

Львівський національний університет імені Івана Франка

На правах рукопису

Кіндибалюк Аркадій Анатолійович

УДК 517.9

**ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ
МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ І ЛІ-АЛГЕБРИЧНИХ
ДИСКРЕТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ**

01.01.07 – обчислювальна математика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук,
професор
Притула Микола Миколайович

Львів 2015

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. Огляд літератури.....	16
1.1. Висновки до розділу 1.....	27
2. Узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для лінійних динамічних систем	28
2.1. Модифікація методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для крайових задач з неоднорідними крайовими умовами.....	28
2.2. Узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші з поліноміальним диференціальним оператором.....	33
2.3. Узагальнений метод для задач Коші у багатовимірному випадку.....	43
2.4. Застосування методу для задачі Коші для одновимірного рівняння адвекції	45
2.5. Застосування методу для задачі Коші для одновимірного рівняння тепlopровідності.....	50
2.6. Застосування методу для задачі Коші для двовимірного рівняння адвекції.....	54
2.7. Висновки до розділу 2.....	58
3. Кусково-степеневі базисні функції методу скінченних елементів для сингулярно збурених крайових задач адвекції-дифузії-реакції.....	59
3.1. Кусково-степенева апроксимація функцій.....	59
3.2. Лінійна незалежність кусково-степеневих функцій.....	61
3.3. Оцінка похибки кусково-степеневої апроксимації.....	63
3.4. Степеневі апроксимації МСЕ для задачі адвекції – дифузії.....	68
3.5. Обчислення на скінченному елементі.....	70

3.6.	Система рівнянь МСЕ. Стійкість та збіжність схеми.....	72
3.7.	Кусково-степеневі апроксимації МСЕ та їхня похибка для задачі адвекції-дифузії-реакції.....	77
3.8.	Оцінка похибки кусково-степеневої апроксимації МСЕ.....	82
3.9.	Аналіз числових результатів.....	85
3.10.	Застосування кусково-степеневих апроксимацій для двовимірної задачі адвекції-дифузії.....	97
3.11.	Застосування кусково-степеневих апроксимацій для нестационарних задач адвекції-дифузії-реакції та рівняння Бюргерса.....	103
3.12.	Висновки до розділу 3	106
4.	Комбінований алгоритм гамільтонового аналізу та скінченновимірні редукції нелінійних динамічних систем.....	108
4.1.	Закони збереження, імплектичні оператори узагальненої динамічної системи Бюргерса.....	108
4.2.	Комбінований алгоритм знаходження законів збереження та імплектичних операторів для системи Буссінеска – Бюргерса.....	118
4.3.	Скінченновимірна редукція системи Буссінеска – Бюргерса.....	123
4.4.	Точні солітонні розв'язки двовимірної динамічної системи Бюргерса.....	130
4.5.	Висновки до розділу 4	151
	Загальні висновки	153
	Список використаних джерел.....	155

ВСТУП

Актуальність теми. При дослідженні різноманітних математичних моделей сучасного природознавства використовуються як найновіші здобутки з математики, зокрема, таких її розділів як функціональний аналіз, нелінійна математична фізика, диференціальні рівняння, теорія груп та алгебр Лі, диференціальна та алгебрична геометрія, так і сучасні засоби обчислювальної математики і комп’ютерної техніки.

Незважаючи на потужний математичний апарат, для багатьох диференціальних рівнянь, які частіше всього використовуються в якості математичних моделей, не завжди вдається знайти їх точний розв'язок, а отже, виникає потреба у побудові їх наближених розв'язків, і як наслідок, створення нових високоточних обчислювальних схем їх відшукання.

Одним з ефективних таких високоточних методів є Лі-алгебричний метод, який було запропоновано Калоджеро Ф. у 1983 році для розв'язування задачі на власні значення для лінійних диференціальних операторів [78]. У подальшому, у працях Митропольського Ю.О., Прикарпатського А.К., Самойленка В.Г, Притули М.М. та інших цей метод було поширено на лінійні та нелінійні динамічні системи [5, 45, 50, 51, 63, 73 – 76, 97, 98, 105]. При цьому дискретизація відповідних задач здійснювалася лише за просторовими змінними.

Тому актуальною задачею є проблема узагальнення згаданого методу з використанням дискретизації також за часовою змінною. При цьому важливе значення має вивчення питання, що стосуються умов його збіжності.

Іншим важливим аспектом побудови обчислювальних схем для чисельного розв'язування задач з великими значеннями коефіцієнтів (задачі з сингулярностями) є стабілізація розв'язку та верифікація побудованих схем. Для стабілізації сингулярно збурених краївих задач в останні десятиліття розвинуто різноманітні підходи, зокрема, такі, як: протипотокові схеми [91]

(Hughes T.J.R, Leonard B.P., Mackenzie J.A.), експоненціальні апроксимації методу скінченних елементів (МСЕ) (Савула Я.Г [60, 61], Шинкаренко Г.А. [64], Hemker P.W. [89]).

Для задач зі змінними коефіцієнтами та наявністю внутрішнього шару використання класичних апроксимацій породжує нестійкість, отже актуальною є задача розробки альтернативних підходів. Крім того, для певних класів динамічних систем не завжди вдається знайти їх точні розв'язки, а тому виникає потреба у розробці засобів верифікації обчислювальних схем, один з яких полягає у використанні законів збереження, що, в свою чергу є нетривіальною задачею [10, 47, 48, 52, 57, 77, 87, 104].

Закони збереження використовуються для верифікації обчислювальних схем та для знаходження періодичних розв'язків нелінійної динамічної системи на основі редукції Новікова-Богоявленського на інваріантні підмноговиди [12].

Деякі динамічні системи не володіють достатньою кількістю законів збереження для проведення редукції. Для побудови часткових розв'язків таких систем доцільно використовувати метод гіперболічних тангенс функцій [70, 83, 112] (Fan E.G., Hereman W., Yusufoglu E., Bekir E, Goktaş Ü.). Крім того, потребує вивчення низки питань, що стосуються, наприклад, вибору базисних гіперболічних функцій, степеня поліноміального розв'язку, тощо.

Саме розгляду згаданих питань і присвячено дану дисертаційну роботу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.
 Тематика дисертаційної роботи пов'язана з науковими дослідженнями кафедри дискретного аналізу та інтелектуальних систем Львівського національного університету імені Івана Франка. Дисертація виконана в рамках держбюджетних тем: По-66П «Математичні методи дослідження

нелінійних динамічних систем, індуктивних методів моделювання даних і задач оптимізації» (номер державної реєстрації теми: 0110U001373, термін виконання: 2010–2011 pp.), По-119П «Методи дослідження нелінійних динамічних систем, задач оптимізації, аналізу даних на основі карт Кохонена» (номер державної реєстрації теми: 0112U001284, термін виконання: 2012–2013 pp.).

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка нових високоточних методів побудови наближених розв'язків лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь і краївих задач для них, верифікація цих методів та їх застосування для дослідження конкретних математичних моделей.

Об'єкт дослідження: лінійні та нелінійні динамічні системи, одновимірні та двовимірні сингулярно збурені країові та початково-країові задачі адвекції-дифузії та адвекції-дифузії-реакції.

Предмет дослідження: узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій диференціальних рівнянь, кусково-степеневі апроксимації методу скінченних елементів, скінченновимірні інваріантні редукції на локальні інваріантні підмноговиди гамільтонових та бігамільтонових динамічних систем.

Методи дослідження: метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, метод скінченних елементів, теорія гамільтонових систем, метод редукції Новікова-Богоявленського.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними результатами, що виносяться на захист, є такі:

- визначено умови збіжності узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для динамічних систем;

- побудовано високоточні обчислювальні схеми для рівнянь адвекції та теплопровідності на основі узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій;
- побудовано та проведено верифікацію обчислювальних схем для сингулярно збурених задач адвекції-дифузії з постійними та змінними коефіцієнтами з використанням кусково-степеневих базисних функцій методу скінченних елементів;
- модифіковано методи та алгоритми для знаходження законів збереження, імплектичних операторів, точних солітонних розв'язків та скінченновимірних редукцій нелінійних динамічних систем.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має в основному теоретичний характер. Її результати стосуються подальшого розвитку методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій і методу скінченних елементів, та їх застосування для дослідження математичних моделей, що описують процеси, що пов'язані з міграцією домішок. Результати дисертації можуть використовуватися при читанні спеціальних курсів лекцій з обчислювальних методів математичної фізики та математичного моделювання для студентів вищих навчальних закладів з фізико-математичного напряму.

Запропоновані обчислювальні схеми узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій та методу скінченних елементів подано у вигляді, придатному для розробки універсальних пакетів чисельного розв'язування задач гідродинаміки, метеорології, екології та інших задач.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримано автором самостійно. У працях [22, 24–27] науковому керівнику професору Притулі М.М. належить формульовання задач та аналіз одержаних

результатів. У працях [29, 30] професору Шинкаренку Г.А. належить формулювання задач та аналіз одержаних результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на: IV Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики акад. Я.С. Підстригача. (Львів, 24–27 травня 2011 р.), XVII Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 6–7 жовтня 2011 р.), XV Всеукраїнській (Х міжнародній) студентській конференції з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2012 (Львів, 5–6 квітня 2012 р.), Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 19–21 квітня 2012 р.), XX міжнародній конференції «Прийняття рішень в умовах невизначеності», PDMU-2012 (Brno, Czech Republic, 17–21 вересня 2012 р.) , International conference dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach (L'viv, 17–21 September 2012 р.), XVIII Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 4–5 жовтня 2012 р.), Третій Всеукраїнській науково-практичній конференції «Сучасні інформаційні технології в економіці, менеджменті та освіті» (Львів, 21 листопада 2012 р.), Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 21–25 травня 2013 р.), XIX Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 3–4 жовтня 2013 р.), IV Всеукраїнській науково-практичній конференції «Сучасні інформаційні технології в економіці, менеджменті та освіті» (Львів, 20 березня 2014 р.), XX Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 7–9 квітня 2014 р.), VII Міжнародній науковій конференції імені академіка Ляшка І.І. «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 9–10 жовтня 2014 р.), на наукових семінарах Наукового товариства ім. Т. Шевченка (Львів, 2011–2014 pp.), на науковому семінарі кафедри математичної фізики

Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ, 15 жовтня 2014 р.), на наукових семінарах кафедри дискретного аналізу та інтелектуальних систем, кафедри теорії оптимальних процесів, науковому семінарі факультету прикладної математики та інформатики, Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь, кваліфікаційному семінарі Львівського національного університету імені Івана Франка.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 12 наукових працях [22–31, 93, 94], з яких 9 статей у фахових наукових виданнях України та 4 статті у закордонних журналах [25, 27, 93, 94], в тому числі 1 переклад [27] і додатково висвітлені у 13 тезах і матеріалах всеукраїнських та міжнародних наукових математичних конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, що містять 28 таблиць і 31 рисунок, висновків і списку використаних джерел (114 найменувань). Повний обсяг роботи складає 168 сторінок.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, відображені зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами та темами, сформульовано предмет і мету досліджень, визначено наукову новизну роботи і практичне значення отриманих результатів, подано відомості з апробації роботи.

У **першому розділі** дисертаційної роботи проведено аналіз актуального стану проблем за тематикою дисертації: проаналізовано застосування методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для побудови високоточних обчислювальних схем, методи стабілізації сингулярно збурених крайових задач для рівняння адвекції-дифузії, методи верифікації обчислювальних схем та алгоритми знаходження законів збереження для нелінійних динамічних систем та побудови скінченновимірних редукцій на інваріантні підмноговиди.

У другому розділі дисертації запропоновано новий високоточний метод побудови наближених розв'язків лінійних динамічних систем на основі узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, доведено його збіжність, отримано оцінки похиби апроксимації.

Під динамічною системою розумімо певний об'єкт, для якого визначено поняття стану системи та задано закон еволюції за допомогою диференціального рівняння вигляду $u_t = K[u]$, де K може бути як лінійним, так і нелінійним диференціальним оператором. При цьому важливим питанням є дослідження стаціонарного стану динамічної системи, тобто розв'язків рівняння вигляду $K[u] = 0$, оскільки це дозволяє не лише вивчити загальні властивості поведінки динамічної системи, а також врахувати певні специфічні аспекти, які виникають під час чисельного дослідження таких систем.

Узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій полягає у використанні алгебр Лі для просторових і часової змінних, та побудові квазізображень відповідних елементів алгебри Лі.

У підрозділі 2.1 розглянуто крайову задачу з неоднорідними крайовими умовами вигляду

$$\begin{cases} \text{знати функцію } u = u(x) \text{ таку, що:} \\ A(u(x)) = f(x) \text{ в } \Omega = (0, 1), u(0) = g_1, \quad u(1) = g_2, \end{cases} \quad (0.1)$$

де $A : W^{\infty, \infty}(\Omega) \rightarrow W^{\infty, \infty}(\Omega)$ – еліптичний оператор, який є формальним поліномом елементів алгебри Лі $\left\{1, x, \frac{d}{dx}\right\}$, простір $W^{\infty, \infty}(\Omega)$ такий, що $W^{\infty, \infty}(\Omega) = \left\{u : \Omega \rightarrow R \mid D^\alpha u \in L^\infty(Q_T), \forall \alpha \in N\right\}$, g_1, g_2 – довільні дійсні числа, функція $f(x)$ характеризує інтенсивність внутрішніх джерел,

У підрозділі 2.2 розглянуто абстрактну задачу Коші в обмеженому циліндри $Q_T = \Omega \times (0, T]$, де $\Omega := (a, b) \subset R$, часова межа $T < +\infty$. Розв'язок цієї задачі шукається у просторі $V = W_{x,t}^{\infty, \infty}(Q_T)$, $C = V$, де простір $W_{x,t}^{\infty, \infty}(Q_T)$ такий, що

$W_{x,t}^{\infty,\infty}(Q_T) = \left\{ u : Q_T \rightarrow R \mid D^\alpha u \in L^\infty(Q_T), \forall \alpha \in N \right\}$, тобто похідні довільного порядку за змінними $x, t \in \Omega$ обмеженими.

Припускається, що лінійний диференціальний оператор K є формальним поліномом елементів алгебри Лі $\{1, x, \partial/\partial x\}$ і записується таким

чином $K = a_k \frac{\partial^k}{\partial x^k} + a_{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} + \dots + a_{k+p} \frac{\partial^{k+p}}{\partial x^{k+p}}$, де $a_{k+i} \in R$, $i = \overline{0, p}$, $a_k \neq 0$, $k \geq 1$,

$\alpha = k + p$ позначає найвищий порядок похідної за змінною x , а $a_\alpha = a_{k+p}$ — коефіцієнт при старшій похідній за змінною x .

Задача Коші з оператором $K : V \rightarrow V$ має вигляд:

$$\begin{cases} \text{знати функцію } u = u(x, t) \in V \text{ таку, що} \\ u_t = Ku + f, \forall (x, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi \in W_x^{\infty,\infty}(\Omega), \end{cases} \quad (0.2)$$

де простір $W_x^{\infty,\infty}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow R \mid \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} \in L^\infty(\Omega), \forall \alpha \in N \right\}$, $\varphi = \varphi(x) \in W_x^{\infty,\infty}(\Omega)$ —

початкова умова, $f = f(x, t) \in C$ описує внутрішні розподілені джерела.

Заміною $u(x, t) = v(x, t) + \varphi(x)$ задача (0.2) зводиться до задачі Коші з однорідними початковими умовами:

$$\begin{cases} \text{знати функцію } v = v(x, t) \in V \text{ таку, що} \\ v_t = Kv + K\varphi + f, \forall (x, t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (0.3)$$

розв'язок якої шукається у просторі функцій, які в початковий момент часу набувають нульового значення, тобто у просторі $B = \left\{ v \in V : v|_{t=0} = 0 \right\}$. Задача (0.3) записується в операторному вигляді

$$\begin{cases} \text{задано оператор } A : B \rightarrow C \text{ та елемент } \tilde{f} \in C, \\ \text{знати елемент } v \in B \text{ такий, що } Av = \tilde{f}, \end{cases} \quad (0.4)$$

де $A = \partial/\partial t - K$, $\tilde{f} = K\varphi + f \in C$.

Узагальнений метод Лі-алгебричних апроксимацій полягає у дискретизації задачі (0.4) як за просторовою, так і за часовою змінними.

Використовуючи ідеї підрозділу 2.1 для побудови скінченновимірних квазізображень у багатовимірному випадку, отримано скінченновимірне квазізображення елемента $A = \frac{\partial}{\partial t} \circ 1 - 1 \circ K$ у вигляді $A_h = Z_t \otimes I_x - I_t \otimes K_x$, де \otimes – тензорний добуток, I_x, I_t – скінченновимірні квазізображення одиничного оператора за змінними x та t відповідно, Z_t – скінченновимірне квазізображення диференціювання за часовою змінною, K_x – скінченновимірне квазізображення поліноміального диференціального оператора K за просторовими змінними.

Нехай $\{l_1(x), l_2(x), l_3(x), \dots, l_{n_x}(x)\}$ – множина поліномів Лагранжа для просторової змінної, а множина поліномів Лагранжа для часової змінної має вигляд $\tilde{l}(t) = \{l_2(t), l_3(t), \dots, l_{n_t}(t)\}$, причому $\forall l_i \in \tilde{l}(t) : l_i|_{t=0} = 0 \Rightarrow l_i \in B, i = \overline{2, n_t}$. Розмірність $\dim \tilde{l}(t) = n_t - 1$. Оскільки система функцій $l_x \otimes \tilde{l}_t \in B$ лінійно незалежна, то вона формує базис простору апроксимацій B_h .

Для забезпечення умов збіжності розглядається система вузлів $\tilde{Q}_{T,h} = \{x_i\}_{i=1}^{n_x} \times \{t_j\}_{j=2}^{n_t}$. Скінченновимірні квазізображення в просторі B_h мають вигляд

$$\begin{aligned} K_{x,ij} &= K(l_j)(x_i), \quad i, j = \overline{1, n_x}, \quad \tilde{Z}_{t,ij} = l'_j(t_i), \quad i, j = \overline{2, n_t}, \\ I_{x,ij} &= l_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n_x}, \quad \tilde{I}_{t,ij} = l_j(t_i) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{2, n_t}, \end{aligned}$$

Скінченновимірне квазізображення оператора A задачі (0.4) має вигляд

$$A_h = \tilde{Z}_t \otimes I_x - \tilde{I}_t \otimes K_x.$$

Отримано дискретне формулювання задачі (0.4)

$$\begin{cases} \text{задано оператор } A_h : B_h \rightarrow C_h \text{ та елемент } \tilde{f}_h \in C_h \\ \text{ знайти елемент } v_h \in B_h \text{ такий, що } A_h v_h = \tilde{f}_h. \end{cases}$$

де $\tilde{f}_h = \tilde{f}(x_{i_x}, t_{i_t})$, $i_x = \overline{1, n_x}$, $i_t = \overline{2, n_t}$.

Визначено умови розв'язності та доведено факторіальну збіжність побудованої обчислювальної схеми. У підрозділах 2.3, 2.4, 2.5 показано

застосовність узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задач Коші з одновимірним рівнянням адвекції, теплопровідності та двовимірним рівнянням адвекції.

У випадку сингулярно збурених краївих задач адвекції-дифузії значення похідних розв'язку можуть набувати дуже великих значень. Для побудови високоточних обчислювальних схем для таких задач зі змінними коефіцієнтами у **третьому розділі** запропоновано застосування кусково-степеневих базисних функцій методу скінчених елементів та на підставі використання законів збереження здійснено верифікацію обчислювальної схеми.

У підрозділі 3.1 визначено кусково-степеневу апроксимацію функцій. У підрозділах 3.2 та 3.3 доведено лінійну незалежність кусково-степеневих функцій та знайдено оцінки похибки кусково-степеневої апроксимації. Для розгляду аспектів застосування обчислювальної схеми з використанням кусково-степеневих базисних функцій, у підрозділі 3.4 розглянуто модельну країову задачу для рівняння адвекції-дифузії з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \text{знати функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + Pe u' = f \text{ на } \Omega := (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (0.5)$$

Тут число Пекле Pe характеризує відношення швидкості адвекційних процесів до дифузійних, тобто, $Pe = \beta/\mu$, де $\beta > 0$ – коефіцієнт адвекційного перенесення, $\mu > 0$ – коефіцієнт дифузії. Якщо $Pe \rightarrow \infty$, то задача (0.5) стає сингулярно збуреною і породжує нестійкість стандартних схем МСЕ.

У підрозділі 3.5 розглянуто обчислення значень білінійної форми та лінійного функціоналу на скінченному елементі. У підрозділі 3.6 отримано систему рівнянь МСЕ, доведено стійкість та збіжність побудованої обчислювальної схеми. У підрозділах 3.7 та 3.8 показано застосування кусково-степеневих апроксимацій МСЕ до задачі адвекції-дифузії реакції та визначено похибку кусково-степеневої апроксимації. Розглянуто модельну

крайову задачу для рівняння адвекції-дифузії-реакції зі змінними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \text{знати функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -(\mu u')' + \beta u' + \sigma u = f, \text{ в } \Omega = (0, 1), u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

де функції $\mu = \mu(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ можуть мати розриви першого роду, причому функція $\mu(x)$ задовольняє умову $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$.

У підрозділі 3.9 проведено аналіз числових результатів. У підрозділі 3.10 наведено узагальнення кусково-степеневих апроксимацій для двовимірних крайових задач, а застосування кусково-степеневих апроксимацій для нестационарних задач адвекції-дифузії-реакції та рівняння Бюргерса досліджено у підрозділі 3.11.

У четвертому розділі розвинуто методи знаходження законів збереження для нелінійних динамічних систем. Створено програмне забезпечення для знаходження законів збереження, точних солітонних розв'язків та скінченновимірних інваріантних редукцій.

У підрозділі 4.1 досліджено динамічну систему типу Бюргерса на нескінченновимірному l -періодичному многовиді M :

$$\begin{cases} u_t = k_1 u_{xx} + k_2 u u_x + k_3 v_x \\ v_t = k_4 (uv)_x + k_5 v_{xx} \end{cases} = K[u, v], \quad (0.6)$$

де $K : M \rightarrow T(M)$ – гладке за Фреше функціонально-поліноміальне векторне поле на многовиді M , k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 – дійсні числові параметри, t – параметр еволюції системи (0.6). Визначено при яких значеннях параметрів k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 система (0.6) має нескінченну ієархію нетривіальних законів збереження та володіє парою імплектичних операторів.

У підрозділі 4.2. знайдено закони збереження та інваріантні редукції нелінійної динамічної системи Буссінеска-Бюргерса.

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2} v_x - 2uu_x \\ v_t = \frac{1}{2} u_{xxx} - 2(uv)_x \end{cases} = K[u, v].$$

Методом Новікова-Богоявленського знайдено гамільтонові потоки відповідно до векторних полів d/dx та d/dt .

$$\begin{cases} \frac{dq}{dx} = \frac{2p}{c_g}, \\ \frac{dp}{dx} = \frac{2c_\eta^2 q}{c_g} + 6c_\eta q^2 + 4c_g q^3, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{2c_\eta p}{c_g^2}, \\ \frac{dp}{dt} = \frac{2c_\eta^3 q}{c_g^2} + \frac{6c_\eta^2 q^2}{c_g} + 4c_\eta q^3. \end{cases}$$

Побудовано фазовий портрет відповідних гамільтонових систем.

У підрозділі 4.3. знайдено точні солітонні розв'язки двовимірної нелінійної динамічної системи Бюргерса з числовими коефіцієнтами

$$\begin{cases} u_t + k_{11}uu_x + k_{12}vu_y = k_{13}u_{xx} + k_{14}u_{yy}, \\ v_t + k_{21}uv_x + k_{22}vv_y = k_{23}v_{xx} + k_{24}v_{yy}, \end{cases}$$

де функції $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, а $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ – дійсні ненульові числові коефіцієнти.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Багато важливих явищ природознавства, задач техніки та фізики описують диференціальними рівняннями, в тому числі диференціальними рівняннями у частинних похідних (ДРЧП). Незважаючи на потужний математичний апарат, багато з таких рівнянь ми не можемо розв'язати точно. Звідси випливає необхідність застосування наблизених методів або аналітично-числових методів. Одним з таких підходів є метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій [5, 41, 42, 45, 50, 63, 73–76, 78–80, 98, 105, 113, 114].

Цей метод вперше застосував Ф. Калоджеро у 1983 році для обчислення власних значень диференціальних операторів для спектральної задачі [78, 79], називаючи його «новою технікою обчислення». У методі використовуються алгебри Лі та їх квазізображення. Завдяки заповненості скінченнонімірного квазізображення оператора диференціювання вдається врахувати інформацію про функцію у всіх точках розбиття і забезпечити факторіальну збіжність [5].

У 1988 р. цей метод модифіковано для розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних [5, 50, 63]. У працях Митропольського Ю.О., Прикарпатського А.К., Самойленка В.Гр. [50] та в роботі Самойленка В.Гр. [63] такому методу вперше надали назву «Лі-алгебрична дискретна апроксимація» [50, 63].

Ідея методу полягає у редукції ДРЧП до системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) з використанням квазіпредставлень алгебри Лі [45, 50, 63]. У [50] представлено обчислювальну схему без доведення збіжності. Збіжність обчислювальної схеми для лінійного еволюційного ДРЧП доведена у [63] шляхом дослідження еволюції похиби інтерполювання початкових умов задачі Коші.

У 1996 році Казас [80] запропонував розв'язування задач Коші для ДРЧП на основі алгебр Лі, проте за допомогою такого методу можна розв'язати лише обмежений клас диференціальних рівнянь.

У [45] знайдено оцінку порядку збіжності для диференціального оператора другого порядку при виборі поліномів Лагранжа.

Основною задачею дослідження у роботах [5, 50, 63] є динамічна система, тобто задача Коші для еволюційного рівняння з частинними похідними

$$\begin{cases} u_t = K(t, x, \partial)u + f(t, x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^q, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi \in B, \end{cases} \quad (1.1)$$

де B – деякий простір Банаха.

До розгляду введена алгебра Гайзенберга-Вейля

$$G = \bigoplus_{j=1}^q \{x_j, \partial/\partial x_j, 1\},$$

яка є алгеброю Лі. Як і в методі, що використовував Калоджеро, запропоновано розглядати лінійні матричні оператори

$$X_j^{(n)}, Z_j^{(n)}, I^{(n)} \in \bigotimes_{j=1}^q \mathbb{R}^{n_j}$$

як "квазіображення" операторів алгебри Гайзенберга-Вейля: $x_j, \partial/\partial x_j, 1$ відповідно.

Шляхом побудови квазіображення диференціального оператора K у просторі лінійних операторів над \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{Z}_+$ задачу (1.1) зводять до задачі Коші для системи ЗДР

$$\begin{cases} du_{(n)}/dt = K_{(n)}(t)u_{(n)} + f_{(n)}(t), \\ u_{(n)}|_{t=0} = \varphi_{(n)} \in B_{(n)}, \end{cases} \quad (1.2)$$

де $B_{(n)}$ – скінченновимірний простір ізоморфний \mathbb{R}^N , $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_q$. Подібно до методу Калоджеро, редукція (1.2) задачі (1.1) на простір $B_{(n)}$ отримана шляхом q -вимірної алгебричної інтерполяції на q -вимірному кубі $D \supset \Omega$.

При використанні цього методу зроблено важливе припущення, що диференціальний оператор K належить до універсальної огорнуточої алгебри

$U(G)$ алгебри G Гайзенберга-Вейля. На практиці це означає, що оператор K можна представити як суму деяких суперпозицій операторів $x_j, \partial/\partial x_j, 1$. Це зокрема означає, що для безпосереднього застосування схеми Лі-алгебричних дискретних апроксимацій необхідно, щоб диференціальний оператор K був лінійним оператором. Ця особливість суттєво спрощує побудову обчислювальної схеми, оскільки скінченновимірне квазізображення диференціального оператора можна подати як суму добутків матриць.

Позаяк у [50], за допомогою методу Лі-алгебричної дискретної апроксимації виконано редукцію одновимірної та двовимірної задачі тепlopровідності та рівняння Кортевега – де Фріза до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Врахування однорідних краївих умов проведено за рахунок відповідної заміни змінних. Випадок неоднорідних краївих умов не розглядали.

У 2004 р. в [5] проаналізовано отримані результати методу Лі-алгебричних апроксимацій та визначено основні напрямки подальших досліджень. Серед них виявили доцільність проведення числових тестів та потребу модифікації методу Лі-алгебричних апроксимацій для безпосереднього застосування до початково-краївих задач з краївими умовами типу Діріхле та Неймана.

У [73, 74, 97, 98] проведено модифікацію методу Лі-алгебричних апроксимацій для безпосереднього застосування до початково-краївих задач з умовами типу Діріхле та Неймана, що враховує лише однорідні країові умови.

Обчислювальні тести методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій проведено для рівняння тепlopровідності у [73]. Задачу Коші дискретизовано за просторовими змінними з використанням поліномів Лагранжа, а для інтегрування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь використали метод Рунге-Кутта.

Незважаючи на доведену факторіальну збіжність методу за просторовими змінними, порядок збіжності за часовою змінною обмежений

властивостями методу, за допомогою якого розв'язують зредуковану систему звичайних диференціальних рівнянь. Наша мета полягає у подоланні цієї прогалини. Саме з цією метою у дисертаційній роботі запропоновано узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

Зазначимо, що у [50] схему Лі-алгебричних апроксимацій запропоновано розглядати у контексті загальної апроксимаційної схеми, викладеної у Треногіна, хоча відповідні умови теореми про збіжність загальної апроксимаційної схеми не були перевірені. У [97] для збіжності припускали, що оператор A_h такий, що

$$\exists \alpha > 0: \|A_h u_h\|_{C_h} \geq \alpha \|u_h\|_{B_h},$$

де B_h, C_h – деякі скінченновидимі простори, а в [5] умовою збіжності було існування обмеженого оберненого оператора задачі, і оцінка норми похибки залежала від норми оберненого оператора A вихідної задачі задачі.

У роботі [5] для доведення збіжності припустили, що обернений оператор задачі обмежений, а в роботі [45] припущене, що апроксимація оператора задачі та й сам оператор задачі обмежені знизу.

Зрозуміло, що знаходження константи $\alpha > 0$ є нетривіальною задачею. Крім того, послідовність операторів A_h є нескінченною послідовністю. Проте для практичного застосування методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій потрібно визначити деякі додаткові або еквівалентні ознаки існування обмеженого оператора. У дисертаційній роботі з'ясовано збіжність методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

У [76] розв'язування краївих задач для еліптичних рівнянь з неоднорідними умовами полягало в переході до відповідної краївої задачі з однорідними краївими умовами шляхом заміни змінних.

Важливим аспектом при побудові обчислювальної схеми розв'язування задач з великими значеннями коефіцієнтів є стабілізація розв'язку та верифікація побудованих схем [4, 61]. При дослідженні нелінійних динамічних систем значну роль відіграє взаємодія процесів конвекції та

дифузії. У випадку домінування процесів конвекції чисельне дослідження таких систем ускладнюється. Яскравим прикладом таких проблем є крайові задачі для рівняння адвекції-дифузії та адвекції-дифузії-реакції [2, 6, 43, 59 – 62, 64, 67 – 69, 71 – 72, 84 – 87, 89 – 92, 99 – 102, 106, 107, 110, 111], які відіграють важливу роль при математичному моделюванні процесів екології, метеорології, океанографії, гідрометеорології, фізики напівпровідників.

За певних умов, а саме, при домінуванні адвективних процесів над дифузійними процесами такі задачі стають сингулярно-збуреними, оскільки при нульовому коефіцієнті дифузії деякі крайові умови виявляються надлишковими. Відтак розв'язок може різко змінюватися поблизу границь області, тобто отримано задачу з примежовим шаром. За локального домінування дифузійних процесів над адвективними чи конвективними процесами, задачі зі змінними коефіцієнтами породжують внутрішній шар. Застосування класичних схем методу скінченних різниць (МСР) чи методу скінченних елементів (МСЕ) є утрудненим, адже при великих числах Пекле виникають неприродні осциляції наближених розв'язків, які можна усунути лише завдяки згущенню сітки, кількість вузлів повинна дорівнювати числу Пекле [84 – 87, 107 – 110].

З 50-х років минулого століття розроблено низку методів і підходів для розв'язування таких задач. Запропоновано схему Ільїна – Аллена – Саусвелла, яка обчислює точні значення розв'язку у вузлах сітки [106]. Розроблено протипотокові схеми [91], застосовано апроксимації Хемкера [92, 94], експоненціальні базисні функції [6, 60, 61, 64, 87] методу скінченних елементів, стабілізовані [6, 60, 64, 72, 87, 89] та адаптивні схеми [2, 71, 90, 99, 100].

Перевагою експоненціальних базисних функцій є той факт, що вони є нулем диференціального оператора однорідного рівняння адвекції-дифузії. Проте при розв'язуванні задач екології, метеорології виникають задачі зі змінними коефіцієнтами. Зрозуміло, що експоненціальні функції не є нулями диференціальних операторів таких задач. Актуальною проблемою є

моделювання міграції домішок у неоднорідному пористому середовищі, яка виникає в багатьох інженерних задачах: видобуток нафти, прогнозування землетрусів, захоронення ядерних відходів, моделювання водоносного горизонту ґрунтових вод, тощо [85].

У цих задачах розрахункова область часто складається з декількох областей, у яких фізичні властивості істотно відрізняються. У математичній моделі це описується диференціальними рівняннями з розривними коефіцієнтами. Фізичні, геологічні та хімічні властивості середовища можуть призвести до виродження коефіцієнта дифузії у математичних рівняннях, що описують модель.

Класичні обчислювальні схеми породжують нестійкість розв'язку навіть у невиродженному випадку, коли коефіцієнт дифузії є достатньо малим у порівнянні з коефіцієнтом адвекції. У такій ситуації відношення коефіцієнта адвекції до коефіцієнта дифузії є достатньо великим, що спричиняє гіперболічну поведінку розв'язку, а наближений розв'язок, при цьому, не здатен відтворити феномен примежового шару, і, як наслідок, виникають неприродні осциляції розв'язку. Навіть, якщо дані задачі достатньо регулярні, то обчислювальна схема не в змозі розпізнати наявність малого, або, можливо, нульового коефіцієнта дифузії. Хоч цей недолік можна усунути шляхом уточнення сітки, проте такий підхід призводить до значного збільшення обчислювальних затрат.

Такі рівняння дискретизують з використанням класичних методів скінченних елементів та методу скінченних різниць, які, як правило, використовують техніку розщеплення оператора для окремої обробки коефіцієнтів дифузії та адвекції [82, 107]. Такі схеми часто використовують процедуру обмеження кутового нахилу для зменшення кількості нефізичних осциляцій, а також включення стабілізуючого доданка [110]. Також застосовують метод декомпозиції області з використанням різних обчислювальних схем на окремих підобластях, і розривний метод Гальоркіна

у працях [84, 102, 109]. Поряд з цим виділимо інші підходи, наприклад, протипотокову схему типу Енгкуїста-Ошера [92], Робін-Робіна [85].

Якщо точний розв'язок задачі є невідомий, то для верифікації побудованих схем для задач міграції домішок використовують закони збереження.

Знаходження законів збереження для нелінійних динамічних систем є нетривіальною задачею [1], оскільки процес знаходження законів збереження пов'язаний з інтегровними за Лаксом нелінійними динамічними системами [1, 3, 7 – 15, 17 – 21, 46–49, 52–58, 77, 104, 108, 109].

Нехай на l -періодичному гладкому нескінченновимірному многовиді задана нелінійна динамічна система:

$$u_t = K[u], \quad (1.3)$$

де $K: M \rightarrow T(M)$ – гладке за Фреше функціонально-поліноміальне векторне поле на M [1, 3, 7, 17, 51, 53, 77, 104], тобто деякий нелінійний оператор [77].

Для того, щоб дати відповідь на питання, чи інтегровна задана динамічна система, потрібно передусім з'ясувати наявність нескінченної ієархії нетривіальних законів збереження, імплектичних операторів та оператора Лакса. Наведемо найважливіші означення з [17, 51, 77, 104].

Означення 1.1. Функціонал $\gamma[u] = \int_{x_0}^{x_0+l} \sigma[u] dx \in D(M)$ називають законом

збереження для системи (1.3), якщо він є незмінний вздовж орбіт векторного поля K , тобто:

$$\left. \frac{d\gamma[u]}{dt} \right|_{K[u]} \equiv 0, \quad (1.4)$$

де $x_0 \in R$ – довільна точка, $l \in R$ – період, $u \in M$ – елемент многовиду M $\sigma[u]$ – локальний функціонал, $D(M)$ – простір гладких за Фреше функціоналів на M .

Введемо білінійну форму на області $U = \{x \in R : x_0 \leq x \leq x_0 + l\}$:

$$(a, b) = \int_U \langle a, b \rangle dx, \quad (1.5)$$

де $a, b \in C_0^\infty(U, R^n)$, яка визначає структуру простору Гільберта на дотичному просторі $T(M) \cong T^*(M)$.

Означення 1.2. Градієнтом закону збереження $\gamma[u] \in D(M)$ називають величину $grad\gamma = \frac{\delta\gamma}{\delta u}$, причому:

$$grad\gamma = (\sigma[u])^* \cdot 1, \quad (1.6)$$

де зірочка “ $*$ ” означає спряження відносно стандартної білінійної форми (1.5).

Означення 1.3. Динамічна система (1.3) є бігамільтонова, якщо її можна представити у вигляді:

$$u_t = -\vartheta gradH_\vartheta = -\eta gradH_\eta = K[u], \quad (1.7)$$

де $H_\vartheta, H_\eta \in D(M)$ функціонали Гамільтона, а $\vartheta, \eta : T^*(M) \rightarrow T(M)$ – пара імплектичних операторів.

Диференціально-алгебричний алгоритм побудови імплектичних операторів описаний у [104]. Якщо закон збереження $H = \int_{x_0}^{x_0+l} \tilde{\sigma}[u]dx$ можемо

представити у вигляді: $H = \int_{x_0}^{x_0+l} \langle \sigma[u], u_x \rangle dx$, то функціонал $\sigma[u]$

використовуємо для побудови симплектичного оператора $\theta^{-1} = \sigma' - \sigma'^*$. Якщо для оператора θ^{-1} існує обернений оператор, то отримаємо імплектичний оператор θ . Якщо система (1.3) двокомпонентна, тобто $(u_t, v_t) = K[u, v]$, то

закон збереження $H = \int_{x_0}^{x_0+l} \tilde{\sigma}[u, v]dx$ необхідно представити у наступному вигляді:

$$H = \int_{x_0}^{x_0+l} (\langle \sigma_1[u, v], u_x \rangle + \langle \sigma_2[u, v], v_x \rangle) dx, \quad (1.8)$$

де $\sigma_1[u, v], \sigma_2[u, v]$ – деякі функціонали. Оператор σ' має вигляд:

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Поряд із застосуванням аналітичних методів дослідження нелінійних динамічних систем розроблено підходи до чисельного аналізу таких систем [18]. Розробка ефективних методів чисельного дослідження набуває важливості, оскільки багато моделей нелінійної фізики не допускають знаходження розв'язків методом оберненої задачі розсіяння [1, 18]. Тому для дослідження таких систем застосовують чисельні методи. Для перевірки пропонованих обчислювальних схем доцільно мати точний розв'язок, позаяк для нелінійних систем не завжди вдається такий розв'язок отримати.

