $b\in\mathbb{R}_+$, для яких виконується нерівність $|D(\mu_k,\tau)|\leqslant\varepsilon$. Для квазімногочлена $\mathcal{D}(\mu_k,\tau)$ позначимо

$$N:=\sum_{J\in\mathcal{J}_{2nm}}(1+N_J)\leqslant\left(1+2^{nm+1}\right)(1+m(r_1+\dots+r_2)),\qquad(3.157)$$

$$B(\mu_k):=1+\max_{J\in\mathcal{J}_{2nm}}|(J,\Gamma_k)|,\quad\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\},\qquad(3.158)$$

$$G(\mu_k)=\max_{1\leqslant j\leqslant N}\left\{|(\partial/\partial\tau)^{j-1}D(\mu_k,\tau)|_{\tau=0}(B(\mu_k))^{-j}\right\},\quad\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}.\qquad(3.159)$$

Враховуючи (3.125), (3.151) і (3.158) отримуємо

$$B(\mu_k)\leqslant C_{10}(1+|\mu_k|),\quad C_{10}=2nmC_1.\qquad(3.160)$$

Лема 3.5. *Існує число $\delta(\vec{\alpha})\in\mathbb{N}$ таке, що*

$$\left.\frac{d^qD(\mu_k,\tau)}{d\tau^q}\right|_{\tau=0}=\begin{cases}0, & q<\delta(\vec{\alpha}),\\ \delta(\vec{\alpha})!\,C_{11}W(\mu_k), & q=\delta(\vec{\alpha}),\end{cases}\qquad(3.161)$$

де C_{11} — деяка стала, яка залежить від α_j,β_j,r_j, $j\in\{1,\dots,2n\}$, а $W(\mu_k)=\det\|\vec{h}_{jk}\gamma_{jk}^{l-1}\|_{l=1,\dots,2n}^{j=1,\dots,2nm}$ — значення вронскіана системи функцій (3.126) в точці $t=0$.

Доведення. Позначимо $g_{lj}(\mu_k,\tau):=\alpha_lP_j^l+\beta_lI_l(\gamma_{jk})$, $l,j\in\{1,\dots,2n\}$, де P_j^l, $I_l(\gamma_{jk})$ визначені формулами (3.128), (3.129) відповідно. Справедливі такі розвинення:

$$\exp(\gamma_{jk}\tau)=\sum_{q=0}^{2n-1}\frac{\gamma_{jk}^q}{q!}\tau^q+\tau^{2n}\nu_{jk}(\tau),\quad j\in\{1,\dots,2nm\},\qquad(3.162)$$

$$I_l(\gamma_{jk})=\int_0^\tau t^{r_l}\exp(\gamma_{jk}t)dt=\sum_{q=0}^{2n-1}\frac{\gamma_{jk}^q}{q!(r_l+q+1)}\tau^{r_l+q+1}+$$
$$+\tau^{r_l+2n+1}V_{jlk}(\tau),\qquad(3.163)$$

де $l\in\{1,\dots,2n\}, j\in\{1,\dots,2nm\}$;

$$P_j^l=\begin{cases}\gamma_{jk}^{2(l-1)}, & 1\leqslant l\leqslant n,\\ \displaystyle\sum_{q=0}^{2n-1}\frac{\gamma_{jk}^{q+2(l-n-1)}}{q!}\tau^q+\tau^{2n}\nu_{jk}(\tau), & n+1\leqslant l\leqslant 2n,\end{cases}\qquad(3.164)$$

де $j \in \{1,\dots,2nm\}$, $\nu_{jk}(\tau)$, $V_{jlk}(\tau) = (r_l+2n+2)^{-1}\int_0^\tau \nu_{jk}(t)dt$ – деякі аналітичні в околі точки $\tau = 0$ функції. Розвинення (3.164) перепишемо у такій формі:

$$P_j^l = \begin{cases} \gamma_{jk}^{2(l-1)}, & 1 \leqslant l \leqslant n, \\ \displaystyle\sum_{q=2(l-n-1)}^{2n-1} \frac{\tau^{q-2(l-n-1)}}{(q-2(l-n-1))!}\gamma_{jk}^q + & \\ \qquad +\tau^{4n-2l+2}\bar{\nu}_{jlk}(\tau), & n+1 \leqslant l \leqslant 2n, \end{cases} \tag{3.165}$$

де

$$\bar{\nu}_{jlk}(\tau) = \begin{cases} \nu_{jk}(\tau), & l = n+1, \\ \displaystyle\sum_{q=2n}^{2l-3} \frac{\gamma_{jk}^q \tau^{q-2n}}{(q-2(l-n-1))!} + & \\ \qquad +\tau^{2(l-n-1)}\nu_{jk}(\tau), & n+2 \leqslant l \leqslant 2n, \end{cases} \qquad j \in \{1,\dots,2nm\}.$$

Підставивши розвинення (3.163) і (3.165) у вираз для $g_{lj}(\mu_k,\tau)$, для кожного $j \in \{1,\dots,2nm\}$, отримаємо наступні розвинення:

$$\begin{aligned} g_{lj}(\mu_k,\tau) &= \alpha_l\gamma_{jk}^{2(l-1)} + \beta_l \sum_{q=0}^{2n-1} \frac{\gamma_{jk}^q}{q!(r_l+q+1)}\tau^{r_l+q+1} + \\ &\quad + \beta_l\tau^{r_l+2n+1}V_{jlk}(\tau), \qquad 1 \leqslant l \leqslant n, \\ g_{lj}(\mu_k,\tau) &= \alpha_l \sum_{q=2(l-n-1)}^{2n-1} \frac{\tau^{q-2(l-n-1)}}{(q-2(l-n-1))!}\gamma_{jk}^q + \\ &\quad + \beta_l \sum_{q=0}^{2n-1} \frac{\gamma_{jk}^q\tau^{r_l+q+1}}{q!(r_l+q+1)} + \\ &\quad + \alpha_l\tau^{4n-2l+2}\bar{\nu}_{jk}(\tau) + \beta_l\tau^{r_l+2n+1}V_{jlk}(\tau), \quad n+1 \leqslant l \leqslant 2n. \end{aligned} \tag{3.166}$$

У формулах (3.166) згрупуємо доданки за степенями γ_{jk}. Для кожного $l \in \{1,\dots,2n\}$, $j \in \{1,\dots,2nm\}$ отримаємо

$$g_{lj}(\mu_k,\tau) = \sum_{q=0}^{2n-1} \gamma_{jk}^q\, \tilde{g}_{l,q+1}(\alpha_l,\beta_l,\tau) + \widetilde{V}_{jlk}(\tau). \tag{3.167}$$

де функції $\tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau)$ визначені формулами (3.100), (3.101) у яких слід поставити $j = l$,

$$\widetilde{V}_{jlk}(\tau) = \begin{cases} \beta_l \tau^{r_l+2n+1} V_{jlk}(\tau), & 1 \leqslant l \leqslant n, \\ \tau^{4n-2l+2} \left(\alpha_l \bar{\nu}_{jk}(\tau) + \beta_l \tau^{r_l-2n+2l-1} V_{jlk}(\tau)\right), & n+1 \leqslant l \leqslant 2n. \end{cases} \tag{3.168}$$

За побудовою функцію $D(\mu_k, \tau)$ можна зобразити формулою

$$D(\mu_k, \tau) = \det \|\vec{h}_{jk} g_{lj}(\mu_k, \tau)\|_{l=1,\dots,2n}^{j=1,\dots,2nm}, \tag{3.169}$$

де індекс j відповідає за стовпці, а l — за рядки. Підставимо в (3.169) отримані розвинення (3.167) і, використавши елементарні властивості визначників, отримаємо

$$\begin{aligned} D(\mu_k, \tau) &= \det \left\| \vec{h}_{jk} \left(\sum_{q=0}^{2n-1} \gamma_{jk}^q \, \tilde{g}_{l,q+1}(\alpha_l, \beta_l, \tau) + \widetilde{V}_{ljk}(\tau) \right) \right\|_{l=1,\dots,2n}^{j=1,\dots,2nm} \\ &= \det \left\| \vec{h}_{jk} \left(\sum_{q=0}^{2n-1} \gamma_{jk}^q \, \tilde{g}_{l,q+1}(\alpha_l, \beta_l, \tau) \right) \right\|_{l=1,\dots,2n}^{j=1,\dots,2nm} + \tilde{D}_k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau) \end{aligned} \tag{3.170}$$

де $\tilde{D}_k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau) := \tilde{D}(\mu_k, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau)$ — деяка аналітична в точці $\tau = 0$ функція, яка має в цій точці нуль вищого порядку ніж функція $\det \|\vec{h}_{jk}(\sum_{q=0}^{2n-1} \gamma_{jk}^q \, \tilde{g}_{l,q+1}(\alpha_l, \beta_l, \tau))\|_{l=1,\dots,2n}^{j=1,\dots,2nm}$. Це випливає з формул (3.100), (3.101), (3.168). Розглянемо матрицю

$$\mathbf{F} = \left\| \vec{h}_{jk} \left(\sum_{q=0}^{2n-1} \gamma_{jk}^q \, \tilde{g}_{l,q+1}(\alpha_l, \beta_l, \tau) \right) \right\|_{l=1,\dots,2n}^{j=1,\dots,2nm}$$

і розіб'ємо її на m блоків розміром $2n \times 2nm$ кожний:

$$\mathbf{F} = \operatorname{col} \|\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_m\|, \qquad \mathbf{F}_s = \left\| h_{jk}^s \left(\sum_{q=0}^{2n-1} \gamma_{jk}^q \, \tilde{g}_{l,q+1}(\alpha_l, \beta_l, \tau) \right) \right\|_{l=1,\dots,2n}^{j=1,\dots,2nm},$$

де h_{jk}^s, $s \in \{1, \dots, m\}$, — компоненти векторів $\vec{h}_{jk}$. Легко бачити, що кожен з блоків $\mathbf{F}_s$, $s \in \{1, \dots, m\}$, є добутком двох матриць:

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{G} \cdot \mathbf{W}_s, \quad \mathbf{G} = \|\tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau)\|_{l,q=1,\dots,2n}, \quad \mathbf{W}_s = \left\| h_{jk}^s \gamma_{jk}^{q-1} \right\|_{j=1,\dots,2nm}^{q=1,\dots,2n}.$$

Розмір матриці $\mathbf{G}$ складає $2n \times 2n$, а матриці $\mathbf{W}_s$ — $2n \times 2nm$. Отже

$$\mathbf{F} = \mathrm{col}\,\|\mathbf{G}\cdot\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{G}\cdot\mathbf{W}_m\|\,.$$

Зауважимо, що визначник матриці $\mathrm{col}\|\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \ldots, \mathbf{W}_m\|$ з точністю до знаку співпадає з $W(\mu_k)$. Нехай $\det\mathbf{G} \neq 0$. Розглянемо блочну матрицю розміру $2nm \times 2nm$ вигляду

$$\mathbf{G}_m = \left\| \begin{matrix} \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{O}_{2n} & \cdots & \mathbf{O}_{2n} \\ \mathbf{O}_{2n} & \mathbf{G}^{-1} & \cdots & \mathbf{O}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O}_{2n} & \mathbf{O}_{2n} & \cdots & \mathbf{G}^{-1} \end{matrix} \right\|,$$

де $\mathbf{O}_{2n}$ — нульова матриця розміру $2n \times 2n$, а $\mathbf{G}^{-1}$ — матриця обернена до $\mathbf{G}$. Очевидно, що $\det\mathbf{G}_m = (\det\mathbf{G})^{-m}$. Тоді, згідно з правилом множення блочних матриць

$$\mathbf{G}_m\cdot\mathbf{F} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{O}_{2n} & \cdots & \mathbf{O}_{2n} \\ \mathbf{O}_{2n} & \mathbf{G}^{-1} & \cdots & \mathbf{O}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O}_{2n} & \mathbf{O}_{2n} & \cdots & \mathbf{G}^{-1} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \mathbf{G}\cdot\mathbf{W}_1 \\ \mathbf{G}\cdot\mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{G}\cdot\mathbf{W}_m \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_m \end{matrix} \right\|.$$

Звідки

$$\det(\mathbf{G}_m\cdot\mathbf{F}) = \det\mathbf{G}_m\cdot\det\mathbf{F} = \det\mathbf{F}(\det\mathbf{G})^{-m} = \pm W(\mu_k). \tag{3.171}$$

На підставі (3.171) отримуємо таку рівність:

$$\begin{aligned} \det\mathbf{F} &= \pm W(\mu_k)(\det\mathbf{G})^m = \\ &= \pm W(\mu_k)\left(\det\|\tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau)\|_{l,q=1,\ldots,2n}\right)^m. \end{aligned} \tag{3.172}$$

Враховуючи (3.172), рівність (3.170) можна записати так:

$$D(\mu_k, \tau) = \pm W(\mu_k)(\det\|\tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau)\|_{l,q=1,\ldots,2n})^m + \tilde{D}_k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \tau). \tag{3.173}$$

З (3.100), (3.101) випливає, що величина $\det\|\tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau)\|_{l,q=1,\ldots,2n}$ є многочленом за змінною τ (а тому є відмінним від нуля для всіх, крім скінченної

кількості, точок τ) і не залежить від μ_k. Позначимо найменший степінь τ, що входить у вираз для $(\det \|\tilde{g}_{lq}(\alpha_l, \beta_l, \tau)\|_{l,q=1,\dots,2n})^m$ через $\delta(\vec{\alpha})$, а коефіцієнт при ньому — сталою C_{11}. Тоді з отриманого розвинення (3.173) випливає, що виконуються рівності (3.161). Лему доведено. □

Оцінимо тепер знизу величину $G(\mu_k)$, визначену формулою (3.159). Враховуючи (3.159)–(3.161) отримуємо

$$\begin{aligned} G(\mu_k) = \left|(\partial/\partial\tau)^{\delta(\vec{\alpha})} D(\mu_k, \tau)\right|_{\tau=0} (B(\mu_k))^{-\delta(\vec{\alpha},)-1} \geqslant \\ \geqslant C_{12}|W(\mu_k)|\,(1+|\mu_k|)^{-\delta(\vec{\alpha})-1}, \end{aligned} \tag{3.174}$$

де $C_{12} = \delta(\vec{\alpha})!\, C_{11}(C_{10})^{-\delta(\vec{\alpha})-1}$.

Теорема 3.10. *Нехай існує стала $\eta_0 \geqslant 0$ така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконується нерівність*

$$|W(\mu_k)| > C_{13}(1+|\mu_k|)^{\eta_0}. \tag{3.175}$$

Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ нерівність (3.138) *справджується для всіх (крім скінченої кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$, при*

$$\eta > \delta(\vec{\alpha}) - \eta_0 + 1 + \left(1 + 2^{nm+1}\right)\left(\frac{p}{\theta_1} + 1\right)(1 + m(r_1 + \dots + r_{2n}))\,.$$

Доведення. Проводиться за схемою доведення теореми 3.6, враховуючи, що $\mathrm{Re}(J, \Gamma_{\omega,k}) = 0$ та оцінки (3.160) (3.174), (3.175). □

Твердження 3.1. *Якщо $p = 1$, тобто область D^p є одновимірною за просторовими змінними, то нерівність* (3.175) *виконується при $\eta_0 > 4n^2m(m-1) + nm(2n-1)$.*

Доведення. За умови твердження корені рівняння (3.123) при $p = 1$ мають вигляд $\gamma_{jk} = \gamma_j\mu_k$, $j \in \{1, \dots, 2nm\}$, де γ_j — корені рівняння

$$\det\left\|\sum_{|\hat{s}|^*=2n} i^{|s|}\mathbf{A}_{\hat{s}}\gamma^{2s_0}\right\| = 0.$$

Вектори $\vec{h}_{jk}$ при $p = 1$ зображаються, відповідно, у вигляді $\vec{h}_{jk} = \vec{h}_j \mu_k^{2n(m-1)}$, $j \in \{1, \ldots, 2nm\}$, де вектор $\vec{h}_j$ — деякий ненульовий стовпець матриці $L^*(\gamma_j^2, i)$, яка є приєднаною до матриці $L(\gamma_j^2, i)$, $j \in \{1, \ldots, 2nm\}$. Звідси

$$\begin{aligned} W(\mu_k) &= \det \|\vec{h}_{jk}\gamma_{jk}^{l-1}\|_{l=1,\ldots,2n}^{j=1,\ldots,2nm} = \det \|\vec{h}_j\gamma_j^{l-1}\mu_k^{2n(m-1)+l-1}\|_{l=1,\ldots,2n}^{j=1,\ldots,2nm} \\ &= \mu_k^{4n^2m(m-1)+nm(2n-1)} \det \|\vec{h}_j\gamma_j^{l-1}\|_{l=1,\ldots,2n}^{j=1,\ldots,2nm}. \end{aligned}$$

З наведеної рівності випливає вказане твердження. □

Твердження 3.2. *Якщо $m = 1$, тобто система* (3.113) *складається з одного рівняння, то нерівність* (3.175) *виконується при $\eta_0 = 0$.*

Доведення. За умови твердження $W(\mu_k) = \prod_{1 \leqslant l < j \leqslant 2n}(\gamma_{jk} - \gamma_{lk})$, де γ_{jk}, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$, — корені рівняння (3.123) при $m = 1$. Оскільки при $m = 1$ рівняння (3.113) строго гіперболічне, то з нерівностей 2.21 у [88, с. 100], випливає, що $|\gamma_{jk} - \gamma_{lk}| \geqslant C_{15} > 0$, $1 \leqslant l < j \leqslant 2n$. З наведених нерівностей випливає, що $|W(\mu_k)| \geqslant (C_{15})^{n(2n+1)}$. □

3.4. Задача для системи рівнянь другого порядку, гіперболічної за Петровським у широкому сенсі.

У цьому підрозділі результати підрозділу 3.3 поширено на випадок системи рівнянь другого порядку, гіперболічної за Петровським у широкому сенсі.

3.4.1. В області D^3 розглядаємо задачу про знаходження майже періодичного за змінними x_1, x_2, x_3 розв'язку системи диференціальних рівнянь, яка описує напружений стан ізотропного та однорідного пружного тіла у переміщеннях (система Ламе) та має вигляд

$$\begin{aligned} &L\left(\partial_t^2, \partial_x\right)\vec{u}(t,x) := \\ &\quad \sigma\partial_t^2\vec{u}(t,x) = \mu^*\Delta\vec{u}(t,x) + (\lambda^*+\mu^*)\partial_x'\partial_x\vec{u}(t,x), \quad (t,x)\in D^3, \end{aligned} \tag{3.176}$$

з такими умовами за часовою координатою:

$$U_j[u] := \alpha_j\vec{u}(t_j,x) + \beta_j\int\limits_0^T t^{r_j}\vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_j(x),\ j\in\{1,2\},\ x\in\mathbb{R}^3, \tag{3.177}$$

де $\vec{u} := \vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x), u^2(t,x), u^3(t,x))$ — вектор переміщень; t — час; $\lambda^* > 0,\ \mu^* > 0$ — коефіцієнти Ламе, $\sigma > 0$ — густина середовища;

$$\partial_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3), \quad \partial_x' = \mathrm{col}(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3);$$

$t_1 = 0,\ t_2 = T;\ \alpha_j,\ \beta_j \in \mathbb{R},\ \alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0,\ j\in\{1,2\};\ r_1,\ r_2 \in \mathbb{Z}_+,\ r_1 < r_2$; вектор-функції $\vec{\varphi}_j(x) = \mathrm{col}(\vec{\varphi}_j^1(x), \vec{\varphi}_j^2(x), \vec{\varphi}_j^3(x)),\ j\in\{1,2\}$, є майже періодичними за x зі заданим спектром $\mathcal{M}$.

Характеристичне рівняння, яке відповідає системі (3.176)

$$\det\left\|\left(\sigma\gamma^2 - \mu^*\|\eta\|^2\right)\mathbf{I}_3 - (\lambda^*+\mu^*)\|\eta_j\eta_l\|_{j,l=1}^3\right\| = 0,$$

де $\eta = (\eta_1,\eta_2,\eta_3) \in \mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$, може бути записане у такій формі:

$$\begin{aligned} &\sigma^3\gamma^6 - \sigma^2(\lambda^*+4\mu^*)\|\eta\|^2\gamma^4 + \\ &\quad + \sigma\mu^*(2\lambda^*+5\mu^*)\|\eta\|^4\gamma^2 - (\lambda^*+2\mu^*)(\mu^*)^2\|\eta\|^6 = 0. \end{aligned} \tag{3.178}$$

При цьому γ-корені рівняння (3.178) визначаються формулами

$$\begin{aligned} \gamma_1(\eta) = \gamma_2(\eta) = \|\eta\| \sqrt{\frac{\mu^*}{\sigma}}, \quad \gamma_3(\eta) = \|\eta\| \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\sigma}}, \\ \gamma_4(\eta) = \gamma_5(\eta) = -\|\eta\| \sqrt{\frac{\mu^*}{\sigma}}, \quad \gamma_6(\eta) = -\|\eta\| \sqrt{\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\sigma}}. \end{aligned} \tag{3.179}$$

Із (3.179) видно, що система (3.176) є гіперболічною за Петровським у широкому сенсі.

3.4.2. Майже періодичний за x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язок задачі (3.176), (3.177) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \vec{u}_k(t) \exp(i\mu_k, x), \mu_k \in \mathcal{M}, \tag{3.180}$$

де кожна з вектор-функцій $\vec{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^3$, є розв'язком, відповідно, такої задачі:

$$\begin{aligned} &L\left(\frac{d^2}{dt^2}, i\mu_k\right) \vec{u}_k(t) := \\ &\left(\left(\sigma \frac{d^2}{dt^2} + \mu^* \|\mu_k\|^2\right) \mathbf{I}_3 + (\lambda^* + \mu^*) \left\|\mu_{k_j} \mu_{k_l}\right\|_{j,l=1}^3\right) \vec{u}_k(t) = \vec{0}, \end{aligned} \tag{3.181}$$

$$U_j[\vec{u}_k] := \alpha_j \vec{u}_k(t_j) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} \vec{u}_k(t) dt = \vec{\varphi}_{jk}, \quad j \in \{1,2\}. \tag{3.182}$$

При $k = \vec{0}$ ($\mu_{\vec{0}} = \vec{0}$) система (3.181) має вигляд

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}, \vec{0}\right) \vec{u}_{\vec{0}}(t) := \sigma \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{I}_3 \vec{u}_{\vec{0}}(t) = \vec{0},$$

а кожна компонента $u_{\vec{0}}^q(t)$, $q \in \{1,2,3\}$, розв'язку $\vec{u}_{\vec{0}}(t) = \mathrm{col}\left(u_{\vec{0}}^1(t), u_{\vec{0}}^2(t), u_{\vec{0}}^3(t)\right)$ задачі (3.181), (3.182) є розв'язком, відповідно, такої задачі для скалярного рівняння:

$$\frac{d^2}{dt^2} u_{\vec{0}}^q(t) = 0, \tag{3.183}$$

$$U_j[u_{q,\vec{0}}] := \alpha_j u_{\vec{0}}^q(t_j) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u_{\vec{0}}^q(t) dt = \varphi_{j,\vec{0}}^q, \quad j \in \{1,2\}. \tag{3.184}$$

Характеристичний визначник задачі (3.183), (3.184) має вигляд

$$\Delta(\vec{0},T) := \begin{vmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \dfrac{T^{r_1+1}}{r_1+1} & \beta_1 \dfrac{T^{r_1+2}}{r_1+2} \\ \alpha_2 + \beta_2 \dfrac{T^{r_2+1}}{r_2+1} & \alpha_2 T + \beta_2 \dfrac{T^{r_2+2}}{r_2+2} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1\alpha_2 T + \alpha_1\beta_2 \frac{T^{r_2+2}}{r_2+2} + \frac{\alpha_2\beta_1 T^{r_1+1}}{(r_1+1)(r_1+2)} + \frac{\beta_1\beta_2(r_2-r_1)T^{r_2+r_1+3}}{(r_1+1)(r_1+2)(r_2+1)(r_2+2)}.$$

За умови $\Delta(\vec{0},T) \neq 0$ завжди існує єдиний розв'язок задачі (3.183), (3.184), для кожного $q \in \{1,2,3\}$; ці розв'язки зображуються формулами

$$u^q_{\vec{0}}(t) = \sum_{l,j=1}^{2} \frac{\Delta_{lj}(\vec{0},T)}{\Delta(\vec{0},T)} \varphi^q_{l,\vec{0}} t^{j-1}, \quad q \in \{1,2,3\}. \tag{3.185}$$

де $\Delta_{lj}(\vec{0},T)$ — алгебричне доповнення елемента l-ого рядка та j-ого стовпця у визначнику $\Delta(\vec{0},T)$.

