Відзив

офіційного опонента про дисертаційну роботу

Віталія Михайловича Гута

"Асимптотика спектрів еліптичних диференціальних операторів другого та четвертого порядків зі сингулярними коефіцієнтами",

подану на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

зі спеціальності 01.01.02—диференціальні рівняння

Дисертаційна робота Віталія Михайловича Гута присвячена дослідженню спектральних властивостей деякого класу сильно неоднорідних коливних систем, тобто композитних матеріалів із контрастними включеннями. Математичне формулювання таких задач приводить до спектрального аналізу еліптичних операторів другого та четвертого порядків, коефіцієнти яких на певній частині області (так званих включеннях) набувають або дуже малих, або дуже великих значень порівняно із їхніми значеннями на решті області. Природним чином у таких задачах виникає малий параметр ε, і метою дисертаційної роботи В. М. Гута є дослідити асимптотику власних значень та власних функцій відповідних диференціальних операторів при малих значеннях ε, побудувати граничну задачу та довести збіжність при $\varepsilon \to 0$ власних значень та власних векторів до власних значень та власних векторів граничної задачі.

Тематика досліджень є актуальною не лише з теоретичної, але також із практичної точки зору, адже сучасні технології дозволяють створювати матеріали із незвичайними властивостями — як, наприклад, графен та схожі структури. У наші дні широкого вжитку набули композитні матеріали, що мають дуже різні фізичні властивості у різних своїх частинах. У дисертаційній роботі автор розглянув ситуацію, коли у певний матеріал включають значно легші та жорсткіші частини, або ж значно важчі та пластичніші, та дослідив вплив таких включень на коливні властивості отриманої системи.

Результати досліджень виявили цікаві та досить незвичні спектральні ефекти. Кожне власне значення λ_n^ε таких сильно неоднорідних систем прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$, але після нормування $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ прямує до ненульової границі η_n, що є власним значенням деякої *"граничної"* задачі на важчій частині області. Вплив легшої частини на граничну задачу зберігається через нелокальні граничні умови для граничного оператора. Понад те, власні функції граничної задачі можна продовжити певним чином на всю область, і так продовжені функції будуть границями власних функцій початкових задач. Цікавою знахідкою автора є зведення початкової спектральної задачі до спектральної задачі на важкій області для операторної в'язки, що нелінійно залежить від спектрального параметра. Як виявилося, попри позірне ускладнення, це дозволило авторові обґрунтувати збіжність як (нормованих) власних значень, так і власних функцій до таких для граничної задачі. Поза сумнівом, такий підхід дисертанта можна використати для багатьох інших задач.

Зауважимо, що для досягнення мети автор широко використовує сучасний апарат теорії асимптотичних розвинень, диференціальних рівнянь, теорії функцій та спектральної теорії еліптичних операторів і абстрактних операторів у просторах Гільберта.

Перейдемо до детальнішого аналізу роботи. Дисертаційна робота викладена на 158 сторінках і складається зі вступу, чотирьох розділів, поділених на підрозділи, висновків та списку використаних джерел, що містить 124 найменування.

У вступі обґрунтовано актуальність тематики, сформульовано мету та завдання дослідження, висвітлено питання новизни, практичного значення отриманих результатів, особистого внеску здобувача, апробації результатів і публікацій.

У першому розділі автор подає огляд літератури за тематикою досліджень та наводить короткий огляд основних результатів дисертації, що виносяться на захист.

У другому розділі предметом дослідження є спектральна задача для еліптичного диференціального оператора другого порядку із сингулярними коефіцієнтами. Ця задача описує коливання пружного середовища $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ із включеннями ω, що є значно жорсткіші та водночас значно легші за основу. Жорсткість та густину середовища визначають коефіцієнти a_ε та r_ε, задані так:

$$a_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon a(x), & \text{коли} \quad x \in \Omega_0, \\ \alpha(x), & \text{коли} \quad x \in \omega, \end{cases} \qquad r_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(x), & \text{коли} \quad x \in \Omega_0, \\ \varepsilon^{\varkappa}\rho(x), & \text{коли} \quad x \in \omega, \end{cases}$$

де $\Omega_0 := \Omega \setminus \overline{\omega}$ позначає основне середовище без включень, a, α, r та ρ — гладкі функції у відповідних областях, а $\varkappa > 0$. У ваговому просторі $L_2(\Omega; r_\varepsilon dx)$ задамо оператор

$$A_\varepsilon := -\frac{1}{r_\varepsilon}\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla \cdot\,)$$