Для побудови точних солітонних розв'язків використовують метод гіперболічних тангенс функцій [13, 49, 70, 83, 112]. Цей метод використано під час розв'язування звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) [70, 83], а після його вдосконалення застосовують для знаходження розв'язків диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП) [13, 48, 112]. Згодом метод набув багатьох модифікацій: розв'язок нелінійного ДРЧП шукають у вигляді полінома не тільки від гіперболічного тангенса, а й від гіперболічного котангенса [112], секанса, косеканса та інших спеціальних функцій, зокрема еліптичних [70].

Зазначимо, що методи гіперболічних тангенс функцій умовно поділяють на дві групи: перша група передбачає зведення ДРЧП до ЗДР шляхом уведення рухомої системи координат [70, 112], а друга група методів передбачає підстановку деякої гіперболічної функції у ДРЧП [13, 83].

Суттєва перевага цих методів полягає в тому, що будь-яка багатовимірна нелінійна динамічна система зводиться до ЗДР. Наявність цих розв'язків має важливе значення у дослідженні нелінійних динамічних систем, адже саме за їхньою допомогою можна тестувати чисельні схеми.

Закони збереження нелінійних динамічних систем відіграють ключову роль у застосуванні оберненої задачі розсіяння. Одним із фундаментальних застосувань законів збереження та проблемою сучасної теорії нескінченновимірних динамічних систем є знаходження їх редукцій на скінченновимірні інваріантні підмноговиди, що володіють багатими

диференціально-геометричними структурами. Перші спроби подолання цієї проблеми запропоновано ще у дев'ятнадцятому столітті у класичних працях Ж. Ліувілля, С. Лі, Ж. Лагранжа, В. Гамільтона, Й.Якобі і Ж. Пуассона, згодом у працях М.Боголюбова [7–11], Ю.Митропольського [11], В. Самойленка [9] та інших.

Протягом останніх двох десятиліть розвинено ефективну теорію скінченновимірних редукцій як на локальні так і нелокальні інваріантні підмоговиди спеціальної структури, які породжені критичними точками функціоналів Лагранжа афінно узгоджених бігамільтонових динамічних систем на функціональних просторах [1, 12, 14 – 15, 17, 53, 55 – 58, 77, 103, 104]. Такий підхід дозволяє отримати точні періодичні розв'язки нелінійної динамічної системи .

Важливим аспектом у побудові скінченновимірних інваріантних редукцій є наявність законів збереження [103]. Для знаходження законів збереження виділимо асимптотичний метод [1, 16, 77, 103, 104] та метод невизначених коефіцієнтів [88]. Оскільки для багатьох нелінійних динамічних систем асимптотичний метод є незастосовний, а метод невизначених коефіцієнтів приводить до розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь, тому у цій роботі запропоновано та обґрунтовано комбінований алгоритм знаходження законів збереження для гамільтонових та бігамільтонових нелінійних динамічних систем.

Для узагальненої системи Бюргерса :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + uu_x + v_x \\ v_t = (uv)_x - v_{xx} \end{cases},$$

знайдено імплектичні оператори, закони збереження та нелокальні редукції, а також досліджено систему [104]

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} + uu_x + v_x \\ v_t = (uv)_x - \alpha v_{xx} \end{cases}$$

Проте наявність законів збереження, імплектичних операторів та солітонних розв'язків для системи

$$\begin{cases} u_t = k_1 u_{xx} + k_2 uu_x + k_3 v_x \\ v_t = k_4 (uv)_x + k_5 v_{xx} \end{cases} = K[u, v],$$

залишалось відкритим питанням.

Нелінійна динамічна система Буссінеска-Бюргерса

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2} v_x - 2uu_x \\ v_t = \frac{1}{2} u_{xxx} - 2(uv)_x \end{cases} = K[u, v],$$

отримується підстановкою у систему Каупа-Броера-Купершмідта при $\alpha=1$

$$\begin{cases} u_t = -\frac{1-\alpha}{2} u_{yy} + \frac{1}{2} v_x - 2uu_x \\ v_t = \frac{\alpha(2-\alpha)}{2} u_{xxx} + \frac{1-\alpha}{2} v_{xx} - 2(uv)_x \end{cases} = K[u, v],$$

для якої знайдено імплектичні оператори у [109].

Питання про існування скінченно-вимірних інваріантних редукцій залишалося відкритим питанням, проте у дисертаційній роботі з'ясовано наявність скінченно-вимірних інваріантних редукцій та умови існування періодичних розв'язків.

Важливим питанням є існування точних розв'язків для двовимірної системи Бюргерса з дійсними числовими коефіцієнтами [108]

$$\begin{cases} u_t + k_{11}uu_x + k_{12}vu_y = k_{13}u_{xx} + k_{14}u_{yy}, \\ v_t + k_{21}uv_x + k_{22}vv_y = k_{23}v_{xx} + k_{24}v_{yy}, \end{cases}$$

де функції $u=u(x, y, t), v=v(x, y, t)$, а $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ – дійсні ненульові числові коефіцієнти.

Використовуючи метод гіперболічних тангенс функцій, з'ясовано питання про точні солітонні розв'язки нелінійної динамічної системи Бюргерса та досліджено, за яких значень коефіцієнтів системи такі розв'язки існують.

1.1. Висновки до розділу 1

У першому розділі наведено огляд літератури з тематики дисертації. Визначено коло актуальних проблем та окреслено основні шляхи їх розв'язання.

РОЗДІЛ 2. УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ЛІ-АЛГЕБРИЧНИХ ДИСКРЕТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

2.1. Модифікація методу Лі-алгебричних дискретних апроексимацій для крайових задач з неоднорідними крайовими умовами

Для розгляду аспектів побудови скінченновимірних квазізображень та обчислюальної схеми Лі-алгебричних дискретних апроексимацій у цьому підрозділі предметом дослідження є неоднорідна крайова задача

$$\begin{cases} \text{знати функцію } u = u(x) \text{ таку, що:} \\ A(u(x)) = f(x) \text{ в } \Omega = (0, 1) \\ u(0) = g_1, \quad u(1) = g_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

де простір $W^{\infty,\infty}(\Omega)$ – такий, що $W^{\infty,\infty}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow R \mid D^\alpha u \in L^\infty(Q_T), \forall \alpha \in N\}$, $A : W^{\infty,\infty}(\Omega) \rightarrow W^{\infty,\infty}(\Omega)$ – еліптичний оператор; g_1, g_2 – довільні дійсні числа, функція $f(x)$ – характеризує інтенсивність внутрішніх джерел.

Задача (2.1) є важливою з точки зору чисельного дослідження динамічних систем, адже вона описує стаціонарні процеси і дозволяє виявити аспекти, які пов'язані з рівноважним станом динамічних систем.

Для розв'язування крайової задачі (2.1) у [76] запропоновано вводити заміну для шуканої функції. Проте такий підхід призводив до складнішої задачі. Наша мета полягає у розробленні підходу, який дозволить розв'язувати задачу (2.1) єдиним алгоритмом при довільних значеннях крайових умов g_1, g_2 , як однорідних так і неоднорідних.

Неперервну функцію $u(x)$, визначену на області $\Omega := (0, 1)$, можна наблизити деяким інтерполяційним поліномом, наприклад поліномом Лагранжа. Зафіксуємо деяке натуральне число $n \in N$ та введемо на Ω сітку вузлів $\sigma = \{x_i = (i-1)h\}_{i=1}^n$, де h – параметр дискретизації, причому $h = \frac{1}{n-1}$, а x_1 – ліва межа, а x_n – права межа відрізка $\bar{\Omega} := [0, 1]$. Нехай відомі значення функції $u(x)$ в точках $\sigma = \{x_i\}_{i=1}^n$, тобто задано множину значень функції

$\{u_i = u(x_i)\}_{i=1}^n$. Тоді поліном Лагранжа для функції $u(x)$ можна записати у вигляді $L[u](x) = \sum_{i=1}^n u_i l_i(x)$, де $\{l_i(x)\}_{i=1}^n$ – відповідні базисні функції, а саме базисні поліноми Лагранжа, що асоційовані з вузлами x_i , визначені за

$$\text{формулою: } l_i(x) = \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^n (x - x_k)}{\prod_{k=1, k \neq i}^n (x_i - x_k)}.$$

Значення оператора A для функції f позначимо $A[f]$. Оскільки розбиття області Ω задається набором вузлів $\sigma = \{x_i\}_{i=1}^n$, тоді вектор значень функції $u = u(x)$ в точках розбиття σ має вигляд $u_\sigma = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n))^\top$. Для оператора $A : W^{\infty, \infty}(\Omega) \rightarrow W^{\infty, \infty}(\Omega)$, скінченновимірне квазізображення оператора A_σ можна побудувати з умови $A_\sigma u_\sigma = A[L[u]]_\sigma$.

З огляду на обчислювальну складність побудови скінченновимірного квазізображення вважатимемо, що оператор A діє на функції з простору $W^{\infty, \infty}(\Omega)$ та належить до огортуючої алгебри Гейзенберга-Вейля диференціальних операторів алгебри Лі $\left\{1, x, \frac{d}{dx}\right\}$, тобто диференціальний оператор можна трактувати як формальний поліном елементів $\left\{1, x, \frac{d}{dx}\right\}$.

Отже, скінченновимірне квазізображення A_σ оператора A є лінійною комбінацією або суперпозицією скінченновимірних квазізображень елементів алгебри Лі $\left\{1, x, \frac{d}{dx}\right\}$. Побудуємо скінченновимірні квазізображення

цих елементів. Наприклад, нехай $A = \frac{d^2}{dx^2}$ тоді цей оператор подамо у вигляді формального добутку елементів алгебри Лі, тобто $A = \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \circ \frac{d}{dx}$, тоді скінченновимірне квазізображення диференціального оператора будуємо у вигляді матриці $A = Z_\sigma \cdot Z_\sigma = Z_\sigma^2$, де матриця Z_σ відображає дію диференціювання у скінченновимірному просторі поліномів.

Для доведення справедливості міркувань введемо допоміжний вектор $L_\sigma(x)$ вигляду: $L_\sigma(x) = (l_1(x), l_2(x), \dots, l_n(x))$, де $x \in R^n$, а $l_i(x)$ – поліном Лагранжа асоційований з вузлом x_i .

Для побудови скінченновимірного квазізображення одиничного оператора підставимо у вектор $L_\sigma(x)$ вузли розбиття σ області Ω . Врахувавши властивості поліномів Лагранжа $\{l_i(x)\}_{i=1}^n$, тобто виконання умови Кронекера для базисних поліномів Лагранжа, отримаємо одиничну матрицю, тобто $I_\sigma = Z_\sigma^0 = L_\sigma(x_\sigma)$.

Похідну полінома Лагранжа $l'_i(x)$ обчислюємо за формuloю:
$$l'_i(x) = \sum_{k=1, k \neq i}^n \left(\prod_{m=1, m \neq k, m \neq i}^n (x - x_m) \right) \left/ \prod_{m=1, m \neq k, m \neq i}^n (x_i - x_m) \right).$$
 Тоді скінченновимірне квазізображення оператора $\frac{d}{dx}$ можна побудувати шляхом дії цього оператора на матрицю $L_\sigma(x)$ і підстановці значень вузлів розбиття σ у відповідні стовпці матриці, тобто скінченновимірне квазізображення оператора $\frac{d}{dx}$ набуде вигляду $Z_\sigma^1 = \frac{dL_\sigma(x)}{dx} \Big|_\sigma = \begin{pmatrix} l'_1(x_1) & \dots & l'_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ l'_n(x_1) & \dots & l'_n(x_n) \end{pmatrix}$.

Скінченновимірне квазізображення диференціальних операторів $\frac{d^m}{dx^m}$, $m \in N$ можна побудувати простим перемножуванням матриць, тобто квазізображенням оператора $\frac{d^m}{dx^m}$, $m \in N$ є матриця $(Z_\sigma)^m$.

Скінченновимірне квазізображення X_σ оператора множення на незалежну змінну x отримано множенням одиничної матриці на вектор розбиття σ області Ω , тобто $X_\sigma = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Зазначимо, що таким чином побудовані скінченновимірні квазізображення $\{I_\sigma, X_\sigma, Z_\sigma^1\}$ не є Лі-алгебричними квазізображеннями

алгебри Лі $\left\{1, x, \frac{d}{dx}\right\}$, оскільки $[Z_\sigma^1, X_\sigma] \neq I_\sigma$ тоді як $\left[\frac{d}{dx}, x\right] = 1$, де дужка $[., .]$ позначає комутатор Лі $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$.

Перейдемо до побудови дискретизованої задачі. Нехай побудовано скінченновимірне квазізображення A_σ оператора задачі (2.1) та скінченновимірне квазізображення $f_\sigma = \{f(x_i)\}_{i=1}^n$ функції розподілених джерел $f(x)$; тоді, врахувавши крайові умови Діріхле, дискретизоване формулювання крайової задачі (2.1) має вигляд

$$\begin{cases} \text{знати вектор } u_\sigma = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \text{ такий, що} \\ A_\sigma u_\sigma = f_\sigma, \\ u_1 = g_1, u_n = g_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Особливістю скінченновимірної крайової задачі (2.2) є той факт, що значення компонент u_1 та u_n вектора u_σ є відомі, оскільки вони задані у крайовій умові.

Теорема 2.1 (про вигляд системи лінійних алгебричних рівнянь для відшукання розв'язку крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами). *Скінченновимірна краєвна задача (2.2) еквівалентна такій задачі:*

$$\begin{cases} \text{знати вектор } \tilde{u}_\sigma = (u_2, \dots, u_{n-1})^T \text{ такий, що:} \\ \tilde{A}_\sigma \tilde{u}_\sigma = \tilde{f}_\sigma, \end{cases} \quad (2.3)$$

де компоненти матриці \tilde{A}_σ , з розмірністю $(n-2) \times (n-2)$, мають вигляд

$\tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{k,i+1} a_{k,j+1}$, $i = \overline{1, n-2}$, $j = \overline{1, n-2}$, а компоненти вектора \tilde{f}_σ обчислюються

за формулою $\tilde{f}_i = \sum_{k=1}^n [a_{k,i+1} (f_k - a_{k1}g_1 - a_{kn}g_2)]$, $i = \overline{1, n-2}$.

Доведення. Підставивши у u_σ замість u_1 умову g_1 на лівому кінці відрізка і замість u_n умову g_2 на правому кінці відрізка, запишемо рівняння задачі (2.2) у розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n-1} \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Оскільки значення g_1, g_2 є відомі, то їх перенесемо у праву частину і отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-2} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - a_{11}g_1 - a_{1n}g_2 \\ f_2 - a_{21}g_1 - a_{2n}g_2 \\ \dots \\ f_{n-1} - a_{n-1,1}g_1 - a_{n-1,n}g_2 \\ f_n - a_{n1}g_1 - a_{nn}g_2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Система (2.5) має n рівнянь та $n-2$ невідомих. Згідно з теоремою про ранг скінченнонімірного квазізображення диференціальних операторів [76], ранг скінченнонімірного квазізображення A_σ оператора задачі A дорівнює $n-2$. Це означає, що система (2.5) має єдиний розв'язок.

Позначимо компоненту модифікованого вектора \bar{f}_i правої частини системи (2.5) у такий спосіб $\bar{f}_i = f_i - a_{i1}g_1 - a_{in}g_2$. Для знаходження розв'язку системи алгебричних рівнянь (2.5) із використанням методу найменших квадратів сформулюємо допоміжну оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} \text{знати вектор } u_\sigma = (u_2, u_3, \dots, u_{n-1}) \text{ такий, що} \\ E(u_\sigma) = \sum_{k=1}^n \left(\left(\sum_{j=2}^{n-1} a_{kj} u_j \right) - \bar{f}_k \right)^2 \rightarrow \min. \end{cases} \quad (2.6)$$

Оскільки $E(u_\sigma)$ – додатно-визначена квадратична форма, то розв'язок системи рівнянь $\left\{ \frac{\partial E(u_\sigma)}{\partial u_{\sigma,k}} \right\}_{k=2}^{n-2} = 0$ є розв'язком задачі (2.6). Врахувавши співвідношення

$$\frac{\partial E(u_\sigma)}{\partial u_{\sigma,m}} = \frac{\partial}{\partial u_{\sigma,m}} \left(\sum_{k=1}^n \left(\left(\sum_{j=2}^{n-1} a_{kj} u_j \right) - \bar{f}_k \right)^2 \right) = 2 \sum_{k=1}^n a_{km} \left(\sum_{j=2}^{n-1} a_{kj} u_j - \bar{f}_k \right), m = \overline{2, n-2},$$

та умову $\frac{\partial E(u_\sigma)}{\partial u_{\sigma,k}} = 0, \forall k = \overline{2, n-2}$, отримуємо систему лінійних алгебричних

рівнянь для визначення невідомих компонент вектора \bar{u}_σ вигляду

$$\sum_{k=1}^n a_{km} \sum_{j=2}^{n-1} a_{kj} \bar{u}_j = \sum_{k=1}^n a_{km} \bar{f}_k, \quad m = \overline{2, n-1}.$$

З цих рівнянь знаходимо, що $\tilde{a}_{mj} = \sum_{k=1}^n a_{km} a_{kj}, m = \overline{2, n-1}$. Оскільки $m = \overline{2, n-1}$ та $j = \overline{2, n-1}$, а матриця \tilde{A} має розмірність $(n-2) \times (n-2)$, а $i = \overline{1, n-2}$ та $j = \overline{1, n-2}$, то компоненти матриці \tilde{A}_σ запишемо у вигляді $\tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{k,i+1} a_{k,j+1}, i = \overline{1, n-2}, j = \overline{1, n-2}$, а вектор правої частини \tilde{f}_σ у вигляді $\tilde{f}_i = \sum_{k=1}^n a_{k,i+1} \bar{f}_k = \sum_{k=1}^n a_{k,i+1} (f_k - a_{k1} g_1 - a_{kn} g_2)$. Теорему доведено.

2.2. Узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші з поліноміальним диференціальним оператором

Розглянемо обмежену область $\Omega := (a, b) \subset R$, часову межу $T < +\infty$, циліндр $Q_T = \Omega \times (0, T]$ та простори $V = C = W_{x,t}^{\infty,\infty}(Q_T)$, де простір $W_{x,t}^{\infty,\infty}(Q_T) = \{u : Q_T \rightarrow R \mid D^\alpha u \in L^\infty(Q_T), \forall \alpha \in N\}$, тобто похідні довільного порядку за змінними x, t є обмежені. Нехай лінійний диференціальний оператор K є формальним поліномом елементів алгебри Лі $\{x, \partial / \partial x, 1\}$ та має вигляд [76]:

$$K = a_k \frac{\partial^k}{\partial x^k} + a_{k+1} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} + \dots + a_{k+p} \frac{\partial^{k+p}}{\partial x^{k+p}},$$

де $a_{k+i} \in R$ для всіх $i = \overline{0, p}, a_k \neq 0, k \geq 1$.

Задача Коші для диференціального рівняння з оператором $K : V \rightarrow V$ має вигляд:

$$\begin{cases} \text{знати функцію } u = u(x, t) \in V \text{ таку, що} \\ u_t = Ku + f, \forall (x, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi \in W_x^{\infty,\infty}(\Omega), \end{cases} \quad (2.7)$$

де простір $W_x^{\infty,\infty}(\Omega)$ такий, що

$$W_x^{\infty,\infty}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow R \mid \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} \in L^\infty(\Omega), \forall \alpha \in N \right\},$$

$\varphi = \varphi(x) \in W_x^{\infty,\infty}(\Omega)$ – початкова умова, $f = f(x,t) \in C$ представляє внутрішній розподілені джерела.

Заміною $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$ в (2.7) переходимо до задачі Коші з однорідними початковими умовами:

$$\begin{cases} \text{знати функцію } v = v(x,t) \in V \text{ таку, що} \\ v_t = Kv + K\varphi + f, \forall (x,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Розв'язок задачі (2.8) шукаємо в просторі функцій, які в початковий момент часу набувають нульового значення, тобто: $B = \{v \in V : v|_{t=0} = 0\}$.

Позначимо структурні елементи в (2.8) через

$$A := \partial/\partial t - K, \quad \tilde{f} = K\varphi + f \in C, \quad (2.9)$$

і отримаємо операторне рівняння:

$$\begin{cases} \text{задано оператор } A : B \rightarrow C \text{ та елемент } \tilde{f} \in C, \\ \text{знати елемент } v \in B \text{ такий, що } Av = \tilde{f}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Отже, задачу Коші зведене до операторного рівняння, яке розв'язуємо за допомогою узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій. Переїдемо до побудови обчислювальної схеми.

Використовуючи основні положення підрозділу 2.1 та побудови скінченновимірних квазізображень у багатовимірному випадку [76], отримуємо, що скінченновимірне квазізображення елемента $A = \frac{\partial}{\partial t} \circ 1 - 1 \circ K$

має вигляд $A_h = Z_t \otimes I_x - I_t \otimes K_x$, де I_x, I_t – скінченновимірні квазізображення одиничного оператора для змінних x та t відповідно, Z_t – скінченновимірне квазізображення диференціювання за часовою змінною, K_x – скінченновимірне квазізображення поліноміального диференціального оператора K . Покажемо, що такий підхід побудови обчислювальної схеми

справедливий та визначимо умови розв'язності та збіжності обчислювальної схеми.

Нехай n_x позначає кількість вузлів в області Ω і n_t позначає кількість вузлів в інтервалі $[0, t]$. Множину вузлів позначимо $Q_{T,h}$. Для кожної змінної побудуємо набір базисних поліномів Лагранжа $l(x) = \{l_i(x)\}_{i=1}^{n_x}$, $l(t) = \{l_i(t)\}_{i=2}^{n_t}$, які задовольняють властивість $l_j(x_i) = \delta_{ij}$ і $l_j(t_i) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера. Для забезпечення розв'язності ми не включили базисний поліном Лагранжа асоційований з початковим моментом часу.

Оскільки усі базисні поліноми Лагранжа за часовою змінною $l(t) = \{l_i(t)\}_{i=2}^{n_t}$ набувають нульового значення в початковий момент часу, то кожен базисний поліном належить функціональному простору, у якому шукаємо розв'язок, тобто виконується: $\forall j = \overline{2, n_t}, l_j(t)|_{t=0} = 0$ і $l(t) \in B$. Позаяк система функцій $l(t) \otimes l(x) \in B$ лінійно незалежна, то вона формує базис простору апроксимацій $B_h \subset B$, $C_h \subset C$. Отже, наближений розв'язок задачі (2.10) шукаємо у такому вигляді

$$v_h(x, t) = \sum_{j_t=2}^{n_t} \sum_{j_x=1}^{n_x} v_j l_{j_x}(x) l_{j_t}(t) = \bar{v}(l(t) \otimes l(x)), \quad (2.11)$$

де h позначає параметр дискретизації, j_t і j_x індекси вузлів за відповідними змінними, j позначає номер вузла $j = (j_t - 1)n_x + j_x$ і \bar{v} позначає множину значень $\bar{v} = \{v_j\}_{j=n_x+1}^{n_x n_t}$.

Підставивши (2.11) у (2.10) отримаємо $A v_h = \tilde{f}_h$, тобто

$$(l'(t) \otimes l(x) - l(t) \otimes K(l(x))) v_h = \tilde{f}_h. \quad (2.12)$$

Вибрали почергово в (2.12) $i_x = \overline{1, n_x}$ і $i_t = \overline{2, n_t}$, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$(Z_t \otimes I_x - I_t \otimes K_x) \bar{v} = \tilde{f}(x_{i_x}, t_{i_t}), \quad i_x = \overline{1, n_x}, \quad i_t = \overline{2, n_t}. \quad (2.13)$$

Позначивши $A_h = Z_t \otimes I_x - I_t \otimes K_x$, і $\tilde{f}_h = \tilde{f}(x_{i_x}, t_{i_t})$, $i_x = \overline{1, n_x}$, $i_t = \overline{2, n_t}$ отримаємо дискретне формулювання задачі (2.10):

$$\begin{cases} \text{задано оператор } A_h : B_h \rightarrow C_h \text{ та елемент } \tilde{f}_h \in C_h \\ \text{ знайти елемент } v_h \in B_h \text{ такий, що } A_h v_h = \tilde{f}_h. \end{cases} \quad (2.14)$$

де матриці відповідних квазізображень вибрано згідно з правилами:

$$Z_{t,ij} = l'_j(t_i), \quad K_{x,ij} = (Kl_j)(x_i), \quad I_{t,ij} = l_j(t_i), \quad I_{x,ij} = l_j(x_i).$$

На підставі теореми про ранг скінченнонімірного квазізображення [74] знаходимо значення рангів окремих матриць.

$$\text{rank}(Z_t) = n_t - 1, \quad \text{rank}(I_t) = n_t - 1, \quad \text{rank}(K_x) = n_x - k, \quad \text{rank}(I_x) = n_x.$$

$$\text{rank}(Z_t \otimes I_x) = n_x(n_t - 1), \quad \text{rank}(I_t \otimes K_x) = (n_t - 1)(n_x - k).$$

Лема 2.1. *Матриця $(Z_t^{-1} \otimes K_x)$ є нільпотентна.*

Доведення. Матриця

$$K_x = a_k Z_x^k + a_{k+1} Z_x^{k+1} + \dots + a_{k+p} Z_x^{k+p}$$

є скінченнонімірним квазізображенням оператора

$$\tilde{K} = a_k \frac{d^k}{dx^k} + a_{k+1} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} + \dots + a_{k+p} \frac{d^{k+p}}{dx^{k+p}}.$$

На підставі [76] матриця K_x є нільпотентна, отже $\exists m \in N, \forall n \geq m : (K_x)^n = 0$. Використавши властивість тензорного добутку для двох матриць $\forall n \in N (A \otimes B)^n = A^n \otimes B^n$, знаходимо, що

$$\exists m \in N, \forall n \geq m : (Z_t^{-1} \otimes K_x)^n = (Z_t^{-1})^n \otimes (K_x)^n = 0.$$

Отже, матриця $(Z_t^{-1} \otimes K_x)$ є нільпотентна.

Лема 2.2. *Матриця $(I_t \otimes I_x - Z_t^{-1} \otimes K_x)$ має обернену матрицю і її ранг дорівнює $(n_t - 1)n_x$.*

Доведення. Перепишемо матрицю $(I_t \otimes I_x - Z_t^{-1} \otimes K_x)^{-1}$ у вигляді формального ряду:

$$(I_t \otimes I_x - Z_t^{-1} \otimes K_x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (Z_t^{-1} \otimes K_x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (Z_t^{-1})^n \otimes (K_x)^n.$$

На підставі леми 2.1. матриці $K_x, (Z_t^{-1} \otimes K_x)$ є нільпотентні, тому формальний ряд є скінчений, а, отже, обернена матриця існує

$$(I_t \otimes I_x - Z_t^{-1} \otimes K_x)^{-1} = \sum_{n=0}^{m-1} (Z_t^{-1} \otimes K_x)^n = \sum_{n=0}^{m-1} (Z_t^{-1})^n \otimes (K_x)^n.$$

Оскільки матриця $(I_t \otimes I_x - Z_t^{-1} \otimes K_x)$ має $n_x(n_t - 1)$ рядків і стовпців, то: $\text{rank}(I_t \otimes I_x - Z_t^{-1} \otimes K_x) = n_x(n_t - 1)$. Лему доведено.

Теорема 2.2. Ранг скінченновимірного квазізображення A_h оператора A дорівнює $n_x(n_t - 1)$ і існує єдиний розв'язок задачі (2.14).

Доведення. Запишемо матрицю квазізображення у вигляді $A_h = Z_t \otimes I_x - I_t \otimes K_x = (Z_t \otimes I_x)(I_t \otimes I_x - Z_t^{-1} \otimes K_x)$.

Оскільки $\text{rank}(Z_t \otimes I_x) = n_x(n_t - 1)$ і згідно з лемою 2.2. $\text{rank}(I_t \otimes I_x - Z_t^{-1} \otimes K_x) = n_x(n_t - 1)$, а також на підставі властивості для рангу добутку двох матриць A, B : $\text{rank}(AB) = \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$, знаходимо $\text{rank}(Z_t \otimes I_x - I_t \otimes K_x) = n_x(n_t - 1)$. Оскільки матриця A_h невироджена, то існує єдиний розв'язок задачі (2.14). Теорему доведено.

Нехай N – розмірність просторів B_h, C_h . Введемо циліндричну норму [66] в просторах B_h, C_h :

$$\|v\|_{B_h} = \|v\|_{C_h} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j^2}, \quad (2.15)$$

причому $\lim_{N \rightarrow \infty} \|v\|_{B_h}^2 = \int_{Q_t} v^2 dx dt$.

Нехай $v \in W^{n_x, n_t, \infty} = \{v : Q_t \rightarrow \mathbb{R} : D^\alpha v \in L^\infty(Q_t), \forall |\alpha| \leq n_x n_t\}$, тобто функція v разом зі своїми всіма можливими похідними до $n_x n_t$ порядку належить до простору $L^\infty(Q_t)$.

Запишемо залишковий член [4] інтерполяційного полінома Лагранжа v_I :

$$v(x, t) - v_I(x, t) = \frac{\omega_{n_x}(x)}{(n_x)!} \frac{\partial^{n_x} v(\xi, t)}{\partial x^{n_x}} + \frac{\omega_{n_t}(t)}{(n_t)!} \frac{\partial^{n_t} v(x, \eta)}{\partial t^{n_t}} - \frac{\omega_{n_x}(x)}{(n_x)!} \frac{\omega_{n_t}(t)}{(n_t)!} \frac{\partial^{n_x+n_t} v(\xi_1, \eta_1)}{\partial x^{n_x} \partial t^{n_t}}, \quad (2.16)$$

де $\omega_{n_x}(x) = \prod_{i=1}^{n_x} (x - x_i)$, $\omega_{n_t}(t) = \prod_{i=1}^{n_t} (t - t_i)$, $\xi \in \Omega, \eta \in (0, T]$, $(\xi_1, \eta_1) \in Q_T$.

Нехай α позначає порядок найвищої похідної за змінною x , і a_α позначає коефіцієнт при старшій похідній за змінною x .

Теорема 2.3. Скінченновимірне квазізображення A_h апроксимує оператор A на елементі $v \in B$.

У випадку рівновіддалених вузлів, похибка апроксимації характеризується оцінкою:

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} \leq \ln(n_t) \left(\frac{1}{n_t - 1} \right)^{n_t - 1} \left\| \frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + |a_\alpha| \left(\prod_{k=0}^{\alpha-1} (\ln(n_x - k)) \right) \left(\frac{1}{n_x - 1} \right)^{n_x - \alpha} \left\| \frac{\partial^{n_x} v}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty. \quad (2.17)$$

Доведення. Оскільки норма простору C_h є нормою вектора, то подамо різницю $Av - A_h v$, $\forall v \in B$ у вигляді вектора. Для виразу $Av \in C$ отримаємо вектор $\{Av(M_i)\}_{i=1}^N$, де $M_i \in \tilde{Q}_{T,h}$ – точка розбиття.

Для елемента $v \in B$ знаходимо вектор-стовпець $\{v(M_j)\}_{j=1}^N$, де $M_j \in \tilde{Q}_{T,h}$.

Розглянемо i -ту компоненту вектора $A_h v$:

$$(A_h v)_i = (A(l_1)(M_i), \dots, A(l_N)(M_i))(v(M_1), \dots, v(M_N))^T = \sum_{j=1}^N v(M_j) A(l_j)(M_i) = (Av_I)(M_i).$$

Отже, врахувавши отримане співвідношення $(A_h v)_i = (Av_I)(M_i)$, у підсумку отримаємо $(Av - A_h v)_i = (Av(M) - Av_I(M))|_{M=M_i}$. Покажемо, що

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} \leq \|A(v - v_I)\|_\infty. \quad (2.18)$$

Справді,

$$\begin{aligned} \|Av - A_h v\|_{C_h} &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((Av(M) - Av_I(M))|_{M=M_i})^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\sup_{M \in Q_T} |A(v(M) - v_I(M))| \right)^2} \leq \|A(v - v_I)\|_\infty. \end{aligned}$$

Оцінка (2.18) пов'язує похибку апроксимації скінченновимірного квазізображення з похибкою інтерполювання у скінченновимірному просторі. Діючи оператором A на залишковий член інтерполяційного полінома Лагранжа (2.16), отримаємо наближення

$$A(v(x, t) - v_I(x, t)) \approx a_\alpha \frac{\omega_{n_x}^{(\alpha)}(x)}{(n_x)!} \frac{\partial^{n_x} v}{\partial x^{n_x}} + \frac{\omega'_{n_t}(t)}{(n_t)!} \frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}}.$$

$$\text{Оцінки} \quad |\omega'_{n_t}(t)| \leq (n_t)!\ln(n_t) \left(\frac{1}{n_t - 1} \right)^{n_t - 1}, \quad |\omega_{n_x - \alpha}(x)| \leq (n_x)!\left(\prod_{k=0}^{\alpha-1} (\ln(n_x - k)) \right) \left(\frac{1}{n_x - 1} \right)^{n_x - \alpha} \quad i$$

$v \in W^{n_x n_t, \infty}(Q_t) \cap B$ приводять до:

$$\|Av - Av_I\|_\infty \leq \ln(n_t) \left(\frac{1}{n_t - 1} \right)^{n_t - 1} \left\| \frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + |a_\alpha| \left(\prod_{k=0}^{\alpha-1} (\ln(n_x - k)) \right) \left(\frac{1}{n_x - 1} \right)^{n_x - \alpha} \left\| \frac{\partial^{n_x} v}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty,$$

і у підсумку отримуємо (2.17). Теорему доведено.

Доведемо збіжність обчислювальної схеми, що визначена дискретною задачею (2.14). Згідно з теоремою 2.4 оператор A_h апроксимує оператор A на елементі $v \in B$ у сенсі

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|Av - A_h v\|_C = 0, \quad \forall v \in B. \quad (2.19)$$

Потрібно показати, що схема Лі-алгебричних дискретних апроксимацій задовольняє умови теореми Канторовича [59] про збіжність абстрактної апроксимаційної схеми та теореми про ознаку обмеженого оберненого оператора [45].

Згідно з теоремою Канторовича [59] про збіжність абстрактної апроксимаційної схеми, співвідношення $\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h\|_B = 0$ справедливе, якщо виконуються умови:

1. $\forall f \in C, \exists! v \in B : Av = f,$
2. $\forall A_h, \exists A_h^{-1} : \|A_h^{-1}\| \leq M < +\infty,$
3. $\forall v \in D(A) \subset B : \lim_{h \rightarrow 0} \|Av - A_h v\|_C = 0.$

Згідно з теоремою [45] про ознаку обмеженого оберненого оператора, якщо лінійний оператор $A : B \rightarrow C$ такий, що

$$\exists \alpha = const > 0 \text{ make, із } \|Av\|_C \geq \alpha \|v\|_B \quad \forall v \in D(A). \quad (2.20)$$

тоді існує лінійний обмежений обернений оператор.

Теорема 2.4 (про існування обмеженого оберненого оператора для квазізображення). Якщо ранг скінченновимірного матричного квазізображення A_h оператора A дорівнює розмірності простору

апроксимації, тобто $\text{rank}A_h = \dim B_h$, то тоді існує лінійний обмежений обернений оператор A_h^{-1} , причому для усіх A_h :

$$\exists M > 0, \exists A_h^{-1} : \|A_h^{-1}\| \leq M < +\infty. \quad (2.21)$$

Доведення. Оскільки норма задовільняє властивостям невід'ємності та невиродженості, тобто $\|A_h v\|_{C_h} \geq 0, \forall u \in D(A_h)$, причому $\|A_h v\|_{C_h} = 0 \Leftrightarrow v = 0_{B_h}$, то $\forall v \in D(A_h) \setminus \{0_{B_h}\} : \|A_h v\|_{C_h} > 0$.

Справді, нехай $\|A_h v\|_{C_h} = 0$. Оскільки норма задовільняє аксіому невиродженості, то такий випадок можливий лише тоді, коли $A_h v = 0_{C_h}$. Для ненульового елементу $v \in B_h$ це можливо лише тоді, коли $\det A_h = 0$, тобто $\text{rank}A_h < \dim B_h$. Оскільки оператор A_h такий, що $\text{rank}A_h = \dim B_h, \det A_h \neq 0$, тоді $\|A_h v\|_{C_h} = 0$ можливе тоді і тільки тоді, коли $v = 0_{B_h}$.

Величини $\|A_h v\|_{C_h}$ і $\|v\|_{B_h}$ строго додатні для $\forall v \in D(A_h) \setminus \{0_{B_h}\}$. Це означає, що можна знайти сталу $\alpha > 0$, для якої виконується $\|A_h v\|_{C_h} \geq \alpha \|v\|_{B_h}$. З того, що

оператор A_h має обернений оператор, у [67] показано, що $\|A_h v_h\|_{C_h} \geq \frac{\|v_h\|_{B_h}}{\|A_h^{-1}\|}$, де

$$\alpha = \frac{1}{\|A_h^{-1}\|}, \text{ а з другого боку } \|A_h^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Вибрали сталу $M > 0$ як $M = \frac{1}{\alpha}$ та з того, що $\alpha > 0$, знаходимо, що $\|A_h^{-1}\| \leq M < +\infty$, що завершує доведення теореми.

Теорема 2.5 (про збіжність абстрактної схеми Лі-алгебричних дискретних апроксимацій). *Нехай виконуються наступні умови:*

1. послідовність операторів $\{A_h\}$ апроксимує оператор A задачі (2.10),
2. усі оператори з послідовності $\{A_h\}$ є невироджені,
3. апроксимація елемента $f \in C$ задовільняє умову

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f - f_h\|_{C_h} = 0, \quad (2.22).$$

Тоді послідовність u_h , що визначена схемою (2.14) відшукування розв'язку задачі (2.10), є збіжною до точного розв'язку, тобто $\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h\|_{B_h} = 0$.

Доведення. Розглянемо $\|v - v_h\|_{B_h}$:

$$\begin{aligned} \|v - v_h\|_{B_h} &= \|A_h^{-1} A_h (v - v_h)\|_{B_h} \leq \|A_h^{-1}\| \|A_h (v - v_h)\|_{C_h} = \\ &= \|A_h^{-1}\| \|A_h (v - v_h) + Av - Av\|_{C_h} = \|A_h^{-1}\| \|(A_h v - Av) + (Av - A_h v_h)\|_{B_h} \leq \\ &\leq \|A_h^{-1}\| \left(\|Av - A_h v\|_{C_h} + \|f - f_h\|_{C_h} \right). \end{aligned}$$

Згідно з умовою теореми виконується (2.21), тоді

$$\|v - v_h\|_{B_h} \leq M \left(\|Av - A_h v\|_{C_h} + \|f - f_h\|_{C_h} \right),$$

а врахувавши умови апроксимаційності оператора (2.19) та елемента $f \in C$ (2.22), у границі отримаємо $\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h\|_{B_h} \leq M \left(\lim_{h \rightarrow 0} \|Av - A_h v\|_{C_h} + \lim_{h \rightarrow 0} \|f - f_h\|_{C_h} \right) = 0$.