Тепер розглянемо задачу (3.181), (3.182) для всіх $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$. Характеристичне рівняння, яке відповідає системі (3.181), має вигляд

$$\sigma^3\gamma^6 + \sigma^2(\lambda^* + 4\mu^*)\|\mu_k\|^2\gamma^4 + \\ + \sigma\mu^*(2\lambda^* + 5\mu^*)\|\mu_k\|^4\gamma^2 + (\lambda^* + 2\mu^*)(\mu^*)^2\|\mu_k\|^6 = 0,$$

а його γ-корені зображаються формулами

$$\gamma_{jk} = i\gamma_j(\mu_k), \quad \mu_k \in \mathcal{M}, \tag{3.186}$$

де $\gamma_j(\mu_k)$ — визначені формулами (3.179) при $\eta = \mu_k$.

Для коренів (3.186) справедливі такі оцінки:

$$|\gamma_{jk}| \leqslant C_1(1 + |\mu_k|), \quad C_1 = \sqrt{(\lambda^* + 2\mu^*)/\sigma}, \quad j \in \{1,\ldots,6\}. \tag{3.187}$$

Фундаментальна система розв'язків системи (3.181) має такий вигляд (див. [88]):

$$\left\{\vec{u}_{jk}(t) = \vec{h}_{jk}\exp(\gamma_{jk}t),\ \vec{u}_{3+j,k}(t) = \vec{h}_{jk}\exp(-i\gamma_{jk}t),\ j \in \{1,2,3\}\right\},$$

де $k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, вектор $\vec{h}_{jk},\ j \in \{1,2,3\}$, – деякий ненульовий розв'язок системи алгебричних рівнянь

$$L(\gamma_{jk}^2, i\mu_k)\vec{h} = 0, \quad \vec{h} = \mathrm{col}(h_1, h_2, h_3).$$

Припустимо, що множина $\mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$ є такою, що для деякого $j \in \{1,2,3\}$ $\mu_{k_j} \neq 0,\ k_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Не обмежуючи загальності вважатимемо, що $\mu_{k_3} \neq 0$, $k_3 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Тоді вектори $\vec{h}_{jk},\ j \in \{1,2,3\}$, можна вибрати такими:

$$\begin{gathered}\vec{h}_{1k} = \mathrm{col}\left(\frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}, 0, -\frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|}\right), \quad \vec{h}_{2k} = \mathrm{col}\left(0, \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}, -\frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|}\right), \\ \vec{h}_{3k} = \mathrm{col}\left(\frac{\mu_{k_1}}{\|\mu_k\|}, \frac{\mu_{k_2}}{\|\mu_k\|}, \frac{\mu_{k_3}}{\|\mu_k\|}\right).\end{gathered} \tag{3.188}$$

Загальний розв'язок системи (3.181) має вигляд

$$\vec{u}_k(t) = \sum_{j=1}^{3}\Big(C_{jk}\vec{h}_{jk}\exp(\gamma_{jk}t) + C_{3+j,k}\vec{h}_{jk}\exp(-\gamma_{jk}t)\Big), \quad k \in \mathbb{Z}^3\backslash\{\vec{0}\}.$$

Невідомі сталі $C_{jk},\ j \in \{1,\ldots,6\}$, визначаються зі системи алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3}\Big(C_{jk}\vec{h}_{jk}g_{1\,j}^{1}(0;\mu_k) + C_{3+j,k}\vec{h}_{jk}g_{1\,j}^{2}(0;\mu_k)\Big) = \vec{\varphi}_{1k}, \\ \sum_{j=1}^{3}\Big(C_{jk}\vec{h}_{jk}g_{2\,j}^{1}(T;\mu_k) + C_{3+j,k}\vec{h}_{jk}g_{2\,j}^{2}(-T;\mu_k)\Big) = \vec{\varphi}_{2k}, \end{cases} \tag{3.189}$$

у якій

$$g_{q\,j}^{l}(t;\mu_k) = \alpha_q\exp(\gamma_{jk}t) + \beta_q I_{ql}(\gamma_{jk}), \quad j = \{1,2,3\},\ q,l = \{1,2\};$$

$$\begin{aligned} I_{ql}(z) &= \int_0^T t^{r_q}\exp\left((-1)^{l+1}zt\right)dt = \\ &= Q_{ql}(z,T)\exp\left((-1)^{l+1}zT\right) - Q_{ql}(z,0), \end{aligned} \tag{3.190}$$

$$Q_{ql}(z,t) = \sum_{n=1}^{r_q+1}\frac{(-1)^{l(n+1)}r_q!}{(r_q-n+1)!}\frac{t^{r_q-n+1}}{z^n}, \quad q,l = 1,2. \tag{3.191}$$

Визначник $\Delta(\mu_k, T),\ \mu_k \in \mathcal{M}\backslash\{\vec{0}\}$, системи (3.189) збігається з характеристичним визначником задачі (3.181), (3.182) і має вигляд

$$\Delta(\mu_k, T) := \det\|M_1\ M_2\|, \tag{3.192}$$

де

$$M_1 = \begin{pmatrix} \vec{h}_{1k} g^1_{1\,1}(0;\mu_k) & \vec{h}_{2k} g^1_{1\,2}(0;\mu_k) & \vec{h}_{3k} g^1_{1\,3}(0;\mu_k) \\ \vec{h}_{1k} g^1_{2\,1}(T;\mu_k) & \vec{h}_{2k} g^1_{2\,2}(T;\mu_k) & \vec{h}_{3k} g^1_{2\,3}(T;\mu_k) \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \vec{h}_{1k} g^1_{2\,1}(0;\mu_k) & \vec{h}_{2k} g^1_{2\,2}(0;\mu_k) & \vec{h}_{3k} g^1_{2\,3}(0;\mu_k) \\ \vec{h}_{1k} g^2_{2\,1}(-T;\mu_k) & \vec{h}_{2k} g^2_{2\,2}(-T;\mu_k) & \vec{h}_{3k} g^2_{2\,3}(-T;\mu_k) \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.11. *Для того, щоб задача* (3.176), (3.177) *мала не більше одного майже періодичного за x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язку у шкалі просторів $C^2([0,T], \overline{H}^{\alpha}_{\mathcal{M},3})$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (2.24) *у якій $\Delta(\mu_k, T)$ зображується формулою* (3.192).

Доведення. Проводиться за схемою доведення твердження 2.3. □

Зауваження 3.4. Якщо в умовах (3.177) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то

$$\Delta(\vec{0}, T) = \alpha_1 \alpha_2 T,$$

$$\Delta(\mu_k, T) = \alpha_1 \alpha_2 \frac{\mu^2_{k_3}}{\|\mu_k\|^2} (\exp(-\gamma_{1k} T) - \exp(\gamma_{1k} T))^2 \times$$
$$\times (\exp(-\gamma_{3k} T) - \exp(\gamma_{3k} T)), \quad \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}.$$

Тоді умова (2.24) справджується, якщо для довільного $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$ рівняння

$$\frac{\mu^*}{\sigma} T^2 \|\mu_k\|^2 - (\pi m_1)^2 \neq 0, \quad \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\sigma} T^2 \|\mu_k\|^2 - (\pi m_2)^2 \neq 0$$

не мають розв'язків у цілих числах m_1, m_2.

3.4.3. Надалі будемо вважати, що виконується умова (2.24). Тоді для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ існує єдиний розв'язок $\vec{u}_k(t)$ задачі (3.181), (3.182), а формальний розв'язок $\vec{u}(t,x)$ задачі (3.176), (3.177) зображується рядом

$$\vec{u}(t,x) = u_{\vec{0}}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\vec{0}\}} \Bigg(\sum_{j=1}^{3} \Big(C_{jk} \vec{h}_{jk} \exp(\gamma_{jk} t) + \\ + C_{3+j,k} \vec{h}_{jk} \exp(-\gamma_{jk} t) \Big) \Bigg) \exp(i\mu_k, x), \tag{3.193}$$

у якому вектори $\vec{h}_{jk}, j \in \{1,2,3\}$, визначені формулами (3.188), а

$$C_{qk} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\varphi_{1,k}^{l}\Delta_{lq}(\mu_k,T) + \varphi_{2,k}^{l}\Delta_{3+l,q}(\mu_k,T)}{\Delta(\mu_k,T)}, \quad q \in \{1,\ldots,6\}, \tag{3.194}$$

де $\Delta_{rq}(\mu_k,T)$ — алгебричне доповнення r-ого рядка та q-ого стовпця у визначнику $\Delta(\mu_k,T)$.

Ряд (3.193), взагалі, є розбіжним, бо вираз $|\Delta(\mu_k,T)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Теорема 3.12. *Нехай справджується умова* (2.24) *та існує стала* $\eta > 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k,T)| \geqslant (1+|\mu_k|)^{-\eta}. \tag{3.195}$$

Якщо $\vec{\varphi}_j \in \overline{H}_{\mathcal{M},3}^{\eta+\alpha+2}, j=1,2$, *то існує розв'язок задачі* (3.176), (3.177) *із простору* $C^2([0,T],\overline{H}_{\mathcal{M},3}^{\alpha})$, *який зображається формулою* (3.193), *причому*

$$\|u; C^2([0,T],\overline{H}_{\mathcal{M},3}^{\alpha})\| \leqslant C_2\|\vec{\varphi}_j; \overline{H}_{\mathcal{M},3}^{\eta+\alpha+2}\|$$

Доведення. проводиться за схемою доведення теореми 3.10. □

Зауваження 3.5. Якщо в теоремі 3.12 $\alpha > 2 + 3/(2\theta_1)$, то справедливе вкладення $C^2([0,T],\overline{H}_{\mathcal{M}}^{\alpha}) \subset \overline{C}_{\mathcal{M},3}^{2}(\overline{D}^3)$ і розв'язок задачі (3.176), (3.177) буде класичним.

3.4.4. Вияснимо можливість виконання нерівності (3.195). Як і в п. 3.3.4. показуємо, що визначник $\Delta(\mu_k,T)$ є квазімногочленом відносно змінної T і зображається формулою

$$\Delta(\mu_k,T) = \sum_{J\in\mathcal{J}_6} F_J(T)\exp((J,\Gamma_k)T), \tag{3.196}$$

в якому $F_J(T)$ — многочлен з комплексними коефіцієнтами степеня $(N_J - 1)$, $N_J \leqslant 1 + 3(r_1+r_2)$, $\Gamma_k = (-\gamma_{1k}, -\gamma_{2k}, -\gamma_{3k}, \gamma_{1k}, \gamma_{2k}, \gamma_{3k})$, а кількість

доданків із різними експонентами не перевищує 17. Нехай $D := D(\mu_k, \tau)$ квазімногочлен визначений формулою (3.196) у якій T потрібно замінити на τ. Через $E(D, \varepsilon, [0, b])$ позначимо множину тих $\tau \in [0, b]$ для яких виконується нерівність $|D(\mu_k, \tau)| \leqslant \varepsilon$,

$$N := \sum_{J \in \mathcal{J}_6} N_J \leqslant 17(1 + 3(r_1 + r_2)), \tag{3.197}$$

$$B(\mu_k) := 1 + \max_{J \in \mathcal{J}_6} |(J, \Gamma_k)|, \quad \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}, \tag{3.198}$$

$$G(\mu_k) = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \left\{ |(\partial/\partial\tau)^{j-1} D(\mu_k, \tau)|_{\tau=0} (B(\mu_k))^{-j} \right\}, \quad \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}. \tag{3.199}$$

Враховуючи (3.187), (3.198) отримуємо

$$B(\mu_k) \leqslant C_3 \left(1 + |\mu_k|\right), \quad C_3 = 6C_1. \tag{3.200}$$

Оцінимо тепер знизу $G(\mu_k)$. Нехай $\delta := \delta(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\left. \frac{d^q D(\mu_k, \tau)}{d\tau^q} \right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < \delta, \\ W(\mu_k), & q = \delta. \end{cases} \tag{3.201}$$

Використовуючи очевидні розвинення в околі точки $\tau = 0$

$$\exp(\Gamma_{sk}\tau) = 1 + \Gamma_{sk}\tau + \tau^2 \nu_{sk}(\tau), \quad s \in \{1, \ldots, 6\},$$

$$\int_0^\tau t^{R_q} \exp\left(\Gamma_{sk} t\right) dt = \frac{1}{R_q + 1} \tau^{R_q+1} + \frac{\Gamma_{sk}}{R_q + 1} \tau^{R_q+2} + \tau^{R_q+3} \nu_{sqk}(\tau),$$

де $\nu_{sk}(\tau), \nu_{sqk}(\tau)$, $s, q \in \{1, \ldots, 6\}$, — деякі аналітичні в околі $\tau = 0$ функції, безпосередньо встановлюємо, що для $D(\mu_k, \tau)$ справедливе розвинення

$$\begin{aligned} D(\mu_k, \tau) = C_4 \mu_{k_3}^3 \|\mu_k\| \tau^3 \big(& \beta_1\beta_2(r_2 - r_1)\tau^{r_2+r_1+2} + \\ & + \alpha_2\beta_1(r_2 + 1)(r_2 + 2)\tau^{r_1+1} + \\ & + \alpha_1\beta_2(r_1 + 1)(r_1 + 2)(r_2 + 1)\tau^{r_2+1} + \\ & + \alpha_1\alpha_2(r_1 + 1)(r_1 + 2)(r_2 + 1)(r_2 + 2)\big)^3 + \\ & + \tau^{3(r_2+r_1+4)} \nu_{3k}(\tau), \end{aligned} \tag{3.202}$$

де $C_4 = 8\mu^*\sqrt{(\lambda^*+\mu^*)/\sigma^3}\prod_{s=1}^{2}\left((r_s+1)(r_s+2)\right)^{-3}$, $\nu_{3k}(\tau)$ — аналітична в околі $\tau = 0$ функція.

Із (3.202) випливає, що величини δ та $W(\mu_k)$ з (3.201) приймають, відповідно, такі значення:

$$\delta = \begin{cases} 3, & \alpha_1 \neq 0, \ \ \alpha_2 \neq 0, \\ 3(r_1+2), & \alpha_1 = 0, \ \ \alpha_2 \neq 0, \\ 3(r_2+2), & \alpha_2 = 0, \ \ \alpha_1 \neq 0, \\ 3(r_2+r_1+3), & \alpha_1 = 0, \ \ \alpha_2 = 0, \end{cases} \tag{3.203}$$

$$W(\mu_k) = C_4 C_5 \mu_{k_3}^3 \left\|\mu_k\right\|, \tag{3.204}$$

де

$$C_5 = \begin{cases} \left(\alpha_1\alpha_2(r_1+1)(r_1+2)(r_2+1)(r_2+2)\right)^3, & \alpha_1 \neq 0, \ \ \alpha_2 \neq 0, \\ \left(\alpha_2\beta_1(r_2+1)(r_2+2)\right)^3, & \alpha_1 = 0, \ \ \alpha_2 \neq 0, \\ \left(\alpha_1\beta_2(r_1+1)(r_1+2)(r_2+1)\right)^3, & \alpha_1 \neq 0, \ \ \alpha_2 = 0, \\ \left(\beta_1\beta_2(r_2-r_1)\right)^3, & \alpha_1 \neq 0, \ \ \alpha_2 \neq 0. \end{cases}$$

Враховуючи (3.199)–(3.201), (3.203), (3.204) та нерівність (2.3), отримуємо

$$G(\mu_k) = \left|(\partial/\partial\tau)^\delta D(\mu_k,\tau)\right|_{\tau=0}\left(B(\mu_k)\right)^{-\delta-1} \geqslant C_6\left(1+|\mu_k|\right)^{-\delta}, \tag{3.205}$$

де $C_6 = p^{-1/2}C_4C_5(C_3)^{-\delta-1}$.

Теорема 3.13. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ нерівність* (3.195) *справджується для всіх (крім скінченої кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$, коли $\eta > \delta + 17\left(\dfrac{3}{\theta_1}+1\right)(1+3(r_1+r_2))$, де стала δ визначена рівністю* (3.203).

Доведення. Проводиться за схемою доведення теореми 3.10. □

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

У третьому розділі встановлено умови коректності у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій задач з умовами за часовою змінною, частинними випадками яких є інтегральні умови у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції та умови типу Діріхле, для рівнянь типу Клейна-Гордона та гіперболічних за Гордінгом рівнянь, а також систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами, гіперболічних за Петровським.

У загальному випадку розв'язність таких задач пов'язана із проблемою малих знаменників. Застосувавши метричний підхід до оцінок малих знаменників отримано умови однозначної розв'язності розглядуваних задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) значень верхньої межі інтегрування.

Основні результати опубліковано у роботах [45, 52, 53, 127].

РОЗДІЛ 4
ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ РІВНЯНЬ

4.1. Задача для параболічного за Петровським рівняння зі змінними за часом коефіцієнтами

В області, яка є декартовим добутком відрізка на p-вимірний дійсний простір, досліджено коректність задачі з умовами, частинним випадком який є багатоточкові умови або інтегральні умови у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції, для параболічного рівняння зі змінними за часом коефіцієнтами у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними. Встановлено умови коректності задачі. Доведено метричні теореми про оцінку знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку. Виділено часткові випадки задачі у яких відсутня проблема малих знаменників. Розглянуто випадок сталих коефіцієнтів рівняння.

4.1.1. В області D^p розглядаємо задачу

$$L\left(\partial_t, \Delta\right) u(t,x) := \prod_{j=1}^{n} \left(\partial_t - a_j(t)\Delta\right) u(t,x) = 0, \tag{4.1}$$

$$U_j[u] := \alpha_j u(t_j, x) + \beta_j \int\limits_0^T t^{r_j} u(t,x) dt = \varphi_j(x),\ j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4.2}$$

де $a_j \in C^{n-j}([0,T])$, $a_j(t) > 0$, $a_q(t) \neq a_s(t)$, $q \neq s$, $t \in [0,T]$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0$; $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$; $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $r_1 < \ldots < r_n$; оператори $(\partial_t - a_j(t)\Delta)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, у рівнянні (4.1) діють на функцію $u(t,x)$ у порядку зростання індексу j; функції $\varphi_j(x)$,

$j \in \{1, \ldots, n\}$, є майже періодичними за x зі заданим спектром $\mathcal{M}$,

$$\varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k,\, x). \tag{4.3}$$

4.2.2. Майже періодичний за x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язок задачі (4.1), (4.2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k,\, x). \tag{4.4}$$

Підставивши ряди (4.3), (4.4) у рівняння (4.1) та умови (4.2), отримуємо для знаходження кожного з коефіцієнтів $u_k(t)$, відповідно, таку задачу:

$$L\left(\frac{d}{dt}, -\|\mu_k\|^2\right) u_k(t) := \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} + a_j(t)\|\mu_k\|^2\right) u_k(t) = 0, \tag{4.5}$$

$$U_j[u_k] := \alpha_j u_k(t_j) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u_k(t) dt = \varphi_{jk}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.6}$$

Позначимо:

$$I_0(t) \equiv 0, \quad I_j(t) = -\int_0^t a_j(\tau) d\tau, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\Theta_q(t) = I_q(t) - I_{q-1}(t), \quad \mathcal{E}_{qk}(\tau) = \exp\left(\Theta_q(\tau)\|\mu_k\|^2\right), \quad q \in \{1, \ldots, n\}.$$

Відомо [88, стор. 77], що рівняння (4.5), коли $\mu_k \neq \vec{0}$, має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$\begin{cases} f_{1k}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t), \\ f_{2k}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t) \displaystyle\int_0^t \mathcal{E}_{2k}(\tau_1) d\tau_1, \\ f_{3k}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t) \displaystyle\int_0^t \left(\mathcal{E}_{2k}(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \mathcal{E}_{3k}(\tau_2) d\tau_2\right) d\tau_1, \\ \quad \vdots \\ f_{nk}(t) = \mathcal{E}_{1k}(t) \displaystyle\int_0^t \mathcal{E}_{2k}(\tau_1) \times \ldots \left(\int_0^{\tau_{n-2}} \mathcal{E}_{nk}(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1}\right) \ldots d\tau_1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Якщо $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$, то характеристичний визначник $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$, $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, задачі (4.5), (4.6) є таким:

$$\Delta(\mu_k, \vec{t}, T) := \det \|\alpha_j f_{qk}(t_j) + \beta_j I_{jq}\|_{j,q=1}^n, \tag{4.8}$$

де

$$I_{jq} := I_{jq}(\mu_k, T) = \int\limits_0^T t^{r_j} f_{qk}(t)dt, j, q \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.9}$$

Якщо $\mu_k = \vec{0}$, то рівняння (4.5) має таку фундаментальну систему розв'язків: $f_{j,\vec{0}}(t) = t^{j-1}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, а характеристичний визначник $\Delta(\vec{0}, \vec{t}, T)$ відповідної задачі (4.5), (4.6) має вигляд

$$\Delta(\vec{0}, \vec{t}, T) := \det \left\| \alpha_j t_j^{q-1} + \beta_j \frac{T^{r_j+q}}{r_j+q} \right\|_{j,q=1}^n. \tag{4.10}$$

Задача (4.5), (4.6) не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T) \neq 0$ [99].

Теорема 4.1. *Для того, щоб задача* (4.1), (4.2) *мала не більше одного майже періодичного за* x *із спектром* $\mathcal{M}$ *розв'язку у шкалі просторів* $C^n([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,2})$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \qquad \Delta(\mu_k, \vec{t}, T) \neq 0. \tag{4.11}$$

Доведення. Проводиться за схемою доведення твердження 2.3. □

Зауваження 4.1. Якщо параметри задачі (4.1), (4.2) для кожного $j \in \{1, \ldots, n\}$ справджують рівності

$$\frac{\alpha_j}{\beta_j} = \frac{T^{r_j+1}}{r_j+1},$$

то умова (4.11) не виконується.

Зауваження 4.2. Якщо в умовах (4.2) $\alpha_j = 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то визначник $\Delta(\mu_k, T) := \Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$ можна зобразити у вигляді [77, задача 68]:

$$\Delta(\mu_k, T) = \frac{\bar{\beta}}{n!} \int\limits_{\Pi_T^n} \widetilde{\Delta}(\tau) \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau, \tag{4.12}$$

де $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\beta} = \prod_{j=1}^n \beta_j$,

$$\widetilde{\Delta}(\tau) = \det \|\tau_j^{r_l}\|_{j,l=1}^n, \tag{4.13}$$

$$\bar{\Delta}(\mu_k, \tau) = \det \|f_{lk}(\tau_j)\|_{l,j=1}^n . \tag{4.14}$$

Покажемо, що у такому випадку, визначник $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$. Нехай S_n — симетрична група перестановок елементів множини $\{1, \ldots, n\}$. Позначимо через $\mathcal{S}_\omega^n$, $\omega = (i_1, \ldots, i_n) \in S_n$, симплекс

$$\{(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \Pi_T^n : \tau_{i_1} \leqslant \ldots \leqslant \tau_{i_n}\}.$$

Відомо [16, 77], що у симплексі $\mathcal{S}_{\omega_0}^n$, де $\omega_0 = (1, \ldots, n)$, $\widetilde{\Delta}(\tau) > 0$. На симплексі $\mathcal{S}_{\omega_0}^n$ визначник $\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)$ співпадає з характеристичним визначником задачі з умовами

$$\overline{U}_j[u_k] := u_k(\tau_j) = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

для рівняння (4.5). З теореми Скоробогатька [9, стор. 31] про єдиність розв'язку багатоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння n-ого порядку, що розпадається на дійсні лінійні множники першого порядку, випливає, що $\bar{\Delta}(\mu_k, \tau) \neq 0$ і не змінює свого знаку у симплексі $\mathcal{S}_{\omega_0}^n$. Легко помітити, що для довільної перестановки $\omega \in S_n$ справджуються такі тотожності:

$$\widetilde{\Delta}(\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_n}) = (-1)^{\rho_\omega} \widetilde{\Delta}(\tau_1, \ldots, \tau_n),$$

$$\bar{\Delta}(\mu_k, \tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_n}) = (-1)^{\rho_\omega} \bar{\Delta}(\mu_k, \tau_1, \ldots, \tau_n),$$

де ρ_ω – кількість інверсій у перестановці $\omega \in S_n$. Розіб'ємо куб Π_T^n на $n!$ симплексів $\mathcal{S}_\omega^n$. Тоді

$$\begin{aligned} \Delta(\mu_k, T) = \frac{\bar{\beta}}{n!} \int\limits_{\Pi_T^n} \widetilde{\Delta}(\tau) \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau = \frac{\bar{\beta}}{n!} \sum_{\omega \in S_n} \int\limits_{\mathcal{S}_\omega^n} \widetilde{\Delta}(\tau) \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau = \\ = \bar{\beta} \int\limits_{\mathcal{S}_{\omega_0}^n} \widetilde{\Delta}(\tau) \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau. \end{aligned} \tag{4.15}$$

З рівності (4.15), враховуючи вище сказане, випливає, що $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$. Отже, якщо $\alpha_j = 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то умова (4.11) виконується для довільного T та довільних функцій $a_j(t)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, які задовольняють умови, сформульовані у постановці задачі (4.1), (4.2).