на функціях u з $W_2^2(\Omega_0 \cup \omega)$, що задовольняють умову Діріхле $u\big|_{\partial\Omega} = 0$ на межі області та є неперервними разом з $a_\varepsilon \nabla u$ при переході через межу γ розділу середовищ Ω_0 та ω. Тоді квадрати власних частот механічної системи є власними значеннями оператора A_ε, а задача полягає у дослідженні поведінки власних значень та відповідних власних функцій оператора A_ε при $\varepsilon \to 0$. Як обґрунтував дисертант, власні значення λ_n^ε оператора A_ε є величинами порядку $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Понад те, $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ прямують при $\varepsilon \to 0$ до границь μ_n, що є власними значеннями оператора T, заданого у просторі $L_2(\Omega_0; r dx)$ на функціях з $W_2^2(\Omega_0)$ формулою $Tu = -\frac{1}{r}\operatorname{div}(a\nabla u)$, умовою Діріхле на межі $\partial\Omega$ та деякими нелокальними умовами на межі розділу середовищ γ. Оператор T природно назвати "граничним", адже його спектр визначає граничну поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних значень оператора A_ε.

Маємо нетипову ситуацію, коли формально граничний оператор T діє в іншому функціональному просторі, ніж вихідна задача. Це значно ускладнює дослідження збіжності спектральних характеристик оператора A_ε при $\varepsilon \to 0$. Цікавим та нетривіальним підходом дисертанта до вирішення цієї проблеми є заміна вихідної задачі $A_\varepsilon u = \varepsilon\mu u$ в області Ω еквівалентною в певному сенсі задачею $T_\varepsilon(\mu)u = \mu u$ на області Ω_0. Утворений таким чином оператор $T_\varepsilon(\mu)$ діє у просторі $L_2(\Omega_0; rdx)$ за тою ж формулою, що й T, проте заданий на іншій області визначення: зокрема, нелокальна умова на межі розділу середовищ γ містить псевдодиференціальний оператор Діріхле–Неймана для включень ω та нелінійно залежить від спектрального параметра μ. Іншими словами, спектральну задачу для оператора A_ε в області Ω автор замінив спектральною задачею $T_\varepsilon(\mu)u = \mu u$ в області Ω_0 для *операторної в'язки* $T_\varepsilon(\mu)$.

Одним із основних результатів другого розділу є теорема 2.1, що стверджує рівномірну резольвентну збіжність операторів $T_\varepsilon(\mu_\varepsilon)$ до T при $\varepsilon \to 0$ за умови, що при цьому μ_ε залишається в обмеженій області. Звідси дисертант далі виводить збіжність при $\varepsilon \to 0$ напрямленостей $\varepsilon^{-1}\lambda_n^\varepsilon$ до власних значень η_n оператора T з урахуванням кратностей (теорема 2.2) та збіжність відповідних спектральних підпросторів (теорема 2.3). У випадку натурального $\varkappa$ автор також будує та обґрунтовує повне асимптотичне розвинення власних значень λ_n^ε та відповідних власних функцій u_n^ε (теорема 2.4).

Схожу програму досліджень автор реалізовує у третьому розділі у випадку гнучких важких включень, а в останньому розділі — для еліптичних диференціальних операторів четвертого порядку у випадку жорстких легких включень. В обох випадках гранична задача задана на важчій частині області, а для дослідження збіжності власних значень та власних функцій автор замість початкової спектральної задачі вводить спектральну задачу для операторної в'язки, що нелінійно залежить від спектрального параметра.

Загалом робота добре структурована, оформлена належним чином та справляє гарне враження. Водночас хотів би висловити ряд зауважень та пропозицій, що виникли при опрацюванні дисертаційної роботи.

(а) У роботі цілий ряд допоміжних тверджень (наприклад, нерівності Фрідріхса та Пуанкаре, варіаційний принцип Куранта) наводиться без покликань на джерела.

(б) Не цілком чітким є доведення самоспряженості диференціальних операторів, що виникають у дисертаційному дослідженні. Наприклад, при доведенні леми 2.1 дисертант одразу припускає, що область визначення спряженого оператора A_ε^* міститься у множині $W_2^2(\Omega_0 \cup \omega)$, хоча це слід було обґрунтувати (наприклад, показавши насамперед, що оператор A_ε є симетричним). Незрозумілою також є фраза *"Зауважимо, що всі три поверхневі інтеграли є лінійно незалежними функціоналами функції v ..."*, адже функцію v з області визначення оператора A_ε^* ми зафіксували і доводимо, що вона належить до області визначення оператора A_ε.

   Схожі неточності є і при доведенні самоспряженості оператора T у лемі 2.3, оператора $T_\varepsilon(\mu)$ у лемі 2.7 та аналогічних об'єктів у розділах 3 та 4.