Оскільки норма задовільняє аксіому невиродженості та невід'ємності, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h\|_{B_h} = 0, \text{ що доводить теорему.}$$

Теорема 2.6. Якщо $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{f} - \tilde{f}_h\|_{C_h} = 0$ та послідовність квазізображеній оператора не вироджена, тоді послідовність u_h , що визначена схемою (2.14) відшукування наближеного розв'язку задачі (2.10), збігається до точного розв'язку задачі, причому, у випадку рівновіддалених вузлів інтерполяції похибка стосовно точного розв'язку характеризується оцінкою

$$\|u - u_h\|_{B_h} \leq M \left(\ln(n_t) \left(\frac{1}{n_t - 1} \right)^{n_t - 1} \left\| \frac{\partial^{n_t} u}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + |a_\alpha| \left(\prod_{k=0}^{\alpha-1} (\ln(n_x) - k) \right) \left(\frac{1}{n_x - 1} \right)^{n_x - \alpha} \left\| \frac{\partial^{n_x} u}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty \right) \quad (2.23).$$

Доведення. Для розв'язування задачі (2.7), використали заміну $u = v + \varphi$ та $u_h = v_h + \varphi_h$. Тоді похибка апроксимації розв'язку задачі (2.7) має вигляд

$$\|u - u_h\|_B = \|v - v_h + \varphi - \varphi_h\|_B \leq \|v - v_h\|_B + \|\varphi - \varphi_h\|_B,$$

де $\|v - v_h\|_B$ – норма похибки апроксимації розв'язку задачі (2.10), а $\|\varphi - \varphi_h\|_B$ – норма похибки інтерполяції початкової умови, яку характеризує така

апріорна оцінка $\|\varphi - \varphi_h\|_{B_h} \leq \left(\frac{1}{n_x - 1}\right)^{n_x} \left\| \frac{\partial^{n_x} \varphi}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty$, тобто $\|\varphi - \varphi_h\|_{B_h} \leq O\left(\left[\frac{1}{n_x - 1}\right]^{n_x}\right)$. за умови обмежених похідних.

Похибку інтерполювання функції правого члена $\|f - f_h\|_B$, характеризує така апріорна оцінка $\|f - f_h\|_{B_h} \leq \left(\frac{1}{n_x - 1}\right)^{n_x} \left\| \frac{\partial^{n_x} f}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty$, тобто $\|f - f_h\|_{B_h} \leq O\left(\left[\frac{1}{n_x - 1}\right]^{n_x}\right)$.

Розглянемо оцінку норми $\|v - v_h\|_{B_h}$:

$$\begin{aligned} \|v - v_h\|_{B_h} &= \|A_h^{-1} A_h (v - v_h)\|_{B_h} \leq \|A_h^{-1}\| \|A_h (v - v_h)\|_{C_h} = \\ &= \|A_h^{-1}\| \|A_h (v - v_h)\| + \|Av - Av\|_{C_h} = \|A_h^{-1}\| ((A_h v - Av) + (Av - A_h v_h))_{B_h} \leq \\ &\leq \|A_h^{-1}\| (\|Av - A_h v\|_{C_h} + \|f - f_h\|_{C_h}). \end{aligned}$$

На підставі теореми про існування обмеженого оберненого оператора, справедлива оцінка

$$\|v - v_h\|_{B_h} \leq M (\|Av - A_h v\|_{C_h} + \|f - f_h\|_{C_h}).$$

Врахувавши оцінку похибки апроксимації оператора і нехтуючи доданками порядку $O\left(\left(\frac{1}{n_x - 1}\right)^{n_x}\right)$, отримуємо

$$\|v - v_h\|_{B_h} \leq M \left(\ln(n_t) \left(\frac{1}{n_t - 1}\right)^{n_t-1} \left\| \frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + |a_\alpha| \left(\prod_{k=0}^{\alpha-1} (\ln(n_x - k)) \right) \left(\frac{1}{n_x - 1}\right)^{n_x-\alpha} \left\| \frac{\partial^{n_x} v}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty \right)$$

Оскільки $\|u - u_h\|_B \leq \|v - v_h\|_B + \|\varphi - \varphi_h\|_B$, та $\|\varphi - \varphi_h\|_{B_h} \leq O\left(\left[\frac{1}{n_x - 1}\right]^{n_x}\right)$,

нехтуючи величинами порядку $O\left(\left[\frac{1}{n_x - 1}\right]^{n_x}\right)$ у підсумку приходимо до оцінки (2.23). Теорему доведено.

2.3. Узагальнений метод для задач Коші у багатовимірному випадку

Розглянемо q -вимірну обмежену область $\Omega := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_q, b_q) \subset R^q$, часову межу $T < +\infty$ та циліндр $Q_T = \Omega \times (0, T]$. Нехай $diam \Omega_i$ позначає довжину відрізку (a_i, b_i) .

Припустимо, що оператор K є формальним поліномом елементів алгебри Лі $\bigoplus_{i=1}^q \{x_j, \partial / \partial x_j, 1\}$ [5, 50, 63], та α_i позначає найвищий порядок похідної за змінною x_i і $a_{i,\alpha}$ позначає коефіцієнт при старшій похідній за змінною x_i .

Уведемо простори $C = V = W_{x_1, \dots, x_d, t}^{\infty, \infty}(Q_T)$ де, простір $W_{x_1, \dots, x_d, t}^{\infty, \infty}(Q_T) = \{u : Q_T \rightarrow R \mid D^\alpha u \in L^\infty(Q_T), \forall \alpha \in N\}$, тобто похідні довільного порядку за усіма змінними обмежені і сформулюємо задачу Коші [5] для диференціального рівняння з оператором K :

$$\begin{cases} \text{знати функцію } u = u(x_1, \dots, x_q, t) \in V \text{ таку, що} \\ u_t = Ku + f, \forall (x_1, \dots, x_q, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi \in W_x^{\infty, \infty}(\Omega), \end{cases} \quad (2.24)$$

де простір $W_x^{\infty, \infty}(\Omega)$ такий, що

$$W_x^{\infty, \infty}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow R \mid D^\alpha u \in L^\infty(\Omega), \forall \alpha \in N\},$$

$\varphi = \varphi(x) \in W_x^{\infty, \infty}(\Omega)$ – початкова умова де $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_d) \in V$ позначає початкові умови і $f = f(x_1, \dots, x_q, t) \in C$ представляє внутрішній розподілені джерела.

Увівши заміну $u(x_1, \dots, x_q, t) = v(x_1, \dots, x_q, t) + \varphi(x_1, \dots, x_q)$, отримаємо задачу Коші з однорідними початковими умовами:

$$\begin{cases} \text{знати функцію } v = v(x_1, \dots, x_q, t) \in V \text{ таку, що} \\ v_t = Kv + K\varphi + f, \forall (x_1, \dots, x_q, t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Розв'язок задачі (2.25) шукаємо у просторі $B = \{v \in V : v|_{t=0} = 0\}$.

Позначивши структурні елементи в (2.25) через

$$A := \partial / \partial t - K, \quad \tilde{f} = K\varphi + f \in C, \quad (2.26)$$

отримаємо задачу в операторному вигляді:

$$\begin{cases} \text{задано оператор } A : B \rightarrow C \text{ та елемент } \tilde{f} \in C \\ \text{ знайти елемент } v \in B \text{ такий, що } Av = \tilde{f}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Використовуючи основні положення підрозділів 2.1, 2.2 та побудови скінченновимірних квазізображень у багатовимірному випадку [76], отримуємо, що скінченновимірне квазізображення елемента $A = \frac{\partial}{\partial t} \circ 1 - 1 \circ K$ має вигляд $A_h = Z_t \otimes I_x - I_t \otimes K_x$, де I_x, I_t – скінченновимірні квазізображення одиничного оператора для просторових змінних та t відповідно, Z_t – скінченновимірне квазізображення диференціювання за часовою змінною, K_x – скінченновимірне квазізображення поліноміального диференціального оператора K .

Обчислювальну схему побудовано з використанням $(q+1)$ -вимірного інтерполювання Лагранжа. У підсумку отримано дискретне формулювання задачі:

$$\begin{cases} \text{задано оператор } A_h : B_h \rightarrow C_h \text{ та елемент } \tilde{f}_h \in C_h \\ \text{ знайти елемент } v_h \in B_h \text{ такий, що } A_h v_h = \tilde{f}_h. \end{cases} \quad (2.28)$$

Нехай n_{x_i} позначає кількість вузлів за змінною x_i .

Теорема 2.7. Ранг скінченновимірного квазізображення A_h оператора A є повним, тобто ранг дорівнює $(n_t - 1) \prod_{i=1}^q n_{x_i}$ та існує єдиний розв'язок задачі (2.27).

Доведення. Оскільки матриця квазізображення K_h оператора K є нільпотентною матрицею, то на підставі доведення теореми 2.2, знаходимо, що ранг скінченновимірного квазізображення A_h оператора A є повним, тобто ранг складає $(n_t - 1) \prod_{i=1}^q n_{x_i}$ й існує єдиний розв'язок задачі (2.27). Теорему доведено.

Теорема 2.8. Скінченновимірне квазізображення A_h апроксимує оператор A у випадку рівновіддалених вузлів інтерполяції з похибкою апроксимації

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} \leq \ln n_t \left(\frac{1}{n_t - 1} \right)^{n_t - 1} \left\| \frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + \sum_{i=1}^q \left(\left| a_{i,\alpha} \left(\prod_{k=0}^{\alpha_i - 1} \ln(n_{x_i} - k) \right) \left(\frac{1}{n_{x_i} - 1} \right)^{n_{x_i} - \alpha_i} \left\| \frac{\partial^{n_{x_i}} v}{\partial x^{n_{x_i}}} \right\|_\infty \right) \right). \quad (2.29)$$

Доведення. Використовуючи формулу багатовимірного інтерполяції Лагранжа і діючи оператором A на залишковий член отримуємо (2.29).

Теорема 2.9. Якщо $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{f} - \tilde{f}_h\|_{C_h} = 0$ та виконані умови теорем 2.6, 2.7, 2.8 тоді $\lim_{h \rightarrow 0} \|v - v_h\|_{B_h} = 0$ і у випадку рівновіддалених вузлів інтерполяції похибку стосовно точного розв'язку характеризує оцінка

$$\|v - v_h\|_{B_h} \leq M \left(\ln n_t \left(\frac{1}{n_t - 1} \right)^{n_t - 1} \left\| \frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + \sum_{i=1}^q \left(\left| a_{i,\alpha} \left(\prod_{k=0}^{\alpha_i - 1} \ln(n_{x_i} - k) \right) \left(\frac{1}{n_{x_i} - 1} \right)^{n_{x_i} - \alpha_i} \left\| \frac{\partial^{n_{x_i}} v}{\partial x^{n_{x_i}}} \right\|_\infty \right) \right). \quad (2.30)$$

Доведення. На підставі виконання умов теореми Канторовича про збіжність абстрактної інтерполяційної схеми, використавши нерівність

$$\|v - v_h\|_{B_h} \leq M \|Av - A_h v\|_{C_h} \text{ і нехтуючи доданками порядку } \left(\frac{1}{n_t - 1} \right)^{n_t} \text{ і } \left\{ \left(\frac{1}{n_{x_i} - 1} \right)^{n_{x_i}} \right\}_{i=1}^q,$$

отримуємо (2.30).

2.4. Застосування методу для задачі Коші для одновимірного рівняння адвекції

З огляду на практичну важливість рівняння адвекції у досліджені динамічних систем покажемо застосовність обчислювальної схеми узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій до рівняння адвекції.

Розглянемо область $\Omega = (0,1)$, часову межу $T < +\infty$, циліндр $Q_T = \Omega \times (0, T]$, простори $V, C = W^{\infty, \infty}(\Omega_T)$. Формулюємо задачу Коші для одновимірного рівняння адвекції:

$$\begin{cases} \text{задано коефіцієнт адвекційного переносу } c \in R, \\ \text{та початковий розподіл величини } \varphi = \varphi(x) \in V \\ \text{ знайти функцію } u = u(x, t) \in V \text{ таку, що:} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall (x, t) \in Q_T \\ u|_{t=0} = \varphi. \end{cases} \quad (2.31)$$

Підстановкою $u(x, t) = v(x, t) + \varphi(x)$ у (2.31) отримаємо задачу Коші для функції $v(x, t)$ з однорідною початковою умовою

$$\begin{cases} \text{задано коефіцієнт адвекційного переносу } c \in R, \\ \text{знайти функцію } u = u(x, t) \in V \text{ таку, що:} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} = -c \frac{d\varphi}{dx}, \forall (x, t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Розв'язок задачі (2.32) шукаємо у просторі $B = \{v \in V : v|_{t=0} = 0\}$. Увівши позначення $A := \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}, f := -c \frac{d\varphi}{dx} \in C$, отримаємо задачу для операторного рівняння

$$\begin{cases} \text{задано оператор } A : B \rightarrow C \text{ та елемент } f \in C, \\ \text{ знайти елемент } v \in B \text{ такий, що } Av = f. \end{cases} \quad (2.33)$$

Задачу Коші зведене до задачі для операторного рівняння, яку розв'яжемо узагальненим методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій. Для цього запишемо скінченновимірне квазізображення задачі: нехай матриця $A_h = Z_t \otimes I_x + cI_t \otimes Z_x$ – скінченновимірне квазізображення диференціального оператора A задачі (2.33), а вектор $f_h = \{f(M_i)\}_{i=1}^N$ скінченновимірне квазізображення правої частини у (2.32) та (2.33), тоді дискретне формулювання задачі (2.33) має вигляд:

$$\begin{cases} \text{задано оператор } A_h : B_h \rightarrow C_h \text{ та елемент } f_h \in C_h \\ \text{ знайти елемент } v_h \in B_h \text{ такий, що } A_h v_h = f_h. \end{cases} \quad (2.34)$$

Наслідок 2.1 (про збіжність схеми методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші з одновимірним рівнянням адвекції). *Послідовність u_h , що визначена схемою (2.34) відшукавання наближеного*

розв'язку задачі (2.33), збігається до точного розв'язку задачі (2.31), причому норма похибки при нерівномірній сітці характеризується величиною

$$\|u - u_h\|_{B_h} \leq M \left(\frac{T^{n_t-1}}{(n_t-1)!} \left\| \frac{\partial^{n_t} u}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + |c| \frac{\text{diam}(\Omega)^{n_x-1}}{(n_x-1)!} \left\| \frac{\partial^{n_x} u}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty \right),$$

де число $M > 0$ таке, що $\forall A_h : \|A_h^{-1}\| \leq M$, а при рівномірній сітці, норма похибки допускає таку апріорну оцінку:

$$\|u - u_h\|_{B_h} \leq M \left(\ln(n_t) \left(\frac{1}{n_t-1} \right)^{n_t-1} \left\| \frac{\partial^{n_t} u}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + |c| \ln(n_x) \left(\frac{1}{n_x-1} \right)^{n_x-\alpha} \left\| \frac{\partial^{n_x} u}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty \right).$$

Доведення. Справедливість твердження випливає з теореми 2.6.

Перейдемо до аналізу числових результатів. Норму похибки апроксимації точного розв'язку $u - u_h = u(x, t) - u_h(x, t)$ в просторі $L^2(Q_T)$ обчислюємо за формулою $\|u - u_h\|_{L^2(Q_T)}^2 = \iint_{Q_T} (u - u_h)^2 dx dt$, у просторі $L^\infty(Q_{T,h})$:

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(Q_{T,h})} = \sup_{(x,t) \in Q_{T,h}} |u(x, t) - u_h(x, t)|, \quad \text{а в просторі Соболєва } W^{1,2}(Q_T) \quad [44]:$$

$$\|u - u_h\|_{W^{1,2}(Q_T)}^2 = \iint_{Q_T} \left[(u - u_h)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_h}{\partial t} \right)^2 \right] dx dt.$$

У випадку, коли відомо точний розв'язок, обчислення оцінок швидкостей збіжності апроксимацій на сітці вузлів з кроком виконуватимемо за правилом: $p_h = \log_2 \left(\frac{\|u - u_h\|}{\|u - u_{h/2}\|} \right)$. Якщо у розрахунках отримано значення $\|u - u_h\| = 0$ та $\|u - u_{h/2}\| = 0$, то невизначеність 0/0 подаємо у таблицях як NaN (*not a number*).

Модельні задачі для рівняння адвекції досліджено нами з використанням методу скінчених різниць (МСР), а саме схеми Лакса - Вендорфа, методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій (МЛАДА) та узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій (УМЛАДА).

Зазначимо, що у випадку застосування методу МЛАДА, розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь здійснено з

використанням вбудованих функцій пакету символічного обчислення Mathematica.

Позначимо крок дискретизації $\Delta x = \frac{1}{(n_x - 1)}$ за просторовою змінною, та крок $\Delta t = \frac{1}{(n_t - 1)}$ за часовою змінною. Якщо крок дискретизації за просторовою та часовою змінними вибрані одинаковими, то $h = \Delta x = \Delta t$. У випадку методу МЛАДА h позначає крок дискретизації тільки за просторовою змінною, оскільки розв'язування задачі Коші для системи ЗДР здійснюється з використанням пакету Mathematica, де кількість вузлів за часовою змінною вибирається автоматично.

Приклад 2.1. Для модельної задачі

$$\begin{cases} \text{знати функцію } u = u(x, t) \text{ таку, що:} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall (x, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \sin x. \end{cases} \quad (2.35)$$

отримано числові результати, які наведені у таблицях 2.1–2.6. Точний розв'язок задачі (2.35) має вигляд $u(x, t) = \sin(x - t)$. Зазначимо, що при розв'язуванні задачі (2.35) узагальненим методом ми розв'язували допоміжну задачу

$$\begin{cases} \text{знати функцію } v = v(x, t) \text{ таку, що:} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x, \forall (x, t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Отримавши наближений розв'язок $v_h = v_h(x, t)$ допоміжної задачі, побудовано наближений розв'язок $u_h = u_h(x, t)$ задачі (2.35) у спосіб $u_h(x, t) = \sin x + v_h(x, t)$, де $\sin(x)$ – початкова умова задачі (2.35).

Табл. 2.1. Значення норми похибок в просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.0152981	0.0849962	0.0396427
$h = 1/4$	0.00408866	0.00623154	0.00053962
$h = 1/8$	0.00103819	$5.7579 \cdot 10^{-6}$	$2.87577 \cdot 10^{-7}$
$h = 1/16$	0.00026054	$2.16961 \cdot 10^{-5}$	$2.38063 \cdot 10^{-15}$
$h = 1/32$	0.00006510	—	$3.34574 \cdot 10^{-17}$

Табл. 2.2. Значення норми похибок в просторі $L^\infty(Q_{T,h})$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	0.46952	0.0660836
$h = 1/4$	0	0.0514178	0.0037222
$h = 1/8$	0	$7.90058 \cdot 10^{-5}$	$4.24574 \cdot 10^{-6}$
$h = 1/16$	0	$4.70088 \cdot 10^{-4}$	$6.19514 \cdot 10^{-14}$
$h = 1/32$	0	—	$7.07336 \cdot 10^{-34}$

Табл. 2.3. Значення норми похибок в просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.0815902	0.383927	0.0903126
$h = 1/4$	0.0394812	0.0390588	0.0027526
$h = 1/8$	0.0195588	0.0000578184	$3.1048 \cdot 10^{-6}$
$h = 1/16$	0.00975607	0.000338286	$4.45453 \cdot 10^{-14}$
$h = 1/32$	0.00487437	—	$7.13162 \cdot 10^{-17}$

Табл. 2.4. Значення порядків збіжності в просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.90365	3.76974	6.19897
$h = 1/4$	1.97756	10.0798	10.8738
$h = 1/8$	1.99448	-1.91382	26.848
$h = 1/16$	2.00057	—	6.15287

Табл. 2.5. Значення порядків збіжності в просторі $L^\infty(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	NaN	3.19085	4.15005
$h = 1/4$	NaN	9.34609	9.77594
$h = 1/8$	NaN	—	26.0303
$h = 1/16$	NaN	—	66.2473

Табл. 2.6. Значення порядків збіжності в просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.04723	3.29711	5.03606
$h = 1/4$	1.01335	9.3999	9.79208
$h = 1/8$	1.00344	—	26.0547
$h = 1/16$	1.00108	—	9.28683

2.5. Застосування методу для задачі Коші для одновимірного рівняння тепlopровідності

Формулюємо задачу Коші для одновимірного рівняння тепlopровідності [75], використовуючи простори з підрозділу 2.4:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано коефіцієнт } a \in \mathbb{R}, \\ \text{початковий розподіл } \varphi = \varphi(x) \in V \\ \text{знайти функцію } u = u(x,t) \in V \text{ таку, що:} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \forall (x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi. \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Здійснивши підстановку $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$ у (2.36), отримаємо задачу Коші для функції $v(x,t)$ з однорідною початковою умовою

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано коефіцієнт } a \in \mathbb{R}, \\ \text{знайти функцію } v = v(x,t) \in V \text{ таку, що:} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{d^2 \varphi}{dx^2}, \forall (x,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Розв'язок задачі (2.37) шукаємо у просторі $B = \{v \in V : v|_{t=0} = 0\}$. Ввівши для задачі (2.32) позначення

$$A := \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2}, f := a \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \in C(Q_T), \quad (2.38)$$

отримаємо задачу для операторного рівняння

$$\begin{cases} \text{задано оператор } A : B \rightarrow C \text{ та елемент } f \in C, \\ \text{ знайти елемент } v \in B \text{ такий, що } Av = f. \end{cases} \quad (2.39)$$

Задачу Коші зведене до задачі для операторного рівняння, яку розв'яжемо узагальненим методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій. Для цього запишемо скінченновимірне квазізображення задачі: нехай матриця $A_h = Z_t \otimes I_x + cI_t \otimes Z_x$ — скінченновимірне квазізображення диференціального оператора A з задачі (2.33), а вектор $f_h = \{f(M_i)\}_{i=1}^N$ скінченновимірне квазізображення правої частини у (2.32) та (2.33), тоді дискретне формулювання задачі (2.33) має вигляд:

$$\begin{cases} \text{задано оператор } A_h : B_h \rightarrow C_h \text{ та елемент } f_h \in C_h \\ \text{ знайти елемент } v_h \in B_h \text{ такий, що } A_h v_h = f_h. \end{cases} \quad (2.40)$$

Наслідок 2.2. (про збіжність схеми методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші з одновимірним рівнянням тепlopровідності). *Послідовність u_h , що визначена схемою (2.40) відшукування наближеного розв'язку задачі (2.39), збігається до точного розв'язку задачі (2.36), причому норма похибки при нерівномірній сітці характеризується величиною*

$$\|u - u_h\|_{B_h} \leq M \left(\frac{T^{n_t-1}}{(n_t-1)!} \left\| \frac{\partial^{n_t} u}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + |c| \frac{\operatorname{diam}(\Omega)^{n_x-1}}{(n_x-1)!} \left\| \frac{\partial^{n_x} u}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty \right),$$

де число $M > 0$ таке, що $\forall A_h : \|A_h^{-1}\| \leq M$, а при рівномірній сітці, норма похибки допускає таку апріорну оцінку:

$$\|u - u_h\|_{B_h} \leq M \left(\ln(n_t) \left(\frac{1}{n_t-1} \right)^{n_t-1} \left\| \frac{\partial^{n_t} u}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + |c| \ln(n_x) \left(\frac{1}{n_x-1} \right)^{n_x-\alpha} \left\| \frac{\partial^{n_x} u}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty \right).$$

Доведення. Справедливість сформульованого твердження випливає з теореми 2.6.

Приклад 2.2. Для модельної задачі [75]

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x, t) \text{ таку, що:} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \forall (x, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \sin x. \end{cases} \quad (2.41)$$

отримано числові результати, які наведені у таблицях 2.7–2.12.

Точний розв'язок задачі (2.41) має вигляд $u(x, t) = e^{-t} \sin x$.

Табл. 2.7. Значення норми похибок в просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.0419804	0.129574	0.0479767
$h = 1/4$	0.0199765	0.051718	0.0146769
$h = 1/8$	0.00965197	0.00343672	0.00063752
$h = 1/16$	—	—	$1.83044 \cdot 10^{-7}$

Табл. 2.8. Значення норми похибок в просторі $L^\infty(Q_{T,h})$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.0904097	0.46952	0.23476
$h = 1/4$	0.0414633	0.249107	0.085016
$h = 1/8$	0.0200078	0.0226241	0.0046676
$h = 1/16$	—	—	$1.7980 \cdot 10^{-6}$

Табл. 2.9. Значення норми похибок в просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.119842	0.452594	0.202487
$h = 1/4$	0.0594391	0.2167	0.0727922
$h = 1/8$	0.0294888	0.0197359	0.00419756
$h = 1/16$	—	—	$1.85966 \cdot 10^{-6}$

Табл. 2.10. Значення порядків збіжності в просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.07141	1.32504	1.70879
$h = 1/4$	1.04941	3.91156	4.52493
$h = 1/8$	—	—	11.7661

Табл. 2.11. Значення порядків збіжності в просторі $L^\infty(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.12464	0.91442	1.46539
$h = 1/4$	1.05128	3.46084	4.18698
$h = 1/8$	—	—	11.3421

Табл. 2.12. Значення порядків збіжності в просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.01165	1.06252	1.47598
$h = 1/4$	1.01124	3.45681	4.11616
$h = 1/8$	—	—	11.1403

У роботі [75] норму похибки апроксимації точного розв'язку обчислювали за формулою

$$\|u - u_h\|_{BL} = \max_{i=1, n_t} \sqrt{\sum_{j=1}^{n_x} (u(x_j, t_i) - u_h(x_j, t_i))^2}. \quad (2.42)$$

При кількості вузлів $n_x = 10, n_t = 10$ у [75] класичним методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій отримано $\|u - u_h\|_{BL} = 7,75 \cdot 10^{-3}$. Із застосуванням пропонованого нами узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій за такої ж кількості вузлів та у тій же нормі отримано $\|u - u_h\|_{BL} = 2,69 \cdot 10^{-3}$, що у 2,88104 разів точніше ніж результат отриманий з використанням класичного методу.

Зростання ж похибок у класичному МЛАДА зумовлено тим, що ДРЧП зведене до системи ЗДР, яка є жорсткою і вимагає великої кількості вузлів за часовою змінною для коректного розв'язання задачі.

Узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій застосовний до задачі Коші з оберненим рівнянням тепlopровідності. Дослідження таких задач є актуальною проблемою, з огляду на їх зв'язок з моделюванням явищ природи та обробки та реконструкції зображень.

2.6. Застосування методу для задачі Коші для двовимірного рівняння адвекції

Введемо область $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y = (0,1) \times (0,1)$, часову межу $T < +\infty$, циліндр $Q_T = \Omega \times (0, T]$, простори $V = W_{x,y,t}^{\infty,\infty}(Q_T)$ та $C = V$. Формулюємо задачу Коші для двовимірного рівняння адвекції:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано коефіцієнти адвективного переносу } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ \text{та початковий розподіл } \varphi = \varphi(x, y) \in C_{x,y}^{1,1}(\Omega), \\ \text{ знайти функцію } u = u(x, t) \in V \text{ таку, що:} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \forall (x, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Здійснивши підстановку $u(x, y, t) = v(x, y, t) + \varphi(x, y)$ у (2.43), отримаємо задачу Коші для функції $v(x, y, t)$ з однорідною початковою умовою

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано коефіцієнти адвективного переносу } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ \text{ знайти функцію } v = v(x, y, t) \in V \text{ таку, що:} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} + c_2 \frac{\partial v}{\partial y} = -c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \forall (x, t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Розв'язок задачі (2.44) шукаємо у просторі функцій, які в початковий момент часу набувають нульового значення, тобто у просторі $B = \{v \in V : v|_{t=0} = 0\}$. Ввівши для задачі (2.44) позначення

$$A := \frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 \frac{\partial}{\partial y}, f := -c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \in C, \quad (2.45)$$

отримаємо задачу для операторного рівняння

$$\begin{cases} \text{задано оператор } A : B \rightarrow C \text{ та елемент } f \in C, \\ \text{ знайти елемент } v \in B \text{ такий, що } Av = f. \end{cases} \quad (2.46)$$

Задачу Коші зведено до задачі для операторного рівняння, яку розв'яжемо узагальненим методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій. Для цього запишемо скінченновимірне квазізображення задачі: нехай матриця $A_h = Z_t \otimes I_y \otimes I_x + c_1 I_t \otimes I_y \otimes Z_x + c_2 I_t \otimes Z_y \otimes I_x$ – скінченновимірне квазізображення диференціального оператора A з задачі (2.45), а вектор $f_h = \{f(M_i)\}_{i=1}^N$ скінченновимірне квазізображення правої частини у (2.45) та (2.46), тоді дискретне формулювання задачі (2.45) має вигляд:

$$\begin{cases} \text{задано оператор } A_h : B_h \rightarrow C_h \text{ та елемент } f_h \in C_h \\ \text{ знайти елемент } v_h \in B_h \text{ такий, що } A_h v_h = f_h. \end{cases} \quad (2.47)$$

Наслідок 2.3. (про збіжність схеми методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші з двовимірним рівнянням адвекції). *Послідовність u_h , визначена схемою (2.47) відшукування наближеного розв'язку задачі (2.44), збігається до точного розв'язку задачі (2.43), причому за довільного розподілу вузлів норма похибки характеризується величиною*

$$\|u - u_h\|_{B_h} \leq M \left(\frac{T^{n_t-1}}{(n_t-1)!} \left\| \frac{\partial^{n_t} u}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + |c_1| \frac{\text{diam}(\Omega_x)^{n_x-1}}{(n_x-1)!} \left\| \frac{\partial^{n_x} (u - \varphi)}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty + \right. \\ \left. + |c_2| \frac{\text{diam}(\Omega_y)^{n_y-1}}{(n_y-1)!} \left\| \frac{\partial^{n_y} (u - \varphi)}{\partial y^{n_y}} \right\|_\infty \right),$$

де число $M > 0$ таке, що $\forall A_h : \|A_h^{-1}\| \leq M$, а у випадку рівновіддалених вузлів справедлива наступна апріорна оцінка:

$$\|u - u_h\|_{B_h} \leq M \left(\ln(n_t) \left(\frac{1}{n_t-1} \right)^{n_t-1} \left\| \frac{\partial^{n_t} u}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + |c_1| \ln(n_x) \left(\frac{1}{n_x-1} \right)^{n_x-\alpha} \left\| \frac{\partial^{n_x} u}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty + \right. \\ \left. + |c_2| \ln(n_y) \left(\frac{1}{n_y-1} \right)^{n_y-\alpha} \left\| \frac{\partial^{n_y} u}{\partial y^{n_y}} \right\|_\infty \right).$$

Доведення. Справедливість сформульованого твердження випливає на підставі теореми 2.10.

Норму похибки апроксимації точного розв'язку
 $u - u_h = u(x, y, t) - u_h(x, y, t)$ в просторі $L^2(Q_T)$ обчислюємо за формулою

$$\|u - u_h\|_{L^2(Q_T)}^2 = \iiint_{Q_T} (u - u_h)^2 dx dy dt, \quad \text{як } L^\infty(Q_{T,h}): \|u - u_h\|_{L^\infty(Q_{T,h})} = \sup_{(x,y,t) \in Q_{T,h}} |u - u_h|, \quad \text{а як}$$

просторі Соболєва $W^{1,2}(Q_T)$ [44]:

$$\|u - u_h\|_{W^{1,2}(Q_T)}^2 = \iiint_{Q_T} \left[(u - u_h)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_h}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_h}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dt.$$

Позначимо кроки дискретизації $\Delta x = \frac{1}{(n_x - 1)}$, $\Delta y = \frac{1}{(n_y - 1)}$ за змінними x

та y , а $\Delta t = \frac{1}{(n_t - 1)}$ – крок дискретизації за часовою змінною. Якщо крок

дискретизації за просторовими та часовою змінними вибрані однаковими, то $h = \Delta x = \Delta y = \Delta t$.

Приклад 2.3. Для модельної задачі

$$\begin{cases} \text{знати функцію } u = u(x, y, t) \text{ таку, що:} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \forall (x, y, t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \sin x + \sin y. \end{cases} \quad (2.48)$$

отримано числові результати, які наведені у табл. 2.13–2.18. Точний розв'язок задачі (2.48) має вигляд $u(x, t) = \sin(x-t) + \sin(y-t)$.

Табл. 2.13. Значення норми похибок в просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.0262521	0.146494	0.0790902
$h = 1/4$	0.00702414	0.0103649	0.000986107
$h = 1/8$	0.00178397	$6.76182 \cdot 10^{-5}$	$4.52829 \cdot 10^{-7}$

Табл. 2.14. Значення норми похибок в просторі $L^\infty(Q_{T,h})$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	0.939041	0.13217
$h = 1/4$	$1.91513 \cdot 10^{-15}$	0.102836	0.0074445
$h = 1/8$	$2.85993 \cdot 10^{-13}$	0.00634505	$8.4915 \cdot 10^{-6}$

Табл. 2.15. Значення норми похибок в просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.12938	0.62467	0.177763
$h = 1/4$	0.062476	0.0612636	0.00439856
$h = 1/8$	0.0309284	0.00145537	$4.67135 \cdot 10^{-6}$

Табл. 2.16. Значення порядків збіжності в просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.90204	3.82106	6.32561
$h = 1/4$	1.97723	7.26008	11.0886

Табл. 2.17. Значення порядків збіжності в просторі $L^\infty(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	$-\infty$	3.19085	4.15005
$h = 1/4$	-7.22239	4.01856	9.77594

Табл. 2.18. Значення порядків збіжності в просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.05024	3.34999	5.33678
$h = 1/4$	1.01437	5.39557	9.87898

2.7. Висновки до розділу 2

Запропоновано модифікацію методу Лі-алгебричних апроксимацій для розв'язування краївих задач з еліптичними рівняннями з неоднорідними краївими умовами. Доведено теорему про вигляд системи лінійних алгебричних рівнянь для відшукання розв'язку краївої задачі з неоднорідними краївими умовами. Така модифікація дає змогу розв'язувати країві задачі для однорідних та неоднорідних краївих умов єдиним підходом, що суттєво спрощує аналіз одновимірних краївих задач.

Запропоновано узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для розв'язування задач Коші з лінійними диференціальними рівняннями з поліноміальним диференціальним оператором. Знайдено значення рангу скінченновимірного квазізображення диференціального оператора рівняння тепlopровідності, досліджено апроксимаційні властивості та доведено факторіальну збіжність схеми узагальненого методу за усіма змінними, які входять до рівняння. Ефективність методу показано для рівнянь з адвекцією та тепlopровідністю.

Проведено порівняння узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій з методом скінченних різниць та класичним методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

Для тестової задачі для рівняння тепlopровідності узагальнений метод у три рази точніший за класичний метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій за однакових значень вузлів, для яких можна отримати адекватний результат з використанням класичного методу.

Такий запас точності узагальненого методу пов'язаний з тим, що дискретизація рівняння здійснюється за усіма змінними, що входять до рівняння та отримані матриці є заповнені, а, отже, містять інформацію про розв'язок на усьому інтервалі, що розглядається.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [26, 27, 28, 31, 34, 37, 39, 40, 42, 93].

РОЗДІЛ 3. КУСКОВО-СТЕПЕНЕВІ БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ – ДИФУЗІЇ – РЕАКЦІЇ

У цьому розділі досліджено можливості кусково-степеневих апроксимацій методу скінченних елементів для сингулярно збурених краївих задач адвекції-дифузії-реакції.

При досліженні динамічних систем, які описують процеси екології, метеорології, океанографії, гідрометеорології, фізики напівпровідників значну роль відіграє взаємодія дифузії та конвекції, що ускладнює побудову обчислювальних схем. Яскравим прикладом є країві задачі для рівняння адвекції-дифузії-реакції. За певних умов, а саме при домінуванні адвективних процесів над дифузійними процесами, такі задачі стають сингулярно збуреними. Застосування класичних схем методу скінченних різниць (МСР) чи методу скінченних елементів (МСЕ) є утрудненим, адже при великих числах Пекле виникають неприродні осциляції наближених розв'язків, які можна усунути лише завдяки згущенню сітки, тобто кількість вузлів повинна дорівнювати числу Пекле [106].

Незважаючи на розвинені підходи розв'язування таких задач, у деяких випадках, а саме наявності вироджених або розривних коефіцієнтів, експоненціальна апроксимація може втрачати стійкість. Наша мета полягає у розроблені підходу для ефективного розв'язування задач із взаємодією дифузії та конвекції.

3.1. Кусково-степенева апроксимація функцій

Побудуємо кусково-степеневу апроксимацію функції $u = u(x)$. Зафіксуємо натуральне N та поділимо відрізок $[0, 1]$ на інтервали $K_{i+1/2} := (x_i, x_{i+1})$ довжини $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i > 0$, $i = 0, \dots, N-1$. Дробовим індексом позначаємо номер інтервалу i певні його характеристики.

Наприклад, $x_{i+1/2} = 1/2(x_{i+1} + x_i)$ – центр ваги інтервалу $K_{i+1/2} := (x_i, x_{i+1})$, $\{u(x)\}_{i+1/2} = u_{i+1/2}$ – значення функції $u(x)$ у точці $x = x_{i+1/2}$.

Нехай задано достатньо регулярну функцію $u = u(x)$. Для довільного $\alpha > 0$ на кожному з інтервалів виберемо апроксимаційний поліном у вигляді лінійної комбінації

$$u(x) \approx u_{I,i+1/2}(x, \alpha_{i+1/2}) = u(x_i)\varphi_i(x, \alpha_{i+1/2}) + u(x_{i+1})\varphi_{i+1}(x, \alpha_{i+1/2}) \quad \forall x \in \bar{K}_{i+1/2}, \quad (3.1)$$

$$i = 0, \dots, N - 1$$

степеневих функцій

$$\begin{cases} \varphi_i(x, \alpha_{i+1/2}) = 1 - (\omega_i(x))^{\alpha_{i+1/2}}, \\ \varphi_{i+1}(x, \alpha_{i+1/2}) = 1 - \varphi_i(\alpha_{i+1/2}, x), \end{cases} \quad (3.2)$$

де $\omega_i = (x - x_{i-1})/h_{i+1/2}$, а стала $\alpha_{i+1/2} > 0$ відіграє роль параметра апроксимації та стабілізації для задачі сингулярно-збуреної задачі. Якщо задана функція $u \in C([0, 1])$, то кусково-визначена функція $u_I(x, \alpha)$ у (3.1) буде також кусково-визначеною на відрізку $[0, 1]$ і її можна подати у вигляді:

$$u_I(x, \alpha) = \sum_{i=0}^N u_i \phi_i(x, \alpha_{i+1/2}) \quad \forall x \in [0, 1], \quad (3.3)$$

де базис інтерполяції набув вигляду

$$\begin{aligned} \text{supp } \phi_0 &= \bar{K}_{1/2}, \quad \phi_0(x) = 1 - (\omega_1(x))^{\alpha_{1/2}}, \\ \text{supp } \phi_i &= \bar{K}_{i-1/2} \cup \bar{K}_{i+1/2}, \quad \phi_i(x) = \begin{cases} (\omega_i(x))^{\alpha_{i-1/2}}, & x \in \bar{K}_{i-1/2}, \\ 1 - (\omega_{i+1}(x))^{\alpha_{i+1/2}}, & x \in \bar{K}_{i+1/2}, \end{cases} \quad i = \overline{1, N-1} \\ \text{supp } \phi_N &= \bar{K}_{N-1/2}, \quad \phi_N(x) = (\omega_N(x))^{\alpha_{N-1/2}}. \end{aligned}$$

Для величин, які характеризують середнє значення апроксимації $u_{i+1/2}(\alpha; x)$ та швидкості її зміни на скінченному елементі $K_{i+1/2}$, введемо позначення:

$$\begin{cases} u_{i+1/2} = 1/2(u_{i+1} + u_i), \\ \dot{u}_{i+1/2} = (u_{i+1} - u_i)/h_{i+1/2}. \end{cases}$$

Безпосередніми обчисленнями переконуємося у правильності леми.