4.2.3. Надалі будемо вважати, що виконується умова (4.11). Тоді для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ існує єдиний розв'язок задачі (4.4), (4.5), а формальний розв'язок задачі (4.1), (4.2) зображується у вигляді ряду

$$u(t,x) = u_{\vec{0}}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}} \left(\sum_{l,j=1}^{n} \frac{\Delta_{lj}(\mu_k, \vec{t}, T)}{\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)} \varphi_{lk} f_{jk}(t) \right) \exp(i\mu_k, x), \quad (4.16)$$

де

$$u_{\vec{0}}(t) = \sum_{l,j=1}^{n} \frac{\Delta_{lj}(\vec{0}, \vec{t}, T)}{\Delta(\vec{0}, \vec{t}, T)} \varphi_{l,\vec{0}}\, t^{j-1}, \quad (4.17)$$

а $\Delta_{lj}(\mu_k, \vec{t}, T)$ — алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$ елемента l-го рядка та j-го стовпця.

Питання існування розв'язку задачі (4.1), (4.2) в шкалі просторів $C^n([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,2})$ пов'язане з проблемою малих знаменників, бо вираз $|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Позначимо:

$$A_1 := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ \max_{t \in [0,T]} \int_0^t (a_j(\tau) - a_{j+1}(\tau))\, d\tau \right\}, \quad A_2 := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|a_j; C[0,T]\|.$$

Теорема 4.2. *Нехай виконується умова* (4.11) *та існують додатні сталі* η, ν *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\nu |\mu_k|^2). \quad (4.18)$$

Якщо $\varphi_j \in W_{\mathcal{M}}^{q_1, q_2, 2}$, $q_1 = \eta + 2n + \alpha$, $q_2 = \nu + \beta + n(n-1)A_1/2$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *то існує розв'язок задачі* (4.1), (4.2) *із простору* $C^n([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,2})$. *Цей*

розв'язок зображується рядом (4.16), *причому*

$$\|u; C^n([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,2})\| \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j; W_{\mathcal{M}}^{q_1,q_2,2})\|.$$

Доведення. На підставі формули (4.16) отримуємо

$$\|u; C^n([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,2})\| = \\ = \sum_{q=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |u_k^{(q)}(t)|^2 (1+|\mu_k|)^{2\alpha} \exp\left(2\beta|\mu_k|^2\right) \right)^{1/2}, \quad (4.19)$$

де

$$u_k^{(q)}(t) = \sum_{l,j=1}^{n} \frac{\Delta_{lj}(\mu_k, \vec{t}, T)}{\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)} \varphi_{lk} f_{jk}^{(q)}(t), \quad q \in \{0,1,\ldots,n\}, \quad (4.20)$$

$$u_{\vec{0}}^{(q)} = \sum_{l,j=1}^{n} \frac{\Delta_{lj}(\vec{0}, \vec{t}, T)}{\Delta(\vec{0}, \vec{t}, T)} \frac{(j-1)!}{(j-q-1)!} \varphi_{l,\vec{0}}\, t^{j-q-1}, \quad q \in \{0,1,\ldots,n\}. \quad (4.21)$$

На підставі формул (4.7), для кожної з функцій $f_{jk}(t)$, $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$, отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]} |f_{jk}^{(q)}(t)| \leqslant C_2 (1+|\mu_k|)^{2q} \exp\left(((j-1)A_1)|\mu_k|^2\right), \quad (4.22)$$

де $j \in \{1,\ldots,n\}$, $q \in \{0,1,\ldots,n\}$;

$$\left| \int_0^T t^{r_l} f_{jk}(t) dt \right| \leqslant C_3 \exp\left((j-1)A_1|\mu_k|^2\right), \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \quad (4.23)$$

де $C_2 := C_2(n,T)$, $C_3 = \max_{1\leqslant l\leqslant n}\{T^{r_l+1}/(r_l+1)\}$. Враховуючи (4.8), (4.10), (4.22), (4.23), для алгебричних доповнень $\Delta_{lj}(\mu_k, \vec{t}, T)$, $j,l \in \{1,\ldots,n\}$, визначника $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$ отримуємо такі оцінки:

$$|\Delta_{lj}(\mu_k, \vec{t}, T)| \leqslant (n-1)!(C_4)^{n-1} \exp\left(A_{3j}|\mu_k|^2\right), \quad \mu_k \in \mathcal{M}, \quad (4.24)$$

де

$$C_4 = \max\left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|\alpha_j| C_2\}, \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|\beta_j| C_3\} \right\},$$

$$A_{3j} = (n(n-1)/2 - j + 1)\, A_1, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

На підставі формул (4.20)–(4.24), отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]} |u_k^{(q)}(t)| \leqslant C_5 \sum_{j=1}^{n} |\varphi_{jk}|(1+|\mu_k|)^{2n} \exp(\nu + n(n-1)A_1/2), \tag{4.25}$$

$$\max_{t\in[0,T]} |u_{\vec{0}}^{(q)}(t)| \leqslant C_6 \sum_{j=1}^{n} |\varphi_{j,\vec{0}}|, \tag{4.26}$$

де $q \in \{1, \dots, n\}$, $C_5 = n\,(n-1)!\, C_2 (C_4)^{n-1}$, $C_6 := C_6(n, \vec{t}, T)$. На підставі (4.25) і (4.26) отримуємо таку оцінку:

$$\|u; C^n([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,2})\| \leqslant C_7 \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\mu_k\in\mathcal{M}} |\varphi_{jk}|^2 (1+|\mu_k|)^{2q_1} \exp\left(2q_2|\mu_k|^2\right) \right)^{1/2} =$$
$$= C_7 \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j; W_{\mathcal{M}}^{q_1,\,q_2,2})\|,$$

де $C_7 = (n+1)\max\{C_5, C_6\}$. З отриманої нерівності випливає доведення теореми. □

4.2.4. Розглянемо питання про можливість виконання оцінки (4.18) для задачі (4.1), (4.2).

Теорема 4.3. *Якщо в умовах* (4.2) $\alpha_j = 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$, *то для довільних фіксованих решти параметрів задачі* (4.1), (4.2) *оцінка* (4.18) *виконується при* $\eta > n(n-1)p/(2\theta_1)$, $\nu > n(n+1)A_2T/2$, *для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Доведення. За умов теореми, враховуючи (4.15), визначник $\Delta(\mu_k, T)$ обчислюється за формулою

$$\Delta(\mu_k, T) = \bar{\beta} \int\limits_{\mathcal{S}_{\omega_0}^n} \widetilde{\Delta}_1(\tau) \bar{\Delta}_2(\mu_k, \tau) d\tau,$$

де $\widetilde{\Delta}_1(\tau)$, $\bar{\Delta}_2(\mu_k, \tau)$ визначені формулами (4.13), (4.14) відповідно. Оскільки, як було показано у зауваженні 4.2, $\widetilde{\Delta}_1(\tau) > 0$, $\tau \in \mathcal{S}_{\omega_0}^n$, а $\bar{\Delta}_2(\mu_k, \tau)$ не

змінює свого знаку на $\mathcal{S}^n_{\omega_0}$, то

$$|\Delta(\mu_k, T)| = |\bar{\beta}| \int\limits_{\mathcal{S}^n_{\omega_0}} \widetilde{\Delta}_1(\tau)\, |\bar{\Delta}_2(\mu_k, \tau)| d\tau. \tag{4.27}$$

Введемо такі множини:

$$\Omega(\xi) = \{\tau \in S^n_{\omega_0} : \widetilde{\Delta}(\tau) > \xi,\, \xi > 0\}.$$

$$E(\mu_k) = \{\tau \in \Omega(\xi) : |\bar{\Delta}(\mu_k, \tau)| < \varepsilon_k\}, \quad \mu_k \in \mathcal{M},$$

де $\varepsilon_k := (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\nu|\mu_k|^2)$; Тоді з (4.27) випливає, що

$$\begin{aligned} |\Delta(\mu_k, T)| > |\bar{\beta}| \int\limits_{\Omega(\xi)} \widetilde{\Delta}(\tau)\, \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau = |\bar{\beta}| \int\limits_{E(\mu_k)} \widetilde{\Delta}(\tau)\, \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau + \\ + |\bar{\beta}| \int\limits_{\Omega(\xi)\setminus E(\mu_k)} \widetilde{\Delta}(\tau)\, \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau > |\bar{\beta}| \int\limits_{\Omega(\xi)\setminus E(\mu_k)} \widetilde{\Delta}(\tau)\, \bar{\Delta}(\mu_k, \tau) d\tau. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Відмітимо, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} E(\mu_k) < (1 + |k|)^{-p+\theta},\ \theta > 0,\ \mu_k \in \mathcal{M}. \tag{4.29}$$

Цей факт встановлюється аналогічно доведенню теореми 5 у [100]. Для $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}\Omega(\xi)$, враховуючи, що $\widetilde{\Delta}(\tau)$ є многочленом відносно змінних $\tau_1, \ldots, \tau_n$, за лемою 2.5 отримуємо таку оцінку:

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}\Omega(\xi) \geqslant \frac{T^n}{n!} - \left(\xi / \prod_{j=1}^{n} r_j!\right)^{1/r} := \chi(\xi), \tag{4.30}$$

де $r = r_1 + \cdots + r_n$. На основі оцінок (4.28)–(4.30) для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ отримуємо

$$\begin{aligned} |\Delta(\mu_k, T)| > |\bar{\beta}| \xi\, \varepsilon_k\, \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}(\Omega(\xi) \setminus E(\mu_k)) = \\ = |\bar{\beta}|\, \xi\, \varepsilon_k\, (\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}\Omega(\xi) - \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} E(\mu_k)) > \\ > |\bar{\beta}|\, \xi\, \varepsilon_k \left(\chi(\xi) - (1 + |k|)^{-p+\theta}\right). \end{aligned} \tag{4.31}$$

З нерівності (4.31) випливає, що для достатньо великих $|k|$ виконується оцінка

$$|\Delta(\mu_k, T)| > |\bar{\beta}|\xi\, \varepsilon_k\, \chi(\xi) > C_8(1+|\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\nu|\mu_k|^2),$$

де $C_8 = |\bar{\beta}|\, \xi\, \chi(\xi)$. З отриманої нерівності випливає доведення теореми. □

Теорема 4.4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ для довільних фіксованих решти параметрів задачі* (4.1), (4.2) *оцінка* (4.18) *виконується при $\eta > n(n+1)p/(2\theta_1)$ та $\nu > n(n+1)A_2T/2$.*

Доведення. Позначимо: $\eta_1 = n(n-1)p/(2\theta_1)$, $\varepsilon_k = (1+|\mu_k|)^{-\eta-w} \times \times \exp(-\nu|\mu_k|^2)$, $w > 0$, $A(\varepsilon_k, B) = \{(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in [-B, B]^n : |\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)| < \varepsilon_k\}$, $B > 0$. Зафіксуємо вектор $\mu_k = \bar{\mu}_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$. На підставі (4.8), (4.15) та зауваження 4.2 отримуємо

$$\frac{\partial^n \Delta(\bar{\mu}_k, \vec{t}, T)}{\partial\beta_1 \cdots \partial\beta_n} = \int\limits_{\mathcal{S}^n_{\omega_0}} \Delta_1(\tau)\Delta_2(\bar{\mu}_k, \tau) d\tau. \tag{4.32}$$

З (4.32) та теореми 4.3 випливає, що

$$\left| \frac{\partial^n \Delta(\bar{\mu}_k, \vec{t}, T)}{\partial\beta_1 \cdots \partial\beta_n} \right| > C_9(1+|\bar{\mu}_k|)^{-\eta_1} \exp(-\nu|\bar{\mu}_k|^2). \tag{4.33}$$

Тоді з (2.2), (4.33) та леми 2.5 одержуємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A(\varepsilon_{\bar{k}}, B) \leqslant (C_8)^{-n}(1+|\bar{\mu}_k|)^{\frac{-\eta+\eta_1-w}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant (C_8)^{-n}(1+|\bar{\mu}_k|)^{-p/\theta_1 - w/n} \leqslant C_9|\bar{k}|^{-p-w/n}. \tag{4.34}$$

З (4.34) випливає, що ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A(\varepsilon_k, B)$ збіжний, а отже за лемою 2.3 міра тих $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in [-B, B]^n$ для яких виконується нерівність $|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)| < \varepsilon_k$ дорівнює нулеві. Тобто, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in [-B, B]^n$ виконується нерівність $|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)| > \varepsilon_k$. Врахувавши, що простір $\mathbb{R}^n$ можна покрити зліченною кількістю кубів $[-B, B]^n$, отримуємо твердження теореми. □

4.2.5. Розглянемо задачу з умовами (4.2) для рівняння (4.1) у випадку, коли $a_j(t) \equiv a_j^2, a_j \in \mathbb{R}_+$. Тоді, відповідно, фундаментальна система розв'язків рівняння (4.5) має вигляд

$$f_{qk}(t) = \begin{cases} t^{q-1}, \quad \mu_k = \vec{0}, \\ \exp(-a_q^2\|\mu_k\|^2 t), \ \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}, \end{cases} \qquad q \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.35}$$

Якщо $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$, то визначник $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$ має вигляд

$$\Delta(\mu_k, \vec{t}, T) = \det \left\| \alpha_j \exp(-a_q^2\|\mu_k\|^2 t_j) + \beta_j I_{jq} \right\|_{j,q=1}^n, \tag{4.36}$$

де

$$\begin{aligned} I_{lj} := I_{lj}(\mu_k) = \int\limits_0^T t^{r_j} \exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t) dt = \\ = Q_{lj}(\mu_k, T) \exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 T) - Q_{lj}(\mu_k, 0), \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$Q_{lj}(\mu_k, t) = -\sum_{q=1}^{r_j+1} \frac{r_j!}{(r_j - q + 1)!} \frac{t^{r_j - q + 1}}{(a_l\|\mu_k\|)^{2q}}, \quad l, j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.38}$$

У даному випадку справедливими залишаються теорема 4.1 та зауваження до неї.

Майже періодичний за x із спектром $\mathcal{M}$ формальний розв'язок задачі (4.1), (4.2) зображується у вигляді ряду

$$\begin{aligned} u(t, x) = u_{\vec{0}}(t) + \\ + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}} \left(\sum_{l,j=1}^n \frac{\Delta_{jl}(\mu_k, \vec{t}, T)}{\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)} \varphi_{jk} \exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t) \right) \exp(i\mu_k, x), \end{aligned} \tag{4.39}$$

де

$$u_{\vec{0}}(t) = \sum_{l,j=1}^n \frac{\Delta_{jl}(\vec{0}, \vec{t}, T)}{\Delta(\vec{0}, \vec{t}, T)} \varphi_{j,\vec{0}}\, t^{l-1}, \tag{4.40}$$

а $\Delta_{jl}(\mu_k, \vec{t}, T)$ — алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$ елемента j-го рядка та l-го стовпчика.

Лема 4.1. *Для кожного з алгебричних доповнень* $\Delta_{jl}(\mu_k, \vec{t}, T)$, $j, l \in \{1, \ldots, n\}$, *справедливі оцінки*

$$|\Delta_{jl}(\mu_k, \vec{t}, T)| \leqslant C_{10}(1 + |\mu_k|)^{-2\bar{r}_j}, \quad \bar{r}_j = r - r_j,\ r = r_1 + \cdots + r_n. \quad (4.41)$$

Доведення. Для величин $|I_{jl}|$, $j, l \in \{1, \ldots, n\}$, справджуються такі оцінки:

$$\begin{aligned} |I_{jl}| &= \left| \int\limits_0^T t^{r_j} \exp(-a_l^2 \|\mu_k\|^2 t) dt \right| \leqslant \max_{t \in [0,T]} \{t^{r_j} \exp(-a_l^2 \|\mu_k\|^2 t)\} T < \\ &< \frac{(4pr_j)^{r_j} T}{a_l^{2r_j} 2^{r_j}} (1 + |\mu_k|)^{-2r_j} = C_{11}(1 + |\mu_k|)^{-2r_j}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Для елементів $U_j[u_{lk}] = \alpha_j \exp(-a_l^2 \|\mu_k\|^2 t_j) + \beta_j I_{jl}$, $j, l \in \{1, \ldots, n\}$, визначника $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$, враховуючи (4.42), отримуємо такі оцінки:

$$\begin{aligned} |U_j[f_{lk}]| &\leqslant |\alpha_j| |\exp(-a_l^2 \|\mu_k\|^2 t_j)| + |\beta_j| |I_{lj}| \leqslant \\ &\leqslant \max\{|\alpha_j|, |\beta_j| C_{11}\}(1 + |\mu_k|)^{-2r_j} = C_{12}(1 + |\mu_k|)^{-2r_j}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

На підставі (4.43) одержуємо наступні оцінки:

$$|\Delta_{jl}(\mu_k, \vec{t}, T)| \leqslant (n-1)! \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^{n} |U_q[u_{qk}]| \leqslant (n-1)!(C_{12})^{n-1} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^{n} (1 + |\mu_k|)^{-2r_q} =$$

$$= (n-1)!(C_{12})^{n-1}(1 + |\mu_k|)^{-2\bar{r}_j},\ l, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

З отриманих нерівностей випливає доведення леми. □

Теорема 4.5. *Нехай в умовах* (4.2) $\beta_1 \cdots \beta_n \neq 0$. *Тоді для довільних параметрів* T, a_j, t_j, α_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *нерівність* (4.18) *справджується при* $\eta > 2r + n(n+1)$ *та* $\nu = 0$ *для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Доведення. Кожен з елементів $U_j[f_{lk}]$, $j, l \in \{1, \ldots, n\}$, визначника $\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)$ на підставі (4.37) подамо у вигляді

$$U_j[f_{lk}] = \alpha_j \exp(-a_l^2 \|\mu_k\|^2 t_j) + \beta_j Q_{lj}(\mu_k, T) \exp(-a_l^2 \|\mu_k\|^2 T) - \beta_j Q_{lj}(\mu_k, 0) =$$

$$= \big(\alpha_j + \beta_j Q_{lj}(\mu_k, T)\exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2(T-t_j))\big) \times$$
$$\times \exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t_j) - \beta_j Q_{lj}(\mu_k, 0). \tag{4.44}$$

З (4.37), (4.38) та (4.44) випливає, що для достатньо великих $|k|$ справджується оцінка

$$|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)| = \left|\det \|U_j[u_{lk}]\|_{l,j=1}^n\right| =$$
$$= \left|\det \| \big(\alpha_j + \beta_j Q_{lj}(\mu_k, T)\exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2(T-t_j))\big) \times\right.$$
$$\left.\times \exp(-a_l^2\|\mu_k\|^2 t_j) - \beta_j Q_{lj}(\mu_k, 0)\|_{j,l=1}^n\right| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\left|\det \|\beta_j Q_{lj}(\mu_k, 0)\|_{j,l=1}^n\right| = \frac{1}{2}\prod_{j=1}^n |\beta_j| \left|\det \left\|\frac{r_j!}{(a_l\|\mu_k\|)^{2(r_j+1)}}\right\|_{l,j=1}^n\right| >$$
$$> C_{13}(1+|\mu_k|)^{-2r-n(n+1)}, \tag{4.45}$$

де $C_{13} = \prod_{j=1}^n (|\beta_j| r_j!)\,|\det \|a_l^{-2(r_j+1)}\|_{l,j=1}^n|$. З нерівності (4.45) випливає доведення теореми. □

Теорема 4.6. *Нехай виконується умова* (4.11). *Якщо* $\varphi_j \in C_{\mathcal{M}}^{[\eta+p/\theta_1]-2(\bar{r}_j-n)+1}(\mathbb{R}^p)$, $j \in \{1,\dots,n\}$, *де стала* η *визначена у теоремі 4.4, то існує єдиний розв'язок задачі* (4.1), (4.2) *із простору* $C_{\mathcal{M}}^{(n,2n)}(\overline{D}^p)$. *Цей розв'язок зображається формулою* (4.39) *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,\dots,n\}$.

Доведення. На підставі формули (4.39) отримуємо

$$\|u; C_{\mathcal{M}}^{(n,2n)}(\overline{D}^p)\| \leqslant \sum_{|k|\geqslant 0}\left(C_{14}\sum_{l,j=1}^n \frac{|\Delta_{jl}(\mu_k, \vec{t}, T)|}{|\Delta(\mu_k, \vec{t}, T)|}|\varphi_{jk}|(1+|\mu_k|)^{2n}\right). \tag{4.46}$$

За умов теореми, на підставі леми 2.1, отримуємо

$$|\varphi_{jk}| \leqslant C_{15}\frac{\|\varphi_j; C_{\mathcal{M}}^{[\eta+p/\theta_1]-2(\bar{r}_j-n)+1}\|}{(1+|\mu_k|)^{[\eta+p/\theta_1]-2(\bar{r}_j-n)+1}}, \tag{4.47}$$

де $C_{15} = (2p)^{[\eta+p/\theta_1]-2(\bar{r}_j-n)+1}([\eta+p/\theta_1]-2(\bar{r}_j-n)+1)$. На підставі леми 4.1, теореми 4.5 та оцінок (4.46), (4.47) одержуємо таку нерівність

$$\|u; C_{\mathcal{M}}^{(n,2n)}(\overline{D}^p)\| \leqslant C_{16}\sum_{|k|\geqslant 0}(1+|\mu_k|)^{\eta-1-[\eta+p/\theta_1]}\sum_{j=1}^n \|\varphi_j; C_{\mathcal{M}}^{[\eta+p/\theta_1]+2(\bar{r}_j-n)+1}\|$$

$$\leqslant C_{17} \sum_{|k|\geqslant 0} |k|^{-z} \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j; C_{\mathcal{M}}^{[\eta+p/\theta_1]+2(\bar{r}_j-n)+1}\|, \tag{4.48}$$

де $z = p + (1 - \{\eta + p/\theta_1\})\theta_1$. Оскільки $z > p$, то ряд $\sum_{|k|>0} |k|^{-z}$ є збіжним. Позначимо його суму через S_z. Тоді з оцінки (4.48) отримуємо

$$\|u; C_{\mathcal{M}}^{(n,2n)}(\overline{D}^p)\| \leqslant C_{17} S_z \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j; C_{\mathcal{M}}^{[\eta+p/\theta_1]+2(\bar{r}_j-n)+1}\|. \tag{4.49}$$

З оцінки (4.49) випливає доведення теореми. □

4.2. Задача для параболічних за Шиловим систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами

У цьому підрозділі досліджено коректність задачі з умовами за часовою змінною, частинним випадком яких є інтегральні умови у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції та початкові умови, для системи рівнянь зі сталими коефіцієнтами, параболічної за Шиловим, у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій.

4.2.1. В області D^p розглядаємо задачу

$$\mathbf{L}\left(\partial_t, \partial_x\right)[u] := \partial_t^n \vec{u}(t,x) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}_j\left(\partial_x\right) \partial_t^j \vec{u}(t,x) = \vec{0}, \quad (t,x) \in D^p, \tag{4.50}$$

$$U_j[u] := \alpha_j\, \partial_t^{j-1} \vec{u}(t,x)\Big|_{t=0} + \beta_j \int\limits_0^T t^{r_j} \vec{u}(t,x) dt = \vec{\varphi}_j(x), \qquad x \in \mathbb{R}^p, \tag{4.51}$$

в якій $\mathbf{A}_j(\eta) = \left\| \sum_{|s| \leqslant N} a_{ql,s}^j \eta^s \right\|_{q,l=1}^m$, $a_{ql,s}^j \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{C}^p$, $N > n$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \{1, \ldots, n\}$; $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$; $\vec{u}(t,x) = \operatorname{col}\left(u^1(t,x), \ldots, u^m(t,x)\right)$, вектор-функції $\vec{\varphi}_j(x) = \operatorname{col}\left(\varphi_j^1(x), \ldots, \varphi_j^m(x)\right)$, $j = \{1, \ldots, n\}$, є майже періодичними зі заданим спектром $\mathcal{M}$ та розвиваються у векторні ряди Фур'є вигляду

$$\vec{\varphi}_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \vec{\varphi}_{jk} \exp(i\mu_k, x), \quad \vec{\varphi}_{jk} = \operatorname{col}\left(\varphi_{jk}^1, \ldots, \varphi_{jk}^m\right). \tag{4.52}$$

Вважаємо, що система (4.50) є параболічною за Шиловим [18], тобто для кожного вектора $\eta \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ корені $\gamma_j(\eta)$, $j \in \{1, \ldots, nm\}$, характеристичного рівняння

$$\det \mathbf{L}(\gamma, i\eta) = \det \left\| \gamma^n \mathbf{I}_m + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma^j \mathbf{A}_j(i\eta) \right\| = 0, \tag{4.53}$$

яке відповідає системі (4.50), справджують оцінки

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant nm} \operatorname{Re} \gamma_j(\eta) \leqslant -C_H\, |\eta|^h + C_0, \quad C_H > 0,\ h > 0,\ C_0 \in \mathbb{R}. \tag{4.54}$$

4.2.2. Позначимо: $\vec{\Phi}(x) := \mathrm{col}\,(\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x))$,

$$\vec{e}_q := \mathrm{col}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{q-1}, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{mn},\ q \in \{1, \ldots, nm\},$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(t,x) &:= \mathrm{col}\left(V^1(t,x), \ldots, V^{mn}(t,x)\right) = \\ &= \mathrm{col}\left(\vec{u}(t,x), \partial_t \vec{u}(t,x), \ldots, \partial_t^{n-1}\vec{u}(t,x)\right), \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{m(n-1),m} & \mathbf{I}_{m(n-1)} \\ -\mathbf{A}_0(\partial_x) & -\mathbf{A}_1(\partial_x) \cdots - \mathbf{A}_{n-1}(\partial_x) \end{pmatrix}, \tag{4.56}$$

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \otimes \mathbf{I}_m, \quad \mathbf{B} = \mathrm{diag}\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \otimes \mathbf{I}_m,$$

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} t^{r_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{r_n} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_m,$$

де $\mathbf{O}_{m(n-1),m}$ — нульова матриця розміру $m(n-1) \times m$, $\otimes$ — знак тензорного добутку [60] матриць.

