

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу Кіндибалюка Аркадія Анатолійовича «Чисельне дослідження динамічних систем на основі методу скінченних елементів і Лі-алгебричних дискретних апроксимацій», подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика

## *Актуальність теми дисертаційної роботи*

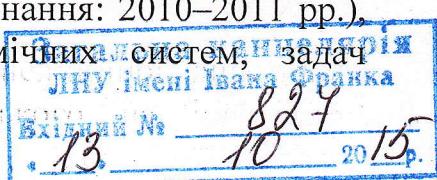
Застосування Лі-алгебричного підходу, запропоноване Калоджеро Ф., дозволило побудувати високоточні схеми для розв'язування задачі на власні значення диференціальних операторів. У працях Митропольського Ю.О., Самойленка В.Г., Прикарпатського А.К., Притули М.М., Бігун О.Г., Люстика М.С. цей підхід поширилося на лінійні та нелінійні динамічні системи.

Одним із поширених засобів вивчення динамічних систем є обчислювальні методи, а важливими їх характеристиками є стабілізація розв'язку та верифікація побудованих схем. Для стабілізації сингулярно-збурених країових задач за останні десятиліття запропоновано широкий спектр підходів. Це, зокрема, протипотокові схеми (Hughes T.J.R, Leonard B.P., Mackenzie J.A.), експоненціальні апроксимації методу скінченних елементів (MCE) (Савула Я.Г, Шинкаренко Г.А., Hemker P.W.).

Математичне подання законів збереження для нелінійних динамічних систем на періодичних многовидах є нетривіальною задачею. Поширені методи її розв'язування асимптотичний метод (Митропольський Ю.О., Боголюбов М.М. (мол.)), градієнтно-голономний (Митропольський Ю.О., Боголюбов М.М. (мол.), Прикарпатський А.К., Самойленко В.Г., Притула М.М.) та прямий метод невизначених коефіцієнтів (Негеман W.) не охвачують весь спектр задач, або приводять до складних систем рівнянь з великою кількістю невідомих. Отже, виникає потреба у побудові нових ефективних алгоритмів знаходження законів збереження для нелінійних динамічних систем, які використовуються для верифікації обчислювальних схем та для знаходження періодичних розв'язків нелінійної динамічної системи на основі редукції Новікова-Богоявленського на інваріантні підмноговиди.

Деякі динамічні системи не володіють достатньою кількістю законів збереження для проведення редукції. Для побудови часткових розв'язків таких систем викорисовується метод гіперболічних тангенс функцій (Fan E.G., Hereman W., Yusufoglu E., Bekir E, Goktas Ü.).

Крім вказаного вище, актуальність теми підтверджується виконанням держбюджетних тем кафедри дискретного аналізу та інтелектуальних систем Львівського національного університету імені Івана Франка: По-66П «Математичні методи дослідження нелінійних динамічних систем, індуктивних методів моделювання даних і задач оптимізації» (номер державної реєстрації теми: 0110U001373, термін виконання: 2010–2011 рр.), По-119П «Методи дослідження нелінійних динамічних систем, задач



оптимізації, аналізу даних на основі карт Кохонена» (номер державної реєстрації теми: 0112U001284, термін виконання: 2012–2013 рр.).

### *Наукова новизна одержаних результатів*

Оцінюючи основні здобутки дисертації, варто вказати на результати, що мають вагому наукову новизну:

- визначено умови збіжності узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для динамічних систем;
- побудовано високоточні обчислювальні схеми для рівняння адвекції та тепlopровідності на основі узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій;
- побудовано та проведено верифікацію обчислювальних схем для сингулярно-збурених задач адвекції-дифузії з постійними та змінними коефіцієнтами з використанням кусково-степеневих базисних функцій методу скінчених елементів;
- модифіковано методи та алгоритми для знаходження законів збереження, імплектичних операторів, точних солітонних розв'язків та скінченно-вимірних редукцій нелінійних динамічних систем.