Лема 3.1 (про структуру степеневих апроксимацій). *Степенева апроксимація (3.1) на скінченному елементі $K_{i+1/2}$ має вигляд*

$$u_{I,i+1/2}(x, \alpha) = u_i + \varphi_{i+1}(x, \alpha) \{h\dot{u}\}_{i+1/2}.$$

Крім того, перша та друга похідні апроксимації (3.1) набули вигляду

$$u'_{I,i+1/2}(x, \alpha) = \alpha \varphi_{i+1}(x, \alpha - 1) \dot{u}_{i+1/2},$$

$$u''_{I,i+1/2}(x, \alpha) = \alpha(\alpha - 1) \varphi_{i+1}(x, \alpha - 2) \{\dot{u}/h\}_{i+1/2}.$$

3.2. Лінійна незалежність кусково-степеневих функцій

Кусково-визначену систему функцій $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ характеризують такі властивості.

Лема 3.2. (про лінійну незалежність системи кусково-степеневих функцій).

1. Нехай параметр апроксимації $\alpha = \min_{i=1,n} \alpha_{i+1/2} > 0$, тоді система кусково-

степеневих функцій $\{\phi_i(\cdot, \alpha)\}_{i=0}^N$ лінійно незалежна в просторі $L^2(\Omega)$ зі

скалярним добутком $(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} uv dx$.

2. Нехай $m \in N$, тоді для довільних значень параметра апроксимації α таких, що $\alpha > m - 1/2$ система кусково-степеневих функцій $\{\phi_i(\cdot, \alpha)\}_{i=0}^N$ лінійно незалежна в просторі $H^m(\Omega)$ зі скалярним добутком

$(u, v)_{H^m(\Omega)} := \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{k=1}^m (u^{(k)} v^{(k)}) \right) dx$.

Доведення. Доведемо лінійну незалежність системи кусково-степеневих функцій $\{\phi_i(\cdot, \alpha)\}_{i=0}^N$ у просторі $L^2(\Omega)$. Для цього нам треба довести, що матриця Грама G_0 елементів $\{\phi_i(\cdot, \alpha)\}_{i=0}^N$ є додатно визначена, тобто для довільного вектора $q \in R^{N+1}$ такого, що $q \neq 0$ виконується $(G_0 q, q) > 0$.

Матрицю G_0 побудовано згідно з правилом $G_{0,ij} = (\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)}$, $i, j = \overline{0, N}$.

Виконанням операцій інтегрування пересвідчуємося, що матриця G_0 набуває вигляду

$$G_0 = h \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & & & \\ m_2 & m_1 + m_3 & m_2 & & \\ & m_2 & m_1 + m_3 & m_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & m_2 & m_1 + m_3 & m_2 \\ & & & & m_2 & m_3 \end{pmatrix},$$

де компоненти обчислюють за правилом $m_1 = 2\alpha^2/(1+3\alpha+2\alpha^2)$, $m_2 = a/(1+3\alpha+2\alpha^2)$, $m_3 = 1/(1+2\alpha)$. Виконанням арифметичних операцій

переконуємось, що $(G_0 q, q) = h/(1+3\alpha+2\alpha^2) \left(\alpha^2 \sum_{i=0}^{N-1} q_i^2 + \alpha \sum_{i=1}^N q_i^2 + \sum_{i=0}^{N-1} (\alpha q_i + q_{i+1})^2 \right)$.

Одержано, що $(G_0 q, q) > h/(1+3\alpha+2\alpha^2) \left(\alpha^2 \sum_{i=0}^{N-1} q_i^2 + \alpha \sum_{i=1}^N q_i^2 \right) > 0$, отже, система функцій $\{\phi_i(\cdot, \alpha)\}_{i=0}^N$ лінійно незалежна в просторі $L^2(\Omega)$.

Зазначимо, що у границі компоненти матриці G_0 набувають таких значень:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} m_1 = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} 2\alpha^2/(1+3\alpha+2\alpha^2) = 1,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} m_2 = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} a/(1+3\alpha+2\alpha^2) = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} m_3 = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} 1/(1+2\alpha) = 0.$$

Вилучивши функцію φ_N , складемо матрицю \tilde{G}_0 за правилом $G_{0,ij} = (\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)}$, $i, j = \overline{0, N-1}$, тоді при $\alpha \rightarrow +\infty$ система функцій $\{\phi_i(\cdot, \alpha)\}_{i=0}^{N-1}$ є ортогональна в просторі $L^2(\Omega)$, тобто матриця \tilde{G}_0 набула вигляду:

$$\tilde{G}_0 = h \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведемо лінійну незалежність системи кусково-степеневих функцій $\{\phi_i(\cdot, \alpha)\}_{i=0}^N$ у просторі $H^m(\Omega)$. З цією метою уведемо білінійну форму $g_k(\cdot, \cdot) : H^k(\Omega) \times H^k(\Omega) \rightarrow R$ таку, що

$$g_k(u, v) = \int_0^1 \left(\frac{d^k u}{dx^k} \frac{d^k v}{dx^k} \right) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega), k \in N \cup \{0\}.$$

Нехай матриці $G_k = \{G_{k,ij}\}_{i,j=0}^N$ побудовані за правилом $G_{k,ij} = g_k(\phi_j, \phi_i)$, тоді матриця Грама елементів $\{\phi_i(\cdot, \alpha)\}_{i=0}^N$ набуває вигляду $G = \sum_{k=0}^m G_k$, а матриці G_k , $k = \overline{1, m}$ набули вигляду

$$G_k = \frac{1}{h^k} \frac{\prod_{l=1}^k (\alpha - l + 1)^2}{(2\alpha - 2k + 1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Безпосередніми обчисленнями переконуємось, що виконується $(G_k q, q) = \frac{1}{h^k} \left(\left(\prod_{l=1}^m (\alpha - l + 1)^2 \right) / ((2\alpha - 2k + 1)) \right) \sum_{i=0}^{N-1} (q_i - q_{i+1})^2$.

Якщо параметр апроксимації α задовольняє умову $\alpha > k - 1/2$, то правильна нерівність $(G_k q, q) = \frac{1}{h^k} \left(\left(\prod_{l=1}^m (\alpha - l + 1)^2 \right) / ((2\alpha - 2k + 1)) \right) \sum_{i=0}^{N-1} (q_i - q_{i+1})^2 \geq 0$.

Для матриці Грама елементів $\{\phi_i(\cdot, \alpha)\}_{i=0}^N$ отримаємо таку оцінку $(G q, q) = \sum_{k=0}^m (G_k q, q) \geq (G_0 q, q) \geq h / (1 + 3\alpha + 2\alpha^2) \left(\alpha^2 \sum_{i=0}^{N-1} q_i^2 + \alpha \sum_{i=1}^N q_i^2 \right)$, що доводить лінійну незалежність у просторі $H^m(\Omega)$. Лему доведено.

3.3. Оцінка похибки кусково-степеневої апроксимації

На інтервалі $K_{i+1/2}$ уведемо норму: $\|u\|_{i+1/2}^2 := \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u(x))^2 dx$. Крім того, вважатимемо, що на інтервалі $K_{i+1/2}$ параметр апроксимації набув деякого сталого значення $\alpha_{i+1/2} := \alpha$, яке не залежить від змінної x .

Теорема 3.1 (про похибку степеневої апроксимації на скінченному елементі). *Нехай $u(x) \in H^2(\Omega)$, $\{\varphi_i(\cdot, \alpha)\}_{i=0}^N \in H^1(\Omega)$ та $\alpha > 1/2$, тоді мають місце апріорні оцінки похибки на скінченному елементі:*

$$\|u - u_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2} \leq h_{i+1/2}^2 / 2 \|u''\|_{i+1/2} + |\alpha - 1| / \sqrt{2\alpha - 1} h_{i+1/2} \sqrt{2h_{i+1/2}} \|u'\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (3.4)$$

$$\|u' - u'_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2} \leq h_{i+1/2} / \sqrt{2} \|u''\|_{i+1/2} + |\alpha - 1| / \sqrt{2\alpha - 1} \sqrt{h_{i+1/2}} \|u'\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (3.5)$$

Доведення. Приймемо, що $h = h_{i+1/2}$ на скінченному елементі $K_{i+1/2}$.

Покажемо, що на скінченному елементі $K_{i+1/2}$

$$\|u - u_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2} \leq h / \sqrt{2} \|u' - u'_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2} \leq h^2 / 2 \|u'' - u''_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2}. \quad (3.6)$$

Функцію похибки степеневої апроксимації позначимо через $e_h(x, \alpha) := u(x) - u_I(x, \alpha)$. Похибка $e_h(x, \alpha)$ має такі властивості:

1. На вузлах скінченого елемента $K_{i+1/2}$ для довільних значень параметра апроксимації α виконується рівність $e_h(x_k, \alpha) = e_h(x_{k+1}, \alpha) = 0$.
2. За теоремою Ролля існує точка $z \in (x_i, x_{i+1})$ така, що $e'_h(z, \alpha) = 0$.
3. На скінченному елементі $K_{i+1/2}$: $e''_h(x) := u''(x) - u''_I(x, \alpha)$.

У випадках, коли значення параметра апроксимації не відіграє ролі, вважатимемо, що $e_h(x) := e_h(x, \alpha)$. Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, нерівність Коші та теорему Ролля, отримаємо нерівність

$$(e'_h(x))^2 = \left(\int_z^x e''(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_z^x dt \right) \left(\int_z^x (e''(t))^2 dt \right) = |x - z| \|e''\|_{i+1/2}^2, \quad \text{звідки } \|e'\|_{i+1/2}^2 = 1/2 h^2 \|e''\|_{i+1/2}^2.$$

Аналогічно отримаємо $\|e_h\|_{i+1/2}^2 \leq 1/2 h^2 \|e'_h\|_{i+1/2}^2$. Отже, знаходимо оцінку

$$\|e_h\|_{i+1/2} \leq h / \sqrt{2} \|e'_h\|_{i+1/2} \leq h^2 / 2 \|e''_h\|_{i+1/2}. \quad (3.7)$$

Нехай $u_I(x, 1)$ – лінійна інтерполяція, то $e''_h(x, 1) = u''(x)$ із (3.7) одержимо $\|u - u_I(\cdot, 1)\|_{i+1/2} \leq h / \sqrt{2} \|u' - u'_I(\cdot, 1)\|_{i+1/2} \leq h^2 / 2 \|u''\|_{i+1/2}$. Оцінимо $\|u' - u'_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2}$ у такий спосіб:

$$\begin{aligned} \|u' - u'_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2} &\leq \|u' - u'_I(\cdot, 1)\|_{i+1/2} + \|u'_I(\cdot, 1) - u'_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2} \leq \\ &\leq h / \sqrt{2} \|u''\|_{i+1/2} + \|u'_I(\cdot, 1) - u'_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Оскільки $\varphi'_i(x, \alpha) = -\varphi'_{i+1}(x, \alpha)$, врахувавши (3.2), отримаємо явний вираз похибки на скінченному елементі $u'_I(x, 1) - u'_I(x, \alpha) = \dot{u}_{i+1/2} (1 - \alpha \xi_i^{\alpha-1}(x))$. Норма похибки на скінченному елементі набуває вигляду $\|u'_I(\cdot, 1) - u'_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2} = |\alpha - 1| / \sqrt{2\alpha - 1} |\dot{u}_{i+1/2}| \sqrt{h_{i+1/2}} \leq |\alpha - 1| / \sqrt{2\alpha - 1} \sqrt{h_{i+1/2}} \|u'\|_{L^\infty(\Omega)}$. При $\alpha = 1$, степенева апроксимація відтворює лінійну інтерполяцію, тому природно, що при $\alpha = 1$ отримаємо $\|u'_I(\cdot, 1) - u'_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2} = 0$. Теорему доведено.

Теорема 3.2 (про покращену оцінку похибки кусково-степеневої апроксимації). *Нехай $u(x) \in H^2(\Omega)$, $\{\varphi_i(\cdot, \alpha)\}_{i=0}^N \in H^1(\Omega)$. Тоді при виборі параметра апроксимації $\alpha = 1 + h_{i+1/2} \|u''\|_{i+1/2}^2 / \|u'\|_{L^\infty(\Omega)}^2$ справдовжуються оцінки похибки кусково-степеневої апроксимації на скінченному елементі*

$$\|u - u_I\|_{i+1/2} \leq h_{i+1/2}^2 \|u''\|_{i+1/2} \quad (3.8)$$

та

$$\|u' - u'_I\|_{i+1/2} \leq \sqrt{2} h_{i+1/2} \|u''\|_{i+1/2}. \quad (3.9)$$

Доведення. При $\alpha \geq 1$ правильна оцінка $\frac{|\alpha - 1|}{\sqrt{2\alpha - 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\alpha - 1}$, звідки оцінку (3.5) запишемо у вигляді

$$\|u' - u'_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2} \leq 1/\sqrt{2} \left(h_{i+1/2} \|u''\|_{i+1/2} + \sqrt{h_{i+1/2}} \sqrt{\alpha - 1} \|u'\|_{L^\infty(\Omega)} \right).$$

Параметр апроксимації α виберемо так, щоб $\sqrt{\alpha - 1} \|u'\|_{L^\infty(\Omega)} = \sqrt{h_{i+1/2}} \|u''\|_{i+1/2}$.

Знайшовши значення параметра апроксимації у вигляді $\alpha = 1 + h_{i+1/2} \|u''\|_{i+1/2}^2 / \|u'\|_{L^\infty(\Omega)}^2$, приходимо до оцінок (3.8) та (3.9), що завершує доведення теореми.

Лема 3.3. *Iснує точка $\theta \in K_{i+1/2}$ така, що*

$$u'_I(\theta) = u'(\theta). \quad (3.10)$$

Крім того, за виборою параметра апроксимації

$$\alpha_{i+1/2} = u''(\theta) / u'(\theta) (\theta - x_i) + 1 \quad (3.11)$$

справдовжується

$$u''_I(\theta) = u''(\theta). \quad (3.12)$$

I навпаки, якщо виконується (3.12), то справдіжується (3.10) за умови вибору параметра апроксимації згідно з умовою (3.11).

Доведення. Оскільки $u_I(x_i) = u(x_i)$ та $u_I(x_{i+1}) = u(x_{i+1})$, то згідно з теоремою Ролля існує точка $\theta \in K_{i+1/2}$ така, що $u'_I(\theta) = u'(\theta)$. Вибрали параметр у вигляді (3.11), ми отримаємо $u''_I(\theta) = u''(\theta)$. Справді,

$$u''_I(\theta) = \frac{\alpha - 1}{\theta - x_i} u'_I(\theta) = \frac{u''(\theta)}{u'(\theta)} \frac{\theta - x_i}{\theta - x_i} u'(\theta) = u''(\theta).$$

З останнього запису легко бачити зворотне твердження леми.

З огляду на те, що величина похибки степеневої апроксимації на скінченному елементі $\|u'' - u''_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2}$ залежить від діаметра скінченного елемента $K_{i+1/2}$ та вибраної величини параметра $\alpha_{i+1/2} > 3/2$, нам вдасться знайти найкраще наближення до інтерпольованої функції на цьому скінченному елементі, якщо розв'яжемо задачу мінімізації для функціонала

$$J_{i+1/2}(\alpha) := \|u'' - u''_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2}^2 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u''(x) - u''_I(x, \alpha_{i+1/2}))^2 dx = (u''(\eta) - u''_I(\eta, \alpha_{i+1/2}))^2 h_{i+1/2},$$

де $\eta \in K_{i+1/2}$. У випадку, коли $\eta = \theta$ і значення параметра вибрано за (3.11), ми досягнемо $J_{i+1/2}(\alpha_{i+1/2}) = 0$.

Тепер зі знайденим оптимальним значенням параметра можна наблизено оцінити мінімальне значення розглядуваного функціонала,

$$\begin{aligned} J_{i+1/2}(\alpha) &:= \left\| u'' - \frac{\alpha - 1}{\theta - x_i} u'_I(\cdot, \alpha) \right\|_{i+1/2}^2 = \left\| u'' - \frac{u''(\theta)}{u'(\theta)} \frac{(\theta - x_i)}{(x - x_i)} u'_I(\cdot, \alpha) \right\|_{i+1/2}^2 = \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[u''(x) - \frac{u''(\theta)}{u'(\theta)} (\theta - x_i) \left(\frac{x - x_i}{h_{i+1/2}} \right)^{\alpha_i - 2} \right]^2 dx = C_{i+1/2}(u, \alpha) h_{i+1/2}, \end{aligned}$$

де $\alpha_{i+1/2} = \frac{u''(\theta)}{u'(\theta)} (\theta - x_i) + 1$, причому необхідно, щоб значення параметра

задовольняло умову

$$\alpha_{i+1/2} > 3/2. \quad (3.13)$$

Враховуючи оцінку (3.7), приходимо до уточнених значень апріорних оцінок похибок інтерполювання.

Теорема 3.3. (про оптимальну оцінку похибки степеневої апроксимації). *Нехай виконано умови теореми 3.1. Тоді для кожної триангуляції $T_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^N$ за вибору параметра (3.11) такого, що задовільняє умову (3.13), похибка степеневої апроксимації допускає такі апріорні оцінки:*

$$\begin{cases} \|u - u_I(\cdot, \alpha)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{i=0}^N h_{i+1/2}^5 C_{i+1/2}(u, \alpha), \\ \|u' - u'_I(\cdot, \alpha)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N h_{i+1/2}^3 C_{i+1/2}(u, \alpha). \end{cases} \quad (3.14)$$

Доведення. Згідно з оцінкою (3.8) отримуємо, що на скінченному елементі $K_{i+1/2}$ виконується

$$\|u - u_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2}^2 \leq \frac{1}{2} h_{i+1/2}^2 \|u' - u'_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2}^2 \leq \frac{1}{4} h_{i+1/2}^4 \|u'' - u''_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2}^2.$$

За умови вибору параметра згідно з (3.11) та (3.13) отримуємо, що

$$\|u'' - u''_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2}^2 = C_{i+1/2}(u, \alpha) h_{i+1/2}.$$

Тоді, врахувавши нерівність (3.6), отримаємо такі оцінки

$$\|u - u_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2}^2 \leq h_{i+1/2}^5 C_{i+1/2}(u, \alpha), \quad \|u' - u'_I(\cdot, \alpha)\|_{i+1/2}^2 \leq h_{i+1/2}^3 C_{i+1/2}(u, \alpha).$$

Виконавши підсумовування похибки інтерполювання на кожному скінченному елементі, отримаємо оцінку вигляду (3.14). Теорему доведено.

Введемо норму для неперервних функцій на скінченному елементі вигляду $\|u\|_{\infty, i+1/2} := \text{ess sup}_{x \in (x_i, x_{i+1})} |u(x)|$.

Теорема 3.4. (про оцінку похибки інтерполювання в просторі неперервних функцій). *Похибка степеневої апроксимації (3.3) в просторі неперервних функцій $C(\Omega)$ характеризується такою апріорною оцінкою*

$$\|u - u_I(\cdot, \alpha)\|_{\infty, i+1/2} \leq h_{i+1/2}^2 \|u''\|_{\infty, i+1/2} + h_{i+1/2} \alpha(\alpha-1) \|u'\|_{\infty, i+1/2}. \quad (3.15)$$

Доведення. Згідно з нерівністю трикутника отримаємо

$$\|u - u_I(\cdot, \alpha)\|_{\infty, i+1/2} \leq \|u - u_I(\cdot, 1)\|_{\infty, i+1/2} + \|u_I(\cdot, 1) - u_I(\cdot, \alpha)\|_{\infty, i+1/2}.$$

Похибка лінійної апроксимації характеризується величиною

$$\|u - u_I(\cdot, 1)\|_{\infty, i+1/2} \leq h_{i+1/2}^2 \|u''\|_{\infty, i+1/2}.$$

Аналогічно доведеній теоремі 3.1, отримаємо оцінку для похибки $e_h(x, \alpha) = u_I(x, 1) - u_I(x, \alpha)$: $\|e_h\|_{\infty, i+1/2} \leq h \|e'_h\|_{\infty, i+1/2} \leq h^2 \|e''_h\|_{\infty, i+1/2}$ і, використавши лему про структуру степеневих апроксимацій, одержимо, що $|e''_h(x, \alpha)| \leq (\alpha(\alpha-1))/h_{i+1/2} \|u'\|_\infty$. У підсумку приходимо до оцінки (3.15). Теорему доведено.

3.4. Степеневі апроксимації МСЕ для задачі адвекції – дифузії

Для пояснення пропонованої методики розв'язування сингулярно-збуреної краєвої задачі з використанням кусково-степеневої апроксимації та відображення обчислювальних аспектів розв'язування сингулярно збурених динамічних систем розглянемо стаціонарну модельну краєву задачу з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \text{знати функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ Au := -u'' + Peu' + \sigma u = f \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Тут число Пекле Pe характеризує відношення швидкості адвекційних процесів до дифузійних процесів: $Pe = \beta/\mu$, де $\beta > 0$ – коефіцієнт адвекційного перенесення, $\mu > 0$ – коефіцієнт дифузії, $\sigma > 0$ – коефіцієнт біохімічного розпаду субстанції.

Оператор A задачі (3.16) є несиметричний, тому побудова її числового розв'язку є обчислювально складною [60, 61]. Щоб мати уявлення про особливість розв'язку задачі (3.16), для часткового випадку $f \in R$, $\sigma = 0$, інтегруванням рівняння задачі (3.16) наводимо її точний розв'язок [69]

$$u(x) = \left(x - \frac{e^{Pe x} - 1}{e^{Pe} - 1} \right) \frac{f}{Pe}.$$

Зазначимо, що для великих значень числа Пекле похідні такого розв'язку в околі точки $x = 1$ можуть набувати дуже великих значень [69]:

$$u'(x) = \left(1 - Pe \frac{e^{Pe x}}{e^{Pe} - 1} \right) \frac{f}{Pe} \approx O(1), \quad u''(x) = -Pe \frac{e^{Pe x}}{e^{Pe} - 1} f \approx O(Pe).$$

Саме цим відображається той факт, що в околі точки $x=1$ експоненціальна складова породжує так званий примежовий шар [60, 61, 64, 106]. Якщо $Pe \rightarrow \infty$, то задача (3.1) є сингулярно-збурена і породжує нестійкість стандартних схем МСЕ та робить непридатними до застосування класичні схеми методу скінченних елементів або методу скінченних різниць [64].

Варіаційне формулювання задачі (3.16) набуло вигляду

$$\begin{cases} \text{задано простір } V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\}, \\ \text{ знайти } u \in V \text{ такий, що } a(u, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in V, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\text{де } a(u, v) := \int_0^1 (u'v' + Peu'v + \sigma uv) dx, \quad \langle l, v \rangle = \int_0^1 fv dx, \forall u, v \in V.$$

Зазначимо, що задача (3.17) коректно сформульована [60]. Введемо норму простору V :

$$\|u\|_V^2 := \int_0^1 (u')^2 dx. \quad (3.18)$$

Використаємо кусково-степеневу апроксимацію (3.3) з підрозділу 3.1. Врахувавши головні крайові умови $u_0 = u_N = 0$, отримаємо кусково-визначену степеневу апроксимацію

$$u_h(x, \alpha) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x, \alpha_{i+1/2}), \quad \forall x \in [0, 1], \quad (3.19)$$

де кусково-степеневі базисні функції мають вигляд

$$\text{supp} \phi_i = \overline{K}_{i-1/2} \cup \overline{K}_{i+1/2}, \quad \phi_i(x) = \begin{cases} (\omega_i(x))^{\alpha_{i-1/2}}, & x \in \overline{K}_{i-1/2}, \\ 1 - (\omega_{i+1}(x))^{\alpha_{i+1/2}}, & x \in \overline{K}_{i+1/2}. \end{cases} \quad i = \overline{1, N}$$

Вважаємо, що саме ця система кусково-визначених функцій формує базис у скінченно-вимірному просторі $V_h \subset V$, причому $\dim V_h = N$. Дискретне формулювання задачі (3.17) набуде вигляду

$$\begin{cases} \text{задано триангуляцію } T_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^N \text{ та пов'язаний з нею} \\ \text{простір кусково-степеневих апроксимацій } V_h \subset V, \\ \text{ знайти елемент } u_h \in V_h \text{ такий, що} \\ a(u_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (3.20)$$

Вибравши у рівнянні (3.20) почергово $v = \varphi_i$, $\varphi_i \in V_h$, $i = \overline{1, N}$, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), де матриця A визначена за правилом $A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $i, j = \overline{1, N}$, а права частина набула вигляду $F_i = \langle l, \varphi_i \rangle$, $i = \overline{1, N}$. У наступному підрозділі розглянуто аспекти обчислень на скінченному елементі.

3.5. Обчислення на скінченному елементі

Для проведення обчислень на скінченних елементах нам будуть потрібні складові варіаційного рівняння вигляду:

$$\begin{cases} c_{\frac{i+1}{2}}(u, v) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + Pe \frac{du}{dx} v \right) dx, \\ \langle l_{\frac{i+1}{2}}, v \rangle = \int_{x_i}^{x_{i+1}} fv dx. \end{cases} \quad (3.21)$$

Вибираючи послідовно в кожному з доданків (3.21) за допустимі функції $\{v_m\}_{m=1}^2 = \{1 - \xi^\alpha, \xi^\alpha\}$ і приймаючи за u апроксимацію (3.19), після нескладних обчислень інтегралів від добутків поліноміальних функцій одержуємо, що

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h v'_m dx \right\}_{m=1}^2 &= \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} \frac{1}{h_{\frac{i+1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}, \\ \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h v_m dx \right\}_{m=1}^2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}, \\ \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_m dx \right\}_{m=1}^2 &= h_{\frac{i+1}{2}} \frac{1}{\alpha + 1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Складові (3.21) набули вигляду

$$\left\{ c_{\frac{i+1}{2}}(u_h, v_m) \right\}_{m=1}^2 = \left[\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} \frac{1}{h_{\frac{i+1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{Pe}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\left\{ l_{\frac{i+1}{2}}(u_h, v_m) \right\}_{m=1}^2 = \left[h_{\frac{i+1}{2}} \frac{1}{\alpha + 1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

У варіаційному рівнянні (3.17) приймемо $v = u \in V$, тоді співвідношення

$$\|u\|_V^2 = \langle l, u \rangle$$

виражає закон збереження маси чи теплової енергії. Величина $\|u\|_V^2$ характеризує масу речовини, що бере участь у процесах дифузії, а $\langle l, u \rangle$ – кількість речовини, що накопичилася у результаті діяльності внутрішніх джерел забруднення.

З огляду на важливість застосування енергетичної норми $\|u\|_V^2$ та лінійного функціонала $\langle l, u \rangle$ наводимо правило їхнього обчислення на скінченному елементі $K_{i+\frac{1}{2}}$:

$$\|u\|_{i+\frac{1}{2}, V, \alpha}^2 \equiv c_{i+\frac{1}{2}}(u, u) = \left\{ \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} h \dot{u}^2 + Pe \cdot u \dot{u} \right\}_{i+\frac{1}{2}}, \quad (3.24)$$

$$\langle l_{i+\frac{1}{2}}, u \rangle_\alpha = \frac{f_{i+\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2}}}{\alpha+1} (u_i \alpha + u_{i+1}), \quad (3.25)$$

$$\|u\|_{i+\frac{1}{2}, V}^2 \equiv c_{i+\frac{1}{2}}(u, u) = \{h \dot{u}^2 + Pe \cdot u \dot{u}\}_{i+\frac{1}{2}}, \quad \langle l_{i+\frac{1}{2}}, u \rangle = \{fhu\}_{i+\frac{1}{2}},$$

де $Pe_{i+\frac{1}{2}} := Pe h_{i+\frac{1}{2}}$ – сітковий критерій Пекле [69].

Зазначимо, що індекс α вказує на те, що значення енергетичної норми степеневої апроксимації та лінійного функціоналу обчислюємо за правилами (3.24) та (3.25), тобто значення параметра α враховуємо при обчисленні енергетичної характеристики.

Доведення. Формули (3.24) та (3.25) виводимо безпосередніми обчисленнями шляхом підстановки (3.19) у (3.18).

Справді, для $\|u\|_{i+\frac{1}{2}, V, \alpha}^2$ маємо:

$$\begin{aligned} \|u\|_{i+\frac{1}{2}, V, \alpha}^2 &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((u')^2 + Pe u u') dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u')^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (Pe u u') dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u')^2 dx + \frac{Pe}{2} (u^2(x_{i+1}) - u^2(x_i)) = \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u')^2 dx + Pe h_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} \dot{u}_{i+\frac{1}{2}} = h_{i+\frac{1}{2}} (u_i^2 - 2u_i u_{i+1} + u_{i+1}^2) \int_0^1 \xi^{2\alpha-2} d\xi + Pe h_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} \dot{u}_{i+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} (u_i^2 - 2u_i u_{i+1} + u_{i+1}^2) + Pe h_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} \dot{u}_{i+\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} h \dot{u}^2 + Pe u \dot{u} \right\}_{i+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

При обчисленні інтегралу $\int_0^1 \xi^{2\alpha-2} d\xi$ приходимо до вимоги на значення параметра стабілізації: $\alpha \geq 1/2$.

Для лінійного функціоналу $\langle l_{i+\frac{1}{2}}, u \rangle_\alpha$ отримаємо:

$$\langle l_{i+\frac{1}{2}}, u \rangle_\alpha = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u_i \varphi_i + u_{i+1} \varphi_{i+1}) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f u_i \varphi_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f u_{i+1} \varphi_{i+1} dx = \frac{\{hf\}_{i+\frac{1}{2}}}{\alpha+1} (u_i \alpha + u_{i+1}).$$

3.6. Система рівнянь МСЕ. Стійкість та збіжність схеми

Для коректно сформульованої варіаційної задачі (3.17) на тріангуляції

$T_h = \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}_{i=0}^N$ та простору апроксимацій V_h , базис $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ якого становить

кусково-визначені неперервні степеневі функції, вважатимемо, що поділ

$T_h = \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}_{i=0}^N$ рівномірний, тобто $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$, $i = \overline{0, N}$ та функція f

задачі (3.16) є сталою на відрізку $[0, 1]$. Тоді система лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для знаходження коефіцієнтів апроксимації в (3.19) із врахуванням (3.22) та (3.23) має вигляд:

$$-\left(\frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)} + \frac{Pe}{2} \right) u_{i-1} + \left(\frac{2\alpha^2}{h(2\alpha-1)} \right) u_i + \left(\frac{Pe}{2} - \frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)} \right) u_{i+1} = hf, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.26)$$

або в іншій формі запису:

$$-\left(\frac{\alpha^2}{2\alpha-1} \right) \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right) + Pe \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) = f, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.27)$$

Форма запису системи лінійних алгебричних рівнянь (3.27) методу скінченних елементів наочно відображає його відмінність від методу скінченних різниць, який безпосередньо замінює похідні вихідного диференціального рівняння крайової задачі (3.16) відповідними різницевими співвідношеннями з точністю до порядку $O(h^2)$.

Щоб ефективно застосувати степеневі базисні функції до розв'язування крайової задачі (3.16), необхідно визначити оптимальне значення параметра стабілізації α . З цією метою систему лінійних алгебричних рівнянь МСЕ

(3.26) запишемо у явному вигляді відносно вузлового значення u_i апроксимації (3.19):

$$\left(\frac{2\alpha^2}{h(2\alpha-1)} \right) u_i = \left(\frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)} + \frac{Pe}{2} \right) u_{i-1} + \left(\frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)} - \frac{Pe}{2} \right) u_{i+1} + hf. \quad (3.28)$$

Для коректності схеми (3.28) достатньо вимагати, щоб коефіцієнти при u_{i-1}, u_{i+1} були невід'ємними і принаймні один коефіцієнт був строго додатній [62, 106], тобто

$$\begin{cases} \frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)} + \frac{Pe}{2} \geq 0, \\ \frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)} - \frac{Pe}{2} \geq 0, \end{cases}$$

або

$$\frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)} - \frac{|Pe|}{2} \geq 0. \quad (3.29)$$

Розв'язком нерівності (3.29) є множина значень параметра стабілізації

$$\alpha \geq \frac{Pe h}{2} + \sqrt{\frac{Pe h}{2} \left(\frac{Pe h}{2} - 1 \right)}.$$

Вивчимо питання про оптимальне значення параметра стабілізації. Введемо функцію

$$\mu(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2\alpha-1}, \quad (3.30)$$

тоді систему лінійних алгебричних рівнянь (3.27) подамо у вигляді

$$-\mu(\alpha) \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right) + Pe \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) = f, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.31)$$

Теорема 3.5. (про порядок апроксимації рівняння адвекції – дифузії схеми з штучно підвищеним коефіцієнтом дифузії). *Нехай $\mu(\alpha)$ – штучно підвищений коефіцієнт дифузії, а схема відшукання розв'язку задачі (3.17) має вигляд (3.31). Тоді схема (3.31) апроксимує диференціальне рівняння вигляду*

$$-\mu(\alpha)u'' + Peu' = f \quad \forall x \in \Omega := (0, 1) \quad (3.32)$$

з похибкою апроксимації $O(h^2)$.

Доведення. Розкладемо в ряд Тейлора u_{i+1}, u_{i-1} :

$$u_{i+1} = u(x_{i+1}) = u(x_i) + u'(x_i)h + u''(x_i)\frac{h^2}{2!} + u'''(x_i)\frac{h^3}{3!} + u^{IV}(x_i)\frac{h^4}{4!},$$

$$u_{i-1} = u(x_{i-1}) = u(x_i) - u'(x_i)h + u''(x_i)\frac{h^2}{2!} - u'''(x_i)\frac{h^3}{3!} + u^{IV}(x_i)\frac{h^4}{4!}.$$

Тоді $u'(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2)$ та $u''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$. Врахувавши (3.32),

схему (3.31) подамо у вигляді

$$-\mu(\alpha)u''(x_i) + Peu'(x_i) + O(h^2) = f(x_i) \quad \forall x_k \in \Omega := (0, 1). \quad (3.33)$$

Оскільки x_i – довільне, то (3.33) можна переписати у вигляді

$$-\mu(\alpha)u'' + Peu' + O(h^2) = f \quad \forall x \in \Omega := (0, 1)$$

Отже, схема (3.31) апроксимує рівняння (3.32) з другим порядком апроксимації, що завершує доведення теореми.

Зауважимо, що при використанні експоненціальних базисних функцій МСЕ отримана СЛАР апроксимує не вихідне рівняння, а модифіковане рівняння (див. [64], с. 164).

Провівши дослідження властивостей функції (3.30), знаходимо, що в точках $\alpha_1 = 0$ та $\alpha_2 = 1$ маємо точки локального максимуму та локального мінімуму відповідно. На проміжках $(-\infty, 0)$ та $(1, \infty)$ функція $\mu(\alpha)$ зростає, а на проміжку $(0, 1)$ функція $\mu(\alpha)$ спадає. При значенні параметра $\alpha = 1$ значення функції $\mu(\alpha)$ дорівнює одиниці, а це означає, що за такого значення параметра стабілізації СЛАР (3.40) апроксимує вихідну крайову задачу (3.16).

При збільшенні значення параметра α збільшується похибка стосовно точного розв'язку та зростає за модулем коефіцієнт при найстаршій похідній. Отже, значення параметра стабілізації слід обрати мінімальним з множини значень параметра, які гарантують коректність схеми (3.27). Таким чином оптимальним значенням параметра стабілізації при заданій тріангуляції та даних крайової задачі (3.17), врахувавши обмеження $\alpha \geq 1, \epsilon$

$$\alpha_h = \max \left\{ 1, \left(\frac{Pe h}{2} + \sqrt{\frac{Pe h}{2} \left(\frac{Pe h}{2} - 1 \right)} \right) \right\}.$$

Для нерівномірних сіток значення параметра стабілізації на кожному скінченному елементі, врахувавши позначення сіткового критерію Пекле, набуває вигляду:

$$\alpha_h = \max \left\{ 1, \left\{ \frac{Pe}{2} + \sqrt{\frac{Pe}{2} \left(\frac{Pe}{2} - 1 \right)} \right\}_{i+\frac{1}{2}} \right\}.$$

Таким чином, степеневі базисні функції враховують не тільки особливості застосованої тріангуляції, а й дані задачі.

Теорема 3.6. (про безумовну стійкість схеми з штучно підвищеним коефіцієнтом дифузії для рівняння адвекції – дифузії). *Нехай $\mu(\alpha)$ – штучно підвищений коефіцієнт дифузії та α – параметр стабілізації. Тоді для безумовної стійкості схеми (3.31) необхідно, щоб значення штучно підвищеного коефіцієнта дифузії задовольняло умову $\mu(\alpha) \geq \frac{Pe h}{2}$. При значенні коефіцієнта дифузії $\mu(\alpha) = \frac{Pe h}{2}$ схема вносить мінімальну надлишкову дифузію.*

Доведення. Запишемо схему (3.31) відносно вузлового значення u_i :

$$\frac{2\mu(\alpha)}{h^2} u_i = \left(\frac{\mu(\alpha)}{h^2} + \frac{Pe}{2h} \right) u_{i-1} + \left(\frac{\mu(\alpha)}{h^2} - \frac{Pe}{2h} \right) u_{i+1} + f_i. \quad (3.34)$$

Якщо коефіцієнти при вузлових значеннях u_{i-1}, u_{i+1} є невід'ємні, то схема буде монотонною, а отже, коректною. З того, що $Pe > 0, h > 0$ коефіцієнт при u_{i-1} є завжди додатний. Для того, щоб коефіцієнт при u_{i+1} був невід'ємний необхідно, щоб $\mu(\alpha) \geq \frac{Pe h}{2}$. У випадку $\mu(\alpha) = \frac{Pe h}{2}$ коефіцієнт штучно підвищеної дифузії набуває мінімального значення, що забезпечує коректність схеми.

Покажемо безумовну стійкість схеми (3.31) з використанням М – критерію [106]. Позначимо через $AU = F$ систему рівнянь (3.31). Матриця A

ϵM – матрицею, оскільки діагональні елементи строго додатні, а позадіагональні елементи від'ємні або дорівнюють нулю. Нехай $Lu := -\mu(\alpha)u'' + Peu'$ диференціальний оператор задачі, а $L_h u_h$ – його дискретний аналог. Виберемо деяку функцію $e(x) = 1 + x > 0 \forall x \in \Omega$, причому $Le(x) = Pe > 0$. Для функції $e(x)$ введемо її дискретний аналог, а саме вектор $e_h = \{1 + x_i\}_{i=0}^N > 0$. Виконавши арифметичні операції, переконуємося у тому, що $L_h e_h = Pe > 0, \forall x_i \in \Omega$. Тоді, згідно М-критерію наближений розв'язок (3.31) можна оцінити у такий спосіб

$$\|U\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty \|F\|_\infty \leq \frac{\|e_h\|_\infty \|f\|_\infty}{\min_k (Ae_h)_k} = \frac{2\|f\|_\infty}{Pe},$$

звідки випливає безумовна стійкість схеми (3.31)

Теорема 3.7 (про безумовну стійкість схеми з використанням степеневих базисних функцій для рівняння адвекції дифузії). *Схема (3.31) побудована з використанням степеневих базисних функцій МСЕ є безумовно стійкою, якщо значення параметра стабілізації $\alpha_h \geq \frac{Peh}{2} + \sqrt{\frac{Peh}{2} \left(\frac{Peh}{2} - 1 \right)}$.* За

вибору параметра стабілізації $\alpha_h = \frac{Peh}{2} + \sqrt{\frac{Peh}{2} \left(\frac{Peh}{2} - 1 \right)}$ схема вносить мінімальну надлишкову дифузію, що забезпечує коректність схеми.

Доведення. У теоремі 3.7. доведено, що схема (3.31) є безумовно стійкою, якщо значення штучно підвищеного коефіцієнта дифузії задовольняє умову $\mu(\alpha) \geq \frac{Peh}{2}$. У роботі показано, що коефіцієнт штучно підвищеної дифузії залежить від параметра стабілізації у спосіб $\mu(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}$.