Очевидно, що задача (4.50), (4.51) еквівалентна такій задачі для системи рівнянь першого порядку:

$$\frac{\partial \vec{V}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \vec{V}(t,x), \tag{4.57}$$

$$\mathbf{A}\,\vec{V}(0,x) + \mathbf{B} \int\limits_0^T \mathbf{R}(t)\vec{V}(t,x)dt = \vec{\Phi}(x). \tag{4.58}$$

Майже періодичний за x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язок задачі (4.57), (4.58) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$\vec{V}(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \vec{V}_k(t) \exp(i\mu_k, x). \tag{4.59}$$

Підставивши ряди (4.52), (4.59) у рівняння (4.57) та умови (4.58), отримуємо для знаходження кожного з коефіцієнтів $V_k(t), k \in \mathbb{Z}^p$, відповідно, таку задачу:

$$\frac{d\vec{V}_k(t)}{dt} = \mathcal{L}\,(i\mu_k)\,\vec{V}_k(t), \tag{4.60}$$

$$\mathbf{A}\vec{V}_k(0) + \mathbf{B}\int\limits_0^T \mathbf{R}(t)\vec{V}_k(t)dt = \vec{\Phi}_k, \quad \vec{\Phi}_k = \mathrm{col}\left(\vec{\varphi}_{1k}, \ldots, \vec{\varphi}_{nk}\right). \tag{4.61}$$

Відомо [78], що загальний розв'язок системи (4.60) має вигляд

$$\vec{V}_k(t) = \exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right)\vec{C}, \tag{4.62}$$

де $\vec{C} = \mathrm{col}\left(C_1, \ldots, C_{mn}\right)$ — довільний сталий вектор. Запровадимо вектор-функції $\vec{F}_{qk}(t)$ та $\vec{f}_{qk}(t)$, $q \in \{1, \ldots, mn\}$, визначені формулами

$$\vec{F}_{qk}(t) = \exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right)\vec{e}_q, \quad \vec{f}_{qk}(t) = \mathrm{col}\left(F^1_{qk}(t), \ldots, F^m_{qk}(t)\right). \tag{4.63}$$

З формули (4.55) випливає, що

$$F_{qk}(t) = \mathrm{col}\left(f_{qk}(t), f^{(1)}_{qk}(t), \ldots, f^{(n-1)}_{qk}(t)\right). \tag{4.64}$$

На підставі (4.62), (4.63) розв'язок задачі (4.60), (4.61) зображується формулою

$$V_k(t) = \sum_{q=1}^{mn} C_{qk}F_{qk}(t),$$

де коефіцієнти C_{qk}, $q \in \{1, \ldots, nm\}$, визначаються із системи алгебричних рівнянь

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\int\limits_0^T \mathbf{R}(t)\exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right)dt\right)\vec{C}_k = \vec{\Phi}_k, \tag{4.65}$$

де $\vec{C}_k = \mathrm{col}\left(C_{1k}, \ldots, C_{mn,k}\right)$, визначник $\Delta(\mu_k, T)$ якої збігається з характеристичним визначником задачі (4.60), (4.61) і має вигляд

$$\Delta(\mu_k, T) = \det\left\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\int\limits_0^T \mathbf{R}(t)\exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right)dt\right\|, \quad \mu_k \in \mathcal{M}. \tag{4.66}$$

Задача (4.60), (4.61) не може мати двох різних розв'язків для тих і лише для тих $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ [14].

Теорема 4.7. *Для того, щоб задача* (4.50), (4.51) *мала не більше одного майже періодичного за x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язку у просторі $C^n\left([0,T], \overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m}\right)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (2.24) *в якій $\Delta(\mu_k, T)$ визначений формулою* (4.66).

Доведення. За умови (2.24) єдиність розв'язку задачі (4.57), (4.58) доводиться за схемою доведення твердження 2.3. Із (4.55) та еквівалентності задач (4.50), (4.51) та (4.57), (4.58) випливає твердження теореми. □

4.2.3. Надалі вважатимемо, що виконується умова (2.24). Тоді для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ існує єдиний розв'язок $V_k(t)$ задачі (4.60), (4.61), який зображує формула

$$V_k(t) = \sum_{q=1}^{mn} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \frac{\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk}^{l} \right) F_{qk}(t), \tag{4.67}$$

де $\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)$ — алгебричне доповнення елемента $(m(j-1)+l)$-го рядка та q-го стовпця у визначнику $\Delta(\mu_k, T)$.

На підставі (4.55), (4.59), (4.63) та (4.67) отримуємо формальний розв'язок задачі (4.50), (4.51), у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(\sum_{q=1}^{mn} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \frac{\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk}^{l} \right) f_{qk}(t) \right) \times \\ \times \exp(i\mu_k, x). \tag{4.68}$$

Ряд (4.68), взагалі, є розбіжним, бо вираз $|\Delta(\mu_k, T)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Для дослідження існування розв'язку задачі (4.50), (4.51) у шкалі просторів $C^n\left([0,T], \overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\alpha,\beta,\gamma}\right)$ нам знадобляться деякі допоміжні твердження та сталі

$$C_1 = (nm)^p \max_{|s| \leqslant N} \max_{\substack{1 \leqslant q,l \leqslant m \\ 0 \leqslant j \leqslant n-1}} \left\{ \left| a_{ql,s}^{j} \right| \right\},$$

$$C_2 = (mn)^{-p} (2^{mn} - 1) T^{mn-1} C_1 \max\{1, \exp(C_0 T)\},$$

$$C_3 = (r_n/(2C_H))^{r_n} T C_2, \ C_4 = \max_{1 \leqslant l \leqslant n} \{|\alpha_l|, |\beta_l| C_3\}, \ C_5 = (mn-1)!(C_4)^{mn-1}.$$

Вияснимо поведінку коренів характеристичного рівняння, яке відповідає системі (4.57). Це рівняння збігається з рівнянням (4.53) при $\eta = \mu_k$ і

може бути записане у такому вигляді:

$$\gamma^{mn} + \sum_{j=1}^{m-1} B_j^{jN}(\mu_k)\,\gamma^{mn-j} + \sum_{j=m}^{mn} B_j^{mN}(\mu_k)\,\gamma^{mn-j} = 0, \tag{4.69}$$

де $B_j^{qN}(\mu_k)$, $q \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, mn\}$, — многочлени степеня не вище qN за сукупністю змінних $\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}$ з комплексними коефіцієнтами. Корені рівняння (4.69) є такими:

$$\gamma_{jk} = \gamma_j(\mu_k), \quad j \in \{1, \ldots, mn\}, \tag{4.70}$$

де $\gamma_j(\mu_k), j \in \{1, \ldots, mn\}$, — корені рівняння (4.53) при $\eta = \mu_k$. Надалі будемо вважати, що ці корені прості та відмінні від нуля для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Для оцінки коренів (4.70) використовуємо оцінку (4.54) дійсних частин при $\eta = \mu_k$ і оцінка модулів [103, с. 101]:

$$|\gamma_{jk}| \leqslant C_1 \left(1 + |\mu_k|\right)^N, \; j \in \{1, \ldots, mn\}, \;\; \mu_k \in \mathcal{M}. \tag{4.71}$$

Лема 4.2. *Для компонент $f_{qk}^l(t)$, $l \in \{1, \ldots, n\}$, вектор-функцій $f_{qk}(t)$, $q \in \{1, \ldots, mn\}$, для всіх $t \in [0, T]$ виконуються оцінки*

$$\left|\frac{d^j}{dt^j} f_{qk}^l(t)\right| \leqslant \begin{cases} C_2 \left(1 + |\mu_k|\right)^{(mn-1)N} \exp\left(-C_H |\mu_k|^h t\right), & 0 \leqslant j \leqslant n-1, \\ C_2 \left(1 + |\mu_k|\right)^{mnN} \exp\left(-C_H |\mu_k|^h t\right), & j = n. \end{cases}$$

Доведення. Проводиться за схемою доведення леми 1 у [67] з урахуванням оцінок (4.54). □

Розглянемо величини $\psi_j(\beta_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, визначені наступним чином:

$$\psi_j(\beta_j) := \begin{cases} \max\{0, (mn-1)N - hr_j\}, & \text{якщо } \beta_j \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } \beta_j = 0, \end{cases} \qquad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Лема 4.3. *Для всіх (крім скінченої кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ алгебричні доповнення $\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)$, $l \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $q \in \{1, \ldots, mn\}$, елементів визначника $\Delta(\mu_k, T)$, справджують оцінки*

$$\left|\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)\right| \leqslant C_5 \left(1 + |\mu_k|\right)^{(mn-1)N - \psi_j(\beta_j) + m\sum_{g=1}^{n} \psi_g(\beta_g)}.$$

Доведення. Проведемо спочатку допоміжні оцінки. На підставі леми 4.2 отримуємо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > \max\{D_1^{-1/\theta_1}, K_1\}$, $K_1 = (r_n/(C_H T D_1))^{1/(\theta_1 h)}$, виконуються оцінки

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T t^{r_j} f_{qk}^l(t) dt \right| \leqslant \int_0^T \max_{t\in[0,T]} \left\{ \left| t^{r_j} f_{qk}^l(t) \right| \right\} dt \leqslant \\ &\leqslant C_2 \left(1 + |\mu_k|\right)^{(mn-1)N} \max_{t\in[0,T]} \left\{ t^{r_j} \exp\left(-C_H |\mu_k|^h t\right) \right\} \leqslant \\ &\leqslant C_3 \left(1 + |\mu_k|\right)^{(mn-1)N - hr_j}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \ l \in \{1, \ldots, m\}. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Позначимо через $d_{rq}(\mu_k) := \alpha_j \delta_{rq} + \beta_j \int_0^T t^{r_j} f_{qk}^l(t)\, dt$ елемент визначника $\Delta(\mu_k, T)$, який стоїть на перетині r-го рядка, $r = m(j-1)+l$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $l \in \{1, \ldots, m\}$, та q-го стовпця, $q \in \{1, \ldots, mn\}$, δ_{rq} — символ Кронекера. З (4.72) випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > \max\{D_1^{-1/\theta_1}, K_1\}$,, виконуються оцінки

$$|d_{rq}(\mu_k)| \leqslant \begin{cases} C_4 \left(1 + |\mu_k|\right)^{\psi_j(\beta_j)}, & r = q, \\ C_4 \left(1 + |\mu_k|\right)^{(mn-1)N - hr_j}, & r \neq q, \end{cases} \qquad r, q \in \{1, \ldots, mn\}. \tag{4.73}$$

На підставі (4.73) та структури алгебричних доповнень $\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)$ отримуємо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > \max\{D_1^{-1/\theta_1}, K_1\}$, виконуються нерівності

$$\left|\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)\right| \leqslant C_5 \left(1 + |\mu_k|\right)^{(mn-1)N - \psi_j(\beta_j) + m\sum_{g=1}^n \psi_g(\beta_g)}.$$

де $l \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $q \in \{1, \ldots, mn\}$. Лему доведено. □

Теорема 4.8. *Нехай справджується умова* (2.24) *та існують сталі* $\eta > 0$, $\sigma > 0$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості)* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| \geqslant (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp\left(-\sigma |\mu_k|^h\right). \tag{4.74}$$

Якщо $\varphi_j \in \overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\xi_j, \sigma+\beta, h}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *де* $\xi_j = \alpha + \eta + (2mn+1)N - \psi_j(\beta_j) + m\sum_{g=1}^n \psi_g(\beta_g)$, *то існує єдиний розв'язок задачі*(4.50), (4.50) *із простору*

$C^n\left([0,T],\overline{W}^{\alpha,\beta,h}_{\mathcal{M},m}\right)$. *Цей розв'язок зображається формулою* (4.68) *і справджує оцінку*

$$\left\|u;C^n\left([0,T],\overline{W}^{\alpha,\beta,h}_{\mathcal{M},m}\right)\right\| \leqslant C_6\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_j;\overline{W}^{\xi_j,\sigma,h}_{\mathcal{M},m}\right\|, \quad C_6=C_6(n,m,C_2,C_5).$$

Доведення. Доведення проводиться за схемою доведення теореми (3.9) з урахуванням лем 4.2 та 4.3. □

4.2.4. З'ясуємо можливість виконання нерівності (4.74). Позначимо: $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n), r=r_1+\dots+r_n$, $\Gamma_k=(\gamma_{1k},\dots,\gamma_{mn,k})$, $(J,\Gamma_k)=j_1\gamma_1+\dots+j_{mn}\gamma_{mn,k}$, $J\in\mathcal{J}_{mn}$, $\mathbf{E}_q$ – матриця розміру $q\times q$ всі елементи якої є одиницями.

Позначимо також через $\vec{h}_{jk}$, $j\in\{1,\dots,mn\}$, деякий ненульовий стовпець матриці $\mathbf{L}^*(\gamma_{jk},i\mu_k)$, яка є приєднаною до матриці $\mathbf{L}(\gamma_{jk},i\mu_k)$; $H(\mu_k)=\det\left\|\gamma_{jk}^{q-1}\vec{h}_{jk}\right\|_{q=1,\dots,n}^{j=1,\dots,mn}$, де індекс j нумерує стовпці, а q — рядки,

$$\Delta_1(\mu_k,T)=\det\left\|\vec{h}_{jk}\left(\alpha_q\gamma_{jk}^{q-1}+\beta_qI_q(\gamma_{jk})\right)\right\|_{q=1,\dots,n}^{j=1,\dots,mn}, \tag{4.75}$$

$$I_q(z)=\int_0^T t^{r_q}\exp(zt)dt=Q_q(z,T)\exp(zT)-Q_q(z,0), q\in\{1,\dots,n\}, \tag{4.76}$$

$$Q_q(z,T)=\sum_{l=1}^{r_q+1}\frac{(-1)^{l+1}r_q!}{(r_q-l+1)!}\frac{T^{r_q-l+1}}{z^l}. \tag{4.77}$$

Визначники $\Delta(\mu_k,T)$ і $\Delta_1(\mu_k,T)$ пов'язані між собою співвідношенням

$$\Delta_1(\mu_k,T)=H(\mu_k)\Delta(\mu_k,T). \tag{4.78}$$

Як і в п. 3.3.4, на підставі (4.75)-(4.78), показуємо, що $\Delta(\mu_k,T)$, як функція змінної T, є квазімногочленом відносно T і зображується формулою

$$\Delta(\mu_k,T)=\frac{1}{H(\mu_k)}\sum_{J\in\mathcal{J}_{nm}}F_J(T)\exp((J,\Gamma_k)T), \tag{4.79}$$

де $F_J(T)$ — многочлени з комплексними коефіцієнтами степеня N_J, $N_J\leqslant mr$, $J\in\mathcal{J}_{mn}$, а кількість доданків із різними експонентами не перевищує

2^{mn}. Для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}$ розглянемо функцію $D_k := D(\mu_k, \tau)$ яка визначена формулою (4.79) в якій T треба замінити на τ. Через $E(D_k, \varepsilon, [0, T_0])$, $T_0 > 0$, позначимо множину тих $\tau \in [0, T_0]$, $T_0 > 0$, для яких виконується нерівність $|D(\mu_k, \tau)| \leqslant \varepsilon$. Для квазімногочлена $D(\mu_k, \tau)$ позначимо

$$R := \sum_{J\in \mathrm{Im}_{mn}} (1 + N_J) \leqslant 2^{mn}(1 + mr), \quad r = r_1 + \cdots + r_n, \tag{4.80}$$

$$B(\mu_k) := 1 + \max_{J\in\mathcal{J}_{mn}} |(J, \Gamma_k)|, \quad \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}, \tag{4.81}$$

$$\Psi(\mu_k) := \max_{\tau\in[0,T_0]} \exp\left(-\left(\min_{J\in\mathcal{J}_{mn}} \mathrm{Re}(J, \Gamma_k)\right)\tau\right), \quad \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}, \tag{4.82}$$

$$G(\mu_k) := \max_{1\leqslant j\leqslant R} \left\{|(\partial/\partial\tau)^{j-1} D(\mu_k, \tau)|_{\tau=0} (B(\mu_k))^{-j}\right\}, \quad \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}. \tag{4.83}$$

Враховуючи (4.71), (4.81), отримуємо

$$B(\mu_k) \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{mn} |\gamma_{jk}| \leqslant C_8 \left(1 + |\mu_k|\right)^N, \quad C_8 = mnC_1,\ \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}. \tag{4.84}$$

Із (4.82) випливає, що

$$\Psi(\mu_k) = C_9 \exp\left(2^{N-1} mnC_1T_0 \left|\mu_k\right|^N\right), \quad C_9 = \exp\left(2^{N-1} mnC_1T_0\right), \tag{4.85}$$

яка виконується для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Оцінимо тепер величину $G(\mu_k)$ із (4.83). В околі точки $t = 0$ справедливі розвинення

$$\exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right) = \mathbf{I}_{mn} + \mathcal{L}(i\mu_k)t + \cdots + \left(\mathcal{L}(i\mu_k)\right)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + o(t^{n-1})\mathbf{E}_{mn},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) \exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t)\mathcal{L}(i\mu_k)t + \mathbf{R}(t)\left(\mathcal{L}(i\mu_k)\right)^2 \frac{t^2}{2} + \cdots \\ + \mathbf{R}(t)\left(\mathcal{L}(i\mu_k)\right)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + o(t^{n-1})\mathbf{R}(\tau)\mathbf{E}_{mn}, \end{aligned} \tag{4.86}$$

де кожен стовпець матриці $o(t^{n-1})\mathbf{R}(t)\mathbf{E}_{mn}$ має вигляд

$$\mathrm{col}(\underbrace{o(t^{r_1+n-1}), \ldots, o(t^{r_1+n-1})}_{m}, \ldots, \underbrace{o(t^{r_n+n-1}), \ldots, o(t^{r_n+n-1})}_{m}). \tag{4.87}$$

Безпосередніми обчисленнями знаходимо, що

$$\mathbf{R}(t)\left(\mathcal{L}(i\mu_k)\right)^q = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_m & \cdots & \mathbf{O}_m & t^{r_1}\mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m & \cdots & \mathbf{O}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{\mathbf{O}_m \quad \cdots \quad \mathbf{O}_m}_{q} & & & t^{r_n}\mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m & \cdots & \mathbf{O}_m \end{pmatrix}, \tag{4.88}$$

де $q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$\sum_{q=0}^{n-1} \mathbf{R}(t)\left(\mathcal{L}(i\mu_k)\right)^q \frac{t^q}{q!} = \begin{pmatrix} t^{r_1}\mathbf{I}_m & \frac{t^{r_1+1}}{1!}\mathbf{I}_m & \ldots & \frac{t^{r_1+n-1}}{(n-1)!}\mathbf{I}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{r_n}\mathbf{I}_m & \frac{t^{r_n+1}}{1!}\mathbf{I}_m & \ldots & \frac{t^{r_n+n-1}}{(n-1)!}\mathbf{I}_m \end{pmatrix}. \tag{4.89}$$

На підставі формул (4.66), (4.86)-(4.89) отримуємо, що

$$\begin{aligned} D(\mu_k, \tau) &= \det \left\| \mathbf{A} + \mathbf{B} \int_0^\tau \mathbf{R}(t) \exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right) dt \right\| = \\ &= \det \left(\left\| \left(\alpha_j \delta_{jq} + \beta_j \frac{\tau^{r_j+q}}{(r_j+q)(q-1)!} \right) \mathbf{I}_m + o(\tau^{r_j+n})\mathbf{E}_m \right\|_{j,q=1}^{n} \right). \end{aligned} \tag{4.90}$$

Нехай в умовах (4.51) $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{j_1, \ldots, j_l\}$, $1 \leqslant l \leqslant n$; $\{q_1, \ldots, q_{n-l}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_l\}$. Тоді кожен q_s-тий рядок, $1 \leqslant s \leqslant n-l$, блочної матриці з (4.90) має вигляд

$$\begin{aligned} \Bigg(\beta_{q_s} \frac{\tau^{r_{q_s}+1}}{(r_{q_s}+1)} \mathbf{I}_m + o(\tau^{r_{q_s}+n})\mathbf{E}_m, \ldots, \\ \beta_{q_s} \frac{\tau^{r_{q_s}+n}}{(r_{q_s}+n)(n-1)!} \mathbf{I}_m + o(\tau^{r_{q_s}+n})\mathbf{E}_m \Bigg), \end{aligned} \tag{4.91}$$

а кожен j_s-тий рядок, $1 \leqslant s \leqslant l$, подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \big(o(\tau^{r_{j_s}+1})\mathbf{E}_m, \ldots, o(\tau^{r_{j_s}+j_s-1})\mathbf{E}_m, \alpha_{j_s}\mathbf{I}_m + o(\tau^{r_{j_s}+j_s})\mathbf{E}_m, \\ o(\tau^{r_{j_s}+j_s+1})\mathbf{E}_m, \ldots, o(\tau^{r_{j_s}+n})\mathbf{E}_m \big). \end{aligned} \tag{4.92}$$

На підставі (4.90), враховуючи (4.91), (4.92) та елементарні властивості визначників, отримуємо таке розвинення в околі точки $\tau = 0$ для функції

$D(\mu_k, \tau)$:

$$D(\mu_k, \tau) = \prod_{s=1}^{l} (\alpha_{j_s})^m \det \left\| \frac{\tau^{r_y+z}}{(r_y+z)(z-1)!} \mathbf{I}_m \right\|_{y,z\in\{q_1,\dots,q_{n-l}\}} + \\ + o\left(\tau^{m\sum_{s=1}^{n-l}(r_{q_s}+q_s)}\right). \tag{4.93}$$

Функцію $D(\mu_k, \tau)$, виражену формулою (4.93), можна зобразити у вигляді

$$D(\mu_k, \tau) = \prod_{s=1}^{l} (\alpha_{j_s})^m \det\left(\mathbf{D}(\tau) \otimes \mathbf{I}_m\right) + o(\tau^{m\eta_0(\vec{\alpha})}), \tag{4.94}$$

де

$$\mathbf{D}(\tau) := \left\| \frac{\tau^{r_y+z}}{(r_y+z)(z-1)!} \right\|_{y,z\in\{q_1,\dots,q_{n-l}\}}, \tag{4.95}$$

$$\eta_0(\alpha) = r_{q_1} + \dots + r_{q_{n-l}} + q_1 + \dots + q_{n-l}, \tag{4.96}$$

а $\mathbf{D}(\tau) \otimes \mathbf{I}_m$ – тензорний добуток [60] матриць $\mathbf{D}(\tau)$ та $\mathbf{I}_m$. З властивостей тензорного добутку випливає, що

$$D(\mu_k, \tau) = \prod_{s=1}^{l} (\alpha_{j_s})^m \left(\det \mathbf{D}(\tau)\right)^m + o(\tau^{m\eta_0(\alpha)}). \tag{4.97}$$

Визначник матриці (4.95) зображується формулою (див. [77, с. 110])

$$\det \mathbf{D}(\tau) = \tau^{\eta_0(\alpha)} \det \left\| \frac{\beta_y}{(r_y+z)(z-1)!} \right\|_{y,z\in\{q_1,\dots,q_{n-l}\}} = C_{10}\tau^{\eta_0(\alpha)}. \tag{4.98}$$

де

$$C_{10} = \tau^{\eta_0(\alpha)} \prod_{s=1}^{n-l} \frac{\beta_{q_s}}{(q_s-1)!} \prod_{\substack{y,z\in\{q_1,\dots,q_{n-l}\}\\ z<y}} ((r_y - r_z)(y-z)) \prod_{y,z\in\{q_1,\dots,q_{n-l}\}} (r_y+z)^{-1}.$$

На підставі (4.97), (4.98) отримуємо

$$D(\mu_k, \tau) = C_{11}\tau^{m\eta_0(\alpha)} + o(\tau^{m\eta_0(\alpha)}), \quad C_{11} = (C_{10})^m \prod_{s=1}^{l} (\alpha_{j_s})^m. \tag{4.99}$$

З (4.99) випливає, що виконуються такі рівності:

$$\left.\frac{d^q D(\mu_k, \tau)}{d\tau^q}\right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, \quad q < m\eta_0(\alpha), \\ (m\eta_0(\alpha))! C_{11}, \ q = m\eta_0(\alpha). \end{cases} \tag{4.100}$$

З (4.81), (4.83) та (4.100) одержуємо для кожного $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$ оцінку

$$G(\mu_k) \geqslant C_{11}(m\eta_0(\alpha))!\,(B(\mu_k))^{-m\eta(\alpha)-1} \geqslant C_{12}\,(1+|\mu_k|)^{-(m\eta(\alpha)+1)N}\,, \quad (4.101)$$

де $C_{12} = C_{11}(m\eta_0(\alpha))!(C_8)^{-mN\eta(\alpha)}$.