Вважаю, що елементи наукової новизни сформульовані коректно, їх кількість та кваліфікаційні ознаки відповідають нормативним вимогам.

### *Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків і рекомендацій, сформульованих у дисертації*

Результати, сформульовані і доведені в дисертації, є новими та строго обґрунтованими. Їх з достатньою повнотою подано у формі алгоритмів та теорем зі строгим математичним доведенням. Крім того, застосовність запропонованих методів демонструється на чисельних експериментах, які підтверджують теоретичні результати щодо збіжності та оцінок похибки.

### *Оцінка змісту та завершеності дисертації*

Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів (що містять 28 таблиць та 31 рисунок), висновків і списку використаних джерел (115 найменувань). Повний обсяг роботи складає 168 сторінок.

У вступі обґрунтовано актуальність проблеми, сформульовано мету дисертаційного дослідження. Логічно окреслено систему використаних у роботі дослідницьких методів.

У першому розділі дисертаційної роботи автор проаналізував переваги застосування методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій. Показав, що у задач, розв'язки яких характеризуються великими значеннями похідних виникає потреба у побудові стабілізованих схем для сингулярно збурених динамічних систем на основі методу скінчених елементів з використанням кусково-степеневих базисних функцій, а також потреба у модифікації методів знаходження законів збереження та точних солітонних розв'язків, які є способами верифікації обчислювальних схем.

У другому розділі роботи наведено модифікацію метода Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, яка дозволяє розв'язувати крайові задачі з однорідними та неоднорідними крайовими умовами. Запропонований Кіндібалюком А.А. узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій дозволяє досягти факторіальної швидкості збіжності за рахунок введення додаткової алгебри Лі за часовою змінною і при цьому диференціальний оператор динамічної системи трактується як елемент огорнутої алгебри Гайзенберга-Вейля алгебри Лі. Оскільки диференціальний оператор є формальним поліномом елементів алгебри Лі, то матричним квазізображенням диференціального оператора є суперпозиція квазізображень елементів алгебри Лі. Доведено апроксимаційні властивості, факторіальну збіжність обчислювальної схеми, побудованої з використанням узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

У третьому розділі досліджено властивості запропонованих кусково-степеневих базисних функцій: доведено лінійну незалежність у просторах  $H^m, m \in \mathbb{Z}_+$ , оцінки похибки апроксимації у функціональних просторах  $C, L^2, H^1$ , побудовано обчислювальні схеми для сингулярно-збурених крайових задач адвекції-дифузії-реакції з змінними та розривними коефіцієнтами. З використанням М-критерію доведено збіжність обчислювальної схеми та визначено оптимальне значення параметра стабілізації кусково-степеневих базисних функцій. Показано застосування результатів до дослідження динамічних систем, зокрема для нестационарної задачі адвекції-дифузії-реакції та рівняння Бюргерса.

Четвертий розділ присвячено запропонованому комбінованому алгоритмові знаходження законів збереження та імплектичних операторів нелінійних динамічних систем. Кіндібалюк А.А. показав зв'язок між асимптотичним методом знаходження законів збереження та диференціально-алгебричним алгоритмом. Знайдено закони збереження, імплектичні оператори для узагальненої динамічної системи Бюргерса та Буссінеска-Бюргерса. Побудовано скінченно-вимірні інваріантні редукції системи Буссінеска-Бюргерса методом Новікова-Богоявленського. Запропоновано модифікацію методу гіперболічних тангенс функцій, яка уточнює вибір степені поліноміального розв'язку.

Вказане вище дозволяє стверджувати, що мета дисертаційної роботи досягнута. Результати є новими. Дисертація є завершеною науковою працею.

### *Значення одержаних результатів для науки й практики та рекомендації щодо їх можливого використання*

Теоретичні та практичні результати дисертаційного дослідження Кіндібалюка А.А. мають широке поле застосування. Зокрема можуть бути використані:

- 1) для розробки універсальних пакетів чисельного розв'язування задач гідродинаміки, метеорології, екології;

- 2) для дослідження математичних явищ, або процесів, що пов'язані з міграцією домішок;
- 3) при читанні спеціальних курсів лекцій з обчислювальних методів математичної фізики та моделювання нелінійних динамічних систем для студентів вищих навчальних закладів з фізико-математичного напрямку.