Розв'язавши квадратну нерівність $\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} \geq \frac{Peh}{2}$ з врахуванням $\alpha \geq 1$, отримуємо область допустимих значень параметра стабілізації $\alpha_h \geq \frac{Peh}{2} + \sqrt{\frac{Peh}{2} \left(\frac{Peh}{2} - 1 \right)}$.

При $\alpha_h = \frac{Pe h}{2} + \sqrt{\frac{Pe h}{2} \left(\frac{Pe h}{2} - 1 \right)}$, що є розв'язком рівняння $\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} = \frac{Pe h}{2}$ схема мінімально підвищує коефіцієнт дифузії для забезпечення безумовної стійкості схеми (3.31). Зазначимо, що при $h = \frac{2}{Pe}$ схема (3.31) апроксимує вихідне рівняння, тобто коефіцієнт дифузії дорівнює одиниці.

Теорема 3.8. (про збіжність схеми МСЕ з степеневими базисними функціями). *Схема МСЕ (3.31) для розв'язування задачі (3.16) за умови виконання теорем 3.5 та 3.7. є збіжною.*

Доведення. Згідно з теоремою Лакса: з огляду на апроксимаційні властивості схеми та її стійкість, то схема (3.31) є збіжною, причому порядок збіжності співпадає з порядком апроксимації.

3.7. Кусково-степеневі апроксимації МСЕ та їхня похибка для задачі адвекції-дифузії-реакції.

Для дослідження обчислювальних аспектів, які виникають при розв'язуванні нестационарних сингулярнозбурених задач, розглянемо модельну крайову задачу для рівняння адвекції-дифузії-реакції зі змінними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \text{знати функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -(\mu u')' + \beta u' + \sigma u = f, \text{ в } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3.35)$$

де функції $\mu = \mu(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ можуть мати розриви першого роду, причому функція $\mu(x)$ задовольняє умову $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$. Варіаційне формулювання задачі (3.35) має вигляд:

$$\begin{cases} \text{задано простір } V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\}, \\ \text{знати елемент } u \in V \text{ такий, що} \\ a(u, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in V, \end{cases} \quad (3.36)$$

де структурні елементи задачі (3.36) набули вигляду

$$a(u, v) = \int_0^1 (\mu u' v' + \beta u' v + \sigma u v) dx, \quad \langle l, v \rangle = \int_0^1 f v dx.$$

Вважаємо, що дані задачі (2) задовольняють умови коректності. Використовуючи теорему про середнє [69], допоміжні обчислення на скінченному елементі та властивості кусково-степеневих функцій у просторі $L^2(\Omega)$, отримаємо наближення на скінченному елементі $K_{i+1/2}$

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mu u' v' + \beta u' v + \sigma u v dx \approx \\ &\approx \mu(x_{k+1/2}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} u' v' dx + \beta(x_{k+1/2}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} u' v dx + \sigma(x_{k+1/2}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} u v dx, \\ &\langle l, v \rangle = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f v dx \approx f(x_{i+1/2}) \int_{x_k}^{x_{k+1}} v dx. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Теорема 3.9. (про структуру системи рівнянь МСЕ з кусково-степеневим базисом). Для розв'язування коректно-сформульованої варіаційної задачі (3.36) на поділі $T_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^N$ введемо простір апроксимацій V_h , де базисні елементи $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ цього простору є кусково-неперервні степеневі функції. Нехай обчислення білінійної форми та лінійного функціоналу здійснено згідно з (3.37). Тоді система лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для знаходження коефіцієнтів апроксимації (3.19) матиме вигляд

$$\begin{aligned} &\left\{ -\frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i-1/2} u_{i-1} + \\ &+ \left(\left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \frac{2\alpha^2}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i-1/2} + \left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \frac{1}{1+2\alpha} \right\}_{i+1/2} \right) u_i + \\ &+ \left\{ -\frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i+1/2} u_{i+1} = \left\{ hf \frac{1}{\alpha+1} \right\}_{i-1/2} + \left\{ hf \frac{\alpha}{\alpha+1} \right\}_{i+1/2}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\partial e \ u_0 = u_N = 0, \ i = \overline{1, N-1}.$$

Доведення. Справедливість теореми випливає з використання допоміжних обчислень на скінченному елементі (3.37), та властивостей кусково-степеневих базисних функцій.

Теорема 3.10. (про структуру системи рівнянь МСЕ з кусково-степеневим базисом на рівномірній сітці з сталими коефіцієнтами). Нехай виконані умови теореми 3.9., при цьому додатково кожен скінченний

елемент є однакового діаметру, тобто $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$, $i = \overline{0, N}$ має функції μ, β, σ, f сталі на відрізку.

Тоді система лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для знаходження коефіцієнтів апроксимації (3.19) має вигляд:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right) u_{i-1} + \\ & + \left(\frac{2\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \left(\frac{2\alpha^2}{1+3\alpha+2\alpha^2} + \frac{1}{1+2\alpha} \right) \right) u_i + \\ & + \left(-\frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} - \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right) u_{i+1} = hf, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\partial e u_0 = u_N = 0, i = \overline{1, N-1}.$$

Зазначимо, що (3.39) можна подати у вигляді

$$\left(-\mu \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{\sigma h^2}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right) \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right) + \beta \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) + \sigma u_i = f_i \quad (3.40)$$

Форма запису (3.40) системи лінійних алгебричних рівнянь (3.39) методу скінченних елементів відображає його відмінність від методу скінченних різниць, який безпосередньо замінює похідні вихідного диференціального рівняння крайової задачі (2.1) відповідними різницевими співвідношеннями з точністю до порядку $O(h^2)$.

У залежності від значення параметра α можна отримувати обчислювальні схеми з різними властивостями. Можна показати, що для задачі адвекції-дифузії зі сталими коефіцієнтами за вибірку значення параметра

$$\alpha_h = \frac{Peh}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{Peh}{2} \right) + \sqrt{\frac{Peh}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{Peh}{2} \right) \left(\frac{Peh}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{Peh}{2} \right) - 1 \right)},$$

обчислювальна схема дозволяє обчислити точні значення у вузлах сітки, оскільки вона співпадає зі схемою Ільїна-Аллена-Саусвела.

Нижче розглянуто знаходження параметра стабілізації з умови коректності схеми [62]. Параметр стабілізації визначаємо з умови М-

критерію. Оптимальне значення параметру стабілізації для часткового випадку $\sigma(x) = 0, \mu(x) = 1, \beta(x) = Pe > 0$ має вигляд:

$$\alpha_h = \max \left\{ 1, \frac{hPe}{2} + \sqrt{\frac{hPe}{2} \left(\frac{hPe}{2} - 1 \right)} \right\},$$

і матриця схеми МСЕ з так вибраним параметром стабілізації є М-матрицею.

Для часткового випадку (задача дифузії-реакції) визначено параметр стабілізації, який при сталих значеннях коефіцієнтів має вигляд:

$$\alpha_h = -\frac{1}{2} + \frac{1+4h^2S}{2^{2/3}\lambda^{2/3}} + \frac{\lambda^{2/3}}{62^{2/3}},$$

де h – діаметр скінченного елемента, а число λ має такий вигляд

$$\lambda = -216h^2S + \sqrt{46656h^4S^2 - 108(1+4h^2S)^3},$$

де число $S = \mu^{-1}\sigma$. Зазначимо, що таке задання параметру стабілізації є громіздке, тому подамо його оптимальне значення з точки зору обчислювальних затрат на визначення параметра стабілізації.

Теорема 3.11. (про оптимальне значення параметра стабілізації для задачі адвекції-дифузії-реакції з кусково-степеневим базисом). *Нехай розв'язують коректно-сформульовану варіаційну задачу (3.36). На поділі $T_h = \{K_{i+1/2}\}_{i=0}^N$ введемо простір апроксимацій V_h , де базисні елементи $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ цього простору є кусково-неперервні степеневі функції. Припускаємо, що обчислення білінійної форми та лінійного функціоналу здійснено згідно з (3.37). Тоді за умови вибору значення параметра стабілізації*

$$a_{h,i+1/2} = \left\{ \frac{h|\beta|}{|\mu|} + \frac{h^2\sigma^2}{|\mu|} + \sqrt{\left(\frac{h|\beta|}{|\mu|} + \frac{h^2\sigma^2}{|\mu|} \right) \left(\frac{h|\beta|}{|\mu|} + \frac{h^2\sigma^2}{|\mu|} - 1 \right)} \right\}_{i+1/2} \quad (3.41)$$

на кожному скінченному елементі отримаємо монотонну схему, при якій розв'язок стійкий.

Доведення. Щоб розв'язок був стійкий, то матриця для визначення коефіцієнтів повинна бути М-матрицею. Тобто, усі діагональні елементи мають бути строго більші за нуль, а позадіагональні елементи – менші або

дорівнюють нулю. Ця умова забезпечує монотонність схеми. Система (3.38) стосовно вузла u_i має вигляд

$$\begin{aligned} & \left(\left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \frac{2\alpha^2}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i-1/2} + \left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \frac{1}{1+2\alpha} \right\}_{i+1/2} \right) u_i = \\ & \left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} - \frac{\beta}{2} - \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i-1/2} u_{i-1} + \left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{\beta}{2} - \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i+1/2} u_{i+1} + \\ & + \left\{ h f \frac{1}{\alpha+1} \right\}_{i-1/2} + \left\{ h f \frac{\alpha}{\alpha+1} \right\}_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Припустимо, що $\beta(x) > 0, \sigma(x) > 0, \forall x \in K_{i+1/2}$, тоді

$$\left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \frac{2\alpha^2}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i-1/2} + \left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \sigma h \frac{1}{1+2\alpha} \right\}_{i+1/2} > 0.$$

Нас цікавитимуть знаки виразів при u_{i-1} та при u_{i+1} . Нехай $\frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} - \frac{\beta}{2} - \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} = 0$, тоді $\frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{\beta}{2} - \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} > 0$. Як наслідок отримуємо нерівність для визначення параметра стабілізації:

$$\left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} - \frac{\beta}{2} - \frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \right\}_{i+1/2} \geq 0. \quad (3.42)$$

Розв'язок нерівності (3.42) задається громіздким виразом, тому для спрощення нерівності, посилимо її вимоги. Оскільки $\alpha \geq 1$, то справедлива оцінка $\frac{\sigma h \alpha}{1+3\alpha+2\alpha^2} \leq \frac{\sigma h}{6}$. Тоді розв'язком нерівності $\left\{ \frac{\mu}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} - \frac{\beta}{2} - \frac{\sigma h}{6} \right\}_{i+1/2} \geq 0$ є множина значень

$$a_{h,i+1/2} \geq \left\{ \frac{h\beta}{\mu} + \frac{h^2 \sigma^2}{\mu} + \sqrt{\left(\frac{h\beta}{\mu} + \frac{h^2 \sigma^2}{\mu} \right) \left(\frac{h\beta}{\mu} + \frac{h^2 \sigma^2}{\mu} - 1 \right)} \right\}_{i+1/2}.$$

За припущенням коефіцієнти задачі були більші або рівні нулю, тому для загального випадку замінимо значення цих коефіцієнтів їхніми модулями. Зазначимо, що мінімальна похибка досягається тоді, коли значення параметру стабілізації є найменшим з множини значень параметрів, при яких забезпечується коректність схеми, тому значення параметру стабілізації вибрано у вигляді (3.41).

3.8. Оцінка похибки кусково-степеневої апроксимації МСЕ

Розглянемо задачу (3.35) та (3.36) при $\mu(x) = 1$, $\beta(x) = Pe$. Скористаємося кусково-степеневими функціями для відшукання її наближених розв'язків. Похибка апроксимації розв'язку згідно з лемою Сеа характеризується такою апріорною оцінкою

$$\|u - u_h\|_V \leq (1 + Pe/\sqrt{2} + \sigma/2) \|u - u_I\|_V.$$

Нехай значення параметра апроксимації вибрано згідно з умовою

$$\alpha = 1 + h_{i+1/2} \|u''\|_{i+1/2}^2 / \|u'\|_{L^\infty(\Omega)}^2,$$

тоді на підставі теореми 3.2 отримаємо оцінку похибки кусково-степеневої апроксимації розв'язку

$$\|u - u_h\|_V \leq (1 + Pe/\sqrt{2} + \sigma/2) \|u'\|_V,$$

що забезпечує монотонну збіжність апроксимації.

Зазначимо, що параметр апроксимації вибрано на підставі інформації про характер розв'язку. Проте, не завжди вдається провести апріорний аналіз характеру розв'язку, тому доцільно вибрати параметр стабілізації з умови коректності обчислювальної схеми.

Використавши кусково-степеневі базисні функції МСЕ для задачі (3.35), приходимо до розгляду регуляризованої варіаційної задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано коефіцієнт штучної дифузії } \rho = \alpha^2 / (2\alpha - 1) \geq 1, \\ \text{білінійну форму } s(u_\alpha, v) : V \times V \rightarrow R : \\ s(u_\alpha, v) = \int_0^1 (\rho u'_\alpha v' + Pe u'_\alpha v + \sigma u v) dx, \\ \text{лінійний функціонал } \langle l, v \rangle : V \rightarrow R : \langle l, v \rangle = \int_0^1 f v dx, \\ \text{ знайти } u_\alpha \in V \text{ такий, що } s(u_\alpha, v) = \langle l, v \rangle, \forall v \in V, \end{array} \right. \quad (3.43)$$

яку розв'яжемо з використанням базисних функцій Куранта.

Вивчимо властивості білінійної форми $s(u_\alpha, v)$ з (3.43). Оцінимо похибку степеневої апроксимації розв'язку задачі (3.17). З нерівності трикутника отримаємо, що $\|u - u_{\alpha,h}\|_V \leq \|u - u_\alpha\|_V + \|u_\alpha - u_{\alpha,h}\|_V$, де $\|u - u_\alpha\|_V$ – норма

різниці точних розв'язків вихідної задачі (3.16) та збуреної задачі (3.15), а $\|u_\alpha - u_{\alpha,h}\|_V$ – норма похибки апроксимації збуреної задачі. Оскільки коефіцієнти задач (3.16) та (3.15) постійні, то норма різниці точних розв'язків набула вигляду

$$\|u - u_\alpha\|_V = \frac{f^2(\rho-1)(1-\rho-e^{Pe}(1+\rho)+e^{Pe/\rho}(1-e^{Pe}(1+\rho)\rho))}{2(e^{Pe}-1)(e^{Pe/\rho})Pe\rho(1+\rho)},$$

а при $\alpha=1$ отримуємо очікуване співвідношення $\|u - u_1\|_V = 0$. Тепер треба отримати оцінку похибки апроксимації збуреної задачі.

Лема 3.4. (про властивості стабілізованої білінійної форми). *Білінійна форма $s(u, v)$ неперервна та коерцитивна, причому*

1. $|s(u, v)| \leq \gamma \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \text{де } \gamma = \rho + Pe/\sqrt{2} + \sigma/2.$
2. $s(v, v) \geq \beta \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V, \text{де } \beta = \rho.$

Доведення. Доведемо неперервність. За нерівністю Гольдера отримаємо $\int_0^1 |u'v'| dx \leq \|u\|_V \|v\|_V$, $\int_0^1 |u'v| dx \leq \sqrt{\int_0^1 (u')^2 dx} \sqrt{\int_0^1 v^2 dx} = \|u\|_V \|v\|_{L_2}$. За нерівністю

Фрідріхса $\|v\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{2} \|v\|_V^2$ одержимо $\int_0^1 |u'v| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_V \|v\|_V$ та $\int_0^1 |uv| dx \leq \frac{1}{2} \|u\|_V \|v\|_V$.

Оцінимо $|s(u, v)|$: $|s(u, v)| \leq \int_0^1 |\rho u'v' + Peu'v + \sigma uv| dx \leq \left(\rho + \frac{Pe}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma}{2} \right) \|u\|_V \|v\|_V$.

Отже, $|s(u, v)| \leq \left(\rho + \frac{Pe}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma}{2} \right) \|u\|_V \|v\|_V$, тобто $\gamma = \rho + \frac{Pe}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma}{2}$.

Доведемо коерцитивність. Врахувавши, що

$$\int_0^1 Pe v' v dx = Pe \int_0^1 v dv = \frac{Pe}{2} v^2 \Big|_0^1 = 0,$$

отримаємо $s(v, v) = \rho \int_0^1 ((v')^2 + \sigma v^2) dx \geq \rho \int_0^1 ((v')^2) dx = \rho \|v\|_V^2$. Отже, $s(v, v) \geq \rho \|v\|_V^2$, тобто

$$\beta = \rho.$$

Нехай параметр стабілізації α_h вибрали таким, що коефіцієнт штучної дифузії становить $\rho = Pe h/2$, згідно з лемою Сеа $\|u_\alpha - u_{\alpha,h}\|_V \leq \sqrt{\gamma/\beta} \|u'_\alpha\|_V$, де

сталі β, γ визначають з властивостей розглядуваної білінійної форми. При кроці дискретизації $h \geq 2/Pe$ похибка апроксимації збуреної задачі характеризується такою апріорною оцінкою:

$$\|u_\alpha - u_{\alpha,h}\|_V \leq h\sqrt{1+\sqrt{2}/h} \|u''\|_{L^2(\Omega)}.$$

Причому $\lim_{h \rightarrow 0} \|u_\alpha - u_{\alpha,h}\|_V = 0$, тобто, послідовність наближених розв'язків збуреної задачі збігається до точного розв'язку в просторі V з порядком збіжності $1/2$.

Нехай тепер крок дискретизації $h \leq 2/Pe$. Оскільки значення коефіцієнта штучної дифузії співпадає з коефіцієнтом дифузії вихідної задачі, то $\|u - u_\alpha\|_V = 0$ і отримуємо оцінку $\|u_\alpha - u_{\alpha,h}\|_V \leq h\sqrt{1+Pe/\sqrt{2}} \|u''\|_{L^2(\Omega)}$. З нерівності Фрідріхса випливає збіжність в просторі $L_2(\Omega)$. Отже, за різного способу вибору параметра апроксимації кусково-степеневих функцій вдається побудувати збіжну послідовність апроксимацій розв'язку.

3.9. Аналіз числових результатів

Приклад 3.1. Наведемо результат обчислень за описаною вище схемою для краєвої задачі (3.16) для значень числа Пекле $Pe = 1000$, $f = 1000$ на рівномірній сітці з кількістю вузлів $N = 50$. Параметри стабілізації за таких умов: $\alpha = 19,4868$ для степеневих базисних функцій і $a = 4,85165 \cdot 10^8$ для експоненціальних базисних функцій.

На рис.1. зображені графіки точного (суцільна лінія) та наближеного розв'язків задачі (3.16), обчисленого з використанням класичних лінійних апроксимацій МСЕ (пунктирна лінія).

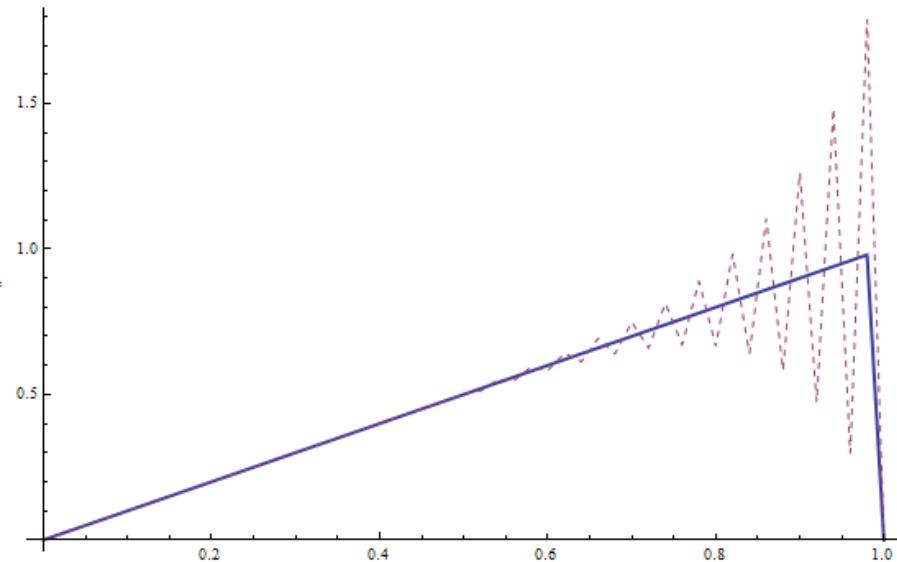


Рис.3.1. Графіки апроксимацій МСЕ наближеного та точного розв'язків з $Pe = 1000$ та $N = 30$.

Оскільки точний розв'язок задачі (3.16) є відомий, то обчислення оцінок швидкостей збіжності апроксимацій на сітці з кроком h здійснюватимемо за правилом:

$$p_h = \log_2 \frac{\|u - v_h\|}{\|u - v_{h/2}\|},$$

де через $\|\cdot\|$ позначено норму у просторі Гільберта, u – точний розв'язок задачі (3.16), v_h – апроксимація МСЕ, побудована на сітці з кроком h з використанням кусково-лінійних u_h , експоненціальних u_h^* , чи степеневих u_h° апроксимацій.

Результати обчислення норм похибок та швидкостей збіжності на послідовності рівномірно згущених сіток наведені у табл. 3.1 – 3.4.

Параметр стабілізації був вибраний таким: $\tilde{\alpha} = 1 + Pe h$

Табл. 3.1. Норми похибок апроксимацій у просторі $L^2(\Omega)$ для лінійних, експоненціальних та степеневих апроксимацій

Крок h	$\ u - u_{h,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,\tilde{\alpha}}\ _{L^2(\Omega)}$
1/10	2.49812	0.0564427	0.0564388
1/20	0.468522	0.0275747	0.0275746
1/40	0.158986	0.0131466	0.0131504
1/80	0.0760676	0.00594422	0.00597802
1/160	0.0333322	0.00238438	0.00267332
1/320	0.0120817	0.000778643	0.00153299
1/640	0.0035535	0.000214696	0.000693529
1/1280	0.0009344	0.000055185	0.000230716
1/2560	0.0002368	0.0000138957	0.0000662386

Табл. 3.2. Норми похибок апроксимацій у просторі V

Крок h	$\ u - u_{h,1}\ _V$	$\ u - u_{h,E}\ _V$	$\ u - u_{h,\tilde{\alpha}}\ _V$
1/10	53.8986	7.06974	7.06977
1/20	34.0224	4.93193	4.93459
1/40	29.2209	3.43484	3.44995
1/80	26.9204	2.35614	2.45148
1/160	22.7296	1.56039	2.1256
1/320	16.1631	1.00089	2.75319
1/640	9.45454	0.700474	2.86488
1/1280	4.98537	0.587478	2.06338
1/2560	2.56853	0.554325	1.27347

Табл. 3.3. Порядки збіжності у нормі простору $L^2(\Omega)$

p_h при h	$\ u - u_{h,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_{h,\tilde{\alpha}}\ _{L^2(\Omega)}$
1/10	2.41465	1.03337	1.03335
1/20	1.55922	1.06863	1.06824
1/40	1.06355	1.14513	1.13736
1/80	1.19036	1.31787	1.16104
1/160	1.46409	1.61458	0.802286
1/320	1.76552	1.85867	1.14432
1/640	1.92698	1.95995	1.58784
1/1280	1.98052	1.98964	1.80037

Табл. 3.4. Порядки збіжності у нормі простору $H_0^1(\Omega)$

p_h при h	$\ u - u_{h,1}\ _V$	$\ u - u_{h,E}\ _V$	$\ u - u_{h,\tilde{\alpha}}\ _V$
1/10	0.663764	0.510287	0.509641
1/20	0.219481	0.520924	0.515343
1/40	0.118303	0.543926	0.492894
1/80	0.244128	0.594485	0.204953
1/160	0.491865	0.640917	-0.372185
1/320	0.773626	0.514496	-0.0575749
1/640	0.923306	0.254051	0.473563
1/1280	0.956761	0.0836768	0.696249

Отже, при великих кроках дискретизації степеневі апроксимації відтворюють поведінку експоненціальних апроксимацій. При малих кроках степеневі апроксимації відтворюють поведінку лінійних апроксимацій. При

редукції степеневих базисних функцій до лінійних базисних функцій спостерігаємо збільшення похибки, оскільки параметр стабілізації вибирається з умови коректності обчислювальної схеми

Вивчимо енергетичні характеристики наведених вище апроксимацій.

Розглянемо закон збереження для рівняння (3.16): $\int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = \int_0^1 f u dx$, або

$$\|u\|_V^2 = \langle l, u \rangle.$$

Оскільки точний розв'язок $\hat{u} = \hat{u}(x)$ задачі (3.16) при значеннях $Pe = 1000$, $f = 1000$ є відомий, то маса речовини, що бере участь у процесах

дифузії у такій системі становить $M_D = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = 499$, а маса речовини, що

утворилась за рахунок внутрішніх джерел забруднення становить $M_S = \int_0^1 f u dx = 499$. Очевидно, що $M_D = M_S$.

Для обчислення енергетичних характеристик апроксимації v_h введемо такі позначення: $m_D = \|v_h\|_V^2$ – маса речовини, обчислена з розв'язку v_h за правилом обчислення енергетичної норми лінійної апроксимації, проте сам розв'язок v_h може бути знайдений з використанням лінійних, експоненціальних чи степеневих базисних функцій. Тобто, якщо вузлові значення розв'язку отримано з використанням степеневих базисних функцій, то енергетичну норму обчислюємо згідно правила обчислення енергетичної норми лінійної апроксимації. $m_D^\alpha = \|v_h\|_{V,\alpha}^2$ – маса речовини, обчислена відповідно до типу апроксимації. Тобто, якщо вузлові значення розв'язку v_h отримано з використанням степеневих базисних функцій, то енергетичну норму обчислюємо згідно правила (3.24) обчислення енергетичної норми степеневої апроксимації, що відображене індексом α .

Аналогічно введені позначення $m_S = \langle l, v_h \rangle$ та $m_S^\alpha = \langle l, v_h \rangle_\alpha$, що характеризують масу речовини, яка утворилася за рахунок внутрішніх джерел забруднення.

Зазначимо, що індекс D означає дифузійні процеси (англ. – Diffusion), а S – джерела забруднення (англ. – source).

Значення енергетичної норми для лінійної, експоненціальної та степеневої апроксимацій наведено у таблиці 3.5, а значення лінійного функціоналу для таких апроксимацій наведено у таблиці 3.6.

Табл. 3.5. Значення енергетичної норми лінійної, експоненціальної та степеневої апроксимацій

Крок h	$\ v_h\ _V^2$ лінійної апроксимації	$\ v_h\ _{V,\alpha}^2$ експоненціальної апроксимації	$\ v_h\ _{V,\alpha}^2$ степеневої апроксимації
$h = \frac{1}{10}$	19283,1	450	360,896
$h = \frac{1}{20}$	3422,93	475	428,441
$h = \frac{1}{40}$	2040,95	487,5	464,081
$h = \frac{1}{80}$	1729,48	493,746	482,357
$h = \frac{1}{160}$	1273,11	494,96	491,591
$h = \frac{1}{320}$	765,328	456,562	496,212
$h = \frac{1}{640}$	391,658	333,784	498,239

Табл. 3.6. Значення лінійного функціоналу лінійної, експоненціальної та степеневої апроксимацій

Крок h	$m_S = \langle l, v_h \rangle$ лінійної апроксимації	$m_S^\alpha = \langle l, v_h \rangle_\alpha$ експоненціальної Апроксимації	$m_S^\alpha = \langle l, v_h \rangle_\alpha$ степеневої апроксимації
$h = \frac{1}{10}$	2239,57	360,9	360,896
$h = \frac{1}{20}$	692,724	428,45	428,441
$h = \frac{1}{40}$	477,768	464,1	464,081
$h = \frac{1}{80}$	488,302	482,394	482,357

$h = \frac{1}{160}$	494,285	491,644	491,591
$h = \frac{1}{320}$	497,099	496,132	496,212
$h = \frac{1}{640}$	498,316	498,034	498,239

Наведені результати свідчать про те, що при рівномірному згущенні сітки енергетичні характеристики степеневої апроксимації прямують до величин, передбачених теоретичним аналізом швидше, ніж енергетичні характеристики лінійної та експоненціальної апроксимацій.

Приклад 3.2. Розглянемо таку крайову задачу:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + 8000(x-1/2)^2 u' = 400 \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Особливістю задачі (3.50) є те, що в околі точки $x=1/2$ є внутрішній шар, в околі $x=1$ – примежовий шар, а також точний розв'язок для задачі (3.44) невідомий. З огляду на таку обставину розглядатимемо апостеріорні оцінки похибок.

На рис.3.2 подано графіки наближеного розв'язку при двадцяти скінчених елементах. На рис.3.2.,а. зображене графік, отриманий з використанням лінійних базисних функцій МСЕ, а на рис.2,б. зображене графік, отриманий з використанням степеневих базисних функцій МСЕ.

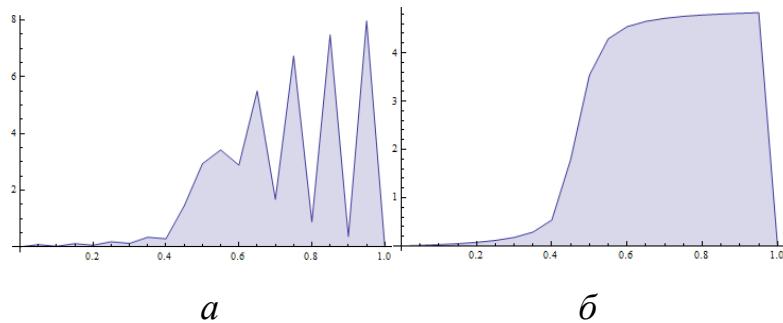


Рис. 3.2. а) наближений розв'язок, отриманий з використанням лінійних базисних функцій МСЕ при кількості скінчених елементів $N = 20$, б) розв'язок, отриманий з використанням степеневих та експоненціальних базисних функцій МСЕ при кількості скінчених елементів $N = 20$.

Як видно з рис.3.2 *a), б)*, степеневі базисні функції, як і експоненціальні базисні функції, можуть досить точно відтворити структуру розв'язку навіть на сітці з двадцяти скінченних елементів, тоді як розв'язок з використанням лінійних базисних функцій демонструє неприродні осциляції майже у всій досліджуваній області.

Значення параметра стабілізації на кожному скінченому елементі вибиралось з умов коректності обчислювальної схеми та з урахуванням даних задачі. У підсумку розподіл значень параметра стабілізації відповідає функції адвективного переносу.

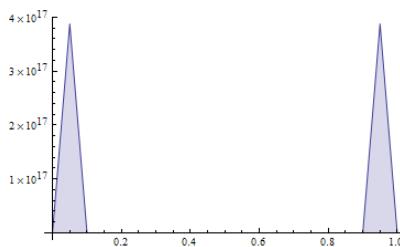


Рис. 3.3. Значення параметра стабілізації для експоненціальних базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів $N = 20$

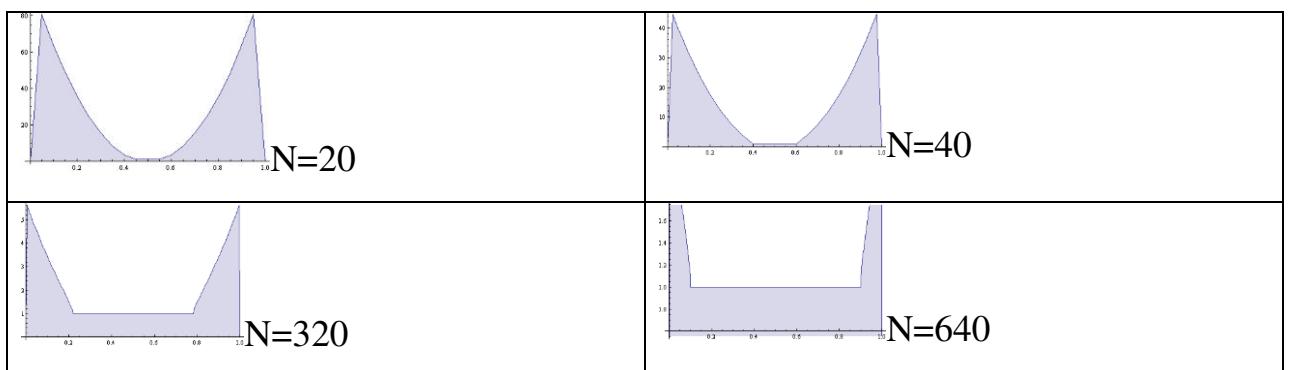


Рис. 3.4. Значення параметра стабілізації для степеневих базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів $N = 20, 40, 320, 640$.

З рис. 3.4 видно, що в околі внутрішнього шару степеневі базисні функції відтворюють лінійні базисні функції без граничних переходів, як це відбувається у випадку застосування експоненціальних базисних функцій.

Значення похибок у нормі простору $L^2(\Omega)$ наведено у табл. 3.7, а порядки збіжності у нормі простору $L^2(\Omega)$ наведено у табл. 3.8.

Табл. 3.7. Норми похибок апроксимацій у просторі $L^2(\Omega)$ для лінійних, експоненціальних та степеневих апроксимацій.

Крок h	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/40	1.00497	9965.49	0.281952
1/80	0.558169	1755.96	0.178945
1/160	0.271885	1101.91	0.101899
1/320	0.11191	—	0.0423447
1/640	0.036648	—	0.00817964
1/1280	0.01011	—	0.01011
1/2560	0.00259931	—	0.00259931
1/5120	0.000654563	—	0.000654563
1/10240	0.000163941	—	0.000163941
1/20480	0.000041004	—	0.000041004

Табл. 3.8. Порядки збіжності у нормі $L^2(\Omega)$

p_h при h	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/40	0.848378	2.50468	0.655935
1/80	1.03771	0.672262	0.81238
1/160	1.28066	—	1.26688
1/320	1.61053	—	2.37207
1/640	1.85796	—	-0.30567
1/1280	1.95958	—	1.95958
1/2560	1.98952	—	1.98952
1/5120	1.99736	—	1.99736
1/10240	1.99934	—	1.99934

З наведених результатів випливає, що зі згущенням сітки порядки збіжності степеневих апроксимацій постійно зростають, прямуючи до величин передбачених теоретичним аналізом похибки.

Приклад 3.3. Розглянемо модельну крайову задачу адвекції-дифузії з розривним коефіцієнтом адвекції:

$$\begin{cases} \text{ знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + \beta(x)u' = 1000 \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3.45)$$

де коефіцієнт адвекції задано за правилом

$$\beta(x) = \begin{cases} 1000, & x \in (0, \frac{1}{2}], \\ 10^{-8}, & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Особливістю задачі (3.45) є те, що коефіцієнт адвекції є розривним, а також точний розв'язок для задачі (3.45) невідомий. З огляду на таку обставину розглядатимемо апостеріорні оцінки похибок.

На рис.3.5. подаємо графіки наближеного розв'язку задачі (3.45) при двадцяти скінченних елементах. На рис.3.5.а). зображено графік, отриманий з використанням лінійних базисних функцій МСЕ, а на рис.3.5.б) зображене графік, отриманий з використанням степеневих базисних функцій МСЕ.

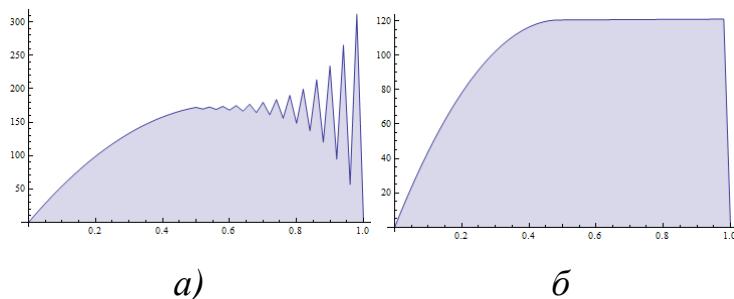


Рис. 3.5. а) наближений розв'язок, отриманий з використанням лінійних базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів $N = 50$, б) розв'язок, отриманий з використанням степеневих базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів $N = 50$.

Як видно з рис.3.5. а), б), степеневі базисні функції, як і експоненціальні базисні функції, можуть досить точно відтворити структуру

розв'язку навіть на сітці з двадцяти скінченних елементів, тоді як розв'язок з використанням лінійних базисних функцій демонструє неприродні осциляції майже у всій досліджуваній області.

Значення параметра стабілізації на кожному скінченному елементі вибиралось з умов коректності обчислювальної схеми та з урахуванням даних задачі.

Значення похибок у нормі простору $L^2(\Omega)$ наведено у табл. 3.9., а порядки збіжності у нормі простору $L^2(\Omega)$ наведено, відповідно, у табл. 3.10.

Табл. 3.9. Норми похибок апроксимацій у нормі $L^2(\Omega)$ для лінійних, експоненціальних та степеневих апроксимацій.

Крок h	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/40	62.118	2.65612	6.77624
1/80	10.1977	1.32737	3.92125
1/160	4.20887	0.688323	1.69361
1/320	1.39902	0.732757	0.436301
1/640	0.407374	0.740838	0.407374
1/1280	0.12464	0.504241	0.12464
1/2560	0.0464207	0.286745	0.0464207
1/5120	0.0207453	0.151742	0.0207453
1/10240	0.0100505	0.0778925	0.0100505
1/20480	0.00498695	0.039442	0.00498695

Табл. 3.10. Порядки збіжності у нормі $L^2(\Omega)$

p_h при h	$\ u_{h,1} - u_{h/2,1}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,E} - u_{h/2,E}\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u_{h,\alpha} - u_{h/2,\alpha}\ _{L^2(\Omega)}$
1/40	2.60677	1.00075	0.789169
1/80	1.27674	0.947412	1.21122
1/160	1.58901	-0.0902487	1.9567
1/320	1.77999	-0.0158237	0.0989716
1/640	1.70859	0.555046	1.70859
1/1280	1.42492	0.814343	1.42492
1/2560	1.16198	0.918155	1.16198
1/5120	1.04553	0.962059	1.04553
1/10240	1.01103	0.981753	1.01103

Приклад 3.4. Розглянемо модельну крайову задачу адвекції-дифузії з розривним коефіцієнтом адвекції:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -u'' + \beta(x)u' = 1000 \text{ на } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3.46)$$

де коефіцієнт адвекції задано за правилом

$$\beta(x) = \begin{cases} 10^{-8}, & x \in (0, \frac{1}{2}], \\ 1000, & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Особливістю задачі (3.46) є те, що коефіцієнт адвекції є розривним а також точний розв'язок для задачі (3.46) невідомий. З огляду на таку обставину розглядатимемо апостеріорні оцінки похибок.

На рис.3.6. подаємо графіки наближеного розв'язку при двадцяти скінченних елементах. На рис.3.6, а. зображене графік, отриманий з використанням лінійних базисних функцій МСЕ, а на рис.3.6, б. зображене графік, отриманий з використанням степеневих базисних функцій МСЕ.

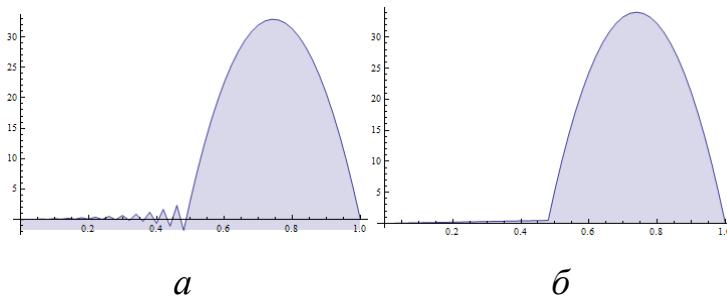


Рис. 3.6. а) наближений розв'язок, отриманий з використанням лінійних базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів $N = 50$, б) розв'язок, отриманий з використанням степеневих базисних функцій МСЕ при кількості скінченних елементів $N = 50$.