Теорема 4.9. *Якщо в умовах* (4.51) $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{j_1, \ldots, j_l\}$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T \in [0, T_0]$, $T_0 > 0$, *нерівність* (4.74) *справджується для всіх (крім скінченої кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$, *коли* $\sigma = 2^{N-1}mnC_1T_0$, *а*

$$\eta > (m\eta_0(\alpha)+1)N + 2^{mn}\left(\frac{p}{\theta_1}+1\right)(1+mr)\,,$$

де $\eta_0(\alpha)$ *— визначена формулою* (4.96), *а* θ_1 *— стала з формули* (2.2).

Доведення. Доведення проводиться за схемою доведення теореми 3.10 з урахуванням оцінок (4.84), (4.85) та (4.101). □

Якщо $n = 1$, тобто система (4.50) є системою першого порядку за змінною t, то з формул (4.75) і (4.78) випливає, що

$$\Delta(\mu_k, T) = \prod_{j=1}^{m} (\alpha_1 + \beta_1 I_1(\gamma_{jk})) \quad (4.102)$$

і, у цьому випадку, у задачі (4.50), (4.51) відсутня проблема малих знаменників. Це показує наступна теорема.

Теорема 4.10. *Якщо* $n = 1$, *то оцінка*

$$|\Delta(\mu_k, T)| \geqslant \begin{cases} \frac{1}{2^m}\,|\alpha_1|^m\,, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \\ \frac{1}{2^m}\,|\beta_1|^m \left(r_1!(C_1)^{-r_1-1}\right)^m (1+|\mu_k|)^{-(r_1+1)mN}\,, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

справджується для довільних фіксованих параметрів задачі (4.50), (4.51) *і для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Доведення. Нехай $\alpha_1 \neq 0$. Якщо $\beta_1 = 0$, то оцінка очевидна. Якщо ж $\beta_1 \neq 0$, то на підставі (4.54), (4.76) та (4.77) отримуємо оцінки

$$|I_1(\gamma_{jk})| \leqslant C_{13}\,(1+|\mu_k|)^{-hr_1}\,, \quad j \in \{1, \ldots, m\}\,,\ |k| > K_1, \quad (4.103)$$

де $C_{13} = (r_1/(2C_H))^{r_1}T$ і які встановлюються аналогічно до оцінок (4.71). З (4.103) випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > K_3$, де $K_3 = \max\left\{K_1, d_1^{-\theta_1}\left(|\alpha_1| / (2|\beta_1| C_{13})^{1/(h\theta_1 r_1)}\right)\right\}$, виконується нерівність

$$|\beta_1| \, |I_1(\gamma_{jk})| \leqslant \frac{1}{2} |\alpha_1| \, . \tag{4.104}$$

Тоді на підставі (4.102), враховуючи (4.104), отримуємо, що оцінка

$$|\Delta(\mu_k, T)| = \prod_{j=1}^{m} |\alpha_1 + \beta_1 I_1(\gamma_{jk})| \geqslant \frac{1}{2^m} |\alpha_1|^m \tag{4.105}$$

виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > K_3$.

Нехай тепер $\alpha_1 = 0$. Позначимо через Y розв'язок функціонального рівняння $C_{13} \exp(-C_H T y) = y^{-(r_1+1)(N-h)}$. З формул (4.71), (4.76) та (4.77) випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > K_4$, де $K_4 = (Y/d_1)^{1/(h\theta_1)}$, виконуються такі оцінки:

$$|I_1(\gamma_{jk})| \geqslant \frac{1}{2} |Q_1(\gamma_{jk}, 0)| \geqslant C_{14} \left(1 + |\mu_k|\right)^{-(r_1+1)N} , \tag{4.106}$$

де $C_{14} = r_1!(C_1)^{-r_1-1}/2$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. З (4.102), враховуючи (4.106), отримуємо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > K_4$

$$|\Delta(\mu_k, T)| = \prod_{j=1}^{m} |\beta_1 I_1(\gamma_{jk})| \geqslant |\beta_1|^m (C_{14})^m \left(1 + |\mu_k|\right)^{-(r_1+1)mN} . \tag{4.107}$$

З нерівностей (4.105) та (4.107) випливає доведення теореми. □

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

Четвертий розділ дисертації присвячений дослідженню у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій з заданим спектром коректності задач з умовами за часовою змінною, частинним випадком яких є інтегральні умови у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції та:

1) багатоточкові умови для параболічного за Петровським рівняння зі змінними за часом коефіцієнтами;

2) початкові умови для системи рівнянь зі сталими коефіцієнтами, параболічної за Шиловим.

Встановлено умови коректності розглянутих задач у відповідних функціональних просторах. Побудовано явні формули для їх розв'язків. Доведено метричні теореми про оцінку знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку. Виділено випадки коли у задачі відсутня проблема малих знаменників.

Основні результати розділу опубліковано у [50, 57].

РОЗДІЛ 5
ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ НЕКЛАСИЧНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

5.1. Задача для мішаного параболо-гіперболічного рівняння

У цьому підрозділі розглядається задача з нелокальною умовою за часом, що містить інтеграл від шуканої функції, для параболо-гіперболічного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій. Результати цього підрозділу опубліковані у [59].

5.1.1. В області $\mathcal{D}^p$ розглядаємо задачу про знаходження функції $u := u(t,x)$, яка є майже періодичною за x зі спектром $\mathcal{M}$ і справджує наступні умови:

$$\begin{cases} \partial_t u - a\Delta u = 0, \quad (t,x) \in \mathcal{D}^p_+, \\ \partial_t^2 u - b^2 \Delta u = 0, \quad (t,x) \in \mathcal{D}^p_-, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\alpha u(-T_1,x) + \beta u(T_2,x) + \gamma \int\limits_{-T_1}^{T_2} u(t,x)dt = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{5.2}$$

$$u \in C^1([-T_1,T_2]; W^{q,s,2}_{\mathcal{M}}) \cap C^2([-T_1,0], W^{q,s,2}_{\mathcal{M}}), \quad q \in \mathbb{R}, s \geqslant 0, \tag{5.3}$$

де $a > 0$, $b > 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, $\alpha + \beta + \gamma(T_1 + T_2) \neq 0$, функція $\varphi(x)$ є майже періодичною зі спектром $\mathcal{M}$,

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k, x), \tag{5.4}$$

5.1.2. Розв'язок задачі (5.1)-(5.3) шукатимемо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k, x), \quad \mu_k \in \mathcal{M}. \tag{5.5}$$

Із означення простору $C^1([-T_1,T_2],W^{q,s,2}_{\mathcal{M}})$ випливає, що кожна з функцій $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, із (5.5) належить простору $C^1[-T_1,T_2]$, тобто задовольняє умови спряження

$$u_k(0-0)=u_k(0+0),\quad u_k'(0-0)=u_k'(0+0). \tag{5.6}$$

Підставивши ряди (5.4), (5.5) у рівняння (5.1) та умову (5.2), отримуємо, що коефіцієнти $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, крім умов (5.6), повинні задовольняти ще такі умови:

$$\begin{cases} u_k'(t)-a\|\mu_k\|^2u_k(t)=0, & 0<t<T_2,\\ u_k''(t)-b^2\|\mu_k\|^2u_k(t)=0, & -T_1<t<0,\end{cases} \tag{5.7}$$

$$\alpha u_k(-T_1)+\beta u_k(T_2)+\gamma\int\limits_{-T_1}^{T_2}u_k(t)dt=\varphi_k. \tag{5.8}$$

Якщо $k=\vec{0}$ ($\mu_{\vec{0}}=\vec{0}$), то задача (5.6)-(5.8) має єдиний розв'язок

$$u_{\vec{0}}=\frac{\varphi_{\vec{0}}}{\alpha+\beta+\gamma(T_1+T_2)}. \tag{5.9}$$

Якщо $k\neq\vec{0}$ ($\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}$), то загальний розв'язок рівняння (5.7) є таким:

$$u_k(t)=\begin{cases} C_{1k}\exp(-a\|\mu_k\|^2t), & 0<t\leqslant T_2,\\ C_{2k}\cos(b\|\mu_k\|t)+C_{3k}\sin(b\|\mu_k\|t), & -T_1\leqslant t<0.\end{cases} \tag{5.10}$$

Підставляючи (5.10) в умови (5.6), (5.8), отримуємо для знаходження коефіцієнтів C_{1k}, C_{2k}, C_{3k} систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_{1k}-C_{2k}=0,\\ \frac{a}{b}\|\mu_k\|C_{1k}+C_{3k}=0,\\ \left(\frac{\gamma+(\beta a\|\mu_k\|^2-\gamma)\exp(-a\|\mu_k\|^2T_2)}{a\|\mu_k\|^2}\right)C_{1k}+\\ \qquad+\left(\alpha\cos(b\|\mu_k\|T_1)+\frac{\gamma\sin(b\|\mu_k\|T_1)}{b\|\mu_k\|}\right)C_{2k}+\\ \qquad\qquad+\left(\frac{\gamma(\cos(b\|\mu_k\|T_1)-1)}{b\|\mu_k\|}-\alpha\sin(b\|\mu_k\|T_1)\right)C_{3k}=\varphi_k,\end{cases} \tag{5.11}$$

визначник якої зображується формулою

$$\begin{aligned}\Delta(\mu_k, T_1, T_2) = \frac{1}{ab^2\|\mu_k\|^2}\Big(&a^2\gamma\|\mu_k\|^2+\\ &+ b^2\big(\gamma + (a\beta\|\mu_k\|^2 - \gamma)\exp(-a\|\mu_k\|^2 T_2)\big)+\\ &+ a\left(\alpha b^2 - a\gamma\right)\|\mu_k\|^2\cos(b\|\mu_k\|T_1)+\\ &+ ab(a\alpha\|\mu_k\|^2 + \gamma)\|\mu_k\|\sin(b\|\mu_k\|T_1)\Big),\end{aligned} \tag{5.12}$$

де $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$.

Система (5.11) має єдиний розв'язок тоді і лише тоді, коли $\Delta(\mu_k, T_1, T_2) \neq 0$, $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$. Легко показати (методом від супротивного), що задача (5.6)-(5.8) не може мати двох різних розв'язків для тих і лише для тих $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$, для яких $\Delta(\mu_k, T_1, T_2) \neq 0$.

Теорема 5.1. *Для єдиності розв'язку задачі* (5.1)–(5.2) *у шкалі просторів* $C^1([-T_1, T_2]; W^{q,s,2}_{\mathcal{M}}) \cap C^2([-T_1, 0], W^{q,s,2}_{\mathcal{M}})$ *необхідно і досить, щоб виконувалася умова*

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\} \qquad \Delta(\mu_k, T_1, T_2) \neq 0. \tag{5.13}$$

Доведення. Проводиться за схемою доведення твердження 2.3. □

5.1.3. За умови (5.13) для кожного $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$ розв'язок задачі (5.6)-(5.8) визначається формулою

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_k \exp(-a\|\mu_k\|^2 t)}{\Delta(\mu_k, T_1, T_2)}, & 0 \leqslant t \leqslant T_2, \\ \dfrac{\varphi_k\left(\cos(b\|\mu_k\|t) - \frac{a}{b}\|\mu_k\|\sin(b\|\mu_k\|t)\right)}{\Delta(\mu_k, T_1, T_2)}, & -T_1 \leqslant t \leqslant 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

Враховуючи (5.9), отримуємо, що формальний розв'язок задачі (5.1)-(5.3) зображується рядом

$$u(t, x) = \frac{\varphi_{\vec{0}}}{\alpha + \beta + \gamma(T_1 + T_2)} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}} u_k(t)\exp(i\mu_k, x), \tag{5.15}$$

де $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}$, визначені формулами (5.14).

Ряд (5.15), взагалі, є розбіжним, бо вираз $|\Delta(\mu_k, T_1, T_2)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Теорема 5.2. *Нехай виконується умова* (5.13) *та існують сталі* $\eta, \nu \in \mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується оцінка*

$$|\Delta(\mu_k, T_1, T_2)| \geqslant (1 + \|\mu_k\|)^{-\eta} \exp(-\nu \|\mu_k\|^2). \tag{5.16}$$

Якщо $\varphi \in W_{\mathcal{M}}^{q+\eta+3, s+\nu, 2}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (5.1)–(5.3). *Цей розв'язок зображується рядом* (5.15), *причому*

$$\max\{\|u; C^1([-T_1, T_2]; W_{\mathcal{M}}^{q,s,2})\|, \|u; C^2([-T_1, 0]; W_{\mathcal{M}}^{q,s,2})\|\} \leqslant$$

$$\leqslant 3C_1 \|\varphi; W_{\mathcal{M}}^{q+\eta+3, s+\nu, 2}\|,$$

де $C_1 = \max\{1, b, b^2, a, ab, a/b, |\alpha + \beta + \gamma(T_1 + T_2)|^{-1}\}$.

Доведення. З (2.3), (5.9), (5.14) та (5.16) випливають такі оцінки:

$$\max_{t \in [-T_1, T_2]} \left| u_k^{(j)}(t) \right| \leqslant C_1 (1 + |\mu_k|)^{\eta + 2j} \exp(\nu |\mu_k|^2) |\varphi_k|, \quad j \in \{0, 1\}, \tag{5.17}$$

$$\max_{t \in [-T_1, 0]} \left| u_k^{(j)}(t) \right| \leqslant C_1 (1 + |\mu_k|)^{\eta + j + 1} \exp(\nu |\mu_k|^2) |\varphi_k|, \quad j \in \{0, 1, 2\}. \tag{5.18}$$

На підставі (5.15), (5.17) отримуємо

$$\begin{aligned} &\|u; C^1([-T_1, T_2]; W_{\mathcal{M}}^{q,s,2})\| \leqslant \\ &\leqslant C_1 \sum_{j=0}^{1} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \max_{t \in [-T_1, T_2]} |u_k^{(j)}(t)|^2 (1 + |\mu_k|)^{2q} \exp(2s|\mu_k|^2) \right)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant 2C_1 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |\varphi_k|^2 (1 + |\mu_k|)^{2q + 2\eta + 4} \exp(2(s + \nu)|\mu_k|^2) \right)^{1/2} = \\ &= 2C_1 \|\varphi; W_{\mathcal{M}}^{q+\eta+2, s+\nu, 2}\|. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Аналогічно, на підставі (5.15) та (5.18), одержуємо таку оцінку:

$$\|u; C^2([-T_1, 0]; W_{\mathcal{M}}^{q,s,2})\| \leqslant 3C_1 \|\varphi; W_{\mathcal{M}}^{q+\eta+3, s+\nu, 2}\|. \tag{5.20}$$

З оцінок (2.4), (5.19) та (5.20) випливає оцінка

$$\max\{\|u; C^1([-T_1, T_2]; W^{q,s,2}_{\mathcal{M}})\|, \|u; C^2([-T_1, 0]; W^{q,s,2}_{\mathcal{M}})\|\} \leqslant$$

$$\leqslant 3C_1\|\varphi; W^{q+\eta+3,s+\nu,2}_{\mathcal{M}}\|.$$

З отриманої нерівності випливає доведення теореми. □

5.1.4. З'ясуємо можливість виконання нерівності (5.16).

Теорема 5.3. *Нехай в умові* (5.2) $\alpha = 0$ *і* $\gamma \neq 0$. *Тоді для довільних фіксованих* a, b, T_1, T_2, β *та для довільного* $m \in \mathbb{R}$, $m > 2$, *нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T_1, T_2)| \geqslant \frac{|\gamma|(m-2)}{2ma}(1 + \|\mu_k\|)^{-2}$$

виконується для всіх векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ *таких, що* $\|\mu_k\|^2 > K(m)$, *де*

$$K(m) = \max\left\{1, \frac{2m\,(1 + |a\beta/\gamma|)}{a^2T_2^2}\right\}.$$

Доведення. Формула (5.12) при $\alpha = 0$ набуває вигляду

$$\Delta(\mu_k, T_1, T_2) = \frac{\gamma}{ab^2\|\mu_k\|^2}\big(\Delta_1(\mu_k, T_1) + \Delta_2(\mu_k, T_2)\big), \quad \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}, \tag{5.21}$$

де

$$\Delta_1(\mu_k, T_1) = a^2\|\mu_k\|^2\,(1 - \cos(b\|\mu_k\|T_1)) + ab\|\mu_k\|\sin(b\|\mu_k\|T_1), \tag{5.22}$$

$$\Delta_2(\mu_k, T_2) = b^2\left(1 + \frac{a\beta\gamma^{-1}\|\mu_k\|^2 - 1}{\exp(a\|\mu_k\|^2T_2)}\right). \tag{5.23}$$

Здійснивши елементарні перетворення, вираз (5.22) перепишемо у такій формі:

$$\Delta_1(\mu_k, T_1) = a^2\|\mu_k\|^2 + a\|\mu_k\|\sqrt{b^2 + a^2\|\mu_k\|^2}\sin(b\|\mu_k\|T_1 - \psi_k), \tag{5.24}$$

де $\psi_k = \arctan\big(ab^{-1}\|\mu_k\|\big)$, $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$. Очевидно, що

$$\begin{aligned}\Delta_1(\mu_k, T_1) &\geqslant a^2\|\mu_k\|^2 - a\|\mu_k\|\sqrt{b^2 + a^2\|\mu_k\|^2} = \\ &= a^2\|\mu_k\|^2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2\|\mu_k\|^2}}\right) = \\ &= -\,b^2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2\|\mu_k\|^2}}\right)^{-1} \geqslant -\frac{b^2}{2}.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Оцінимо тепер $\Delta_2(\mu_k, T_2)$. На підставі очевидної нерівності

$$\exp(a\|\mu_k\|^2 T_2) > \frac{(a\|\mu_k\|^2 T_2)^2}{2},$$

яка виконується для довільних $a > 0$, $T_2 > 0$, $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$, отримуємо, що для всіх $\|\mu_k\|^2 \geqslant K(m)$ виконується оцінка

$$\begin{aligned} \left|\frac{a\beta\gamma^{-1}\|\mu_k\|^2 - 1}{\exp(a\|\mu_k\|^2 T_2)}\right| &\leqslant 2\left|\frac{a\beta\gamma^{-1}\|\mu_k\|^2 - 1}{a^2 T_2^2 \|\mu_k\|^4}\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{2}{a^2 T_2^2 \|\mu_k\|^2}\left|\left|a\beta\gamma^{-1}\right| + \frac{1}{\|\mu_k\|^2}\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{2(1+|a\beta/\gamma|)}{a^2 T_2^2 \|\mu_k\|^2} \leqslant \frac{2(1+|a\beta/\gamma|)}{a^2 T_2^2 K(m)} \leqslant \frac{1}{m}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

З (5.23) та (5.26) випливає, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ таких, що $\|\mu_k\|^2 \geqslant K(m)$ справджується нерівність

$$\Delta_2(\mu_k, T_2) = b^2\left(1 + \frac{a\beta\gamma^{-1}\|\mu_k\|^2 - 1}{\exp(a\|\mu_k\|^2 T_2)}\right) > b^2\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{m-1}{m}b^2. \tag{5.27}$$

На підставі (5.25) і (5.27), отримуємо, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ таких, що $\|\mu_k\|^2 > K(m)$, $m > 2$, справедлива нерівність $\Delta_1(\mu_k, T_1) + \Delta_2(\mu_k, T_2) > \frac{m-2}{2m}b^2$ і, враховуючи (5.21),

$$|\Delta(\mu_k, T_1, T_2)| > \frac{m-2}{2ma}\frac{|\gamma|}{\|\mu_k\|^2} > \frac{|\gamma|(m-2)}{2ma}(1 + \|\mu_k\|)^{-2}.$$

Теорему доведено. □

Зауваження 5.1. Якщо в (5.2) $\alpha = \gamma = 0$, то визначник $\Delta(\mu_k, T_1, T_2) := \widetilde{\Delta}(\mu_k, T_2)$ зображується формулою

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T_2) = \beta \exp(-a\|\mu_k\|^2 T_2),$$

з якої випливає, що для довільних фіксованих a, b, T_2 та $\beta \neq 0$ оцінка (5.16) справджується для всіх $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$ при $\eta = 0$ і $\nu = aT_2$.

Зауваження 5.2. З теореми 5.3 та зауваження 5.1 випливає, що при $\alpha = 0$ розв'язність задачі (5.1)-(5.3) не пов'язана з проблемою малих знаменників.

Теорема 5.4. *Нехай $\alpha \neq 0$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T_1 > 0$ та для довільних фіксованих a, b, β, γ, T_2 оцінка* (5.16) *справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$, якщо $\nu = 0$ та $\eta > p/\theta_1 - 1$.*

Доведення. Формулу (5.12) можна подати у такому вигляді:

$$\Delta(\mu_k, T_1, T_2) = \frac{A(\mu_k)\sin(b\|\mu_k\|T_1 + \psi_k) + B(\mu_k, T_2)}{ab^2\|\mu_k\|^2}, \tag{5.28}$$

де

$$A(\mu_k) = a\|\mu_k\|\sqrt{a^2b^2\alpha^2\|\mu_k\|^4 + (b^4\alpha^2 + a^2\gamma^2)\,\|\mu_k\|^2 + b^2\gamma^2}, \tag{5.29}$$

$$B(\mu_k, T_2) = a^2\gamma\|\mu_k\|^2 + b^2\left(\gamma + (a\beta\|\mu_k\|^2 - \gamma)\exp(-a\|\mu_k\|^2T_2)\right), \tag{5.30}$$

$$\psi_k = \arctan\frac{(\alpha b^2 - a\gamma)\|\mu_k\|}{ab\alpha\|\mu_k\|^2 + \gamma b}.$$

Зафіксуємо a, b, β, γ, T_2 та $\alpha \neq 0$. Позначимо через E множину тих чисел T_1 з деякого інтервалу $(0, T_0]$, $T_0 > 0$, для яких нерівність

$$|\Delta(\mu_k, T_1, T_2)| \leqslant \|\mu_k\|^{1-p/\theta_1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \tag{5.31}$$

виконується для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$. Через $\mathcal{M}_1$ позначимо множину векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ таких, що $\|\mu_k\| \leqslant K_1$, $K_1 = \max\{1, K_2, K_2^{\theta_1/p}\}$, де

$$K_2 = \frac{2(ab^2(|\beta| + 1) + |\gamma|(a^2 + 2b^2))}{a^2b|\alpha|}.$$

З (2.2) випливає, що до множини $\mathcal{M}_1$ належать усі вектори μ_k, $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких $|k| < (K_1/D_2)^{1/\theta_2}$. Очевидно, що множина $\mathcal{M}_1$ складається зі скінченної кількості елементів.