(в) Доведення нерівності $\lambda_n^\varepsilon \geq \varepsilon\lambda_n^1$ у лемі 2.2 надто ускладнене: ця нерівність одразу випливає із варіаційного принципу Куранта та оцінок $b_\varepsilon[u] \geq \varepsilon b_1[u]$ та $\|u\|_\varepsilon \leq \|u\|_1$.

(г) Доведення леми 2.12 є неповним: автор не пояснює, як із твердження 2.4 випливає існування границі функції η_n^ε при $\varepsilon \to 0$. Звісно, якщо існування такої границі вже доведено, то за твердженням 2.4 вона є власним значенням оператора T.

Певним недоліком роботи можна вважати теж ряд невдалих формулювань та описок. Наведемо деякі з них:

(1) на ст. 20 автор говорить про еліптичні оператори *"другого роду"*, хоча мова, мабуть, іде про оператори *"другого порядку"*;

(2) вислів на ст. 28 *"дія резольвенти оператора A_ε буде компактно вкладатись в простір $L_2(\Omega)$"* є невдалим; автор мав на увазі, що компактним буде вкладення в $L_2(\Omega)$ області значень резольвенти оператора A_ε;

(3) строго кажучи, всі оператори діють у просторах комплекснозначних функцій, а тому скалярний добуток на ст. 34 потрібно розглядати в $\mathbb{C}^m$, а не в $\mathbb{R}^m$; також, у зображенні (2.18) власної функції v_0 вектор $\mathbf{c}_0$ належить до $\mathbb{C}^m$. Потрібно додатково зауважити, що власні функції завжди *можна* вибрати дійснозначними;

(4) в останній формулі на ст. 74 замість $\int_\omega a|\nabla u|^2\,dx$ має бути $\int_\omega b|\nabla u|^2\,dx$;

(5) у формулі для $\mathcal{D}(T_\varepsilon(\mu))$ на ст. 47 умова Діріхле $v = 0$ має бути виконана на $\partial\Omega$, а не на γ;

(6) на ст. 48, 5-й рядок знизу: замість μ_n^ε має бути η_n^ε;

(7) у формулюванні теореми 2.1 читаємо : *"Нехай $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ — обмежена послідовність ..."*; має бути *"обмежена сім'я"* чи *"обмежена напрямленість"*;

(8) формулювання означення 2.2 є невдалим, бо вислів *"$R_\lambda(B_\varepsilon) \to R_\lambda(B)$ рівномірно для всіх λ"* можна хибно потрактувати, що збіжність резольвент має бути рівномірною за параметром λ, хоча мова йде про збіжність за рівномірною операторною топологією для кожного окремого λ;

(9) з невідомих причин частину прізвищ закордонних учених дисертант подає латинськими літерами;

(10) окрім того, зустрічаємо деякі інші описки (напр., "в припущені" замість "за припущення" на ст. 22, 23, 30, 110, "при малому збурені" замість "при малому збуренні" на ст. 23 та 71, "вбік" замість "у бік" на ст. 26 та 73, "збоку" замість "з боку" на ст. 113, "компонента зв'язаності" замість "компонента зв'язності" на ст. 130 тощо) та неправильно вжиті знаки пунктуації.

Зроблені критичні зауваження не впливають на загальне враження від роботи та її позитивну оцінку.

Підсумовуючи, зазначимо, що у дисертаційній роботі В. М. Гута отримано нові науково обґрунтовані результати, що становлять завершене дослідження асимптотичних спектральних властивостей еліптичних диференціальних операторів другого та четвертого порядків з сингулярними коефіцієнтами. Достовірність результатів дисертації підтверджена достатньо строгими та повними доведеннями лем та теорем. Ці результати автор отримав самостійно, з належною повнотою опублікував у виданнях, затверджених ВАК України, і доповідав на конференціях та семінарах. Автореферат повно відображає зміст та основні положення дисертації.

З огляду на сказане вважаю, що дисертаційна робота В. М. Гута *"Асимптотика спектрів еліптичних диференціальних операторів другого та четвертого порядків зі сингулярними коефіцієнтами"*, подана на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння, за обсягом проведених наукових досліджень, їх науковим рівнем, актуальністю, науковою новизною, кількістю публікацій відповідає всім вимогам ВАК України, які висуваються до кандидатських дисертацій, а її автор, Віталій Михайлович Гут, безумовно, заслуговує присудження йому вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння.

Старший науковий співробітник
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
кандидат фізико-математичних наук — Р. О. Гринів

28 жовтня 2015 р.

Підпис Р.О. Гринів
засвідчую
Вчений секретар ІППММ
ім. Я.С.Підстригача НАНУ
В.О. Міщенко