Наведені розрахунки для прикладу 3.3 для трьох типів базисних функцій МСЕ: кусково-лінійних, кусково-експоненціальних та кусково-степеневих свідчать про те, що під час згущення сітки до деякого значення кількості скінченних елементів похибки кусково-степеневої апроксимації є менші ніж похибки кусково-лінійної апроксимації, а після досягнення деякого значення кількості скінченних елементів, значення похибок є одинаковими. У цей же час, похибки експоненціальних апроксимацій виявилися більшими ніж для кусково-лінійних чи кусково-степеневих апроксимацій.

Нагромадження похибок апроксимації з кусково-експоненціальними базисними функціями спричинене з одного боку тим, що в підобласті, де коефіцієнт адвекції є малим, експоненціальні функції наближаються до лінійних апроксимацій, але для них це можливе лише в границі з огляду на їх конструкцію [87].

Поведінка кусково-степеневих базисних апроксимацій пов'язана з безпосереднім зв'язком з лінійними апроксимаціями, адже при встановленні значення параметра $\alpha = 1$, ми отримуємо класичні лінійні апроксимації. Оскільки такий перехід до лінійних апроксимацій не відбувається через границю, то кусково-степеневі апроксимації мають добре адаптаційні властивості.

Запас стійкості кусково-степеневих базисних функцій МСЕ є безпосереднім наслідком спеціальної побудови базисних функцій простору апроксимацій V_h , структура яких залежить не тільки від структури сітки, а й від даних задачі, що розглядається.

3.10. Застосування кусково-степеневих апроксимацій для двовимірної задачі адвекції-дифузії

Застосування кусково-степеневих базисних функцій узагальнюється для багатовимірного випадку при застосуванні прямокутних скінчених елементів. З цією метою розглянемо двовимірну стаціонарну крайову задачу конвекції–дифузії оскільки вона відображає основні особливості чисельного дослідження динамічних систем у багатовимірному випадку. Нехай задано значення коефіцієнта дифузії μ , вектор швидкостей адвективного (конвекційного) переміщення $\beta = \{\beta_x, \beta_y\}$ та інтенсивності розподілених джерел f ; знайти розподіл концентрації речовини $u = u(x, y)$ в області $\Omega_2 = (0, 1) \times (0, 1)$, такий, що:

$$\begin{aligned} -\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta_x \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_y \frac{\partial u}{\partial y} &= f, \quad \text{в } \Omega_2 \\ u &= 0 \text{ на } \Gamma_2 = \partial\Omega_2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Для простоти міркувань вважатимемо, що коефіцієнти задачі – це деякі дійсні числа, та $\beta = \beta_x = \beta_y$. Домножимо рівняння (3.47) на функцію $v \in V = H_0^1(\Omega_2) = \{v \in H^1(\Omega_2) : v|_{\partial\Omega_2} = 0\}$ та проінтегруємо по області Ω_2 :

$$\mu \iint_{\Omega_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \beta \iint_{\Omega_2} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega_2} fv dx dy.$$

Введемо білінійні форми

$$a(u, v) := \iint_{\Omega_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \quad b(u, v) := \iint_{\Omega_2} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$c(u, v) := \mu a(u, v) + \beta b(u, v)$$

та лінійний функціонал

$$\langle l, v \rangle = \iint_{\Omega_2} fv dx dy,$$

тоді варіаційне формулювання задачі (3.47) має вигляд

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x, y) \in V \text{ таку, що:} \\ c(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Надалі припускаємо, що числа μ, β в задачі (3.47) такі, що задовольняють гіпотези теореми Лакса – Мільграма – Вишика про коректність варіаційної задачі, тому матриця C – додатно визначена, а це означає єдиність шуканого розв'язку $U = \{u_j\}_{j=1}^{N_h}$.

Розглядаємо скінченновимірний підпростір $V_h \subset V$, де h – параметр дискретизації. Внаслідок цього отримуємо дискретне варіаційне формулювання задачі (3.47)

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u_h = u_h(x, y) \in V_h \text{ таку, що:} \\ c(u_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (3.48)$$

Для розв'язування двовимірних задач методом скінченних елементів застосовують багато підходів. Для дискретизації області проводять розбиття її на трикутні, прямокутні та іншої форми скінченні елементи. У роботі пропонується підхід, який базується на дискретизації області на прямокутні скінченні елементи.

Зафіксуємо натуральне N_h . Покриємо область $[0,1] \times [0,1]$ рівномірною сіткою вузлів $x_{j_x} = j_x h, y_{j_y} = j_y h, i_x = \overline{0, N_h + 1}, i_y = \overline{0, N_h + 1}$. Тут введено наступні позначення: індекс j_x – номер вузла на осі абсцис (вісь Ox) та j_y – номер вузла на осі ординат (вісь Oy). Для кожного вузла $M_j = (x_{i_x}, y_{j_y})$ поставимо у відповідність деяку фінітну функцію $\varphi_j = \varphi_j(x, y)$, яка володіє наступними властивостями

$$\varphi_i(M_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

та на скінченному елементі $K_{j+\frac{1}{2}} = \{(x, y) : x \in [x_{jx}, x_{jx+1}], y \in [y_{jy}, y_{jy+1}]\}$ сума

$$\sum_{j=1}^{(N_h)^2} \varphi_j(x, y) \equiv 1, \text{ тобто, базисні функції лінійно незалежні та апроксимаційні.}$$

Звернемо увагу на побудову базисних функцій φ_j , яка є добутком базисних функцій визначених на осі абсцис та ординат. Тобто, $\varphi_j(x, y) = \varphi_{jx}(x)\varphi_{jy}(y)$, де індекс jx – номер вузла на осі абсцис, а jy – номер вузла на осі ординат.

На скінченному елементі $K_{j+\frac{1}{2}} = \{(x, y) : x \in [x_{jx}, x_{jx+1}], y \in [y_{jy}, y_{jy+1}]\}$ введемо

локальні координати: $\xi = \frac{x - x_{kx}}{h}$, $\eta = \frac{y - y_{ky}}{h}$. Легко переконатися, що на скінченному елементі $K_{j+\frac{1}{2}}$ $\xi \in [0, 1]$ та $\eta \in [0, 1]$.

Зафіксуємо базис простору V_h : $\{\varphi_i\}_{j=1}^{N_h^2}$ Розв'язок задачі (3.48) шукатимемо у вигляді лінійної комбінації базисних функцій

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^{N_h^2} u_j \varphi_j(x, y) \quad (3.49)$$

Підставимо (3.49) у (3.48) та почергово підставлятимемо $v = \varphi_i \in V_h, i = \overline{1, N_h^2}$. У підсумку отримаємо СЛАР для визначення шуканих коефіцієнтів $\{u_j\}_{j=1}^{N_h^2} : \sum_{j=1}^{N_h^2} u_j c(\varphi_j, \varphi_i) = \langle l, \varphi_i \rangle$.

Для розв'язування сингулярно-збуреної крайової задачі (3.48) узагальнимо апарат степеневих базисних функцій на двовимірний випадок. У прямокутнику $\Pi = \{(\xi, \eta) : \xi \in [0, 1], \eta \in [0, 1]\}$ введемо базисні функції $\varphi_{1\xi}(\alpha; \xi) = 1 - \xi^\alpha, \varphi_{2\xi}(\alpha; \xi) = \xi^\alpha, \varphi_{1\eta}(\alpha; \eta) = 1 - \eta^\alpha, \varphi_{2\eta}(\alpha; \eta) = \eta^\alpha$.

Обчислення інтегралів у білінійній формі є громіздке, тому наведемо основну ідею на прикладі обчислення білінійної форми

$$a_1(\varphi_i, \varphi_j) := \iint_{\Omega_2} \left(\frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} \right) dx dy.$$

Оскільки базисні функції $\varphi_i(x, y)$ є добутками одновимірних базисних функцій, то визначимо номер функції, що відповідає вузлу на осі абсцис:

$i_x = (i-1) \bmod N_h$ та осі ординат: $i_y = (i-1)/N_h$, де mod – ділення за модулем, а операція «/» в даному випадку ціличислове ділення. Тоді інтеграл розіб'ється на два інтеграли

$$\iint_{\Omega_2} \left(\frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} \right) dx dy = \int_0^1 \left(\frac{d\varphi_{jx}(x)}{dx} \frac{d\varphi_{ix}(x)}{dx} \right) dx \cdot \int_0^1 (\varphi_{jy}(y) \varphi_{iy}(y)) dy.$$

Ці інтеграли можна обчислювати паралельно. Обчислимо інтеграл $a_{1x}(\varphi_{ix}, \varphi_{jx}) := \int_0^1 \left(\frac{d\varphi_{jx}(x)}{dx} \frac{d\varphi_{ix}(x)}{dx} \right) dx$. Якщо $|i_x - j_x| > 1$, то інтеграл дорівнює нулю. Якщо $|i_x - j_x| = 1$, то з умови симетричності білінійної форми $a_{1x}(\varphi_{kx}, \varphi_{kx+1}) = a_{1x}(\varphi_{kx+1}, \varphi_{kx})$ і нас цікавить значення $a_{1x}(\varphi_{kx}, \varphi_{kx+1})$ та $a_{1x}(\varphi_{kx}, \varphi_{kx})$. Отже,

$$\int_0^1 \left(\frac{d\varphi_{kx}(x)}{dx} \frac{d\varphi_{kx+1}(x)}{dx} \right) dx = \int_{x_{kx}}^{x_{kx+1}} \left(\frac{d\varphi_{kx}}{dx} \frac{d\varphi_{kx+1}}{dx} \right) dx = -\alpha^2 \int_0^1 \frac{1}{h^2} \xi^{2\alpha-2} h d\xi = -\frac{1}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{d\varphi_{kx}(x)}{dx} \frac{d\varphi_{kx}(x)}{dx} \right) dx &= \int_{x_{kx-1}}^{x_{kx+1}} \left(\frac{d\varphi_{kx}}{dx} \frac{d\varphi_{kx}}{dx} \right) dx = \int_{x_{kx-1}}^{x_{kx}} \left(\frac{d\varphi_{kx}}{dx} \frac{d\varphi_{kx}}{dx} \right) dx + \int_{x_{kx-1}}^{x_{kx+1}} \left(\frac{d\varphi_{kx}}{dx} \frac{d\varphi_{kx}}{dx} \right) dx = \\ &= 2\alpha^2 \int_0^1 \frac{1}{h^2} \xi^{2\alpha-2} h d\xi = \frac{2}{h} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1}. \end{aligned}$$

Аналогічно обчислюємо інтеграл $\int_0^1 (\varphi_{jy}(x) \varphi_{iy}(x)) dy$.

Розв'яжемо двовимірну сингулярно-збурену задачу при таких значеннях коефіцієнтів: $\mu = 1, \beta = 100, f = 100$. Застосувавши лінійні апроксимації при кількості вузлів 10×10 , отримуємо розв'язок, зображений на рис. 3.7.

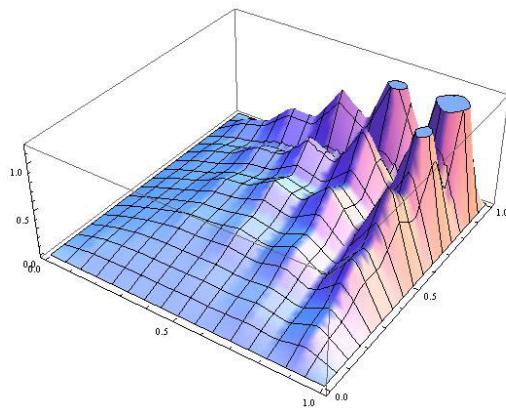


Рис. 3.7. Графік лінійної прямокутної апроксимації задачі (3.47) при $\mu=1, \beta=100, f=100$ та кількості вузлів 10×10 .

Застосувавши пакет FEMLAB, отримуємо розв'язок, який проявляє нефізичну поведінку в примежовому шарі при кількості скінченних елементів 509

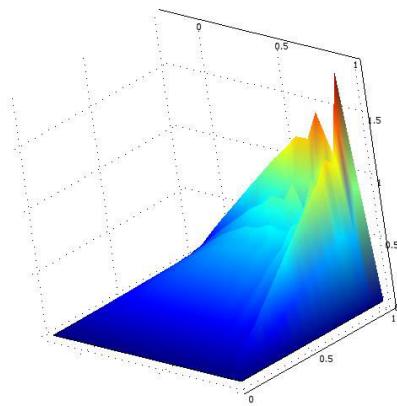


Рис. 3.8. Графік лінійної прямокутної апроксимації задачі (3.47) при $\mu=1, \beta=100, f=100$ та кількості елементів 509 у середовищі Femlab.

Застосувавши лінійні апроксимації при кількості вузлів 21×21 , тобто кількість скінченних елементів виносить 484, отримуємо такий розв'язок, зображений на рис. 3.9.

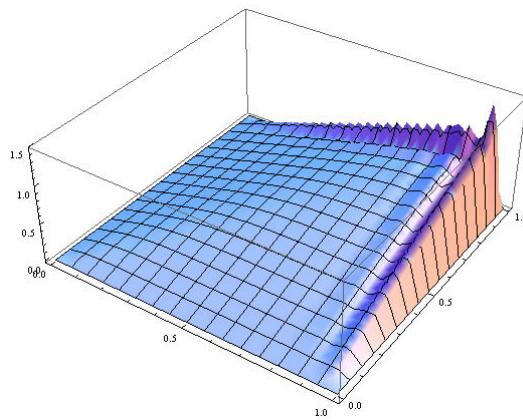


Рис. 3.9. Графік лінійної прямокутної апроксимації задачі (3.47) при $\mu = 1, \beta = 100, f = 100$ та кількості елементів 484.

Для застосування степеневих базисних функцій визначено умову на значення параметра стабілізації $\alpha = h \frac{\beta}{\mu} = Pe_h$, де Pe_h – сітковий критерій Пекле.

Використавши степеневі базисні функції при такій самій кількості скінчених елементів (484), отримаємо розв'язок, що не демонструє нефізичної поведінки

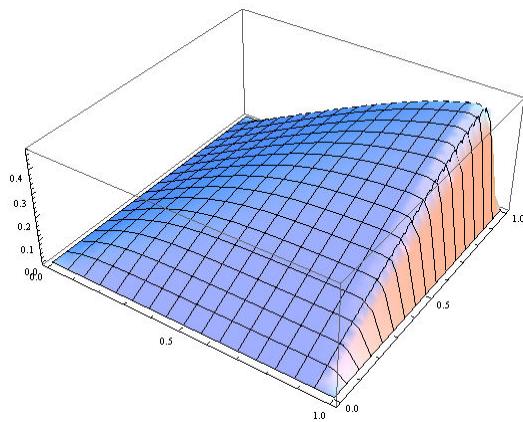


Рис. 3.10. Графік кусково-степеневої прямокутної апроксимації задачі (3.47) при $\mu = 1, \beta = 100, f = 100$ та кількості елементів 484.

3.11. Застосування кусково-степеневих апроксимацій для нестационарних задач адвекції-дифузії-реакції та рівняння Бюргерса

Отже, переконуємося в ефективності використання степеневих базисних функцій, як альтернативу лінійним. Покажемо, що степеневі базисні функції застосовні до еволюційних задач. З цією метою розглянемо нестационарну задачу конвекції-дифузії-реакції.

Нехай задано значення коефіцієнта дифузії μ , швидкість адвективного (конвекційного) переміщення β , коефіцієнта біохімічного розпаду речовини σ та інтенсивності розподілених джерел f ; знайти розподіл концентрації речовини $u = u(x,t)$ в області $\Omega_1 \times (0,T]$, такий, що:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u &= f, \quad \text{в } \Omega_1 \times (0,T] \\ u(x,0) &= u^0(x) \\ u &= 0 \text{ на } \Gamma \times (0,T] \end{aligned} \tag{3.50}$$

Домножимо рівняння (3.50) на деяку пробну функцію $v \in V = H_0^1(\Omega_1) = \{v \in H^1 : v(0) = v(1) = 0\}$ та проінтегруємо по області Ω_1 . Ввівши білінійні форми $m(u,v) = \int_0^1 uv dx$, $a(u,v) = \int_0^1 \mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \beta v \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u v dx$ та лінійний функціонал $\langle l, v \rangle = \int_0^1 fv dx$, отримаємо варіаційну задачу Коші

$$\begin{cases} \text{знайти елемент } u = u(t) \text{ такий, що:} \\ m(u'(t), v) + c(u(t), v) = \langle l(t), v \rangle \forall t \in (0, T), \forall v \in V, \\ m(u(0), v) = m(u^0, v). \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{3.51}$$

Однокрокова рекурентна схема для варіаційної задачі запропонована в [16], де обґрунтовано її стійкість та збіжність. Розподіл концентрації в початковий момент часу приймемо $u^0(x) = x(1-x)$, коефіцієнти задачі $\mu = \sigma = 1$, $\beta = 1000$.

Графіки розв'язків з використанням кусково-лінійних та кусково-степеневих базисних функцій у моменти часу $t_1 = 0.1, t_2 = 0.5$ наведено на рис. 3.11.

Лінійні апроксимації МСЕ	Степеневі апроксимації МСЕ
--------------------------	----------------------------

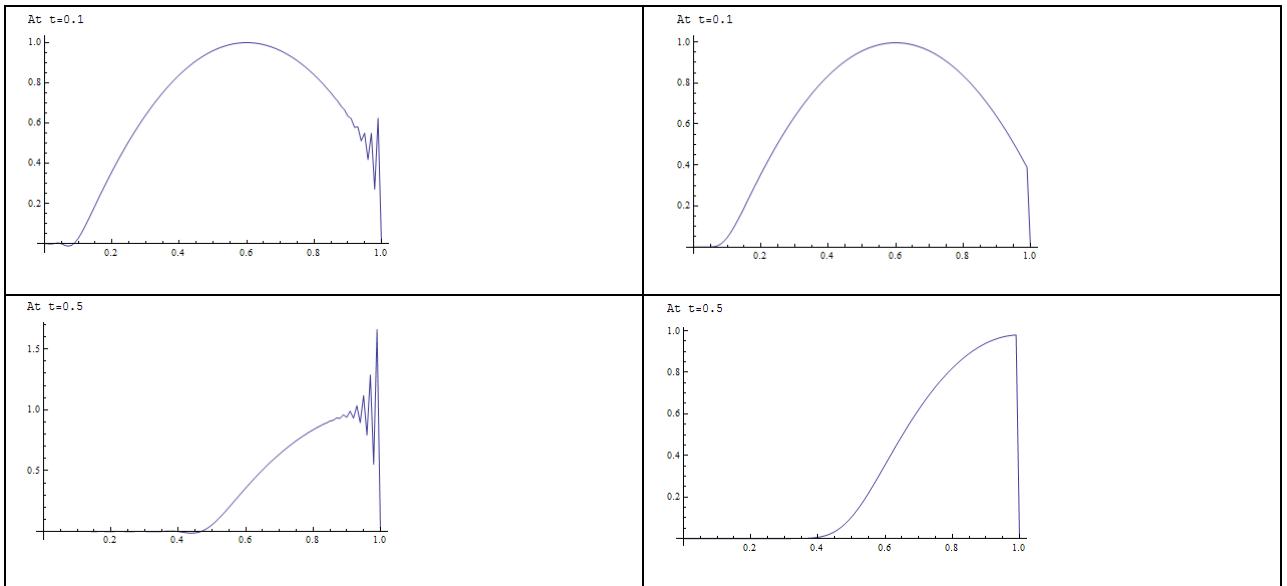


Рис. 3.11. Графік лінійної та степеневих апроксимацій задачі (3.50) при

$$\mu = \sigma = 1, \beta = 1000 \text{ у моменти часу } t_1 = 0.1, t_2 = 0.5.$$

Бачимо, що розв'язок з використанням степеневих функцій не приводить до нефізичних осциляцій.

Покажемо, що використання степеневих базисних функцій дозволяє розв'язувати складні нелінійні еволюційні задачі. Прикладом таких задач є одновимірне рівняння Бюргерса, яке є по суті одновимірним рівнянням Нав'є – Стокса без урахування тиску.

Перейдемо до формулювання початково-крайової задачі для рівняння Бюргерса. Нехай задано значення числа Рейнольдса Re , знайти функцію $u = u(x, t)$, таку, що:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{в } \Omega_1 \times (0, T] \\ u(x, y, 0) &= u^0(x) \\ u &= 0 \text{ на } \Gamma \times (0, T]. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Для розв'язування початково-крайової задачі домножимо рівняння (3.52) на деяку пробну функцію $v \in V = H_0^1$ та проінтегруємо по області Ω_1 .

Ввівши білінійні форми $m(u, v) = \int_0^1 uv dx, a(u, v) = \int_0^1 \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx$, нелінійний

функціонал $\langle N[w], v \rangle := \int_0^1 \left(w \frac{\partial w}{\partial x} v \right) dx$ та лінійний функціонал $\langle l, v \rangle := \int_0^1 fv dx$ та

отримаємо варіаційну задачу Коши

$$\begin{cases} \text{знайти елемент } u = u(t) \in V \text{ такий, що:} \\ m(u'(t), v) + a(u(t), v) + \langle N[u(t)], v \rangle = \langle l, v \rangle, \forall t \in (0, T], \forall v \in V \\ m(u(0), v) = m(u^0, v). \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.53)$$

У класичних схемах числового аналізу нелінійних початково-крайових задач передбачено необхідність виконання на кожному кроці інтегрування в часі низки ітерацій методу Ньютона [16], що накладає жорсткі обмеження на параметри просторової дискретизації задачі. У цій роботі запропоновано лінеаризацію задачі за рахунок збереження однакових порядків збіжності у часі.

Нехай ми знайшли вектор зміни розв'язку $\dot{u}^{j+\frac{1}{2}}$, тоді значення розв'язку на наступному кроці знайдемо за співвідношенням $u^{j+1} = u^j + \Delta t \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}$. В момент часу $t = t_{j+\theta}$ маємо $u^{j+\theta} = u^j + \theta \Delta t \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}$. Підставимо це співвідношення в (3.53):

$$m(\dot{u}^{j+\frac{1}{2}}, v) + a(u^j + \theta \Delta t \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}, v) + \langle N[u^j + \theta \Delta t \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}], v \rangle = \langle l, v \rangle.$$

Оскільки форма $a(u, v)$ білінійна, то $a(u^j + \theta \Delta t \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}, v) = a(u^j, v) + \theta \Delta t a(\dot{u}^{j+\frac{1}{2}}, v)$.

Розглянемо тепер нелінійний функціонал:

$$\langle N[u^j + \theta \Delta t \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}], v \rangle = \langle N[u^j], v \rangle + \theta \Delta t \int_0^1 \left(u^j u_x^{j+\frac{1}{2}} + u_j^x u^{j+\frac{1}{2}} \right) v dx + O(\Delta t^2).$$

Таким чином ми лінеаризували задачу (3.53), причому похибка лінеаризації співпадає з похибкою дискретизацією за часовою змінною.

Дискретизацію задачі за просторовими змінними виконано методом скінчених елементів з використанням кусково-лінійних апроксимацій Куранта та кусково-степеневих базисних функцій.

Для тестового прикладу вибрали розподіл концентрації в початковий момент часу $u^0(x) = x(1-x)$, число Рейнольдса $Re = 1000$. Наведемо графіки розв'язків в момент часу $t = 0.5$:

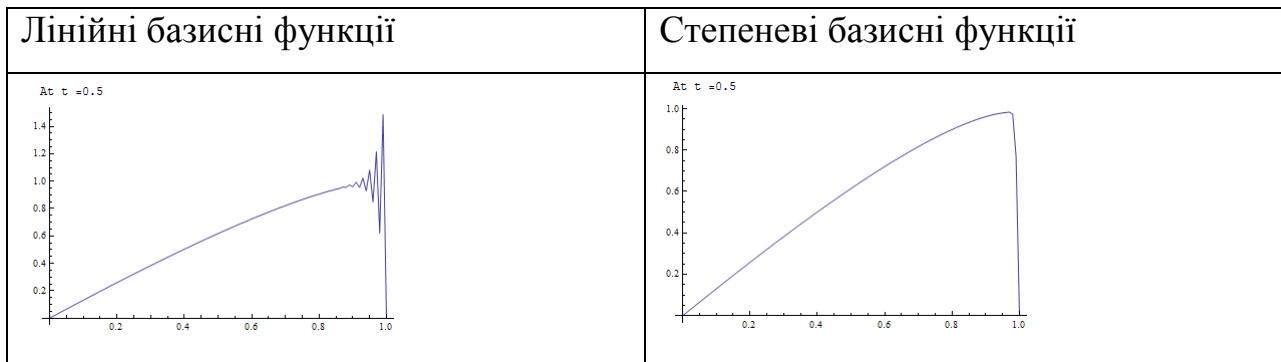


Рис. 3.12. Графік лінійної та степеневих апроксимацій задачі (3.53)

при $Re = 1000$ у момент часу $t_2 = 0.5$.

Розв'язок отриманий з використанням кусково-степеневих базисних функцій не проявляє нефізичний характер на відміну від розв'язку з використанням лінійних базисних функцій, причому за однакових обчислювальних зусиль.

Таким чином, показано ефективність застосування степеневих базисних функцій.

3.12. Висновки до розділу 3

Наведені рекомендації стосовно вибору значення параметра стабілізації варіаційної задачі та подані розрахункові формули визначення параметра стабілізації. Для задач адвекції-дифузії, адвекції-дифузії-реакції, дифузії-реакції знайдено оптимальне значення параметру стабілізації, яке гарантує мінімальну похибку стосовно точного розв'язку та стійкість наближеного розв'язку крайової задачі.

Доведено апроксимаційні властивості та лінійну незалежність кусково-степеневих базисних функцій. Проведено апріорний аналіз похибки степеневих апроксимацій. Доведено збіжність степеневих апроксимацій за різних способів вибору параметра апроксимації.

Аналіз числових результатів свідчить про ефективність застосування степеневих базисних функцій для розв'язування сингулярно-збурених крайових задач адвекції-дифузії, адвекції-дифузії-реакції.

Наведені результати похибок та енергетичних характеристик вказують на ефективність степеневих базисних функцій та апроксимацій.

Крім того, степеневі апроксимації для випадку задачі зі змінними коефіцієнтами дають кращий результат, потребують значно менше обчислювальної пам'яті, ніж експоненціальні апроксимації, а також час обчислень для степеневих апроксимацій менший ніж для експоненціальних.

Для сингулярно-збуреної краївої задачі для рівняння адвекції-дифузії-реакції з розривними коефіцієнтами апробовано схему методу скінченних елементів з кусково-степеневими базисними функціями. Наведено результати обчислювальних експериментів та проаналізовано перевагу схеми з кусково-степеневими апроксимаціями над схемами методу скінченних елементів з кусково-лінійними та кусково-експоненціальними апроксимаціями для цього класу задач.

Наведені результати похибок та енергетичних характеристик вказують на ефективність кусково-степеневих базисних функцій та апроксимацій.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [24, 25, 29, 30, 35, 36, 38].

РОЗДІЛ 4. КОМБІНОВАНИЙ АЛГОРИТМ ГАМІЛЬТОНОВОГО АНАЛІЗУ ТА СКІНЧЕННО-ВИМІРНІ РЕДУКЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У цьому розділі запропоновано комбінований алгоритм знаходження законів збереження та імплектичних операторів нелінійних динамічних систем. Показано зв'язок з асимптотичним методом знаходження законів збереження та диференціально-алгебричним алгоритмом.

4.1. Закони збереження, імплектичні оператори узагальненої динамічної системи Бюргерса

Нехай на нескінченностивимірному l -періодичному многовиді M задана динамічна система типу Бюргерса:

$$\begin{cases} u_t = k_1 u_{xx} + k_2 uu_x + k_3 v_x \\ v_t = k_4 (uv)_x + k_5 v_{xx} \end{cases} = K[u, v], \quad (4.1)$$

де $K : M \rightarrow T(M)$ – гладке за Фреше функціонально-поліноміальне векторне поле на многовиді M , k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 – дійсні числові параметри, t – параметр еволюції системи (4.1).

Потрібно знайти при яких значеннях параметрів k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 система (4.1) має нескінченну ієархію нетривіальних законів збереження та володіє парою імплектичних операторів.

З'ясуємо питання про наявність нескінченної ієархії законів збереження для динамічної системи (4.1) на гладкому l -періодичному многовиді M . З цією метою розглянемо асимптотичні розв'язки рівняння Лакса

$$\frac{d\varphi}{dt} + K'^* \varphi = 0, \quad (4.2)$$

де $\varphi \in T^*(M)$, "" – штрих означає похідну Фреше нелінійного локального функціонала, а зірочка "*" позначає спряження відносно стандартної білінійної форми (1.6). Оскільки оператор $K'^*: T^*(M) \rightarrow T^*(M)$ має наступний вигляд

$$K'^* = \begin{pmatrix} k_1 \partial^2 - k_2 u \partial & -k_4 v \partial \\ -k_3 \partial & -k_4 u \partial + k_5 \partial^2 \end{pmatrix},$$

то лінійне рівняння (4.2) допускає вектор-розв'язок $\varphi \in T^*(M)$ у вигляді

$$\varphi(x, t; \lambda) = (1, b(x, t; \lambda))^T \exp \left(\omega_1(\lambda)x + \omega_2(\lambda)t + \int_{x_0}^x \sigma(x, t; \lambda) dx \right), \quad (4.3)$$

де $\lambda \in C$ – комплексний параметр, $x_0 \in R$ – довільна фіксована точка і

$$b(x, t; \lambda) \equiv \sum_{j \in Z_+} b_j [u, v] \lambda^{-j} \text{ та } \sigma(x, t; \lambda) \equiv \sum_{j \in Z_+} \sigma_j [u, v] \lambda^{-j} \quad (4.4)$$

є асимптотичними розвиненнями при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Для знаходження дисперсійного відношення $\omega_1 = \omega_1(\lambda)$ та $\omega_2 = \omega_2(\lambda)$, розв'яжемо рівняння Лакса (4.2) в точці $u = 0, v = 0$ з урахуванням (4.3) при $t = t_0 \in R$. У результаті отримаємо шукані елементи: $\omega_1(\lambda) = \lambda$, $\omega_2(\lambda) = -k_1 \lambda^2$. Отже, розв'язок (4.3) рівняння (4.2) має вигляд

$$\varphi(x, t; \lambda) = (1, b(x, t; \lambda))^T \exp \left(\lambda x - k_1 \lambda^2 t + \int_{x_0}^x \sigma(x, t; \lambda) dx \right). \quad (4.5)$$

Підставляючи (4.5) в (4.2) з урахуванням асимптотичного розвинення (4.4), отримаємо нескінченну систему рекурентних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial^{-1}\sigma_{j,t} = -2k_1\sigma_{j+1} - k_1 \sum_{k \in Z_+} \sigma_k \sigma_{j-k} - k_1 \sigma_{j,x} + k_2 u \delta_{j,-1} \\ \quad + k_2 u \sigma_j + k_4 \left(v b_{j,x} + v b_{j+1} + v \sum_{k \in Z_+} b_k \sigma_{j-k} \right), \\ \sum_{k \in Z_+} b_k \partial^{-1} \sigma_{j-k,t} + b_{j,t} - k_1 b_{j+2} = k_3 (\delta_{j,-1} + \sigma_j) \\ \quad + k_4 (u b_{j,x} + u b_{j+1} + u \sum_{k \in Z_+} b_k \sigma_{j-k}) - \\ - k_5 \left(b_{j,xx} + 2b_{j+1,x} + 2 \sum_{k \in Z_+} b_{k,x} \sigma_{j-k} + b_{j+2} + 2 \sum_{k \in Z_+} b_{k+1} \sigma_{j-k} \right. \\ \left. + \sum_{k,l \in Z_+} b_{j-k-l} \sigma_{j-k} \sigma_k + \sum_{k \in Z_+} b_{j-k} \sigma_{k,x} \right) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

де числа $i, j, k \in Z_+$, а $\partial^{-1}(\cdot) = \frac{1}{2} \left[\int_{x_0}^x (\cdot) dx - \int_x^{x_0+l} (\cdot) dx \right]$ – оператор оберненого диференціювання.

Розв'язуючи послідовно систему рекурентних рівнянь (4.6) знаходимо перші дев'ять локальних функціоналів

$$\begin{aligned} b_0 &= 0; \quad b_1 = \beta_{11}, \quad \sigma_0 = \alpha_{01}u; \quad b_2 = \beta_{21}u, \quad \sigma_1 = \alpha_{11}u_x + \alpha_{12}v; \\ b_3 &= -\beta_{31}u^2 - \beta_{32}v - \beta_{33}u_x, \\ \sigma_2 &= \alpha_{21}uv + \alpha_{22}u_{xx} + \alpha_{23}uu_x + \alpha_{24}v_x \\ b_4 &= \beta_{41}u^3 + \beta_{42}uv + \beta_{43}uu_x + \beta_{44}v_x + \beta_{45}u_{xx}, \\ \sigma_3 &= \alpha_{31}u^2v + \alpha_{32}v^2 + \alpha_{33}u^2u_x + \alpha_{34}u_xv + \alpha_{35}u_x^2 + \alpha_{36}uv_x + \alpha_{37}uu_{xx} + \alpha_{38}v_{xx} + \alpha_{39}u_{xxx}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

де α_{ij}, β_{ij} , $i, j \in Z_+$ – вирази, що залежать від коефіцієнтів системи k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 .

Випишемо перші з них:

$$\begin{aligned} \alpha_{01} &= \frac{k_2}{2k_1}; \\ \beta_{11} &= \frac{k_3}{k_5 - k_1}, \quad \alpha_{11} = -\frac{k_2}{2k_1}, \quad \alpha_{12} = -\left(\frac{1}{2k_1} \left(\frac{k_2 k_3}{2k_1} - \frac{k_3 k_4}{k_5 - k_1} \right) \right); \\ \beta_{12} &= \left(\frac{k_3 k_1}{2k_1(k_5 - k_1)} + \frac{k_3 k_5}{(k_5 - k_1)^2} \right), \quad \alpha_{21} = \left(\frac{1}{4k_1} \left(\frac{k_2 k_3}{2k_1} - \frac{k_3 k_4}{k_5 - k_1} \right) - \frac{k_4}{2k_1} \left(\frac{k_2 k_3}{2k_1(k_5 - k_1)} - \frac{k_3 k_5}{(k_5 - k_1)^2} \right) \right). \end{aligned}$$

При $j=0$ маємо перший у ієархії закон збереження: $\tilde{\gamma}_0[u, v] = \frac{k_2}{2k_1} \int_{x_0}^{x_0+l} u dx$.

Функціонал $\gamma_0 = \beta_0 \int_{x_0}^{x_0+l} u dx$ є законом збереження для системи (4.1) для довільного числа β_0 , тобто

$$\left. \frac{d\gamma_0}{dt} \right|_{K[u, v]} = \beta_0 \int_{x_0}^{x_0+l} u_t dx = \beta_0 \int_{x_0}^{x_0+l} (k_1 u_{xx} + k_2 uu_x + k_3 v_x) dx = \beta_0 (k_1 u_{xx} + k_2 uu_x + k_3 v_x) \Big|_{x_0}^{x_0+l} \equiv 0.$$

Оскільки значення параметра β_0 є довільне, то для зручності виберемо $\beta_0 = 1$, отже, перший закон збереження має вигляд: $\gamma_0 = \int_{x_0}^{x_0+l} u dx$.

При $j=1$ маємо: $\tilde{\gamma}_1[u, v] = -\left(\frac{1}{2k_1} \left(\frac{k_2 k_3}{2k_1} - \frac{k_3 k_4}{k_5 - k_1} \right) \right) \cdot \left(\int_{x_0}^{x_0+l} v dx \right)$. Пересвідчимося,

що для довільного числа β_1 функціонал $\gamma_1[u, v] = \beta_1 \int_{x_0}^{x_0+l} v dx$ є законом збереження

для динамічної системи (4.1):

$$\left. \frac{d\gamma_1}{dt} \right|_{K[u, v]} = \beta_1 \int_{x_0}^{x_0+l} v_t dx = \beta_1 \int_{x_0}^{x_0+l} (k_4(uv)_x + k_5 v_{xx}) dx = \beta_1 (k_4(uv) + k_5 v_x) \Big|_{x_0}^{x_0+l} \equiv 0.$$

Оскільки значення параметра β_1 є довільне, то для зручності виберемо $\beta_1 = 1$, отже, другий закон збереження має вигляд: $\gamma_1 = \int_{x_0}^{x_0+l} v dx$.