Нехай $E(\tilde{\mu}_k)$ – множина тих $T_1 \in (0, T_0]$ для яких виконується оцінка (5.31) при фіксованому $\mu_k = \tilde{\mu}_k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1$ $(k = \tilde{k})$. З (5.28) випливає, що нерівність (5.31) еквівалентна такій системі нерівностей:

$$F_1(\tilde{\mu}_k) \leqslant \sin(b\|\tilde{\mu}_k\|T_1 + \psi_{\tilde{k}}) \leqslant F_2(\tilde{\mu}_k), \tag{5.32}$$

де

$$F_1(\tilde{\mu}_k) = \frac{-ab^2\|\tilde{\mu}_k\|^{3-p/\theta_1-\varepsilon} - B(\tilde{\mu}_k, T_2)}{A(\tilde{\mu}_k)}, \tag{5.33}$$

$$F_2(\tilde{\mu}_k) = \frac{ab^2\|\tilde{\mu}_k\|^{3-p/\theta_1-\varepsilon} - B(\tilde{\mu}_k, T_2)}{A(\tilde{\mu}_k)}. \tag{5.34}$$

З (5.29), (5.30) випливають оцінки

$$A(\tilde{\mu}_k) > C_2\|\tilde{\mu}_k\|^3, \quad |B(\tilde{\mu}_k, T_2)| < C_3\|\tilde{\mu}_k\|^2, \tag{5.35}$$

де $C_2 = a^2b|\alpha|$, $C_3 = (a^2 + 2b^2)|\gamma| + b^2a|\beta|$. На підставі (5.33)-(5.35) отримуємо, що справджуються нерівності $F_1(\tilde{\mu}_k) < F_2(\tilde{\mu}_k)$ та

$$\begin{aligned} |F_j(\tilde{\mu}_k)| &\leqslant \frac{ab^2\|\tilde{\mu}_k\|^{3-p/\theta_1-\varepsilon} + c_3\|\tilde{\mu}_k\|^2}{C_2\|\tilde{\mu}_k\|^3} < \\ &< \frac{ab^2 + C_3}{C_2}\max\{\|\tilde{\mu}_k\|^{-p/\theta_1-\varepsilon}, \|\tilde{\mu}_k\|^{-1}\} \leqslant \\ &\leqslant \frac{ab^2 + C_3}{C_2}\max\{K_1^{-p/\theta_1-\varepsilon}, K_1^{-1}\} = \\ &= \frac{K_2}{2}\max\{K_1^{-p/\theta_1-\varepsilon}, K_1^{-1}\}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Якщо $K_2 \leqslant 1$, то $K_1 = 1$ і, відповідно, $K_2\max\{K_1^{-p/\theta_1-\varepsilon}, K_1^{-1}\} \leqslant 1$. Якщо $K_2 > 1$, то з одного боку $K_1 \geqslant K_2$, а тому $K_1^{-1} \leqslant K_2^{-1}$; з другого боку $K_1 \geqslant K_2^{\theta_1/p}$, а тому $K_1^{-p/\theta_1-\varepsilon} \leqslant K_2^{1+\varepsilon\theta_1/p} \leqslant K_2^{-1}$. Отже, при $K_2 > 1$ $K_2\max\{K_1^{-p/\theta_1-\varepsilon}, K_1^{-1}\} \leqslant 1$. З вище сказаного та (5.36) випливають оцінки

$$|F_j(\tilde{\mu}_k)| \leqslant \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2. \tag{5.37}$$

Розв'язок системи нерівностей (5.32) відносно T_1 є об'єднанням інтервалів

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\arcsin F_1(\tilde{\mu}_k) - \psi_{\tilde{k}} + 2\pi n}{b\|\mu_k\|}, \frac{\arcsin F_2(\tilde{\mu}_k) - \psi_{\tilde{k}} + 2\pi n}{b\|\tilde{\mu}_k\|}\right], \\ &\left[\frac{\pi - \arcsin F_2(\tilde{\mu}_k) - \psi_{\tilde{k}} + 2\pi n}{b\|\tilde{\mu}_k\|}, \frac{\pi - \arcsin F_1(\tilde{\mu}_k) - \psi_{\tilde{k}} + 2\pi n}{b\|\tilde{\mu}_k\|}\right], \end{aligned} \tag{5.38}$$

де $n \in \mathbb{Z}$. Оскільки функція $\sin(b\|\tilde{\mu}_k\|T_1 + \psi_{\tilde{k}})$ є періодичною за T_1 з періодом $2\pi/(b\|\tilde{\mu}_k\|)$, то кількість усіх інтервалів (5.38), що потрапляють в

інтервал $(0, T_0]$, не перевищує $(2 + bT_0/\pi)\|\tilde{\mu}_k\|$. Довжина кожного з інтервалів (5.38) дорівнює

$$L_{\tilde{k}} = \frac{\arcsin F_2(\tilde{\mu}_k) - \arcsin F_1(\tilde{\mu}_k)}{b\|\tilde{\mu}_k\|}. \tag{5.39}$$

На підставі (5.39) і теореми Лагранжа про скінченні прирости отримуємо

$$L_{\tilde{k}} = \frac{F_2(\tilde{\mu}_k) - F_1(\tilde{\mu}_k)}{b\|\tilde{\mu}_k\|\sqrt{1 - (\xi(\tilde{\mu}_k))^2}}, \qquad \xi(\tilde{\mu}_k) \in [F_1(\tilde{\mu}_k), F_2(\tilde{\mu}_k)]. \tag{5.40}$$

З (5.37) випливає, що $|\xi(\tilde{\mu}_k)| \leqslant 1/2$ і, відповідно, справджується така оцінка:

$$\sqrt{1 - (\xi(\tilde{\mu}_k))^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{5.41}$$

На підставі (5.33), (5.35), (5.40) та (5.41) отримуємо

$$L_{\tilde{k}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{F_2(\tilde{\mu}_k) - F_1(\tilde{\mu}_k)}{b\|\tilde{\mu}_k\|} \leqslant \frac{4ab}{\sqrt{3}} \frac{\|\tilde{\mu}_k\|^{3-p/\theta_1-\varepsilon}}{\|\tilde{\mu}_k\| A(\tilde{\mu}_k)} \leqslant \frac{4ab}{\sqrt{3}C_2} \|\tilde{\mu}_k\|^{-1-p/\theta_1-\varepsilon}. \tag{5.42}$$

З (2.2) та (5.42) випливає, що для міри множини $E(\tilde{\mu}_k)$ виконується оцінка

$$\begin{aligned} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\tilde{\mu}_k) &\leqslant \left(\frac{bT_0}{\pi} + 2\right) \|\tilde{\mu}_k\| L_{\tilde{k}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{4ab}{\sqrt{3}C_2} \left(\frac{bT_0}{\pi} + 2\right) \|\tilde{\mu}_k\|^{-p/\theta_1-\varepsilon} \leqslant C_4 |\tilde{k}|^{-p-\theta_1\varepsilon}, \end{aligned} \tag{5.43}$$

де $C_4 = 4ab(bT_0 + 2\pi)/(\sqrt{3}\pi C_2 D_1^{p/\theta_1+\varepsilon})$. Підсумовуючи (5.43) по всіх $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1$ отримуємо

$$\sum_{\|\mu_k\| > K_1} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\mu_k) \leqslant \sum_{|k| > (K_1/D_1)^{1/\theta_1}} c_4 |k|^{-p-\theta_1\varepsilon}. \tag{5.44}$$

Оскільки ряд $\sum_{|k|>(K_1/D_1)^{1/\theta_1}} C_4 |k|^{-p-\theta_1\varepsilon}$ є збіжним, то з (5.44) і леми 2.3 випливає, що міра тих $T_1 \in (0, T_0]$, які потрапляють у нескінченну кількість множин $E(\mu_k)$, $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1$, дорівнює нулеві, тобто $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E = 0$. Отже, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) точок $T_1 \in (0, T_0]$ нерівність, протилежна до нерівності (5.31), виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$. Враховуючи, що інтервал $(0, \infty)$ можна покрити зліченною кількістю проміжків вигляду $[0, T_0]$, отримуємо доведення теореми. $\square$

5.2. Задача для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом

5.2.1. В області D^p для рівняння

$$N(\partial_t, \partial_x)[u] := L(\partial_x)\partial_t^n u(t,x) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\partial_x)\partial_t^j u(t,x) = 0,\ (t,x) \in D^p, \quad (5.45)$$

де

$$L(\partial_x) = \sum_{|s|=2d} a_s \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}, \quad a_s \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{N}, \quad (5.46)$$

є еліптичним диференціальним виразом, $A_j(\partial_x) = \sum_{|s|\leqslant d_j} b_{j,s}\partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}$, $b_{j,s} \in \mathbb{R}$, $d_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, досліджуємо у класі функцій майже періодичних за x зі спектром $\mathcal{M}$, задачу з умовами

$$\begin{cases} U_j[u] := \alpha_j \partial_t^{\vartheta_j} u(0,x) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}[u] = \varphi_j(x), \ \ j \in \{1, \ldots, \tilde{n}_1\}, \\ \\ U_j[u] := \alpha_j \partial_t^{\vartheta_j} u(T,x) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}[u] = \varphi_j(x), \ \ j \in \{\tilde{n}_1 + 1, \ldots, n\}, \end{cases} \quad (5.47)$$

де $0 \leqslant \tilde{n}_1 \leqslant n-1$,

$$\mathcal{I}_{r_j}[u] := \int_0^T t^{r_j} u(t,x)dt, \quad r_j \in \mathbb{Z}_+,\ j \in \{1, \ldots, n\},\ r_1 < \ldots < r_n;$$

$\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$; $\vartheta_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $0 \leqslant \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_{\tilde{n}_1} \leqslant n-1$, $0 \leqslant \vartheta_{\tilde{n}_1+1} < \ldots < \vartheta_n \leqslant n-1$; кожна з функцій $\varphi_j(x)$ є майже періодичною із заданим спектром $\mathcal{M}$ та розвивається в ряд Фур'є вигляду

$$\varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k, x), \quad (5.48)$$

Задача (5.45), (5.47) у випадку коли $\beta_j = 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, досліджувалась у роботі [10] у класі 2π-періодичних за x функцій.

5.2.2. Розв'язок задачі (5.45), (5.47) шукаємо в класі майже періодичних за x зі спектром $\mathcal{M}$ функцій у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k,\ x). \quad (5.49)$$

Підставивши ряди (5.48), (5.49) у рівняння (5.45) та умови (5.47), отримуємо для знаходження кожного з коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, відповідно, таку задачу:

$$N\left(\frac{d}{dt}, \mu_k\right)[u_k] := L(\mu_k)u_k^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\mu_k)u_k^{(j)}(t) = 0, \tag{5.50}$$

$$\begin{cases} U_j[u_k] := \alpha_j u_k^{(\vartheta_j)}(0) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}[u_k] = \varphi_{jk}, \quad j \in \{1, \ldots, \tilde{n}_1\}, \\ \\ U_j[u_k] := \alpha_j u_k^{(\vartheta_j)}(T) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}[u_k] = \varphi_{jk}, \quad j \in \{\tilde{n}_1 + 1, \ldots, n\}. \end{cases} \tag{5.51}$$

Розглянемо задачу (5.50), (5.51) при $k = \vec{0}\,(\mu_{\vec{0}} = \vec{0}\,)$. У цьому випадку рівняння (5.50) має вигляд

$$N\left(\frac{d}{dt}, \vec{0}\right)[u_{\vec{0}}] := \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,\vec{0}}\, u_{\vec{0}}^{(j)}(t) = 0, \tag{5.52}$$

оскільки $L(\vec{0}) = 0$, а $A_j(\vec{0}) = b_{j,\vec{0}}$, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Нехай $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \leqslant n-1$, таке що $b_{n_0,\vec{0}} \neq 0$, а при $j > n_0$ $b_{j,\vec{0}} = 0$. Тоді рівняння (5.52) має порядок n_0. Розв'язок задачі (5.50), (5.51) при $k = \vec{0}$ зображується формулою

$$u_{\vec{0}}(t) = \sum_{l=1}^{m_0} \sum_{q=0}^{\kappa_l - 1} C_{lq} t^q \exp(\lambda_{l,\vec{0}}\, t), \tag{5.53}$$

де $\lambda_{l,\vec{0}}$, $l \in \{1, \ldots, m_0\}$, — різні корені рівняння $\sum_{j=0}^{n-1} b_{j,\vec{0}}\, u_{\vec{0}}^{(j)}(t) = 0$ з кратностями κ_l відповідно, $\sum_{l=1}^{m_0} \kappa_l = n_0$, а сталі C_{lq}, $l \in \{1, \ldots, m_0\}$, $q \in \{0, 1, \ldots, \kappa_l - 1\}$, визначаються із системи n лінійних алгебричних рівнянь

$$\left\{ \sum_{l=1}^{m_0} \sum_{q=0}^{\kappa_l - 1} C_{lq} B_{jq}(\lambda_{l,\vec{0}}, T) = \varphi_{jk}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \right. \tag{5.54}$$

у якій

$$B_{jq}(\lambda, T) = \begin{cases} \alpha_j P_q^{\vartheta_j}(\lambda_{l,\vec{0}}, 0) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}^q(\lambda_{l,\vec{0}}, T), & 1 \leqslant j \leqslant \tilde{n}_1, \\ \alpha_j P_q^{\vartheta_j}(\lambda_{l,\vec{0}}, T) + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}^q(\lambda_{l,\vec{0}}, T), & \tilde{n}_1 + 1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases} \tag{5.55}$$

$$P_q^{\vartheta_j}(\lambda_{l,\vec{0}},t) = \exp(\lambda_{l,\vec{0}}\,t) \sum_{h=0}^{\min\{\vartheta_j,q\}} C_{\vartheta_j}^h \frac{q!}{(q-h)!}\lambda^{\vartheta_j-h}t^{q-h}, \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{r_j}^q(\lambda_{l,\vec{0}},T) &= \mathcal{I}_{r_j}[t^q\exp(\lambda_{l,\vec{0}}\,t)] = \\ &= Q_{r_j+q}(\lambda_{l,\vec{0}},T)\exp(\lambda_{l,\vec{0}}\,T) - Q_{r_j+q}(\lambda_{l,\vec{0}},0),\end{aligned} \tag{5.57}$$

$$Q_{r_j+q}(\lambda_{l,\vec{0}},t) = \sum_{h=1}^{r_j+q+1} \frac{(-1)^{h+1}(r_j+q)!}{(r_j+q-h+1)!}\frac{t^{r_j+q-h+1}}{\lambda_{l,\vec{0}}^h}. \tag{5.58}$$

Позначимо через $\mathbf{A}$ матрицю системи (5.54), а через $\overline{\mathbf{A}}$ — розширену матрицю цієї системи:

$$\mathbf{A} = \Big\| B_{jq}(\lambda_{l,\vec{0}},T)\Big\|_{q=0,\dots,\kappa_l-1,\,l=1,\dots,m_0}^{j=1,\dots,n},$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \Big\| B_{jq}(\lambda_{l,\vec{0}},T)\Big|\,\varphi_{jk}\Big\|_{q=0,\dots,\kappa_l-1,\,l=1,\dots,m_0}^{j=1,\dots,n}.$$

При $k=\vec{0}$ задача (5.50), (5.51) має не більше одного розв'язку тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\operatorname{rang}\mathbf{A} = n_0; \tag{5.59}$$

для існування розв'язку цієї задачі необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}\overline{\mathbf{A}}. \tag{5.60}$$

Розглянемо тепер задачу (5.50), (5.51), коли $\mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}$. З еліптичності диференціального виразу (5.46) випливає, що

$$\forall\mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\} \qquad L(\mu_k) \equiv \sum_{|s|=2d} a_s(\mu_{k_1})^{s_1}\cdots(\mu_{k_p})^{s_p} \neq 0.$$

Характеристичне рівняння, яке відповідає рівнянню (5.50) при $\mu_k \neq \vec{0}$, має вигляд

$$N(\lambda,\mu_k) := \lambda^n + L^{-1}(\mu_k)\left(A_{n-1}(\mu_k)\lambda^{n-1} + \dots + A_0(\mu_k)\right) = 0. \tag{5.61}$$

Нехай $\lambda_{lk} := \lambda_l(\mu_k)$, $l \in \{1,\dots,m\}$, — різні корені рівняння (5.61) із кратностями n_l відповідно, $n_1+\dots+n_m = n$ (для спрощення викладок вважаємо,

що числа m та n_l, $l \in \{1, \ldots, m\}$, не залежать від μ_k, а також, що $\lambda_{lk} \neq 0$, $l \in \{1, \ldots, m\}$, $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$).

Нехай

$$f_{qk}(t) := f_q(t, \mu_k), \quad q \in \{1, \ldots, n\}, \tag{5.62}$$

нормальна (в точці $t = 0$) фундаментальна система розв'язків рівняння (5.50). Позначимо через

$$\Delta(\mu_k, T) = \det \|U_j[f_{qk}(t)]\|_{j,q=1}^n \tag{5.63}$$

характеристичний визначник задачі (5.50), (5.51) при $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$.

Задача (5.50), (5.51) не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ [99].

Теорема 5.5. *Для єдиності розв'язку задачі* (5.45), (5.47) *у просторі* $C^n([0, T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma})$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова* (5.59) *та умова*

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\} \qquad \Delta(\mu_k, T) \neq 0. \tag{5.64}$$

Доведення. Проводиться за схемою доведення твердження 2.3. □

5.2.3. Надалі вважатимемо, що виконуються умови (5.59), (5.60) і (5.64). Тоді для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ існує єдиний розв'язок задачі (5.50), (5.51), а формальний розв'язок задачі (5.45), (5.47) зображується рядом

$$u(t, x) = u_{\vec{0}}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}} \left(\sum_{q,j=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk} f_{qk}(t) \right) \exp(i\mu_k, x), \tag{5.65}$$

де $\Delta_{jq}(\mu_k, T)$ — алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k, T)$ елемента j-го рядка та q-го стовпця, а $u_{\vec{0}}(t)$ — зображується формулою (5.53).

Існування розв'язку задачі (5.45), (5.47) у шкалі просторів $C^n\left([0, T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\right)$ чи $C^n\left([0, T], H_{\mathcal{M}}^{\alpha}\right)$ пов'язане з проблемою малих знаменників [89], бо вираз $|\Delta(\mu_k, T)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

При дослідженні розв'язності задачі (5.45), (5.47) в цих просторах будемо розрізняти два випадки:

A) $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}\{d_j\}\geqslant 2d,$ **B)** $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-1}\{d_j\}<2d.$

Випадок A. Оскільки $L(\mu_k)$ — однорідний многочлен степеня $2d$ відносно змінних $\mu_{k_1},\ldots,\mu_{k_p}$, то для нього справедлива така оцінка [42]:

$$|L(\mu_k)|>C_L|\mu_k|^{2d},\quad C_L:=p^{-d}\inf_{\|\xi\|=1}L(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}^p. \tag{5.66}$$

Для коренів рівняння (5.61), на підставі (5.66) та [103, стор. 101], справедливі такі оцінки:

$$|\lambda_{lk}|\leqslant C_1|\mu_k|^{\chi_1},\quad l\in\{1,\ldots,m\}, \tag{5.67}$$

де

$$\chi_1=\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}\left\{\frac{d_j-2d}{n-j}\right\},\quad C_1=2\max_{0\leqslant j\leqslant n-1}\left\{\left(\frac{\max_{|s|\leqslant d_j}\{|b_{j,s}|\}}{C_L}\right)^{\frac{1}{n-j}}\right\}.$$

Позначимо:

$$\gamma_j=0,\quad j\in\{1,\ldots,\tilde n_1\};\quad \gamma_j=\begin{cases}0, & \alpha_j=0,\\ \vartheta_j, & \alpha_j\neq 0,\end{cases}\quad j\in\{\tilde n_1+1,\ldots,n\};$$

$$\gamma=\gamma_1+\cdots+\gamma_n;\quad \eta_1(j,q):=\chi_1\left(\frac{n(n-1)}{2}+q+\gamma-\gamma_j+1\right).$$

Лема 5.1. *Для алгебричних доповнень* $\Delta_{jq}(\mu_k,T)$, $\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec 0\}$, *елементів визначника* (5.63) *справедливі оцінки*

$$|\Delta_{jq}(\mu_k,T)|\leqslant C_2(1+|\mu_k|)^{\eta_1(j,q)}\exp((n-1)C_1|\mu_k|^{N-2d}T),$$

де $C_2=(n-1)!2^nC_1\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{|\alpha_j|,|\beta_j|T^{r_j+1}(r_j+1)^{-1}\right\}.$

Доведення. Елемент визначника (5.63), який стоїть на перетині j-го рядка та q-го стовпця має вигляд

$$\delta_{jq}(\mu_k,T)=\begin{cases}\alpha_jf_{qk}^{(\vartheta_j)}(0)+\beta_j\mathcal{I}_{r_j}[f_{qk}], & 1\leqslant j\leqslant\tilde n_1,\\ \alpha_jf_{qk}^{(\vartheta_j)}(T)+\beta_j\mathcal{I}_{r_j}[f_{qk}], & \tilde n_1+1\leqslant j\leqslant n.\end{cases} \tag{5.68}$$

Для функцій (5.62), на підставі (5.67) та леми 12.7.7 з [109], отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^{j-1}f_{qk}(t)}{dt^{j-1}}\right| \leqslant 2^n C_1(1+|\mu_k|)^{(n+j-q)\chi_1}\exp(C_1|\mu_k|^{\chi_1}T), \tag{5.69}$$

де $q, j \in \{1,\ldots,n\}$. На підставі (5.69) отримуємо такі оцінки:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^T t^{r_j} f_{qk}(t)dt \leqslant \max_{t\in[0,T]}|f_{qk}(t)|\int\limits_0^T t^{r_j}dt = \frac{T^{r_j+1}}{r_j+1}\max_{t\in[0,T]}|f_{qk}(t)| \leqslant \\ \leqslant 2^n C_1 T^{r_j+1}(r_j+1)^{-1}(1+|\mu_k|)^{(n-q+1)\chi_1}\exp(C_1|\mu_k|^{\chi_1}T)\end{aligned} \tag{5.70}$$

для всіх $j, q \in \{1,\ldots,n\}$.

Оскільки $f_{qk}(t)$, $q \in \{1,\ldots,n\}$, — нормальна (в точці $t=0$) фундаментальна система розв'язків рівняння (5.50), то

$$\left|f_{qk}^{(\vartheta_j)}(0)\right| = \delta_{\vartheta_j-1,q} \quad j \in \{1,\ldots,n_1\}, \tag{5.71}$$

де $\delta_{\vartheta_j-1,q}$ — символ Кронекера.

На підставі (5.68) та (5.70)–(5.71) отримуємо такі оцінки:

$$|\delta_{jq}(\mu_k,T)| \leqslant C_3(1+|\mu_k|)^{(n+\gamma_j-q+1)\chi_1}\exp(C_1|\mu_k|^{\chi_1}T), \tag{5.72}$$

де $j, q \in \{1,\ldots,n\}$, а $C_3 = 2^n C_1 \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{|\alpha_j|, |\beta_j|T^{r_j+1}(r_j+1)^{-1}\right\}$.

На підставі оцінок (5.72) отримуємо

$$\begin{aligned}|\Delta_{jq}(\mu_k,T)| \leqslant C_2(1+|\mu_k|)^{\chi_1(q+\gamma-\gamma_j+\sum_{l=1}^n(n+1-l))}\exp((n-1)C_1|\mu_k|^{\chi_1}T) = \\ = C_2(1+|\mu_k|)^{\eta_1(j,q)}\exp((n-1)C_1|\mu_k|^{\chi_1}T).\end{aligned}$$

З отриманої нерівності і випливає доведення леми. □

Теорема 5.6. *Нехай справджуються умови* (5.60), (5.64) *та існують сталі* $\eta > 0$ *і* $\sigma \geqslant 0$ *такі, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k,T)| > (1+|\mu_k|)^{-\eta}\exp(-\sigma|\mu_k|^{\chi_1}). \tag{5.73}$$

Якщо $\varphi_j \in W_{\mathcal{M}}^{q_1+\alpha,\,q_2+\beta,\chi_1}$, $q_1 = \eta + \chi_1\left((n+1)(n+2)/2+\gamma-\gamma_j\right)$, $q_2 = \theta + nC_1T$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *то існує розв'язок задачі* (5.45), (5.47) *із простору* $C^n\left([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\chi_1}\right)$. *Цей розв'язок зображається формулою* (5.65) *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x), j \in \{1,\ldots,n\}$.

Доведення. Безпосередньою перевіркою встановлюємо належність функції, що зображена рядом (5.65) до простору $C^n\left([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\chi_1}\right)$. На підставі леми 5.1 та оцінок (5.69), (5.73) отримуємо

$$\left\| u; C^n\left([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\chi_1}\right)\right\| \leqslant C_4 \sum_{j=0}^{n} \left\| \varphi_j; W_{\mathcal{M}}^{q_1+\alpha,\, q_2+\beta,\chi_1}\right\|,$$

де $C_4 = 2^n n^2 C_1 C_2$. З отриманої нерівності випливає доведення теореми. □

З'ясуємо можливість виконання нерівностей (5.73). Для спрощення викладок припустимо, що всі корені характеристичного многочлена (5.61) є простими, тобто $m = n$, $n_l = 1$, $l \in \{1, \ldots, m\}$. Позначимо: $\Lambda = (\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{nk})$, $(J, \Lambda) = j_1\lambda_{1k} + \cdots + j_n\lambda_{nk}$, $J \in \mathcal{J}_n$; $r = r_1 + \cdots + r_n$.

Функції

$$u_{lk} := u_{lk}(t) = \exp(\lambda_{lk} t), \quad l \in \{1, \ldots, n\}, \tag{5.74}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (5.50) при $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$. Нехай

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) := \det \|U_j[u_{lk}]\|_{q,l=1}^n,$$

де $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$, — характеристичний визначник задачі (5.50), (5.51) отриманий при використанні фундаментальної системи (5.74). Елементи $g_{jl}(\mu_k, T)$ визначника $\widetilde{\Delta}(\mu_k, T)$ мають вигляд

$$g_{jl}(\mu_k, T) = \alpha_j P_l^{\vartheta_j} + \beta_j \mathcal{I}_{r_j}^0(\lambda_{lk}, T), \quad j, l \in \{1, \ldots, n\}, \tag{5.75}$$

де

$$P_l^{\vartheta_j} = \begin{cases} \lambda_{lk}^{\vartheta_j}, & 1 \leqslant j \leqslant \tilde{n}_1, \\ \lambda_{lk}^{\vartheta_j} \exp(\lambda_{lk} T), & \tilde{n}_1 + 1 < j \leqslant n, \end{cases} \quad l \in \{1, \ldots, n\}, \tag{5.76}$$

а $\mathcal{I}_{r_1}^0(\lambda_{lk}, T)$, де $j \in \{1, \ldots, n\}$, визначаємо на основі формул (5.57).