### ***Повнота викладення наукових положень, висновків і рекомендацій дисертації в опублікованих працях***

Основні положення та висновки дисертаційної роботи викладено у 12 працях, 4 з яких опубліковані в іноземних наукових виданнях і додатково висвітлені у 13 тезах і матеріалах всеукраїнських та міжнародних наукових математичних конференцій

Таке представлення результатів наукової роботи є достатнім. Кількість публікацій, обсяг, якість, повнота висвітлення результатів та розкриття змісту дисертації відповідає вимогам пп. 9, 11, 12 «Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника», оскільки в ній отримано нові науково обґрунтовані результати. Вони вносять істотне вклад у розвиток теорії та практиці чисельних методів, перш за все – у побудові високоточних обчислювальних схем для динамічних систем та засобів їхньої верифікації.

Основні положення дисертації апробовані на наукових конференціях. Науково-практична спрямованість конференцій, де відбувалася апробація дисертації, характер статей дисертанта, в яких відображені положення дисертації дозволяють зробити висновок про якісну апробацію дисертації та про самостійне наукове дослідження.

### ***Відповідність змісту автореферату основним положенням дисертації***

Ознайомлення з текстом автореферату дисертації дає підстави стверджувати, що за структурою та змістом він відповідає вимогам, що ставляться МОН України. У тексті автореферату відображено основні положення, зміст, результати і висновки здійсненого Кіндібалюком А.А. дисертаційного дослідження. Наголосимо, що зміст автореферату та основні положення дисертації є ідентичними.

### ***Дискусійні положення та зауваження***

Позитивно оцінюючи здобутки дисертанта, вважаємо за необхідне зазначити наступні дискусійні положення та зауваження до поданої дисертаційної роботи.

1. Бажано більш детально за літературними джерелами проаналізувати вплив способу дискретизації в методі Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

2. У п. 2.3 бажано вказати явний вигляд диференціального рівняння з формальним поліноміальним диференціальним оператором.
3. Мені здається, що дисертація перевантажена (168 стор.) можливо таблицями та рисунками.

Загалом, висловлені зауваження не ставлять під сумнів отримані наукові результати, а побажання можуть бути реалізовані у подальшій науковій роботі.

### *Загальна оцінка дисертаційної роботи*

Дисертація робота на тему «Чисельне дослідження динамічних систем на основі методу скінчених елементів і Лі-алгебричних дискретних апроксимацій» є завершеною, самостійно підготовленою кваліфікаційною науковою працею, в якій отримано нові науково обґрунтовані результати, які в сукупності вирішують конкретне наукове завдання, що має істотне значення в теорії та практиці чисельних методів, перш за все – у побудові високоточних обчислювальних схем для динамічних систем та засобів їхньої верифікації.

Актуальність обраної теми дисертації, ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків і рекомендацій, новизна та повнота викладу в опублікованих працях повністю відповідають вимогам до кандидатських дисертацій.

Вважаю, що за своїм науковим рівнем дисертаційна робота «Чисельне дослідження динамічних систем на основі методу скінчених елементів і Лі-алгебричних дискретних апроксимацій», представлена на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, відповідає вимогам пп. 9, 11, 12 «Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника», а її автор – Кіндібалюк Аркадій Анатолійович заслуговує присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – «обчислювальна математика».

### **Офіційний опонент:**

професор кафедри обчислювальної математики  
Київського національного університету  
імені Тараса Шевченка,  
доктор фізико-математичних наук,  
професор

О. Ю. Грищенко

ПІДПИС ЗАСВІДЧЕННЯ  
ВЧЕНИЙ СЕМІНАРУ  
КАРАУЛЬНОГО  
13.10