При $j=2$ маємо такий локальний функціонал

$$\gamma_2[u, v] = \left(\frac{1}{4k_1} \left(\frac{k_2 k_3}{2k_1} - \frac{k_3 k_4}{k_5 - k_1} \right) - \frac{k_4}{2k_1} \left(\frac{k_2 k_3}{2k_1(k_5 - k_1)} - \frac{k_3 k_5}{(k_5 - k_1)^2} \right) \right) \int_{x_0}^{x_0+l} uv dx.$$

З'ясуємо, чи для довільного числа β_2 функціонал $\gamma_2 = \beta_2 \int_{x_0}^{x_0+l} uv dx$ є

законом збереження для системи (4.1). Справді,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\gamma_2}{dt} \right|_{K[u, v]} &= \beta_2 \int_{x_0}^{x_0+l} (uv)_t dx = \beta_2 \int_{x_0}^{x_0+l} (k_1 u_{xx} v + k_2 uu_x v + k_3 v_x v + k_4 u(uv)_x + k_5 uv_{xx}) dx = \\ &= \beta_2 \int_{x_0}^{x_0+l} (k_1 u_{xx} v + k_2 uv u_x + k_4 u(uv)_x + k_5 u_{xx} v) dx = \beta_2 \int_{x_0}^{x_0+l} ((k_1 + k_5) u_{xx} v + (k_2 - k_4) uv u_x) dx \equiv 0. \end{aligned}$$

Тотожність $\beta_2 \int_{x_0}^{x_0+l} ((k_1 + k_5)u_{xx}v + (k_2 - k_4)uvu_x)dx \equiv 0$ виконується тоді і тільки

тоді, коли виконується умова на коефіцієнти системи (4.1)

$$k_4 = k_2, k_5 = -k_1, \quad (4.8)$$

причому коефіцієнт k_3 – довільне ненульове число. При значеннях коефіцієнтів $k_4 \neq k_2, k_5 \neq -k_1$ система (4.1) не володіє нескінченною іерархією законів збереження, а, отже, вона не буде інтегровною методом оберненої задачі розсіяння. Оскільки значення параметра β_2 є довільне, то для зручності виберемо $\beta_2 = 1$, тобто третій закон збереження має вигляд

$$\gamma_2 = \int_{x_0}^{x_0+l} uv dx$$

Для отримання наступного закону збереження, потрібно визначити значення невідомих параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ у функціоналі

$$\gamma_3 = \int_{x_0}^{x_0+l} (\alpha_1 u^2 v + \alpha_2 v^2 + 2\alpha_3 u_x v) dx \text{ із тотожності (1.4)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_3}{dt} \Big|_{K[u,v]} &= \int_{x_0}^{x_0+l} (\alpha_1 u^2 v + \alpha_2 v^2 + 2\alpha_3 u_x v)_t dx = \int_{x_0}^{x_0+l} (\alpha_1 (2uu_t v + u^2 v_t) + 2\alpha_2 vv_t + 2\alpha_3 (u_{tx} v + u_x v_t)) dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_0+l} (2\alpha_1 uv(k_1 u_{xx} + k_2 uu_x + k_3 v_x) + \alpha_1 u^2 (k_2 (uv)_x - k_1 v_{xx}) + 2\alpha_2 v(k_2 (uv)_x - k_1 v_{xx})) dx + \\ &\quad + 2\alpha_3 \int_{x_0}^{x_0+l} (v(k_1 u_{xxx} + k_2 (uu_x)_x + k_3 v_{xx}) + u_x (k_2 (uv)_x - k_1 v_{xx})) dx \equiv 0. \end{aligned}$$

У підсумку отримаємо значення невідомих параметрів $\alpha_1 = k_2, \alpha_2 = k_3, \alpha_3 = k_1$ та переконуємося, що четвертий закон збереження для

$$\text{динамічної системи (4.1) має вигляд } \gamma_3 = \int_{x_0}^{x_0+l} (k_2 u^2 v + k_3 v^2 + 2k_1 u_x v) dx.$$

Теорема 4.1. *Динамічна система (4.1) володіє нескінченною іерархією законів збереження, якщо коефіцієнти системи задовольняють співвідношення $k_4 = k_2, k_5 = -k_1, k_3$ – довільне число. Перші чотири закони збереження мають вигляд:*

$$\gamma_0 = \int_{x_0}^{x_0+l} u dx, \gamma_1 = \int_{x_0}^{x_0+l} v dx, \gamma_2 = \int_{x_0}^{x_0+l} uv dx, \gamma_3 = \int_{x_0}^{x_0+l} (k_2 u^2 v + k_3 v^2 + 2k_1 u_x v) dx.$$

Для побудови імплектичних операторів скористаємося диференціально-алгебричним алгоритмом [77, 104]. Виберемо функціонал Гамільтона:

$$H_g = H_g[u, v] = -\gamma_2[u, v] = - \int_{x_0}^{x_0+l} uv dx. \quad (4.9)$$

Згідно представлення (1.8) перетворимо функціонал (4.9)

$$H_g = - \int_{x_0}^{x_0+l} uv dx = -\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+l} (uv + uv) dx = -\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+l} (v \partial^{-1} u_x + u \partial^{-1} v_x) dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+l} (<(\partial^{-1} v), u_x> + <(\partial^{-1} u), v_x>) dx$$

Побудуємо оператори $\sigma', \sigma'^*, \theta_1^{-1}$:

$$\sigma' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma'^* = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_1^{-1} = \sigma' - \sigma'^* = \begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обернений оператор до θ_1^{-1} існує, а, отже, отримано імплектичний оператор $\eta = \theta_1$:

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Знайдемо функціонал $H_\eta \in D(M)$ з умови гамільтоновості

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = -\eta grad H_\eta \text{ та із співвідношень}$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta H_\eta}{\delta u} \\ \frac{\delta H_\eta}{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 u_{xx} + k_2 u u_x + k_3 v_x \\ k_2 (uv)_x - k_1 v_{xx} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\delta H_\eta}{\delta u} \\ \frac{\delta H_\eta}{\delta v} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} k_2 (uv) - k_1 v_x \\ k_1 u_x + \frac{k_2}{2} u^2 + k_3 v \end{pmatrix},$$

$$H_\eta = H_\eta[u, v] = -\frac{1}{2} \gamma_3[u, v] = -\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+l} (k_2 u^2 v + k_3 v^2 + 2k_1 u_x v) dx. \quad (4.11)$$

Знайдемо імплектичний оператор ϑ , застосувавши диференціально-алгебраїчний алгоритм до функціоналу (4.11). Перетворимо його згідно (1.8):

$$H_\eta = -\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+l} (k_2 u^2 v + k_3 v^2 + 2k_1 u_x v) dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+l} (<(k_2 \partial^{-1}(uv) - 2k_1 v), u_x> + <k_3 \partial^{-1} v, v_x>) dx.$$

З отриманого представлення побудуємо оператори $\sigma', \sigma'^*, \theta_2^{-1}$:

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} k_2 \partial^{-1} v & -k_1 + \frac{1}{2} k_2 \partial^{-1} u \\ 0 & \frac{k_3}{2} \partial^{-1} \end{pmatrix}, \quad \sigma'^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} k_2 (v \partial^{-1}) & 0 \\ -k_1 - \frac{1}{2} k_2 u \partial^{-1} & -\frac{k_3}{2} \partial^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\theta_2^{-1} = \sigma' - \sigma'^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} k_2 (\partial^{-1} v + v \partial^{-1}) & -k_1 + \frac{1}{2} k_2 \partial^{-1} u \\ k_1 + \frac{1}{2} k_2 u \partial^{-1} & k_3 \partial^{-1} \end{pmatrix}.$$

Із співвідношення $\vartheta = \eta \theta_2^{-1} \eta$ [104] отримаємо імплектичний оператор

$$\vartheta = \eta \theta_2^{-1} \eta = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} k_2 (\partial^{-1} v + v \partial^{-1}) & -k_1 + \frac{1}{2} k_2 \partial^{-1} u \\ k_1 + \frac{1}{2} k_2 u \partial^{-1} & k_3 \partial^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_3 \partial & k_1 \partial^2 + \frac{k_2}{2} \partial u \\ \frac{k_2}{2} u \partial - k_1 \partial^2 & \frac{k_2}{2} (v \partial + \partial v) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Теорема 4.2. *Динамічна система (4.1) бігамільтонова, якщо коефіцієнти системи задовольняють умови теореми 4.1.*

Тобто, система (4.1) бігамільтонова, тобто її можна представити у вигляді (1.7), де $H_\vartheta, H_\eta \in D(M)$ функціонали Гамільтона (4.9), (4.11), а η, ϑ – пара імплектичних операторів (4.10), (4.12), якщо коефіцієнти системи задовольняють умову теореми 4.1.

Зауважимо, що отриманий оператор (4.12) при значеннях коефіцієнтів $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1, k_5 = -1$ системи співпадає з імплектичним оператором, що знайдений у праці [104].

При розв'язуванні диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП) виникає потреба знати точні розв'язки рівняння. Це потрібно для того, щоб мати можливість тестувати обчислювальні схеми. Одним з підходів для відшукання точних солітонних розв'язків є метод гіперболічних тангенс функцій.

Для побудови точних часткових розв'язків системи (4.1) скористаємося методом гіперболічних тангенс функцій, причому розв'язок системи (4.1) шукатимемо у вигляді поліному від гіперболічного тангенса та котангенса. З цією метою виконаємо кроки вказаного методу.

Крок 1. Зведення ДРЧП до ЗДР.

Шукаємо розв'язок у вигляді відокремленої хвилі, увівши заміну:

$$u(x, t) = u(c_1 x + c_2 t + c_3), v(x, t) = v(c_1 x + c_2 t + c_3).$$

Підставивши заміну у систему рівнянь (4.1), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} c_2 u = k_1 c_1^2 u'' + k_2 c_1 u u' + k_3 c_1 v', \\ c_2 v = k_2 c_1 (uv)' - k_1 c_1^2 v''. \end{cases} \quad (4.13)$$

Для зручності застосування методу гіперболічних тангенс функцій проінтегруємо систему (4.13):

$$\begin{cases} c_2 u = k_1 c_1^2 u' + \frac{k_2 c_1}{2} u^2 + k_3 c_1 v + C_1, \\ c_2 v = k_2 c_1 (uv) - k_1 c_1^2 v' + C_2, \end{cases} \quad (4.14)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Крок 2. Визначення степені поліноміального розв'язку.

Розв'язок системи (4.14) шукатимемо як суму поліномів від гіперболічного тангенса та котангенса:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a_{10} + \sum_{i=1}^{M_1} a_{1j} \tanh(c_1 x + c_2 t + c_3) + \sum_{i=1}^{M_1} a_{1j+M_1} \coth(c_1 x + c_2 t + c_3), \\ v(x, t) &= a_{20} + \sum_{i=1}^{M_2} a_{2j} \tanh(c_1 x + c_2 t + c_3) + \sum_{i=1}^{M_2} a_{2j+M_2} \coth(c_1 x + c_2 t + c_3). \end{aligned}$$

Для визначення степенів поліноміальних розв'язків підставимо $u(T) = T^{M_1}, v(T) = T^{M_2}$ у систему (4.13) та прирівняємо показники максимальних степенів. Після обчислень з'ясовуємо, що $M_1 = 1, M_2 = 2$. Отже, розв'язок шукатимемо у вигляді [112]

$$u(T) = a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}, \quad v(T) = a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^{-1} + a_{24}T^{-2}. \quad (4.15)$$

Зауважимо, що $T' = 1 - T^2, (T^{-1})' = 1 - (T^{-1})^2$.

Крок 3. Система алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів.

Підстановкою (4.15) у (4.14) отримуємо систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_2(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}) = k_1c_1^2(a_{11}(1-T^2) + a_{12}(1-T^{-2})) + \frac{k_2c_1}{2}(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1})^2 + \\ + k_3c_1(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^{-1} + a_{24}T^{-2}), \\ \\ c_2(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^{-1} + a_{24}T^{-2}) = \\ = k_4c_1(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^{-1} + a_{24}T^{-2})(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}) + \\ + k_5c_1^2(a_{21}(1-T^2) + 2a_{22}T(1-T^2) + a_{23}(1-T^{-2}) + 2a_{24}(1-T^{-2})). \end{array} \right.$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при однакових степенях гіперболічного тангенса, отримуємо систему для визначення невідомих коефіцієнтів:

$$\left\{ \begin{array}{l} T^0 : -c_2a_{10} + \frac{k_2c_1}{2}(a_{10}^2 + 2a_{11}a_{12}) + k_3c_1a_{20} + k_1c_1^2(a_{11} + a_{12}) = 0, \\ T^1 : -c_2a_{11} + k_2c_1(a_{10}a_{11}) + k_3c_1a_{21} = 0, \\ T^2 : k_1c_1^2a_{11} + \frac{k_2c_1}{2}a_{11}^2c_1 + k_3c_1a_{22} = 0, \\ T^{-1} : -c_2a_{12} + k_2c_1(a_{10}a_{12}) + k_3c_1a_{23} = 0, \\ T^{-2} : k_1c_1^2a_{12} + \frac{k_2c_1}{2}a_{12}^2c_1 + k_3c_1a_{24} = 0, \\ \\ T^0 : -c_2a_{20} + k_4c_1(a_{10}a_{20} + a_{12}a_{21} + a_{11}a_{23}) + k_5c_1^2(a_{21} + a_{23}) = 0, \\ T^1 : -c_2a_{21} + k_4c_1(a_{11}a_{20} + a_{11}a_{20} + a_{12}a_{22}) + 2k_5c_1^2a_{22} = 0, \\ T^2 : -c_2a_{22} + k_3c_1(a_{11}a_{21}) - k_5c_1^2a_{21} = 0, \\ T^3 : k_4c_1a_{11}a_{22} + 2k_5c_1^2a_{22} = 0, \\ T^{-1} : -c_2a_{23} + k_4c_1(a_{12}a_{20} + a_{12}a_{20} + a_{11}a_{24}) + 2k_5c_1^2a_{24} = 0, \\ T^{-2} : -c_2a_{24} + k_3c_1(a_{12}a_{23}) - k_5c_1^2a_{23} = 0, \\ T^{-3} : k_4c_1a_{12}a_{24} + 2k_5c_1^2a_{22} = 0. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Крок 4. Розв'язування системи алгебричних рівнянь.

Розв'язуємо систему (4.16) за умови, що коефіцієнти при найвищих степенях кожного з розв'язків і параметри c_j відмінні від нуля. Для забезпечення існування розв'язку, потрібно відкинути рівняння, що знаходяться при T^0 , адже під час інтегрування отримано сталі C_1, C_2 , які мають бути довільними. У підсумку знайдено невідомі коефіцієнти при степенях гіперболічного тангенса

$$\begin{aligned}
 a_{10} &= \frac{c_2 + \frac{c_2 k_2}{k_4} - \frac{c_2 k_1}{k_5}}{c_1 k_2}, a_{11} = -\frac{2 c_1 k_5}{k_4}, a_{12} = -\frac{2 c_1 k_5}{k_4}, \\
 a_{20} &= \frac{c_2^2 (k_1 k_4 - k_2 k_5)}{2 c_1^2 k_3 k_4^2 k_5}, a_{21} = -\frac{2 c_2 (k_1 k_4 - k_2 k_5)}{k_3 k_4^2}, a_{22} = -\frac{2 c_1^2 (k_1 k_4 k_5 - k_2 k_3 k_5^2)}{k_3 k_4^2}, \\
 a_{23} &= -\frac{2 c_2 (k_1 k_4 - k_2 k_5)}{k_3 k_4^2}, a_{24} = -\frac{2 c_1^2 (k_1 k_4 k_5 - k_2 k_3 k_5^2)}{k_3 k_4^2}.
 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Коефіцієнти в поліномі від гіперболічного котангенса співпадають з коефіцієнтами в поліномі від гіперболічного тангенса.

Крок 5. Виконавши процедуру обернену до запропонованої на кроці 1, отримаємо розв'язок вихідної системи у явному вигляді.

Із (4.15), (4.17), $c_1 = c_2 = 1$ та $c_3 = 0$, розв'язок системи (4.1) має вигляд

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1 + \frac{k_2}{k_4} - \frac{k_1}{k_5}}{k_2} - \frac{2 k_5}{k_4} (\tanh(x+t) + \coth(x+t)), \\
 v(x, t) &= \frac{(k_1 k_4 - k_2 k_5)}{2 k_3 k_4^2 k_5} - \left(\frac{2(k_1 k_4 - k_2 k_5)}{k_3 k_4^2} \right) (\tanh(x+t) + \coth(x+t)) - \\
 &\quad - \left(\frac{2(k_1 k_4 k_5 - k_2 k_3 k_5^2)}{k_3 k_4^2} \right) (\tanh^2(x+t) + \coth^2(x+t))
 \end{aligned} \quad (4.18)$$

На рис. 4.1. наведено графіки часткових розв'язків системи (4.1) у вигляді полінома від гіперболічного тангенса та котангенса.

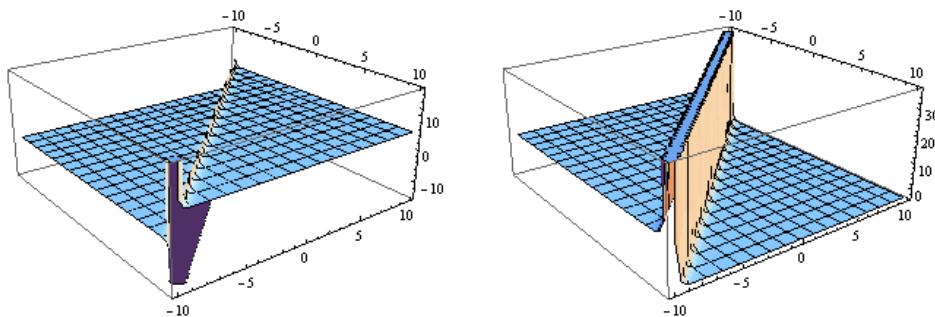


Рис 4.1. Графіки розв'язків системи (4.1) $u(x, t)$ та $v(x, t)$ при значеннях коефіцієнтів $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1, k_5 = -1$.

Підсумком наведених розрахунків є теорема про зв'язок між точними частковими розв'язками нелінійної динамічної системи у вигляді поліному від гіперболічного тангенса, гіперболічного котангенса та полінома, що містить гіперболічний тангенс та котангенс.

Теорема 4.3. У точному частковому розв'язку системи (4.1), який є поліномом від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса, коефіцієнти при однакових степенях гіперболічного тангенса та котангенса є рівні.

4.2. Комбінований алгоритм знаходження законів збереження та імплектичних операторів для системи Буссінеска-Бюргерса

Знаходження законів збереження для нелінійних динамічних систем є нетривіальною задачею. У цьому підрозділі запропоновано комбінований алгоритм знаходження законів збереження та імплектичних операторів нелінійних динамічних систем. Цей алгоритм спрощує та пришвидшує знаходження законів збереження для нелінійних динамічних систем. Наводимо кроки алгоритму:

Крок 1. Методом невизначених коефіцієнтів (прямий метод) знаходимо декілька законів збереження, яких є достатньо для знаходження імплектичних операторів.

Крок 2. Використовуючи диференціально-алгебричний алгоритм, знаходимо перший оператор ϑ .

Крок 3. Якщо оператор ϑ задовольняє рівняння Ньютера, то знаходимо відповідний Гамільтоніан H_ϑ , використовуючи гамільтонову властивість системи $u_t = -\vartheta \text{grad}H_\vartheta = K[u]$, звідки отримуємо перший імплектичний оператор ϑ .

Крок 4.3 використанням диференціально-алгебричного алгоритму побудувати другий оператор η .

Крок 5. Якщо оператор η задовольняє рівняння Ньютера, тоді система є бігамільтонова з другим імплектичним оператором η , а рекурсійний оператор має вигляд $\Lambda = \vartheta^{-1}\eta$.

Знайдений рекурсійний оператор породжує нескінченну ієрархію законів збереження, причому їхні градієнти задовольняють рекурентне співвідношення $\text{grad}\gamma_{i+1} = \Lambda \text{grad}\gamma_i, i \in Z_+$.

Наступні закони збереження отримуємо в явному вигляді без використання асимптотичних розвинень та розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь.

Описаний підхід застосовано до знаходження законів збереження та пари імплектичних операторів нелінійної динамічної системи Буссінеска-Бюргерса. Отримані результати використано для знаходження скінченновимірних інваріантних редукцій.

Нехай $M \subset C_l^\infty(R, R^2)$ – гладкий l – періодичний многовид, на якому задано нелінійну динамічну систему Буссінеска-Бюргерса [109]:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}v_x - 2uu_x \\ v_t = \frac{1}{2}u_{xxx} - 2(uv)_x \end{cases} = K[u, v], \quad (4.19)$$

де $u = u(x, t), v = v(x, t)$ функції, $K : M \rightarrow T(M)$ – гладке за Фреше векторне поле на многовиді M , що визначає еволюцію нелінійної динамічної системи (4.19).

Вибравши значення параметру $\alpha = 1$ у системі Броера-Каупак-Купершмідта [109]

$$\begin{cases} u_t = -\frac{1-\alpha}{2}u_{xx} + \frac{1}{2}v_x - 2uu_x \\ v_t = \frac{\alpha(2-\alpha)}{2}u_{xxx} + \frac{1-\alpha}{2}v_{xx} - 2(uv)_x \end{cases} = K[u, v],$$

отримаємо систему (4.19). Імплектичні оператори і рекурсійний оператор для системи Броера-Каупак-Купершмідта знайдені у [109]. Наша мета – це показати можливості пропонованої методики та побудова скінченно-вимірних інваріантних редукцій системи Буссінеска-Бюргерса.

На основі комбінованого алгоритму, знайдено закони збереження нелінійної динамічної системи (4.19).

Теорема 4.4. *Нелінійна динамічна система (4.19) володіє такими першими трьома законами збереження:*

$$\gamma_0 = \int_{x_0}^{x_0+l} u dx, \gamma_1 = \int_{x_0}^{x_0+l} v dx, \gamma_2 = \int_{x_0}^{x_0+l} uv dx. \quad (4.20)$$

Доведення. Покажемо, що функціонали (4.20) є законами збереження системи (4.19). Справді, з властивості незмінності функціоналів здовж орбіт

векторного поля $\frac{d\gamma_0}{dt}\Big|_{K[u,v]} \equiv 0, \frac{d\gamma_1}{dt}\Big|_{K[u,v]} \equiv 0, \frac{d\gamma_2}{dt}\Big|_{K[u,v]} \equiv 0$ на l – періодичному многовиді M отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_0}{dt}\Big|_{K[u,v]} &= \int_{x_0}^{x_0+l} u_t\Big|_{K[u,v]} dx = \int_{x_0}^{x_0+l} (1/2v_x - 2uu_x) dx = (1/2v - u^2)\Big|_{x_0}^{x_0+l} \equiv 0, \\ \frac{d\gamma_1}{dt}\Big|_{K[u,v]} &= \int_{x_0}^{x_0+l} v_t\Big|_{K[u,v]} dx = \int_{x_0}^{x_0+l} (1/2u_{xx} - 2(uv)_x) dx = (1/2u_{xx} - uv)\Big|_{x_0}^{x_0+l} \equiv 0, \\ \frac{d\gamma_2}{dt}\Big|_{K[u,v]} &= \int_{x_0}^{x_0+l} (uv)_t\Big|_{K[u,v]} dx = \int_{x_0}^{x_0+l} (uv_t\Big|_{K[u,v]} + vu_t\Big|_{K[u,v]}) dx \equiv 0. \end{aligned}$$

Отже, теорему доведено.

На підставі трьох знайдених законів збереження, побудуємо імплектичний оператор з використанням диференціально-алгебричного алгоритму. Нехай ∂ позначає часткову похідну за змінною x : $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$.

Твердження 4.1. Система (4.19) є бігамільтонова, причому імплектичні оператори мають вигляд

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 1/2\partial & -\partial u \\ -u\partial & 1/2\partial^3 - v\partial - \partial v \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

а відповідні функціонали Гамільтона мають вигляд

$$H_\vartheta = \int_{x_0}^{x_0+l} \left(u^2v - \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{4}u_x^2 \right) dx, \quad H_\eta = H_\eta[u, v] = -\gamma_2[u, v] = \int_{x_0}^{x_0+l} (uv) dx. \quad (4.22)$$

Доведення. Оператор ϑ з (4.21), знайдений у [109], задовольняє рівняння Ньютер. Покажемо, що цей оператор можна знайти з використанням диференціально алгебричного алгоритму.

Нехай $H_\eta = H_\eta[u, v] = -\gamma_2[u, v] = \int_{x_0}^{x_0+l} (uv) dx$ та введено білінійну форму

$$\langle a, b \rangle = \int_{x_0}^{x_0+l} ab dx, \quad \forall a, b \in M.$$

Використовуючи диференціально-алгебричний алгоритм, отримуємо такі вирази

$$\begin{aligned} H_\eta &= -\langle u, v \rangle = -\frac{1}{2} \langle u, v \rangle - \frac{1}{2} \langle v, u \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \partial^{-1} v, u_x \rangle + \frac{1}{2} \langle \partial^{-1} u, v_x \rangle = \langle \sigma_1, u_x \rangle + \langle \sigma_2, v_x \rangle, \end{aligned}$$

де $\sigma_1 = \frac{1}{2} \partial^{-1} v, \sigma_2 = \frac{1}{2} \partial^{-1} u$. Побудуємо оператори $\sigma', \sigma'^*, \theta_1^{-1}$ згідно з [104]

$$\sigma' = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \sigma'^* = -1/2 \begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \theta_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обернений оператор θ_1 існує, та має вигляд: $\vartheta = \theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}$.

Оскільки оператор ϑ задовольняє рівняння Ньютер $\vartheta_t - \vartheta K'^* - K'\vartheta = 0$, то оператор ϑ є імплектичний, де оператори K', K'^* мають вигляд

$$K' = \begin{pmatrix} -2\partial u & 1/2\partial \\ 1/2\partial^3 - 2\partial v & -2\partial u \end{pmatrix}, K'^* = \begin{pmatrix} -2u\partial & -1/2\partial^3 + 2v\partial \\ -1/2\partial & 2u\partial \end{pmatrix}.$$

На підставі гамільтоновості системи (4.19) формулюємо задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знати функціонал } H_\vartheta \text{ такий, що} \\ K[u, v] = -\vartheta \text{grad}H_\vartheta, \end{array} \right.$$

з якої отримано співвідношення

$$-\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H_\vartheta / \delta u \\ \delta H_\vartheta / \delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2v_x - 2uu_x \\ 1/2u_{xxx} - 2(uh)x \end{pmatrix}.$$

Використовуючи $\delta H_\vartheta / \delta u = -1/2u_{xx} + 2uv, \delta H_\vartheta / \delta v = -1/2v + u^2$, знаходимо функціонал Гамільтона (4.22), крім того, функціонал H_ϑ є законом збереження системи (4.19).

Отже, виконано перші три кроки алгоритму.

Розглянемо Гамільтоніан H_ϑ

$$\begin{aligned} H_\vartheta &= \langle u^2 v - \frac{1}{4} v^2 + \frac{1}{4} u_x^2, 1 \rangle = \langle uv, u \rangle - \frac{1}{4} \langle v, v \rangle + \frac{1}{4} \langle u_x, u_x \rangle = \\ &= -\langle \partial^{-1}(uv), u_x \rangle + \frac{1}{4} \langle u_x, u_x \rangle + \frac{1}{4} \langle \partial^{-1}v, v_x \rangle = \end{aligned}$$

$$= \left\langle \frac{1}{4} \partial^{-1} v - \partial^{-1}(uv), u_x \right\rangle + \left\langle \frac{1}{4} \partial^{-1} v, v_x \right\rangle.$$

Допоміжні оператори $\sigma', \sigma'^*, \theta_2^{-1}$ мають вигляд

$$\begin{aligned}\sigma' &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \partial - \partial^{-1} v & -\partial^{-1} u \\ 0 & \frac{1}{4} \partial^{-1} \end{pmatrix}, \quad \sigma'^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \partial + v \partial^{-1} & 0 \\ u \partial^{-1} & -\frac{1}{4} \partial^{-1} \end{pmatrix}, \\ \theta_2^{-1} = \sigma' - \sigma'^* &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial - \partial^{-1} v - v \partial^{-1} & -\partial^{-1} u \\ -u \partial^{-1} & \frac{1}{2} \partial^{-1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Оператор η знайдемо зі спiввiдношення $\eta = \vartheta \theta_2^{-1} \vartheta$ [104]

$$\begin{aligned}\eta = \vartheta \theta_2^{-1} \vartheta &= \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial - \partial^{-1} v - v \partial^{-1} & -\partial^{-1} u \\ -u \partial^{-1} & \frac{1}{2} \partial^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial & -\partial u \\ -u \partial & \frac{1}{2} \partial^3 - v \partial - \partial v \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Оскiльки оператор η задовольняє рiвняння Ньотер $\eta_t - \eta K'^* - K' \eta = 0$, то вiн є iмплектичним, а система (4.19) є бiгамiльтонова.

Теорема 4.5. Система (4.19) володiє нескiнченною iерархiєю законiв збереження $\{\gamma_i\}, i \in \mathbb{Z}_+$, що породженi оператором рекурсiї

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\partial^{-1} u \partial & \frac{1}{2} \partial^2 - \partial^{-1} v \partial - v \\ \frac{1}{2} & -u \end{pmatrix},$$

та градiєнтним спiввiдношенням $grad\gamma_{i+1} = \Lambda grad\gamma_i, i \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. Оскiльки оператори ϑ та η є iмплектичними, то градiєнтне спiввiдношення

$$\vartheta grad\gamma_{i+1} = \eta grad\gamma_i \tag{4.23}$$

справедливe для усiх $i \in \mathbb{Z}_+$ [17]. Помноживши (4.23) на ϑ^{-1} , отримаємо

$$grad\gamma_{i+1} = \vartheta^{-1} \eta grad\gamma_i, i \in \mathbb{Z}_+.$$

отже оператор $\Lambda = \vartheta^{-1} \eta$ є рекурсiйним оператором. Оскiльки

$$\mathcal{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

то знайдено оператор рекурсії у вигляді

$$\Lambda = \mathcal{G}^{-1} \eta = \begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial & -\partial u \\ -u \partial & \frac{1}{2} \partial^3 - v \partial - \partial v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial^{-1} u \partial & \frac{1}{2} \partial^2 - \partial^{-1} v \partial - v \\ \frac{1}{2} & -u \end{pmatrix}.$$

Використавши отримані результати, знаходимо наступні закони збереження ієрархії:

$$\gamma_4 = \int_{x_0}^{x_0+l} \left(-u^3 v + \frac{3}{4} u v^2 - \frac{3}{4} u u_x^2 + \frac{1}{4} u_x v_x \right) dx,$$

$$\gamma_5 = \int_{x_0}^{x_0+l} \left(u^4 v - \frac{3}{2} u^2 v^2 + \frac{1}{8} v^3 + \frac{3}{2} u^2 u_x - \frac{5}{8} v u_x^2 - u u_x v_x + \frac{1}{16} (v_x^2 - u_{xx}^2) \right) dx.$$

Функціонал γ_4 використано для побудови чотири-вимірної інваріантної редукції системи (4.19).

4.3. Скінченновимірна редукція системи Буссінеска-Бюргерса

Визначимо двовимірний підмноговид $M^2 \in M$ як множину критичних точок функціонала Лагранжа: $L_2 \in D(M)$:

$$L_2[u, v] := \int_{x_0}^{x_0+l} \left[c_\eta u v + c_g \left(u^2 v - \frac{1}{4} v^2 + \frac{1}{4} u_x^2 \right) \right] dx, \quad (4.24)$$

де c_η, c_g – довільні константи.

Згідно з гіпотезою Лакса [12, 77, 104] скінченновимірний інваріантний підмноговид системи (4.19) задано таким обмеженням

$$M^2 := \{(u, v) \in M : \text{grad} L_2[u, v] = 0\}.$$

Обчисливши $\text{grad} L_2$ отримано:

$$M^2 := \left\{ (u, v) \in M : \begin{aligned} \frac{\delta L_2}{\delta u} &= c_\eta v + 2c_g u v - \frac{1}{2} c_g u_{xx} = 0, \\ \frac{\delta L_2}{\delta v} &= c_\eta u + c_g u^2 - \frac{1}{2} c_g v = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.25)$$

Згідно з (4.25) знайдено, що на підмноговиді справедливе співвідношення $v = \frac{2c_\eta}{c_g} u + 2u^2$. Використавши співвідношення Гельфандадикого [17, 77], диференціал (4.24) має вигляд:

$$d\mathbf{L}_3 = \left(c_\eta v + 2c_g uv - \frac{1}{2} c_g u_{xx} \right) du + \left(c_\eta u + c_g u^2 - \frac{1}{2} c_g v \right) dv + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} c_g u_x du \right)$$

звідки 1-форма [17] має вигляд $\alpha^{(1)} := \frac{1}{2} c_g u_x du$.

Симплектична структура $\omega^{(2)}$, визначена як зовнішнє диференціювання 1-форми $\alpha^{(1)}$ має вигляд

$$\omega^{(2)} := d\alpha^{(1)} = d \left(\frac{1}{2} c_g u_x \right) \wedge du \quad (4.26)$$

на многовиді $M^2 \in M$.

Оскільки підмноговид $M^2 \in M$ є симплектичний зі структурою (4.26), введемо канонічні змінні на підмноговиді $M^2 \in M$

$$p := \frac{1}{2} c_g u_x, \quad q := u. \quad (4.27)$$

Елементи фазового простору u, v в канонічних змінних (4.26) підмноговиду $M^2 \subset M$ мають вигляд

$$v = \frac{2c_\eta}{c_g} q + 2q^2.$$

Гамільтоніан $h_2^{(x)}$, що відповідає векторному d/dx знайдено з співвідношення $\frac{dh_2^{(x)}}{dx} = - \left(\frac{\delta \mathbf{L}_2}{\delta u} u_x + \frac{\delta \mathbf{L}_2}{\delta v} v_x \right)$. Отже, Гамільтоніан $h_2^{(x)}$ в локальних координатах має вигляд $h_2^{(x)} = -c_\eta uv - c_g u^2 v + \frac{1}{4} c_g v^2 + \frac{1}{4} u_x^2$, а в канонічних координатах (4.27) підмноговиду $M^2 \subset M$ задано як

$$h_2^{(x)}(q, p) = \frac{1}{c_g} p^2 - \frac{c_\eta^2}{c_g} q^2 - 2c_\eta q^3 - c_g q^4. \quad (4.28)$$

Згідно з [17] отримано таку гамільтонову систему:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dx} = \frac{2p}{c_g}, \\ \frac{dp}{dx} = \frac{2c_\eta^2 q}{c_g} + 6c_\eta q^2 + 4c_g q^3, \end{cases} \quad (4.29)$$

яка має три стаціонарні точки у фазовому просторі: дві гіперболічні точки з координатами $(q_0, p_0) = (0,0)$, $(q_0, p_0) = \left(-\frac{c_\eta}{c_g}, 0\right)$ та еліптичну $(q_0, p_0) = \left(-\frac{c_\eta}{2c_g}, 0\right)$.

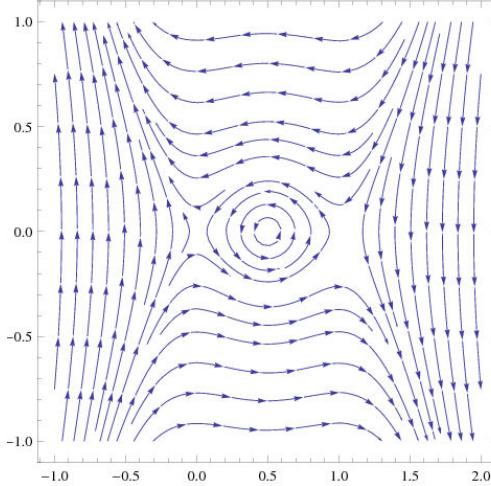


Рис. 4.2. Фазовий портрет системи (4.29) при $c_\eta = 1, c_g = -1$.

Фазовий портрет системи (4.29), зображений на рис. 4.2., надає важливу інформацію про визначення початкових умов для періодичних розв'язків нелінійної динамічної системи. Якщо вибирати початкові умови (4.29) з внутрішньої області граничного циклу системи (4.29), то отримуємо періодичний розв'язок системи (4.19).

Векторне поле d/dt також є гамільтонове. Гамільтоніан $h_2^{(t)}$, що відповідає векторному полю d/dt знайдено із співвідношення

$$\frac{dh_2^{(t)}}{dx} = -\left(\frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta u} u_t + \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta v} v_t\right) \Big|_{K[u,v]}$$

та $h_2^{(t)}$ в локальних координатах має вигляд:

$$h_2^{(t)} = 2c_\eta u^2 v + 2c_g u^3 v - \frac{c_\eta}{4} v^2 - c_g u v^2 + \frac{c_\eta}{4} u_x^2 - \frac{c_\eta}{2} u u_{xx} - \frac{c_g}{2} u^2 u_{xx} + \frac{c_g}{4} u_{xx} v,$$

а в канонічних координатах (4.27) підмноговиду $M^2 \in M$ задано як

$$h_2^{(t)}(q, p) = \begin{pmatrix} c_\eta \\ c_g \end{pmatrix} h_2^{(x)}(q, p) = \frac{c_\eta}{c_g^2} p^2 - \frac{c_\eta^3}{c_g^2} q^2 - 2 \frac{c_\eta^2}{c_g} q^3 - c_\eta q^4. \quad (4.30)$$

Знайдено гамільтонову систему:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{2c_\eta p}{c_g^2}, \\ \frac{dp}{dt} = \frac{2c_\eta^3 q}{c_g^2} + \frac{6c_\eta^2 q^2}{c_g} + 4c_\eta q^3, \end{cases} \quad (4.31)$$

яка володіє такими ж критичними точками, як і система (4.29).

Фазовий портрет системи (4.31) співпадає з фазовим портретом системи (4.29). Якщо вибирати початкові умови системи (4.31) які дозволяють отримати періодичні розв'язки, то, наклавши векторні поля, отримаємо періодичні розв'язки системи (4.19).

Теорема 4.6. *Редукція нелінійної динамічної системи Буссінеска-Бюргерса (4.19) на двовимірний інваріантний підмноговид $M^2 \subset M$ еквівалентна двом комутуючим гамільтоновим потокам (4.29) та (4.31), які є повністю інтегровні у квадратурах.*

Часткові розв'язки системи (4.19) отримано накладанням векторних полів d/dx (4.29) та d/dt (4.31).

Розв'язки систем (4.29) та (4.31) мають вигляд:

$$x - x_0 = \int_{q_0}^q \frac{|c_g| dq}{2\sqrt{c_\eta^2 q^2 + 2c_g q^3 + 2c_g^2 q^4 + \beta}}, \quad t - t_0 = \int_{q_0}^q \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_g^3}{c_\eta^3 q^2 + 2c_\eta c_g q^3 + 2c_\eta c_g^2 q^4 + \beta}} dq,$$

де x_0, t_0, q_0 – деякі дійсні числа, β – довільний дійсний параметр.

Виберемо коефіцієнти системи (4.19) та коефіцієнти функціоналу Лагранжа (4.24) $c_\eta = 1, c_g = -1$. Проінтегруємо систему (4.29), яка відповідає векторному полю d/dx в області $x \in (0, 10]$ з кроком $\Delta x = 0.1$ за змінною x з початковими умовами ($q_0 = 0.5, p_0 = 0.2$), які вибрані з області граничного циклу системи (4.29). Оскільки

$$u = q, v = 2q(q-1) \quad (4.32)$$

на підмноговиді $M^2 \subset M$, тоді в початковий момент часу $t_0 = 0$ розв'язки $u(x,0), v(x,0)$ нелінійної динамічної системи (4.19) зображені на рис 4.3.

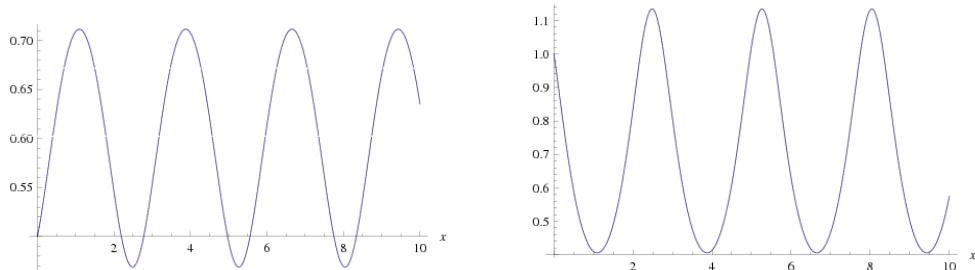


Рис. 4.3: Розв'язок $u(x,0)$ та $v(x,0)$ системи (4.19) з $c_\eta = 1, c_g = -1$ в початковий момент часу $t_0 = 0$.

Інтегруємо систему (4.31) асоційовану з векторним полем d/dt на інтервалі $t \in (0,10]$ з кроком $\Delta t = 0.1$, вибравши $(q_0 = 0.5, p_0 = 0.2)$ з граничного циклу системи (4.31). Отже, отримано часову еволюцію в точці $x=0$: $q(0,t), p(0,t)$. У кожний момент часу $t = t_k$ проінтегровано систему (4.29) з початковими умовами $(q_0 = q(0,t_k), p_0 = p(0,t_k))$ і отримано розв'язки $u(x,t), v(x,t)$ системи (4.19) на підмноговиді.

Використавши співвідношення (4.32), отримано періодичні точні розв'язки нелінійної динамічної системи (4.19) для $u = u(x,t)$ та $v = v(x,t)$, які зображені на рис. 4.4.

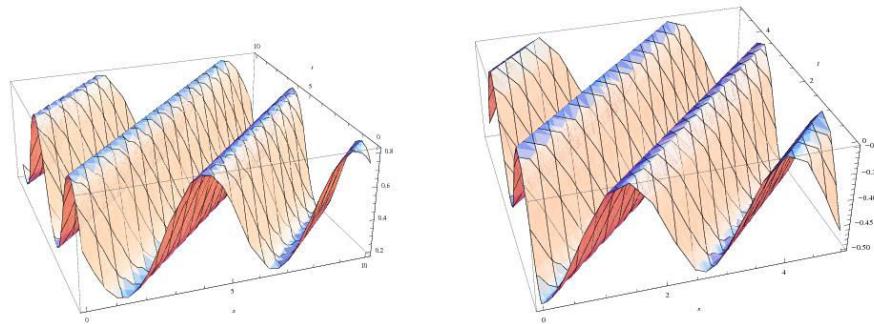


Рис. 4.4: Розв'язки $u = u(x,t)$ та $v = v(x,t)$ системи (4.19) з $c_\eta = 1, c_g = -1$.