Визначники $\widetilde{\Delta}(\mu_k, T)$ і $\Delta(\mu_k, T)$ пов'язані співвідношенням

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) = W(\mu_k)\Delta(\mu_k, T), \tag{5.77}$$

де $W(\mu_k) = \det \|\lambda_{lk}^{q-1}\|_{q,l=1}^n = \prod_{n\geqslant j>l\geqslant 1}(\lambda_{jk} - \lambda_{lk})$ є значення вронскіана системи функцій (5.74) в точці $t = 0$.

Як і в п. 3.3.4 показуємо, що визначник $\Delta(\mu_k, T)$ є квазімногочленом відносно змінної T і зображається формулою

$$\Delta(\mu_k, T) = \frac{1}{W(\mu_k)} \sum_{J\in\mathcal{J}_n} \exp((J,\Lambda)T)F_J(T), \tag{5.78}$$

де $F_J(T), J \in \mathcal{J}_n$, — многочлени з комплексними коефіцієнтами степеня N_J, $N_J \leqslant r_1 + \cdots + r_n$, а кількість доданків із різними експонентами не перевищує 2^n. Для кожного $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$ розглянемо функцію $\mathcal{D}(\mu_k, \tau)$, що визначена на інтервалі $(0, \infty)$ формулою (5.78), в якій T треба замінити на τ. Через $E(\mathcal{D}, \varepsilon, [0, T_0])$, де $T_0 > 0$, позначимо множину тих $\tau \in [0, T_0]$, для яких виконується нерівність $|\mathcal{D}(\mu_k, \tau)| \leqslant \varepsilon$,

$$N := \sum_{J\in\mathcal{J}_n} N_J \leqslant 2^n \left(1 + r_1 + \cdots + r_n\right), \tag{5.79}$$

$$B(\mu_k) := 1 + \max_{J\in\mathcal{J}_n} |(J,\Lambda)|, \tag{5.80}$$

$$\Psi(\mu_k) := \max_{\tau\in[0,T_0]} \exp\left(-\left(\min_{J\in\mathcal{J}_n} \mathrm{Re}(J,\Lambda)\right)\tau\right), \tag{5.81}$$

$$G(\mu_k) := \max_{1\leqslant j\leqslant N} \left\{\left|\frac{\partial^{j-1}\mathcal{D}(\mu_k,\tau)}{\partial\tau^{j-1}}\right|_{\tau=0} \cdot B^{-j}(\mu_k)\right\} \tag{5.82}$$

за умови $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$.

З (5.80), враховуючи (5.67), отримуємо, що

$$B(\mu_k) \leqslant 1 + \sum_{l=1}^n |\lambda_{lk}| \leqslant C_6(1 + |\mu_k|)^{\chi_1}, \tag{5.83}$$

за умови $\mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}$, де $C_6 = nC_1$. Визначимо сталу C_λ наступним чином:

$$C_\lambda = -\min\left\{0, \inf_{\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}} \min_{l\in\{1,\ldots,n\}} \left\{\frac{\mathrm{Re}\lambda_{lk}}{|\mu_k|^{\chi_1}}\right\}\right\},$$

яка, на підставі (5.67), існує і є скінченною. Тоді з (5.81) випливає оцінка

$$\Psi(\mu_k) \leqslant \exp(nC_\lambda T_0|\mu_k|^{\chi_1}), \quad \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}. \tag{5.84}$$

Для того, щоб оцінити знизу $G(\mu_k)$ використаємо наступне твердження.

Лема 5.2. *Існує число $\eta_0(\vec{\alpha})$ таке, що*

$$\left.\frac{\partial^q \mathcal{D}(\mu_k,\tau)}{\partial \tau^q}\right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < \eta_0(\vec{\alpha}), \\ \eta_0(\vec{\alpha})! C_{\eta_0}, & q = \eta_0(\vec{\alpha}), \end{cases} \tag{5.85}$$

де C_{η_0} — деяка стала, яка залежить від α_j, β_j, r_j, $j \in \{1,\dots,n\}$.

Доведення. З формул (5.75) та (5.77) випливає, що

$$\mathcal{D}(\mu_k,\tau) = W^{-1}(\mu_k)\widetilde{D}(\mu_k,\tau) = W^{-1}(\mu_k)\det\|g_{jl}(\mu_k,\tau)\|_{j,l=1}^n. \tag{5.86}$$

Для кожного $j,l \in \{1,\dots,n\}$, справедливі такі розвинення:

$$\exp(\lambda_{lk}\tau) = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\lambda_{lk}^q}{q!}\tau^q + \tau^{n+1}\tilde{\nu}_{lk}(\tau), \tag{5.87}$$

$$\int\limits_0^\tau t^{r_j}\exp(\lambda_{lk}t)dt = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\lambda_{lk}^q}{q!(r_j+q+1)}\tau^{r_j+q+1} + \tau^{r_j+n+1}V_{jlk}(\tau), \tag{5.88}$$

де $\tilde{\nu}_{lk}(\tau)$, $V_{jlk}(\tau) = (r_j+n+1)^{-1}\int_0^\tau \tilde{\nu}_{lk}(t)dt$ є аналітичні в околі точки $\tau = 0$ функції.

Підставивши розвинення (5.87), (5.88) у формули (5.75), в яких T слід замінити на τ, отримаємо

$$g_{jl}(\mu_k,\tau) = \begin{cases} \alpha_j\lambda_{lk}^{\vartheta_j} + \beta_j\sum\limits_{q=0}^{n-1}\dfrac{\lambda_{lk}^q\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)} + \\ \qquad +\beta_j\tau^{r_j+n+1}V_{jlk}(\tau), \quad 1 \leqslant j \leqslant \tilde{n}_1, \\ \alpha_l\sum\limits_{q=\vartheta_j}^{n-1}\dfrac{\lambda_{lk}^q\tau^{q-\vartheta_j}}{(q-\vartheta_j)!} + \beta_j\sum\limits_{q=0}^{n-1}\dfrac{\lambda_{lk}^q\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)} + \\ \qquad +\alpha_j\tau^n\nu_{lk}(\tau) + \beta_j\tau^{r_j+n+1}V_{lk}(\tau), \ \ \tilde{n}_1+1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases} \tag{5.89}$$

де $l \in \{1,\dots,n\}$.

Згрупувавши у формулах (5.89) доданки за степенями λ_{lk}, перепишемо (5.89) у вигляді

$$g_{jl}(\mu_k,\tau) = \sum_{q=0}^{n-1}\lambda_{lk}^q\,\tilde{g}_{jq}(\alpha_j,\beta_j,\tau) + \widetilde{V}_{jlk}(\tau), \quad j,l \in \{1,\dots,n\}, \tag{5.90}$$

де

$$\widetilde{V}_{jlk}(\tau) = \begin{cases} \beta_j \tau^{r_j+n+1} V_{jlk}(\tau), & 1 \leqslant j \leqslant \tilde{n}_1, \\ \alpha_j \tau^n \nu_{lk}(\tau) + \beta_j \tau^{r_j+n+1} V_{jlk}(\tau), & \tilde{n}_1 + 1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases} \tag{5.91}$$

При цьому для кожного $q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$$\tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) = \begin{cases} \alpha_j + \beta_j \dfrac{\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)}, & q = \vartheta_j, \\ \beta_j \dfrac{\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)}, & q \neq \vartheta_j, \end{cases} \tag{5.92}$$

якщо $j \in \{1, \ldots, \tilde{n}_1\}$ і

$$\tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) = \begin{cases} \beta_j \dfrac{\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)}, & 0 \leqslant q < \vartheta_j, \\ \alpha_j \dfrac{\tau^{q-\vartheta_j}}{(q-\vartheta_j)!} + & \\ \qquad + \beta_j \dfrac{\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)}, & \vartheta_j \leqslant q \leqslant n-1, \end{cases} \tag{5.93}$$

якщо $j \in \{\tilde{n}_1 + 1, \ldots, n\}$.

З (5.91)–(5.93) випливає, що функції $\widetilde{V}_{jlk}(\tau)$, $j, l \in \{1, \ldots, n\}$, мають в точці $\tau = 0$ нуль вищого порядку ніж

$$\sum_{q=0}^{n-1} \lambda_{lk}^q \, \tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau),$$

де $j, l \in \{1, \ldots, n\}$, відповідно. З формули (5.86), враховуючи (5.90), отримуємо

$$\mathcal{D}(\mu_k, \tau) = W^{-1}(\mu_k) \det \left\| \sum_{q=0}^{n-1} \lambda_{lk}^q \tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) + \widetilde{V}_{jlk}(\tau) \right\|_{j,l=1}^{n}. \tag{5.94}$$

Використовуючи елементарні властивості визначників, розкриємо у визначнику в формулі (5.94) суми по рядках і одержимо таке розвинення:

$$\mathcal{D}(\mu_k, \tau) = W^{-1}(\mu_k) \left(\det \left\| \sum_{q=0}^{n-1} \lambda_{lk}^q \tilde{g}_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \tau) \right\|_{j,l=1}^{n} + \overline{\mathcal{D}}(\mu_k, \tau) \right), \tag{5.95}$$

де $\overline{\mathcal{D}}(\mu_k,\tau)$ — деяка аналітична в околі точки $\tau=0$ функція, яка має в цій точці нуль вищого порядку ніж

$$\det\left\|\sum_{q=0}^{n-1}\lambda_{lk}^{q}\tilde{g}_{jq}(\alpha_j,\beta_j,\tau)\right\|_{j,l=1}^{n}.$$

Легко бачити, що матриця

$$\left\|\sum_{q=0}^{n-1}\lambda_{lk}^{q}\tilde{g}_{jq}(\alpha_j,\beta_j,\tau)\right\|_{j,l=1}^{n}$$

є добутком матриць $\left\|\lambda_{lk}^{q-1}\right\|_{q,l=1}^{n}$ та $\|\tilde{g}_{j,q-1}(\alpha_j,\beta_j,\tau)\|_{j,q=1}^{n}$, звідки випливає, що

$$\det\left\|\sum_{q=0}^{n-1}\lambda_{lk}^{q}\tilde{g}_{jq}(\alpha_j,\beta_j,\tau)\right\|_{j,l=1}^{n}=\det\left\|\lambda_{lk}^{q-1}\right\|_{q,l=1}^{n}\times \\ \times\det\|\tilde{g}_{j,q-1}(\alpha_j,\beta_j,\tau)\|_{j,q=1}^{n}. \tag{5.96}$$

Позначимо

$$\Delta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta},\tau):=\det\|\tilde{g}_{j,q-1}(\alpha_j,\beta_j,\tau)\|_{j,q=1}^{n}, \tag{5.97}$$

Враховуючи (5.95)–(5.97), отримуємо таке розвинення:

$$\mathcal{D}(\mu_k,\tau)=\Delta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta},\tau)+W^{-1}(\mu_k)\overline{\mathcal{D}}(\mu_k,\tau). \tag{5.98}$$

Зауважимо, що визначник (5.97) є поліномом відносно змінної τ степеня не вище $n(n+1)/2+r$ (це випливає з (5.92) та (5.93)), і є відмінним від нуля для всіх (крім скінченної кількості) точок τ. Позначимо через $\eta_0(\vec{\alpha})$ найменший степінь τ, що входить у вираз для (5.97), а через $C_{\eta_0}:=C_{\eta_0}(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{r})$ коефіцієнт при ньому. Тоді з (5.98) випливає доведення леми. □

Приклад 5.1. Нехай у рівнянні (5.45) $n=4$, а умови (5.47) мають вигляд

$$\int_0^T t^{r_1}u(t,x)dt=\varphi_1,\ \int_0^T t^{r_2}u(t,x)dt=\varphi_2,\ \frac{\partial u(T,x)}{\partial t}=\varphi_3,\ \frac{\partial^3 u(T,x)}{\partial t^3}=\varphi_4.$$

В цьому випадку ($\vec{\alpha} = (0,0,1,1)$, $\vec{\beta} = (1,1,0,0)$) функції (5.92) та (5.93) зображуються формулами

$$\tilde{g}_{jq}(0,1,\tau) = \frac{\tau^{r_j+q+1}}{q!(r_j+q+1)}, \quad j \in \{1,2\},\, q \in \{0,1,2,3\},$$

$$\tilde{g}_{3q}(1,0,\tau) = \begin{cases} 0, & q = 0, \\ \dfrac{\tau^{q-1}}{(q-1)!}, & q = 1,2,3, \end{cases} \qquad \tilde{g}_{4q}(1,0,\tau) = \begin{cases} 0, & q = 0,1,2, \\ 1, & q = 3, \end{cases}$$

а визначник (5.97), відповідно, формулою

$$\Delta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta},\tau) = \frac{\tau^{r_1+r_2+4}(r_2-r_1)(r_1+r_2+5)}{(r_1+1)(r_1+2)(r_1+3)(r_2+1)(r_2+2)(r_2+3)}.$$

Отже, у цьому випадку задачі (5.45), (5.45) величина $\eta_0(\vec{\alpha}) = r_1 + r_2 + 4$.

Тепер оцінимо знизу величину $G(\mu_k)$. З (5.85), на підставі (5.82), (5.83), випливає

$$G(\mu_k) = \left.\frac{\partial^{\eta_0(\vec{\alpha})}\mathcal{D}(\mu_k,\tau)}{\partial\tau^{\eta_0(\vec{\alpha})}}\right|_{\tau=0} (B(\mu_k))^{-\eta_0(\vec{\alpha})} \geqslant C_7(1+|\mu_k|)^{-\eta_0(\vec{\alpha})\chi_1}, \qquad (5.99)$$

де $C_7 = \eta_0(\vec{\alpha})! C_{\eta_0}(C_6)^{-\eta_0(\vec{\alpha})}$.

Теорема 5.7. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in (0,T_0]$, $T_0 > 0$, нерівність* (5.73) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$, коли $\theta = nC_\lambda T_0$, а*

$$\eta > \chi_1\eta_0(\vec{\alpha}) + (p/\theta_1 + \chi_1)(2^n(1+r) - 1).$$

Доведення. проводиться за схемою доведення теореми 3.6 з урахуванням оцінок (5.83), (5.84) та (5.99). □

Випадок B. У цьому випадку вдається показати існування розв'язку у шкалі просторів $C^n([0,T], H^\alpha_{\mathcal{M}})$. Для коренів рівняння (5.61) на підставі (5.66) та [103, стор. 101], справедливі такі оцінки :

$$|\lambda_{lk}| \leqslant C_1|\mu_k|^{-\chi_2}, \quad \chi_2 = \min_{0\leqslant j\leqslant n-1}\left\{\frac{2d-d_j}{n-j}\right\}, \quad l \in \{1,\dots,m\}. \qquad (5.100)$$

Позначимо

$$C_A = \max_{0\leqslant j\leqslant n-1}\left\{\max_{|s|\leqslant d_j}\{|b_{j,s}|\}\right\}.$$

Теорема 5.8. *Нехай справджуються умови* (5.60), (5.64) *та існує стала* $\tilde{\eta} > 0$ *така, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\tilde{\eta}}. \tag{5.101}$$

Якщо $\varphi_j \in H_{\mathcal{M}}^{\tilde{\eta}+\alpha}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *то існує розв'язок задачі* (5.45), (5.47) *із простору* $C^n([0,T], H_{\mathcal{M}}^{\alpha})$. *Цей розв'язок зображається формулою* (5.65) *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Доведення. На підставі (5.65) отримуємо оцінку

$$\|u; C^n([0,T], H_{\mathcal{M}}^{\alpha})\| =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left(\left| u_{\vec{0}}^{(l)}(t) \right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}} \left| u_k^{(l)}(t) \right|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{n} \left(\max_{t\in[0,T]} \left| u_{\vec{0}}^{(l)}(t) \right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}} \max_{t\in[0,T]} \left| u_k^{(l)}(t) \right|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2}, \tag{5.102}$$

в якій

$$u_k(t) = \sum_{q,j=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk} f_{qk}(t), \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}. \tag{5.103}$$

З формули (5.53) на підставі (5.55)–(5.58) випливають оцінки

$$\max_{t\in[0,T]} \left| u_{\vec{0}}^{(l)}(t) \right|^2 \leqslant C_8 \sum_{j=1}^{n} \left| \varphi_{j,\vec{0}} \right|^2 \tag{5.104}$$

для кожного $l \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Тут стала C_8 залежить від T та α_j, β_j і r_j, де $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Із (5.103) отримуємо нерівність

$$\max_{t\in[0,T]} \left| u_k^{(l)}(t) \right| \leqslant \sum_{j,q=1}^{n} \frac{|\Delta_{jq}(\mu_k, T)|}{|\Delta(\mu_k, T)|} |\varphi_{jk}| \max_{t\in[0,T]} |f_{qk}^{(l)}(t)|. \tag{5.105}$$

На підставі нерівності (5.100) та теореми 2 у [10] отримуємо оцінку

$$\max_{t\in[0,T]} |f_{qk}^{(l)}(t)| \leqslant C_9, \quad C_9 = (1 + nC_A/C_L)(1 + C_1)^{2n} \exp((1 + C_1)T). \tag{5.106}$$

Для алгебричних доповнень $\Delta_{jq}(\mu_k, T)$, $j, q \in \{1, \ldots, n\}$, визначника (3.56), враховуючи (5.106), можемо записати нерівність

$$|\Delta_{jq}(\mu_k, T)| \leqslant C_{10}, \tag{5.107}$$

де $C_{10} := C_{10}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{r}, T, C_9)$.

Враховуючи (5.101), (5.105)–(5.107), для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$ отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]} \left| u_k^{(l)}(t) \right| \leqslant nC_9C_{10} \sum_{j=1}^{n} |\varphi_{jk}| \left(1 + |\mu_k|\right)^{\tilde{\eta}}, \quad l \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{5.108}$$

З (5.102), (5.104) та (5.108) випливає оцінка

$$\|u; C^n([0,T], H^{\alpha}_{\mathcal{M}})\| \leqslant C_{11} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |\varphi_{jk}|^2 (1 + |\mu_k|)^{2(\tilde{\eta}+\alpha)} \right)^{1/2} =$$

$$= C_{11} \sum_{l=1}^{n} \left\| \varphi_j; H^{\tilde{\eta}+\alpha}_{\mathcal{M}} \right\|.$$

де $C_{11} = (n+1)\max\{C_8, nC_9C_{10}\}$. З отриманої нерівності випливає твердження теореми. □

Зауваження 5.3. Якщо в теоремі 4 $\alpha > n + p/(2\theta_1)$, то, згідно з (2.5), справедливе вкладення $C^n\left([0,T], H^{\alpha}_{\mathcal{M}}\right) \subset C^n_{\mathcal{M}}\left(\overline{D}^p\right)$, а розв'язок задачі (5.45), (5.47) є класичним.

З'ясуємо питання про можливість виконання нерівності (5.101). Для цього скористаємося методикою роботи [10] та наступними лемами, доведеними в [10].

Лема 5.3. *Для довільних комплексних квадратних матриць* $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ *і* $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^n$ *виконується нерівність*

$$|\det A - \det B| \leqslant n \cdot n! \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij} - b_{ij}| \left(\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \{|a_{ij}|, |b_{ij}|\} \right)^{n-1}.$$

Лема 5.4. *Для довільного* $t > 0$ *виконуються такі нерівності:*

$$\max_{t\in[0,T]} |f_{qk}^{(j-1)}(t) - g_q^{(j-1)}(t)| < C_{12}|\mu_k|^{-n\chi_2},$$

де $j, q \in \{1, \ldots, n\}$ *довільні. Тут* $g_q(t) = t^{q-1}/((q-1)!)$ *і*

$$C_{12} = nC_L C_A (1 + C_1)^{2n-1} \exp((C_1 + 1)T).$$

Розглянемо множину

$$E := \{T > 0 \mid \Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T) = 0\},$$

де вираз $\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)$ визначений формулою (5.97) при $\tau = T$. Легко бачити, що

$$\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T) = \det \|U_j[g_q]\|_{j,q=1}^n, \tag{5.109}$$

де $g_q := g_q(t)$ є ті ж функції, що і в лемі 5.3. Визначник $\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)$ є многочленом за змінною T степеня не вище ніж $n(n+1)/2+r$, а найменший степінь T, що входить у вираз для $\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)$ ми позначали через $\eta_0(\vec{\alpha})$.

Теорема 5.9. *Існує число* $K := K(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T) > 0$ *таке, що для всіх векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *таких, що* $|\mu_k| > K$, *та для довільного* $T \notin E$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k, T)| \geqslant \begin{cases} B_1 T^{\frac{n(n+1)}{2}+r}, & T \geqslant 1, \\ B_2 T^{\eta_0(\vec{\alpha})}, & T < 1, \end{cases} \tag{5.110}$$

де B_1, B_2 *— деякі додатні сталі, які залежать від* α_j, β_j, r_j, *де* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *та* T.

Доведення. На підставі (5.109) та леми 5.2 запишемо

$$\begin{aligned} |\Delta(\mu_k, T) - \Delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)| \leqslant n \cdot n! \max_{1 \leqslant j,q \leqslant n} |U_j[f_{qk}] - U_j[g_q]| \times \\ \times \left(\max_{1 \leqslant j,q \leqslant n} \{|U_j[f_{qk}]|, |U_j[g_q]|\} \right)^{n-1}. \end{aligned} \tag{5.111}$$

Для довільного $T > 0$ виконуються нерівності

$$|U_j[g_q]| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|\alpha_j| T^n, |\beta_j| T^{r_j+1}\}, \tag{5.112}$$

де $j, q \in \{1, \ldots, n\}$. Враховуючи (5.106), отримуємо такі оцінки:

$$|U_j[f_{qk}]| \leqslant C_9 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|\alpha_j|, |\beta_j| T^{r_j+1}\}, \tag{5.113}$$

де $j, q \in \{1, \ldots, n\}$. На підставі оцінок (5.112), (5.113) отримуємо нерівність

$$\max_{1 \leqslant j,q \leqslant n} \{|U_j[f_{qk}]|, |U_j[g_q]|\} \leqslant C_9 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|\alpha_j|, |\alpha_j| T^n, |\beta_j| T^{r_j+1}\}. \tag{5.114}$$

З леми 3 випливає оцінка

$$|U_j[f_{qk}] - U_j[g_q]| \leqslant C_{13} |\mu_k|^{-n\chi_2}, \quad j, q \in \{1, \ldots, n\}, \tag{5.115}$$

де $C_{13} = C_9 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|\alpha_j|, |\beta_j| T^{r_j+1}\}$.

З формули (5.111) на підставі (5.114) і (5.115) отримуємо

$$|\Delta(\mu_k, T) - \Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)| \leqslant n \cdot n! (C_{14})^{n-1} C_{13} |\mu_k|^{-n\chi_2}; \tag{5.116}$$

тут $C_{14} = C_9 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{|\alpha_j|, |\alpha_j| T^n, |\beta_j| T^{r_j+1}\}$.

Визначник (5.109) є многочленом за змінною T степеня не вище ніж $n(n+1)/2 + r$, а найменший степінь T у виразі для (5.109) дорівнює $\eta_0(\vec{\alpha})$. Звідси випливають такі оцінки

$$|\Delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)| \leqslant \begin{cases} C_{15} T^{n(n+1)/2+r}, & T \geqslant 1, \ \ C_{15} := C_{15}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{r}), \\ C_{16} T^{\eta_0(\vec{\alpha})}, & T < 1, \ \ C_{16} := C_{16}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{r}). \end{cases} \tag{5.117}$$

Позначимо

$$K(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T) := \max \left\{ \frac{2n \cdot n! (C_{14})^{n-1} C_{13}}{C_{15}}, \frac{2n \cdot n! (C_{14})^{n-1} C_{13}}{C_{16}} \right\}^{-n\chi_2}.$$

З нерівностей (5.116), (5.117) випливає, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ таких, що $|\mu_k| > K(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)$, та для всіх $T \notin E$ виконується нерівність

$$|\Delta(\mu_k, T) - \Delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)| \leqslant \frac{1}{2} |\Delta(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, T)| \leqslant \begin{cases} 2^{-1} C_{15} T^{\frac{n(n+1)}{2}+r}, & T \geqslant 1, \\ 2^{-1} C_{16} T^{\eta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}, & T < 1, \end{cases}$$

а, отже й нерівність (5.110) при $B_1 = C_{15}/2$, $B_2 = C_{16}/2$. $\square$

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 5

У п'ятому розділі дисертації розглянуто задачі з інтегральними умовами за часом для некласичних рівнянь математичної фізики у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій. Ці задачі є умовно коректними, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників.

Вперше для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом встановлено умови коректної розв'язності задачі з умовами за часовою змінною, частинним випадком яких є інтегральні умови у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції та двоточкові умови. Розглянуто різні випадки співвідношення між степенями диференціальних операторів, що входять у рівняння. Показано, що коли степінь диференціального оператора за просторовими змінними при старшій похідній по часу є найвищим, то у задачі відсутня проблема малих знаменників.

Вперше досліджено коректну розв'язність задачі з нелокальною умовою за часом, що містить інтеграл від шуканої функції, для мішаного параболо-гіперболічного рівняння. Виділено випадки задачі у яких відсутня проблема малих знаменників.

Основні результати розділу 5 опубліковані в [56].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню в $(p+1)$-вимірному шарі задач з інтегральними умовами за часовою змінною та умовами майже періодичності за просторовими змінними для лінійних еволюційних рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними. Такі задачі, назагал, є умовно коректними, а їх розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників. Одержано такі нові результати:

1) в області, що є декартовим добутком часового інтервалу $(0, T)$ та простору $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, встановлено коректну розв'язність задач з умовами за часовою змінною, що містять інтегральні доданки у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції та:

а) значення шуканої функції та її похідних парного порядку в точках $t = 0$ та $t = T$ — для рівнянь типу Клейна-Гордона та гіперболічних за Гордінгом рівнянь, а також для гіперболічних за Петровським систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами;

б) значення шуканої функції у довільних точках $t_1, \ldots, t_n$ відрізка $[0, T]$ — для параболічного за Петровським рівняння зі змінними за часом коефіцієнтами;

в) значення шуканої функції та її послідовних похідних в точці $t = 0$ — для систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами, параболічних за Шиловим;

г) значення шуканої функції та її похідних довільних порядків в точках $t = 0$ та $t = T$ — для рівнянь зі сталими коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом;

2) встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі з інтегральною умовою за часовою змінною для параболо-гіперболічного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами;

3) побудовано явні формули для розв'язків задач у вигляді рядів;

4) доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків розглянутих у дисертації задач на основі яких (за встановлених умов на вихідні дані задач) випливає існування єдиного розв'язку (у відповідних просторах) досліджуваних задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів умов. Виділено випадки задач у яких відсутня проблема малих знаменників.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна застосовувати у подальших дослідженнях задач з інтегральними умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними, а також при дослідженні конкретних задач практики, які моделюються розглянутими задачами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям. / М. Абрамовиц, И. Стиган – М.:Наука, 1979. – 832 с.
2. *Алексеева С.М.* Метод квазиобращения для задачи управления начальным условием для уравнения теплопроводности с интегральным краевым условием / С. М. Алексеева, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 4. – С. 495–502.
3. *Баренблатт Г. И.* Об основних представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах / Г. И. Баренблатт , Ю. П. Желтов , И. Н. Кочина // Прикл. механика и математика – 1960. – Т. 24, № 5. – С.58–73.
4. *Бейлина Н. В.* О разрешимости обратной задачи для гиперболического уравнения с интегральным условием переопределения / Н. В. Бейлина // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки – 2011. – № 2(23). – С. 34–39.
5. *Берник В. И.* Аналог многоточечной зада- чи для гиперболического уравнения с постоянными коеффициентами / В. И. Берник, Б. Й. Пташник , Б. О. Салыга // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, №4. – С. 637–645.
6. *Бенуар Н.-Э., Юрчук Н.И.* Смешанная задача с интегральным условием для параболических уравнений с оператором Бесселя / Н.-Э. Бенуар, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. — 1991.— **27**, № 12. — С.2094-–2098.
7. *Бжихатлов Х. Г.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / Х. Г. Бжихатлов, А. М. Нахушев // Докл. АН СССР.– 1968. - 183, № 2. – С. 261–264.
8. *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діpi-

хле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом / Н. І. Білусяк, Л. І. Комарницька, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С.1592–1602.

9. Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними/ *[О. І. Бобик, П. І. Боднарчук, Б. Й. Пташник , В. Я. Скоробогатько]*. — Київ: Наук. думка, 1972. — 173 с.
10. *Бобик І. О.* Задача з двома кратними вузлами для рівнянь не розв'язаних відносно старшої похідної за часом / І. О. Бобик, М. М. Симотюк // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – Вип. 2. – С.46–55.
11. *Борок В. М.* Классификация нелокальных краевых задач в узкой полосе / В. М. Борок, Э. Кенне // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 4. – С.338–346.
12. *Борок В. М.* Классификация интегральных краевых задач в широкой полосе / В. М. Борок, Э. Кенне // Изв. вузов. Математика. – 1994. – **384**, № 5. – С.3–12.
13. *Власій О. Д.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної / О. Д. Власій, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, №8. – С. 1022–1034.
14. *Врагов В. Н.* Смешанная задача для одного класса параболо-гиперболических уравнений второго порядка / В. Н. Врагов // Дифференwц. уравнения. – 1976. – **12**, № 1. – С. 24–31.
15. *Габов С. А.* Задачи динамики стратифицированной жидкости / С. А. Габов, А. Г. Свешников – М.:Наука, 1986. – 287 с.
16. *Гантмахер Ф. Р.* Осциляционные матрицы и малые колебания механический систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Креин – М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950. – 359 с.
17. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд // УМН. – 1959. – **14**, № 3. — С. 3–19.
18. *Гельфанд И. М.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории

дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд , Г. Е. Шилов – М.:Физматгиз, 1958. – Вып. 3. – 274 с.

19. *Гордезиани Д. Г.* Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д. Г. Гордезиани, Г. А. Авалишвили // Матем. моделирование. – 2000. – **12**, № 1. – С. 94-–103.
20. *Гринців Н. М.* Задача Стефана для слабковиродженого параболічного рівняння/ Н. М. Гринців // Укр. мат. журн. – 2011, – **63**, №5, – С. 640–653.
21. *Горбачук В. И.* Граничные задачи для дифференциально - операторных уравнений / В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.
22. *Гутер Р. С.* Элементы теории функций / Л. Д. Кудрявцев, Б. В. Левитан – М.: Физматгиз, 1963. – 244 с.
23. *Данилкина О. Ю.* Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения / О. Ю. Данилкина // Вестник СамГУ. – 2007. – №6(56). – С. 141–153.
24. *Данилюк А. О.* Крайова задача для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь з інтегральними умовами / А. О. Данилюк // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1610–1618.
25. *Дмитриев В. Б.* Нелокальная задача с нелинейными интегральными условиями для гиперболического уравнения / В. Б. Дмитриев // Вестн. Сам. Гос. Ун-та. – 2009. – №1(18). – С. 26–32.
26. *Золина Л. А.* О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа / Л. А. Золина // Журн. вычислительной мат. и мат. физики. – 1966. – **6**, № 6. – С. 991–1001.
27. *Іванчов М. І.* Одночасне визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні у випадку нелокальних та інтегральних умов / М. І. Іванчов Н. В. Пабирівська // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5. – С. 589–596.

28. *Іванчов М. І.* Обернені задачі та задачі з вільними межами для параболічних рівнянь / М. І. Іванчов // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Сер. Математика – 2011. – **1**, №1–2. – С. 109–116.

29. *Ільків В. С.* Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами / В. С. Ільків // Вісник ДУ „Львівська політехніка“. Прикл. матем. – 1999. – № 364. – С. 318–323.

30. *Ільків В. С.* Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку / В. С. Ільків, Т. В. Магеровська // Вісник НУ "Львівська політехніка". – "Фіз.-мат. науки". – 2008. – №625. – С. 12–19.

31. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с некласическим краевым условием / Н. И. Ионкин // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, №2. – С. 294–304.

32. *Ісарюк І. М.* Про нелокальну параболічну задачу з виродженням /І. М. Ісарюк, І. Д. Пукальський // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 2. – С. 208–215.

33. *Каленюк П. І.* Узагальнена схема відокремлення змін- них. Диференціально-символьний метод / П. І. Каленюк, З. М. Нитребич – Львів: Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

34. *Каленюк П. І.* Про ядро задачі з інтеграль- ною умовою для рівняння із частинними похідними нескінченного порядку / П. І. Каленюк, З. М. Нитребич, І. В. Когут // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – Сер. фізико-математичні науки. – 2008. – Вип. 625, № 625. – С. 5–11.

35. *Каленюк П. І.* Однозначна розв'язність задачі з інтегральними умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом / П. І. Каленюк, В. С. Ільків, З. М. Нитребич, І. В. Когут // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – Сер. фізико-математичні нау-

ки. – 2013. – Вип.768, № 768. – С. 5–11.

36. *Камынин Л. И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями / Л. И. Камынин // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1964. – **4**, № 6. – С. 1006–1024.
37. *Капустин Н. Ю.* Задача Трикоми для параболо-гиперболпческого уравнения с вырождающейся частью / Н. Ю. Капустин // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 1. – С. 72–78.
38. *Капустян В. О.* Умови існування і єдиності розв'язку параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами / В. О. Капустян, І. О. Пишнограєв // Наукові вісті НТУ "Київський політехнічний інститут". – 2012. – № 4. – С. 72–76.
39. *Клюс І. С.* Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом / І. С. Клюс, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С.1604–1613.
40. *Кожанов А. И.* О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений / А. И. Кожанов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2004. – №30. – С. 63–69.
41. *Кожанов А. И.* О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопро- водности / А. И. Кожанов // Сиб. матем. журн. – 2005. – **46**, № 5. – С. 1053–1071.
42. *Комарницька Л.І.* Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом / Л. І. Комарницька, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С.1197–1208.
43. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна-Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими координатами / А. М. Кузь// Конференція молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача (Львів, 25-27 травня 2009р.): Тези доповідей. – Львів, 2009. – С. 215–217.

44. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом бікалоричного рівняння в шарі / А. М. Кузь // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука (Київ, 13-15 травня 2010 р.): матеріали конференції. – Т.1. – Київ, 2010. – С. 231.

45. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна-Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник// Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8. – С. 41–53.

46. *Кузь А. М.* Задачи с интегральными условиями по временной переменной для гиперболических уравнений / А. М. Кузь, Б. И. Пташник// Конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения"(СамДиф-2011) (Самара, Российская Федерация, 26-30 июня 2011г.): Тезисы докладов. – Самара, 2011. – С. 65.

47. *Кузь А.М.* Задача з інтегральними умовами для системи рівнянь динамічної теорії пружності / А. М. Кузь // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька (19-23 вересня 2011, Дрогобич, Україна): Тези доповідей. – Львів, 2011. – С. 108.

48. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для полікалоричного рівняння у шарі / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник // Чотирнадцята міжнародна конференція імені академіка М.Кравчука (19-21 квітня 2012 року, Київ): Матеріали конференції. Т.1. – Київ, 2012. – С. 259-260.

49. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами/ А. М. Кузь // Десята відкрита наукова конференція ІМФН: Збірник матеріалів та програма конференції ["PSC-IMFS-10"], (Львів, 17-18 травня 2012 р.) / Національний університет "Львівська політехніка". - Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2012. – С. A23-A24.

50. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для факто-

ризованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами / А. М. Кузь // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Фізико-математичні науки. – 2012. – № 740. – С. 25–33.

51. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом / А. М. Кузь // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики"(21-25 травня 2013р., Львів): Матеріали конференції. – Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т.3. – С. 136–138.

52. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для рівнянь гіперболічних за Гордінгом / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 252–265. (Переклад: *Kuz' A. M.* A problem with integral conditions with respect to time for Garding hyperbolic equations/ A. M. Kuz', B. I. Ptashnyk // Ukrainian Mathematical Journal – 2013. – **65**, N.2. – P. 277–293.)

53. *Кузь А.М.* Задача з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь динамічної теорії пружності / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 40–53. (Переклад: *Kuz' A. M.* A problem with integral conditions with respect to time for a system of equations of the dynamic elasicity theory/ A. M. Kuz', B. Yo. Ptashnyk // J. Math. Sci. – 2015. – **2**, N.3. – P. 310–326.)

54. *Кузь А.М.* Задача з інтегральними умовами за часовою змінною для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник // V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу"(19-21 вересня 2013 р., Івано-Франківськ): тези доповідей. – Івано-Франківськ: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В.Стефаника, 2013. – С. 38.

55. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. / А. М. Кузь // Конференція молодих вчених "Підстригачівскі читання-2014"(Львів, 28-30 травня

2014р.): http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/theses/Kuz.pdf

56. *Кузь А.М.* Задача з інтегральними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 200–224.

57. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для систем рівнянь, параболічних за Шиловим / А. М. Кузь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 3. – С. 16-28.

58. *Кузь А. М.* Задача з інтегральною умовою за часом для параболо-гіперболічного рівняння / А. М. Кузь // Конференція молодих вчених "Підстригачівскі читання-2015"(Львів, 26-28 травня 2015 р.): http://iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Kuz.pdf

59. *Кузь А. М.* Задача з умовою, що містить інтегральний доданок, для параболо-гіперболічного рівняння / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, №5. – С. 635-644.

60. *Ланкастер П.* Теория матриц / П. Ланкастер – М.: Наука, 1982. – 272 с.

61. *Лукина Г. А.* Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега - де Фриза / Г. А. Лукина // Вестн. ЮУрГУ. Сер. "Математическое моделирование и программирование". – 2011. – Вип.8, №17. – С. 52–61.

62. *Мегралиев Я. Т.* Обратная краевая задача для уравнения Буссинеска–Лява с дополнительным интегральным условием / Я. Т. Мегралиев // Сиб. журн. индустр. матем. – 2013, – **16**, №1. – С.75-–83.

63. *Мегралиев Я. Т.* Об одной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка типа Соболева с несамосопряженными граничными условиями / Я. Т. Мегралиев , Э. И. Азизбеков // XIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука. Матеріали кофренції. Т.1. – Київ. – 2010. – С.269.

64. *Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для псевдодиференціальних рівнянь / О. М. Медвідь, М. М. Симотюк // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Сер. Математика – 2004. – Вип. 191–192. – С. 109–116.

65. *Медвідь О. М.* Діофантові наближення характеристичного визначника інтегральної задачі для лінійного рівняння з частинними похідними / О. М. Медвідь, М. М. Симотюк // Наук. Вісн. Чернів. нац. ун-ту. Серія математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 74–85.

66. *Медвідь О.М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними / О. М. Медвідь, М. М. Симотюк // Математичні студії. – 2007. – **28**, № 2. – С. 115–141.

67. *Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних систем рівнянь із частинними похідними / О. М. Медвідь, М. М. Симотюк// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 1. – С. 32-39.

68. *Медвідь О. М.* Інтегральна задача для навантажених рівнянь із частинними похідними / О. М. Медвідь // Математичний вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 201–213.

69. *Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для систем рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу / О. М. Медвідь, М.М. Симотюк // Математичний вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 414–427.

70. *Мельник З. О.* Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой / З. О. Мельник, В. М. Кирилич // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 6. – С. 716-721.

71. *Муравей Л. А.* Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения. / Л. А. Муравей, А. В. Филиновский // Мат. зам. – 1993. – **54**. № 4. – С. 98–116.

72. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике

почвенной влаги и грунтовых вод / А. М. Нахушев // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 72–81.

73. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения / А. М. Нахушев // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 1. – С. 86–94.
74. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии/ А. М. Нахушев – М.:Высш.шк. – 1995. – 301 с.
75. *Нахушева З. А.* Об одной нелокальной задаче для уравнения в частных производных / З. А. Нахушева // Дифференц. уравнения. – 1986. — **22**, № 1. — С. 171—174.
76. *Панеях Б. П.* О некоторых краевых задачах для линейных дифференциальных операторов / Б. П.Панеях // Мат. заметки, 1984. — 35, № 3. — С. 425–434.
77. *Полиа Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч / Г. Полиа, Г. Сеге – М.: Наука, 1978. – Ч.1 – 391 с.
78. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин – М.: Наука, 1982. – 312 с.
79. *Попов А. Ю.* Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа / А. Ю. Попов, И. В. Тихонов // Дифференц. уравнения – 2004. – **40**, № 3. – С. 396–405.
80. *Попов А. Ю.* Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени / А. Ю. Попов, И. В. Тихонов // Мат. сборник – 2005. – **196**, № 9. – С. 71–102.
81. *Пукальський І. Д.* Нелокальна задача Діріхлє для лінійних параболічних рівнянь з виродженням / І. Д. Пукальський // Укр. мат. журн. – 2007. – 59, № 1. – С. 99–108.
82. *Пукальський І. Д.* Крайова задача з нелокальною умовою та задача оптимального керування для лінійних параболічних рівнянь з виродженням / І. Д. Пукальський, І. М. Ісарюк // Прикарпат. вісн. НТШ.

Сер. Число. – 2011. – № 1. – С. 9–22.

83. *Пукальський І. Д.* Нелокальна параболічна крайова задача та задача оптимального керування для лінійних рівнянь з виродженням / І. Д. Пукальський // Приклад. пробл. механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 102–114.

84. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения / Л. С. Пулькина //Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 7. – С. 887–892.

85. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача для уравнения теплопроводности/ Л. С. Пулькина // Неклассические задачи математической физики. ИМ СО АН. Новосибирск. – 2005. – С. 231–239.

86. *Пулькина Л. С.* Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода / Л. С. Пулькина // Изв. вузов. Математика.– 2012. – № 4. – С. 74–83.

87. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача для гиперболического уравнения с инте- гральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени / Л. С. Пулькина // Изв. вузов. Математика. – 2012. – № 10. – С. 32–44.

88. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

89. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними /[*Б. Й. Пташник , В. С. Ільків , І. Я. Кміть , В. М. Поліщук*]. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

90. *Сабитов К. Б.* Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием / К. Б. Сабитов // Дифференциальные уравнения. – 2010. – **46**, № 10. – С. 1472–1481.

91. *Савка І. Я.* Задача спряження з інтегральною умовою для мішаного рівняння параболо-гіперболічного типу / тІ. Я. Савка, М. М.Симотюк

// Одинадцята відкрита наукова конференція ІМФН "PSC-IMFS-11"(Львів, 13-14 червня 2013 р.): Збірник матеріалів та програма конференції. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013. – С. 84–85.

92. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнения / А. А Самарский // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 11. – С. 1925–1935.
93. *Снітко Г. А.* Визначення залежних від часу функцій у молодшому коефіцієнті параболічного рівняння в області з вільною межею / Г. А. Снітко // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2013. – Вип. 11. – С. 21–32.
94. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – **18**, № 1. – С.3–50.
95. *Соболев С.Л.* О движении симметрического волчка с полостью, наполненой жидкостю / С. Л. Соболев // Прикл. механика и техн. физика – 1960. – № 3. – С.20–55.
96. *Симотюк М. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / М. М. Симотюк, О. М. Медвідь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 98–107.
97. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений / В. Г. Спринджук – М.:Наука, 1977. – 143 с.
98. *Стручина Г.М.* Задача о сопряжении двух уравнений / Г. М. Стручина // Инженер.-физ. журн. – 1961. – 4, № 11. – С. 99–104.
99. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды / Я. Д. Тамаркин – Петроград, 1917. – 308+XIV с.
100. *Тимків І. Р.* Багатоточкова задача із кратними вузлами для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами /

І. Р. Тимків // Карпатські математичні публікації. – 2011. – **3**, №2. – С. 120–130.

101. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях в частных производных смешанного типа. / Ф. Трикоми – М.: ИЛ, 1947. – 192 с.

102. *Уфлянд Я. С.* К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях / Я. С. Уфлянд // Инженер.-физ. журн. – 1964. – **7**, № 1.– С. 89–92.

103. *Фаддєєв Д.К.* Збірник задач з вищої алгебри / Д. К. Фаддєєв, І. С. Сомінський — К.: Вища школа, 1971. — 316 с.

104. *Фардигола Л. В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральными условиями / Л. В. Фардигола // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, №11. — С. 1546-–1551.

105. *Фардигола Л. В.* Свойства Т–устойчивости интегральной краевой задачи в слое / Л. В. Фардигола // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. — 1991. — № 55. — С. 78-–80.

106. *Фардигола Л. В.* Влияние параметров на свойства решений интегральных краевых задач в слое / Л. В. Фардигола // Изв. вузов. Математика. -– 1993. — № 7. — С. 51—58.

107. *Фардигола Л. В.* Интегральная краевая задача в слое / Л. В. Фардигола // Матем. заметки. — 1993. — **53**, вып. 6. — С. 122—129.

108. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц . – М.: Наука, 1962. – Т. 1.– 607 с.

109. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов: в 4-х т / Л. Хермандер — М.: Мир, 1986. — Т. 2. — 456 с.

110. *Шелухин В. В.* Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений / В. В. Шелухин // Сиб. матем. журн. – 1993. – **34**, № 2. – С.191-–207.

111. *Штабалюк П. І.* Про майже періодичні розв'язки однієї задачі з нелокальними умовами/ П. І. Штабалюк //Вісник держ. ун-ту "Львівська

політехніка": Диференц. рівняння та їх застосування. – 1995. – №286. – С. 153–165.

112. *Шубин М. А.* Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными / М. А. Шубин // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, №2 – С. 3–47.

113. *Юрчук Н. И.* Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений / Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 12.– С. 2117–2126.

114. *Юнусова Г. Р.* Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / Г. Р. Юнусова // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2011. – №8(89). – С. 108–117.

115. *Avalishvili G.* On integral nonlocal boundary value problems for some partial differentail equations G. Avalishvili, M. Avalishvili, D. Gordeziani // Bull. Georg. Natl. Acad. Sci. – 2011. – **5**, №1. – P.31–37.

116. *Besicovitch A. S.* Almost periodic functions./ A. S. Besicovitch – Cambridge: Dover Publications, Inc., 1954. – 180 p.

117. *Beilin S. A.* On a mixed nonlocal problem for a wave equation / S. A. Beilin // EJDE. – 2006. – No. 103, – P. 1–10.

118. *Bohr H.* Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I. / H. Bohr // Acta Math. – 1925.– 45. – P. 29–127.

119. *Bouziani A.* Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation / A. Bouziani // J. Appl. Math. Stochastic Anal. – 1996. – **9**, N.3. – P. 323–330.

120. *Bouziani A.* Solution to a semilinear pseudoparabolic problem with integral conditions / A. Bouziani, N. Merazga // EJDE – 2006. – No. 115. – P.1–18.

121. *Bouzit M.,* A Class of Third Order Parabolic Equations with Integral Conditions / M. Bouzit, N. Teyar //Int. Journal of Math. Analysis, – 2009. – **3**, No. 18. – P. 871–877.

122. *Dell'acqua G.* Embedding theorems of Sobolev-Besicovitch spaces $W_{ap}^{k,1}(\mathbb{R}^s)$ / G. Dell'acqua, P. Santucci // Rendiconti di Matematica. – 1996. – Serie VII, Volume 16. – P.525–536.

123. *Cannon J.R.* The solution of the heat equation sub ject to the specification of energy / J. R. Cannon // Quart. Appl. Math. – 1963 – **21**, No. 2 – P. 155–160.

124. *Gellerstedt S.* Sur un probleme aux limites pour une equation lineare aux derivees partielles du second order de type mixte: These pour le doctorat./ S. Gellerstedt – Uppsala, 1935. – 92 p.

125. *Kmit I.* Generalized solutions to hyperbolic problems with strongly singular coefficients/ I. Kmit, G. Hörmann // J. for Analysis and its Applications. – 2001. – **20**, N. 3 – P. 637–659.

126. *Kmit I.* Classical solvability of a singular hyperbolic problem with integral boundary condition/ I. Kmit // Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. – 2011. – N. 75 – P. 137–150.

127. *Kuz A. M.* Problem for hyperbolic system of equations having constant coefficients with integral conditions with respect to the time variable / A. M. Kuz, B. Yo. Ptashnyk // Carpathian Math. Publ. – 2014. – **6**, N. 2. – P. 282–299.

128. *Marhoune A.* Nonlocal singular problem with integral condition for a second order parabolic equation / A. Marhoune, A. Memou // EJDE. – 2015. – N. 64, – P. 1–9.

129. *Mesluob S.* Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations / S. Mesluob, A. Bouziani // Journal of Applied Math. – 2001. – №3. – P.107-116.

130. *Poincaré H.* Sur l'equilibre d'une mass fluide animée d'un mouvement de rotation / H. Poincaré // Acta Math. – 1885. – V.7. – P.259–380.

131. *Rossby C. G.* Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displaycement of the semi-premanent

centers of action /C. G. Rossby // J. Marine Res. – 1939. – 2, N.1. – P.38–55.

132. *Sabitov K. B.* Nonlocal problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain / K. B. Sabitov // Math. Notes. – 2011. – **89**, No. 4. – P. 562–567.