Розглянемо функціонал Лагранжа для системи (4.19):

$$\mathcal{L}_4[u, v] := \int_{x_0}^{x_0+l} \left[c_\eta uv + c_g \left(u^2 v - \frac{1}{4} v^2 + \frac{1}{4} u_x^2 \right) + c_4 \left(-u^3 v + \frac{3}{4} u v^2 - \frac{3}{4} u u_x^2 + \frac{1}{4} u_x v_x \right) \right] dx. \quad (4.33)$$

Розглянемо чотиривимірний підмноговид $M^4 \subset M$:

$$M^4 = \{(u, v) \in M : \text{grad}\mathcal{L}_4[u, v] = 0\}$$

як множину критичних точок функціоналу (4.33), тобто:

$$M^4 = \left\{ \begin{array}{l} (u, v) \in M : c_\eta v + 2c_g uv - 3c_4 u^2 v + \\ + \frac{3}{4} c_4 v^2 + \frac{3}{4} c_4 u_x^2 - \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{3}{2} c_4 u u_{xx} - \frac{1}{4} c_4 v_{xx} = 0, \\ c_\eta u + c_g u^2 - c_4 u^3 - \frac{1}{2} c_g v + \frac{3}{4} u v - \frac{1}{4} c_4 u_{xx} = 0 \end{array} \right\}. \quad (4.34)$$

На підмноговиді (4.34) існує симплектична структура $\omega^{(2)} = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$ вигляду

$$\omega^{(2)} = d\left(\frac{1}{2} c_g u_x + c_4 \left(-\frac{3}{2} u u_x + \frac{1}{4} v_x\right)\right) \wedge du + d\left(\frac{1}{4} c_4 u_x\right) \wedge dv.$$

Канонічні змінні $\{p_1, q_1, p_2, q_2\}$ на підмноговиді $M^4 \subset M$ виражено

$$p_1 = \frac{1}{2} c_g u_x + c_4 \left(-\frac{3}{2} u u_x + \frac{1}{4} v_x\right), q_1 = u, p_2 = \frac{1}{4} c_4 u_x, q_2 = v.$$

Елементи $\{u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}\}$ на підмноговиді $M^4 \subset M$ задано так

$$\begin{aligned} u &= q_1, v = q_2, u_x = \frac{4}{c_4} p_2, v_x = \frac{4}{c_4^2} (c_4 p_1 - 2c_g p_2 + 6c_4 p_2 q_1), \\ u_{xx} &= \frac{2}{c_4^2} (2c_\eta q_1 + 2c_g q_1^2 - 2c_4 q_1^3 - c_g q_2 + 3c_4 q_1 q_2), \\ u_{xx} &= \frac{1}{c_4^2} (48p_2^2 - 8c_\eta c_g q_1 + 24c_4 c_\eta q_1^2 - 8c_g^2 q_1^2 + 32c_4 c_g q_1^3 - 24c_4^2 q_1^4 + 4c_4 c_\eta q_2 + \\ &\quad + 4c_g^2 q_2 - 16c_4 c_g q_1 q_2 + 24c_4^2 q_1^2 q_2 + 3c_4^2 q_2^2) \end{aligned}$$

Гамільтоніани $h_4^{(x)}$ та $h_4^{(t)}$ отримано з спiввiдношень

$$\frac{dh_4^{(x)}}{dx} = -\left(\frac{\delta \mathcal{L}_4}{\delta u} u_x + \frac{\delta \mathcal{L}_4}{\delta v} v_x \right), \frac{dh_4^{(t)}}{dx} = -\left(\frac{\delta \mathcal{L}_4}{\delta u} u_t + \frac{\delta \mathcal{L}_4}{\delta v} v_t \right) \Big|_{K[u, v]}$$

якi у локальних координатах пiдмноговиду $M^4 \subset M$ мають вигляд

$$h_4^{(x)} = \frac{4p_1 p_2}{c_4} - \frac{4c_g p_2^2}{c_4^2} + \frac{12p_2^2 q_1}{c_4} - c_\eta q_1 q_2 - c_g q_1^2 q_2 + c_4 q_1^3 q_2 + \frac{c_g q_2^2}{4} - \frac{3}{4} c_4 q_1 q_2^2 \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}
h_4^{(t)} = & \frac{p_1^2}{c_4} - \frac{4c_g p_1 p_2}{c_4^2} + \frac{4c_\eta p_2^2}{c_4^2} + \frac{4c_g^2 p_2^2}{c_4^3} + \frac{4p_1 p_2 q_1}{c_4} - \frac{8c_g p_2^2 q_1}{c_4^2} - \frac{c_\eta^2 q_1^2}{c_4} - \\
& \frac{2c_\eta c_g q_1^3}{c_4} + 2c_\eta q_1^4 - \frac{c_g^2 q_1^4}{c_4} + 2c_g q_1^5 - c_4 q_1^6 + \frac{2p_2^2 q_2}{c_4} + \frac{c_\eta c_g q_1 q_2}{c_4} - \\
& c_g q_1^2 q_2 + \frac{c_g^2 q_1^2 q_2}{c_4} - 2c_g q_1^3 q_2 + c_4 q_1^4 q_2 - \frac{c_\eta q_2^2}{4} - \frac{c_g^2 q_2^2}{4c_4} + 1/2 c_g q_1 q_2^2 - \frac{c_4 q_2^3}{8}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Система для векторного поля d/dx , яка знайдена з (4.35), надає інформацію для визначення початкових умов, має вигляд

$$\left\{
\begin{aligned}
\frac{dq_1}{dx} &= \frac{4p_2}{c_4}, \\
\frac{dp_1}{dx} &= -\frac{12p_2^2}{c_4} + c_\eta q_2 + 2c_g q_1 q_2 - 3c_4 q_1^2 q_2 + \frac{3c_4 q_2^2}{4}, \\
\frac{dq_2}{dx} &= \frac{4p_1}{c_4} - \frac{8c_g p_2}{c_4^2} + \frac{24p_2 q_1}{c_4}, \\
\frac{dp_2}{dx} &= c_\eta q_1 + c_g q_1^2 - c_4 q_1^3 - \frac{c_g q_2}{2} + \frac{3c_4 q_1 q_2}{2},
\end{aligned}
\right. \tag{4.37}$$

Система для векторного поля d/dt має вигляд

$$\left\{
\begin{aligned}
\frac{dq_1}{dt} &= \frac{2p_1}{c_4} - \frac{4c_g p_2}{c_4^2} + \frac{4p_2 q_1}{c_4}, \\
\frac{dp_1}{dt} &= -\frac{4p_1 p_2}{c_4} + \frac{8c_g p_2^2}{c_4^2} + \frac{2c_\eta^2 q_1}{c_4} + \frac{6c_\eta c_g q_1^2}{c_4} - 8c_\eta q_1^3 + \\
& + \frac{4c_g^2 q_1^3}{c_4} - 10c_g q_1^4 + 6c_4 q_1^5 - \frac{c_\eta c_g q_2}{c_4} + 2c_\eta q_1 q_2 - \frac{2c_g^2 q_1 q_2}{c_4} + \\
& + 6c_g q_1^2 q_2 - 4c_4 q_1^3 q_2 - \frac{c_g q_2^2}{2}, \\
\frac{dq_2}{dt} &= -\frac{4c_g p_1}{c_4^2} + \frac{8c_\eta p_2}{c_4^2} + \frac{8c_g^2 p_2}{c_4^3} + \frac{4p_1 q_1}{c_4} - \frac{16c_g p_2 q_1}{c_4^2} + \frac{4p_2 q_2}{c_4}, \\
\frac{dp_2}{dt} &= -\frac{2p_2^2}{c_4} - \frac{c_\eta c_g q_1}{c_4} + c_\eta q_1^2 - \frac{c_g^2 q_1^2}{c_4} + 2c_g q_1^3 - c_4 q_1^4 + \\
& + \frac{c_\eta q_2}{2} + \frac{c_g^2 q_2}{2c_4} - c_g q_1 q_2 + \frac{3c_4 q_2^2}{8}.
\end{aligned}
\right. \tag{4.38}$$

Теорема 4.7. Редукція на чотиривимірний інваріантний підмноговид $M^4 \subset M$ нелінійної динамічної системи (4.19) еквівалентна системі двох комутуючих гамільтонових потоків (4.37) та (4.38) які повністю інтегровні у квадратурах.

Відповідні Гамільтоніани задано виразами (4.35) та (4.36).

4.4. Точні солітонні розв'язки двовимірної динамічної системи Бюргерса

Нехай задана двовимірна нелінійна динамічна система Бюргерса з дійсними числовими коефіцієнтами [108]

$$\begin{cases} u_t + k_{11}uu_x + k_{12}vu_y = k_{13}u_{xx} + k_{14}u_{yy}, \\ v_t + k_{21}uv_x + k_{22}vv_y = k_{23}v_{xx} + k_{24}v_{yy}, \end{cases} \quad (4.39)$$

де функції $u = u(x, y, t), v = v(x, y, t)$, а $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ – дійсні ненульові числові коефіцієнти.

Визначником системи (4.39) називатимемо визначник матриці складеної з коефіцієнтів при конвекційних членах системи (4.39), тобто $\Delta = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}$.

Використовуючи метод гіперболічних тангенсів функцій, знайдемо точні солітонні розв'язки нелінійної динамічної системи (4.39) та дослідимо, за яких значень коефіцієнтів системи (4.39) розв'язки існують.

Знайдемо солітонні розв'язки системи (4.39) у вигляді полінома від гіперболічного тангенса.

Крок 1. Зведення системи ДРЧП до системи ЗДР

Уведемо рухому систему координат: $\xi = c_1x + c_2y + c_3t + c_4$, де c_1, c_2, c_3 – довільні відмінні від нуля дійсні числа, а число c_4 – фаза хвилі. Зробимо заміну $u(x, y, t) = u(\xi) = u(c_1x + c_2y + c_3t + c_4)$, $v(x, y, t) = v(\xi) = v(c_1x + c_2y + c_3t + c_4)$.

Врахувавши вирази для часткових похідних функцій u та v , отримуємо систему нелінійних ЗДР

$$\begin{cases} c_3u'(\xi) + k_{11}c_1u(\xi)u'(\xi) + k_{12}c_2v(\xi)u'(\xi) = (k_{13}c_1^2 + k_{14}c_2^2)u''(\xi), \\ c_3v'(\xi) + k_{21}c_1u(\xi)v'(\xi) + k_{22}c_2v(\xi)v'(\xi) = (k_{23}c_1^2 + k_{24}c_2^2)v''(\xi). \end{cases} \quad (4.40)$$

Розв'язки системи (4.40) шукатимемо у вигляді полінома від гіперболічного тангенса

$$u(\xi) = a_{10} + \sum_{j=1}^{M_1} a_{1j}T^j, \quad v(\xi) = a_{20} + \sum_{j=1}^{M_2} a_{2j}T^j, \quad (4.41)$$

де $T = th(\xi)$ – гіперболічний тангенс, a_{ij} , M_1 , M_2 – невідомі числа. Тут індекс $i=1,2$ та індекс $j=\overline{0, M_1}$; $j=\overline{0, M_2}$. Визначимо невідомі коефіцієнти a_{ij} та степені поліномів M_1, M_2 , послідовно виконуючи кроки 2–4 методу гіперболічних тангенс функцій [83].

Крок 2. Визначення степенів поліноміальних розв'язків.

Підставимо поліноми $u(\xi) = T^{M_1}$, $v(\xi) = T^{M_2}$ у систему (4.40) для визначення степеня поліноміального розв'язку (4.41) [83]. Зауважимо, що $T' = 1 - T^2$. Запишемо вирази перших і других похідних $u(\xi)$ та $v(\xi)$

$$u'(\xi) = M_1(1 - T^2)T^{M_1-1}, \quad u''(\xi) = M_1(M_1 - 1)(1 - T^2)^2 T^{M_1-2} - 2M_1 T(1 - T^2)T^{M_1-1},$$

$$v'(\xi) = M_2(1 - T^2)T^{M_2-1}, \quad v''(\xi) = M_2(M_2 - 1)(1 - T^2)^2 T^{M_2-2} - 2M_2 T(1 - T^2)T^{M_2-1}.$$

Введемо позначення: нехай $\deg(P)$ – найвищий степінь гіперболічного тангенса в поліномі $P = P(\xi)$. Випишемо степені поліноміальних розв'язків і їхніх похідних:

$$\deg(u(\xi)) = M_1, \quad \deg(u'(\xi)) = M_1 + 1, \quad \deg(u''(\xi)) = M_1 + 2,$$

$$\deg(v(\xi)) = M_2, \quad \deg(v'(\xi)) = M_2 + 1, \quad \deg(v''(\xi)) = M_2 + 2.$$

Степені кожного нелінійного доданка в системі (4.40) набули вигляду:
 $\deg(uu') = 2M_1 + 1$, $\deg(uv') = M_1 + M_2 + 1$, $\deg(u'v) = M_1 + M_2 + 1$, $\deg(vv') = 2M_2 + 1$.

Для першого та другого рівняння системи (4.40) отримуємо, відповідно, множини значень степенів $E_1 = \{M_1 + 1, 2M_1 + 1, M_1 + M_2 + 1, M_1 + 2\}$ і $E_2 = \{M_2 + 1, M_1 + M_2 + 1, 2M_2 + 1, M_2 + 2\}$. Зожної множини E_1 та E_2 виберемо по два максимальні елементи та отримаємо відповідні множини: $E_{1\max} = \{2M_1 + 1, M_1 + M_2 + 1\}$ та $E_{2\max} = \{2M_2 + 1, M_1 + M_2 + 1\}$. Із цих множин отримуємо систему рівнянь для визначення M_1, M_2

$$\begin{cases} 2M_1 + 1 = M_1 + M_2 + 1, \\ 2M_2 + 1 = M_1 + M_2 + 1. \end{cases} \quad (4.42)$$

Розв'язком системи (4.42) є $M_2 = M_1$, де M_1 – довільне ненульове число. Зазначимо, що в [13] у таких випадках запропоновано обрати для M_1 довільні ненульові значення, наприклад, для зручності приймемо $M_1 = 2$ і

$M_2 = 2$. У такому випадку пересвідчимось, що такий вибір не приводить до отримання точного розв'язку. З цією метою розв'язок системи (4.40) шукаємо у вигляді квадратичного полінома від гіперболічного тангенса

$$u(\xi) = a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^2, \quad v(\xi) = a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2. \quad (4.43)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів a_{ij} виконаємо кроки 3, 4 методу гіперболічних тангенс функцій.

Крок 3. Система алгебричних рівнянь для знаходження значень невідомих коефіцієнтів.

Підставивши (4.43) у (4.40), отримаємо систему

$$\begin{cases} (a_{11} + 2a_{12}T)(c_3 + k_{11}c_1(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^2) + k_{12}c_2(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2)) = \\ (2a_{12} - 2a_{11}T - 6a_{12}T^2)(k_{13}c_1^2 + k_{14}c_2^2), \\ (a_{21} + 2a_{22}T)(c_3 + k_{21}c_1(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^2) + k_{22}c_2(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2)) = \\ (2a_{22} - 2a_{21}T - 6a_{22}T^2)(k_{23}c_1^2 + k_{24}c_2^2) \end{cases}$$

Прирівнявши коефіцієнти при степенях T до нуля, одержимо систему нелінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ij}

$$\begin{cases} T^0 : a_{11}(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}) = 2a_{12}(k_{13}c_1^2 + k_{14}c_2^2), \\ T^1 : 2a_{12}(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}) + a_{11}(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}) = -2a_{11}(k_{13}c_1^2 + k_{14}c_2^2), \\ T^2 : 2a_{12}(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}) + a_{11}(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}) = -6a_{12}(k_{13}c_1^2 + k_{14}c_2^2), \\ T^3 : 2a_{12}(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}) = 0, \\ T^0 : a_{21}(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}) = 2a_{22}(k_{23}c_1^2 + k_{24}c_2^2), \\ T^1 : 2a_{22}(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}) + a_{21}(k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21}) = -2a_{21}(k_{23}c_1^2 + k_{24}c_2^2), \\ T^2 : 2a_{22}(k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21}) + a_{21}(k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22}) = -6a_{22}(k_{23}c_1^2 + k_{24}c_2^2), \\ T^3 : 2a_{22}(k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22}) = 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Крок 4. Розв'язування системи алгебричних рівнянь.

Розглянемо два рівняння при степенях T^3 системи (4.44)

$$\begin{cases} 2a_{12}(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}) = 0, \\ 2a_{22}(k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22}) = 0. \end{cases}$$

Оскільки a_{12}, a_{22} за умовою відмінні від нуля, то

$$\begin{cases} k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22} = 0, \\ k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22} = 0. \end{cases}$$

Якщо визначник системи (4.39) $k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} \neq 0$, то коефіцієнти a_{12}, a_{22} одночасно дорівнюють нулю, що суперечить умові існування розв'язку у вигляді квадратичного полінома (4.43). Якщо ж $k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0$, то знаходимо розв'язки $a_{12} = -\frac{k_{12}c_2 A_{22}}{k_{11}c_1}$, $a_{22} = A_{22}$, де $A_{22} \in R \setminus \{0\}$ – довільне відмінне від нуля дійсне число.

Підставивши отримані розв'язки в систему (4.44), одержимо

$$\left\{ \begin{array}{l} T^0 : a_{11}(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}) = \left(-\frac{k_{12}c_2 A_{22}}{k_{11}c_1} \right) 2(k_{13}c_1^2 + k_{14}c_2^2), \\ T^1 : 2\left(-\frac{k_{12}c_2 A_{22}}{k_{11}c_1} \right)(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}) + a_{11}(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}) = -2a_{11}(k_{13}c_1^2 + k_{14}c_2^2), \\ T^2 : 2\left(-\frac{k_{12}c_2 A_{22}}{k_{11}c_1} \right)(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}) + a_{11}\left(k_{11}c_1\left(-\frac{k_{12}c_2 A_{22}}{k_{11}c_1} \right) + k_{12}c_2a_{22} \right) = \\ = -6\left(-\frac{k_{12}c_2 A_{22}}{k_{11}c_1} \right)(k_{13}c_1^2 + k_{14}c_2^2), \\ T^0 : a_{21}(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}) = 2A_{22}(k_{23}c_1^2 + k_{24}c_2^2), \\ T^1 : 2A_{22}(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}) + a_{21}(k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21}) = -2a_{21}(k_{23}c_1^2 + k_{24}c_2^2), \\ T^2 : 2A_{22}(k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21}) + a_{21}\left(k_{21}c_1\left(-\frac{k_{12}c_2 A_{22}}{k_{11}c_1} \right) + k_{22}c_2a_{22} \right) = \\ = -6A_{22}(k_{23}c_1^2 + k_{24}c_2^2). \end{array} \right.$$

Використавши пакет символічного обчислення Mathematica, отримуємо порожню множину розв'язків. Це означає, що при жодному наборі коефіцієнтів системи (4.39) не існує розв'язку у вигляді квадратичного полінома від гіперболічного тангенса.

Для того, щоб визначити степінь M_1 , ми запропонували прирівняти максимальний елемент із множини E_1 із максимальним елементом множини $E_1 \setminus E_{1\max}$. У підсумку отримаємо рівняння для визначення M_1 : $2M_1 + 1 = M_1 + 2$, звідки визначаємо, що $M_1 = 1$, а з умови $M_1 = M_2$ отримуємо, що $M_2 = 1$.

Отже, розв'язок системи (4.40) шукатимемо у вигляді полінома першого степеня від гіперболічного тангенса

$$u(\xi) = a_{10} + a_{11}T, v(\xi) = a_{20} + a_{21}T. \quad (4.45)$$

Крок 3. Система алгебричних рівнянь.

Підставивши (4.45) в (4.40), отримаємо

$$\begin{cases} c_3 a_{11} + k_{11} c_1 a_{11} (a_{10} + a_{11} T) + k_{12} c_2 a_{11} (a_{20} + a_{21} T) = -2 a_{11} T (c_1^2 k_{13} + c_2^2 k_{14}), \\ c_3 a_{21} + k_{21} c_1 a_{21} (a_{10} + a_{11} T) + k_{22} c_2 a_{21} (a_{20} + a_{21} T) = -2 a_{21} T (c_1^2 k_{23} + c_2^2 k_{24}). \end{cases}$$

Прирівнявши коефіцієнти при степенях T до нуля, отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ij}

$$\begin{cases} T^0 : c_3 a_{11} + k_{11} c_1 a_{10} a_{11} + k_{12} c_2 a_{11} a_{20} = 0, \\ T^1 : k_{11} c_1 a_{11}^2 + k_{12} c_2 a_{11} a_{21} + 2(c_1^2 k_{13} + c_2^2 k_{14}) a_{11} = 0, \\ T^0 : c_3 a_{21} + k_{21} c_1 a_{10} a_{21} + k_{22} c_2 a_{21} a_{20} = 0, \\ T^1 : k_{12} c_1 a_{11} a_{21} + k_{22} c_2 a_{21}^2 + 2(c_1^2 k_{23} + c_2^2 k_{24}) a_{21} = 0. \end{cases} \quad (4.46)$$

Крок 4. Розв'язування системи нелінійних алгебричних рівнянь.

Систему (4.46) розв'язуємо за умови, що коефіцієнти a_{11}, a_{21} та числа c_1, c_2, c_3 – відмінні від нуля. За таких умов отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ij}

$$\begin{cases} k_{11} c_1 a_{10} + k_{12} c_2 a_{20} = -c_3, \\ k_{11} c_1 a_{11} + k_{12} c_2 a_{21} = -2(c_1^2 k_{13} + c_2^2 k_{14}), \\ k_{21} c_1 a_{10} + k_{22} c_2 a_{20} = -c_3, \\ k_{21} c_1 a_{11} + k_{22} c_2 a_{21} = -2(c_1^2 k_{23} + c_2^2 k_{24}), \end{cases}$$

яка розпадається на дві незалежні системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} k_{11} c_1 a_{10} + k_{12} c_2 a_{20} = -c_3, \\ k_{21} c_1 a_{10} + k_{22} c_2 a_{20} = -c_3 \end{cases} \quad (4.47)$$

та

$$\begin{cases} k_{11} c_1 a_{11} + k_{12} c_2 a_{21} = -2(c_1^2 k_{13} + c_2^2 k_{14}), \\ k_{21} c_1 a_{11} + k_{22} c_2 a_{21} = -2(c_1^2 k_{23} + c_2^2 k_{24}) \end{cases} \quad (4.48)$$

У випадку $\Delta = (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21}) \neq 0$, отримаємо такі розв'язки

$$a_{10} = \frac{c_3 (k_{12} - k_{22})}{c_1 (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21})}, \quad a_{11} = \frac{2c_1^2 (k_{23} k_{12} - k_{13} k_{22}) + 2c_2^2 (k_{24} k_{12} - k_{14} k_{22})}{c_1 (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21})},$$

$$a_{20} = \frac{c_3 (k_{21} - k_{11})}{c_2 (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21})}, \quad a_{21} = \frac{2c_1^2 (k_{13} k_{21} - k_{11} k_{23}) + 2c_2^2 (k_{14} k_{21} - k_{11} k_{24})}{c_2 (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21})}.$$

Розглянемо випадок, коли $\Delta=0$. Виконавши один крок методу Гауса для системи (4.47), отримаємо таку систему, записану у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} k_{11}c_1 & k_{12}c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_3 \\ c_3 \left(\frac{k_{21}}{k_{11}} - 1 \right) \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб отримана система була сумісною, потрібно, щоб друга компонента вектора вільних членів $c_3 \left(\frac{k_{21}}{k_{11}} - 1 \right)$ дорівнювала нулю. Оскільки коефіцієнт c_3 відмінний від нуля, то на коефіцієнти системи (4.40) необхідно накласти умову сумісності $\frac{k_{11}}{k_{21}} = 1$, або $k_{11} = k_{21}$. З огляду на те, що визначник $\Delta = (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}) = 0$, то отримуємо ще одну умову існування розв'язків $k_{22} = k_{12}$.

Якщо для коефіцієнтів системи (4.39) одночасно виконується $k_{11} = k_{21}$ та $k_{22} = k_{12}$, то система (4.47) має безліч розв'язків. Якщо при $\Delta=0$ не виконуються $k_{11} = k_{21}$ або $k_{22} = k_{12}$, то не існує солітонних розв'язків для системи (4.39). За умови одночасного виконання цих умов знаходимо значення невідомих коефіцієнтів a_{10}, a_{20} . Оскільки система (4.47) має безліч розв'язків, то можемо вибрати коефіцієнт a_{20} так, що він дорівнюватиме деякому дійсному ненульовому числу $A_{20} \in R \setminus \{0\}$, тоді невідомий коефіцієнт $a_{10} = -\frac{c_3 + k_{12}c_2 A_{20}}{c_1 k_{11}}$. Знайдемо ще один розв'язок системи (4.47), вимагаючи, щоб $a_{10} = a_{20}$, тоді отримаємо таке значення коефіцієнтів

$$a_{10} = a_{20} = -\frac{c_3}{k_{11}c_1 + k_{12}c_2}.$$

Виконавши один крок методу Гауса для системи (4.48), переконуємося, що система (4.48) має безліч розв'язків, якщо, крім виконання $k_{11} = k_{21}$ та $k_{22} = k_{12}$, виконується ще співвідношення $\frac{c_1^2 k_{13} + c_2^2 k_{14}}{c_1^2 k_{23} + c_2^2 k_{24}} = 1$. З огляду на довільність сталих c_1, c_2 достатньо вимагати, щоб виконувалося

співвідношення $k_{13} + k_{14} = k_{23} + k_{24}$. Оскільки система (4.48) має безліч розв'язків, то вважатимемо, що шуканий коефіцієнт a_{21} дорівнює деякому дійсному ненульовому числу $A_{21} \in R \setminus \{0\}$, яке можна вибрати довільним. Тоді знаходимо другий коефіцієнт $a_{11} = -\frac{k_{12}c_2A_{21} + 2(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14})}{k_{11}c_1}$, який залежить від числа $A_{21} \in R \setminus \{0\}$. Знайдено ще один розв'язок системи (4.48), а саме такий, що $a_{11} = a_{21} = -2\left(\frac{c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}}{k_{11}c_1 + k_{12}c_2}\right)$.

Якщо коефіцієнти системи (4.39) одночасно задовольняють умови $k_{11} = k_{21}$, $k_{12} = k_{22}$, $k_{13} + k_{14} = k_{23} + k_{24}$, то нелінійна динамічна система (4.39) має безліч солітонних розв'язків.

Крок 5. Отримання явного розв'язку нелінійної динамічної системи

Враховуючи вигляд полінома (4.45) та розв'язки систем (4.59, 4.60), при виборі сталих $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $c_4 = -1$ отримуємо явні розв'язки системи (4.39) залежно від значення визначника системи Δ . Якщо визначник Δ відмінний від нуля, то розв'язки системи (4.39) набувають вигляду

$$u(x, y, t) = \left(\frac{k_{12} - k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) + 2 \left(\frac{k_{23}k_{12} - k_{13}k_{22} + k_{24}k_{12} - k_{14}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) th(x + y + t - 1),$$

$$v(x, y, t) = \left(\frac{k_{21} - k_{11}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) + 2 \left(\frac{k_{13}k_{21} - k_{11}k_{23} + k_{14}k_{21} - k_{11}k_{24}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) th(x + y + t - 1).$$

Якщо визначник Δ дорівнює нулю та виконуються умови на коефіцієнти $k_{11} = k_{21}$, $k_{12} = k_{22}$, $k_{13} + k_{14} = k_{23} + k_{24}$, то розв'язки системи (4.39) набувають вигляду $u(x, y, t) = -\frac{1 + k_{12}A_{20}}{k_{11}} - \left(\frac{k_{12}A_{21} + 2(k_{13} + k_{14})}{k_{11}} \right) th(x + y + t - 1)$,

$$v(x, y, t) = A_{20} + A_{21}th(x + y + t).$$

Система (4.39) має ще такий розв'язок $u(x, y, t) = v(x, y, t) : u(x, y, t) = v(x, y, t) = -\frac{1}{k_{11} + k_{12}} - 2 \left(\frac{k_{13} + k_{14}}{k_{11} + k_{12}} \right) th(x + y + t - 1)$, оскільки при розв'язуванні систем (4.47), (4.48), ми вимагали рівність коефіцієнтів $a_{10} = a_{20}$ та $a_{11} = a_{21}$.

Для побудови розв'язку нелінійної динамічної системи (4.39) у вигляді полінома від гіперболічного котангенса виконаємо кроки 2–5 методу гіперболічних тангенс функцій.

Крок 2. Розв'язок системи (4.39) шукаємо у вигляді полінома від гіперболічного котангенса

$$u(\xi) = a_{10} + \sum_{j=1}^{M_1} a_{1j} C^j, \quad v(\xi) = a_{20} + \sum_{j=1}^{M_2} a_{2j} C^j,$$

де $C = \operatorname{cth}(\xi)$ – гіперболічний котангенс. Для визначення степеня поліноміального розв'язку (4.41) підставимо поліноми $u(\xi) = C^{M_1}, v(\xi) = C^{M_2}$ у систему (4.40). Зауважимо, що $C' = 1 - C^2$.

Запишемо вирази перших і других похідних $u(C)$ та $v(C)$

$$\begin{aligned} u'(\xi) &= M_1(1 - C^2)C^{M_1-1}, \quad u''(\xi) = M_1(M_1 - 1)(1 - CT^2)^2 C^{M_1-2} - 2M_1C(1 - C^2)C^{M_1-1}, \\ v'(\xi) &= M_2(1 - C^2)C^{M_2-1}, \quad v''(\xi) = M_2(M_2 - 1)(1 - C^2)^2 C^{M_2-2} - 2M_2C(1 - C^2)C^{M_2-1}. \end{aligned}$$

Випишемо степені похідних поліноміальних розв'язків

$$\begin{aligned} \deg(u(\xi)) &= M_1, \quad \deg(u'(\xi)) = M_1 + 1, \quad \deg(u''(\xi)) = M_1 + 2, \\ \deg(v(\xi)) &= M_2, \quad \deg(v'(\xi)) = M_2 + 1, \quad \deg(v''(\xi)) = M_2 + 2. \end{aligned}$$

Для першого та другого рівняння системи (4.40) отримуємо, відповідно, множини значень степенів $E_1 = \{M_1 + 1, 2M_1 + 1, M_1 + M_2 + 1, M_1 + 2\}$ і $E_2 = \{M_2 + 1, M_1 + M_2 + 1, 2M_2 + 1, M_2 + 2\}$. Зожної множини E_1 та E_2 виберемо по два максимальні елементи та сформуємо відповідні множини $E_{1\max} = \{2M_1 + 1, M_1 + M_2 + 1\}$ та $E_{2\max} = \{2M_2 + 1, M_1 + M_2 + 1\}$. Із отриманих множин сформуємо систему рівнянь для визначення M_1, M_2

$$\begin{cases} 2M_1 + 1 = M_1 + M_2 + 1, \\ 2M_2 + 1 = M_1 + M_2 + 1, \end{cases}$$

з якої отримуємо, що $M_2 = M_1$, де M_1 – довільне ненульове число.

Для визначення степеня M_1 прирівняємо максимальний елемент із множини E_1 із максимальним елементом множини $E_1 \setminus E_{1\max}$. У підсумку отримаємо рівняння для визначення M_1 : $2M_1 + 1 = M_1 + 2$, звідки визначаємо, що $M_1 = 1$, а з умови $M_1 = M_2$ отримуємо, що $M_2 = 1$. Отже, розв'язок системи

(4.40) шукатимемо у вигляді полінома першого степеня від гіперболічного котангенса

$$u(\xi) = a_{10} + a_{11}C, \quad v(\xi) = a_{20} + a_{21}C. \quad (4.49)$$

Крок 3. Підставивши (4.49) у (4.40), отримаємо систему

$$\begin{cases} c_3a_{11} + k_{11}c_1a_{11}(a_{10} + a_{11}C) + k_{12}c_2a_{11}(a_{20} + a_{21}C) = -2a_{11}C(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ c_3a_{21} + k_{21}c_1a_{21}(a_{10} + a_{11}C) + k_{22}c_2a_{21}(a_{20} + a_{21}C) = -2a_{21}C(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}). \end{cases}$$

Прирівняємо в цій системі коефіцієнти при степенях гіперболічного котенгенса до нуля та отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ij}

$$\begin{cases} C^0 : c_3a_{11} + k_{11}c_1a_{10}a_{11} + k_{12}c_2a_{11}a_{20} = 0, \\ C^1 : k_{11}c_1a_{11}^2 + k_{12}c_2a_{11}a_{21} + 2(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14})a_{11} = 0, \\ C^0 : c_3a_{21} + k_{21}c_1a_{10}a_{21} + k_{22}c_2a_{21}a_{20} = 0, \\ C^1 : k_{12}c_1a_{11}a_{21} + k_{22}c_2a_{21}^2 + 2(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24})a_{21} = 0. \end{cases} \quad (4.50)$$

Крок 4. Система нелінійних алгебричних рівнянь (4.50) збігається з системою нелінійних алгебричних рівнянь (4.46), а отже, розв'язки системи (4.46) є розв'язками системи (4.50).

Крок 5. Врахувавши вигляд полінома (4.49) та розв'язки систем (4.59), (4.60), (4.62), а також вибір сталих $c_1 = c_2 = c_3 = 1, c_4 = -1$, отримуємо явні розв'язки системи залежно від значень визначника Δ системи (4.39).

Якщо визначник Δ відмінний від нуля, то розв'язки системи (4.39) набувають вигляду

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \left(\frac{k_{12} - k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) + 2 \left(\frac{k_{23}k_{12} - k_{13}k_{22} + k_{24}k_{12} - k_{14}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) \operatorname{cth}(x + y + t - 1), \\ v(x, y, t) &= \left(\frac{k_{21} - k_{11}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) + 2 \left(\frac{k_{13}k_{21} - k_{11}k_{23} + k_{14}k_{21} - k_{11}k_{24}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) \operatorname{cth}(x + y + t - 1). \end{aligned}$$

Якщо визначник Δ дорівнює нулю та виконуються умови на коефіцієнти $k_{11} = k_{21}, k_{12} = k_{22}, k_{13} + k_{14} = k_{23} + k_{24}$, то розв'язки системи (4.39) мають явний вигляд

$$u(x, y, t) = -\frac{1 + k_{12}A_{20}}{k_{11}} - \left(\frac{k_{12}A_{21} + 2(k_{13} + k_{14})}{k_{11}} \right) \operatorname{cth}(x + y + t - 1),$$

$$v(x, y, t) = A_{20} + A_{21} \operatorname{cth}(x + y + t - 1),$$

де A_{20}, A_{21} – довільні ненульові дійсні числа.

Крім того, система (4.39) має розв'язок $u(x, y, t) = v(x, y, t)$:

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) = -\frac{1}{k_{11} + k_{12}} - 2 \left(\frac{k_{13} + k_{14}}{k_{11} + k_{12}} \right) \operatorname{cth}(x + y + t - 1).$$

У [112] запропоновано відшукання розв'язків нелінійних динамічних систем у вигляді суми поліномів від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса. Для цього виконаємо кроки 2 – 5.

Крок 2. Розв'язок системи (4.40) шукаємо у вигляді поліномів від гіперболічного тангенса та котангенса

$$u(\xi) = a_{10} + \sum_{j=1}^{M_1} a_{1j} T^j + \sum_{j=1}^{M_1} b_{1j} T^{-j}, \quad v(\xi) = a_{20} + \sum_{j=1}^{M_2} a_{2j} T^j + \sum_{j=1}^{M_2} b_{2j} T^{-j}.$$

Для визначення невідомих степенів M_1, M_2 достатньо підставити поліноми $u(\xi) = T^{M_1}$ та $v(\xi) = T^{M_2}$ в систему (4.40). Оскільки це виконано при побудові точних розв'язків від гіперболічного тангенса, то розв'язки системи (4.40) шукаємо у вигляді суми поліномів першого степеня від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса у вигляді

$$u(\xi) = a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}, \quad v(\xi) = a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^{-1}. \quad (4.51)$$

Крок 3. Випишемо перші та другі похідні розв'язків (4.51)

$$u'(\xi) = a_{11}(1-T^2) + a_{12}(1-T^{-2}), \quad v'(\xi) = a_{21}(1-T^2) + a_{22}(1-T^{-2}),$$

$$u''(\xi) = -2a_{11}T(1-T^2) - 2a_{12}T^{-1}(1-T^{-2}), \quad v''(\xi) = -2a_{21}T(1-T^2) - 2a_{22}T^{-1}(1-T^{-2}).$$

Користуючись цими співвідношеннями, підставивши (4.51) у (4.40), отримаємо систему

$$\begin{cases} (a_{11}(1-T^2) + a_{12}(1-T^{-2}))c_3 + k_{11}c_1(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}) + k_{12}c_2(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^{-1}) = \\ = (c_1^2 k_{13} + c_2^2 k_{14})(-2a_{11}T(1-T^2) - 2a_{12}T^{-1}(1-T^{-2})), \\ (a_{21}(1-T^2) + a_{22}(1-T^{-2}))c_3 + k_{21}c_1(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}) + k_{22}c_2(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^{-1}) = \\ = (c_1^2 k_{23} + c_2^2 k_{24})(-2a_{21}T(1-T^2) - 2a_{22}T^{-1}(1-T^{-2})) \end{cases}$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при степенях T , отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{ij}

$$\left\{ \begin{array}{l} T^0 : (a_{11} + a_{12})(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}) = 0, \\ T^1 : (a_{11} + a_{12})(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}) - a_{11}(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}) = -2a_{11}(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ T^{-1} : (a_{11} + a_{12})(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}) - a_{12}(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}) = -2a_{12}(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ T^2 : a_{11}(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}) = 0, \\ T^{-2} : a_{12}(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}) = 0, \\ T^3 : a_{11}(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}) = -2a_{11}(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ T^{-3} : a_{12}(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}) = -2a_{12}(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ T^0 : (a_{21} + a_{22})(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}) = 0, \\ T^1 : (a_{21} + a_{22})(k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21}) - a_{21}(k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22}) = -2a_{21}(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}), \\ T^{-1} : (a_{21} + a_{22})(k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22}) - a_{22}(k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21}) = -2a_{22}(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}), \\ T^2 : a_{21}(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}) = 0, \\ T^{-2} : a_{22}(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}) = 0, \\ T^3 : a_{21}(k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21}) = -2a_{21}(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}), \\ T^{-3} : a_{22}(k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22}) = -2a_{22}(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}). \end{array} \right. \quad (4.52)$$

Крок 4. Розв'язуємо систему нелінійних алгебричних рівнянь (4.52) за умови, що коефіцієнти при гіперболічному тангенсі та гіперболічному котангенсі відмінні від нуля. Система (4.52) розпадається на дві системи нелінійних алгебричних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11} + a_{12})(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}) = 0, \\ a_{11}(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}) = 0, \\ a_{12}(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}) = 0, \\ (a_{21} + a_{22})(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}) = 0, \\ a_{21}(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}) = 0, \\ a_{22}(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}) = 0, \end{array} \right. \quad (4.53)$$

та

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11} + a_{12})(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}) - a_{11}(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}) = -2a_{11}(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ (a_{11} + a_{12})(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}) - a_{12}(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}) = -2a_{12}(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ a_{11}(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}) = -2a_{11}(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ a_{12}(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}) = -2a_{12}(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ (a_{21} + a_{22})(k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21}) - a_{21}(k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22}) = -2a_{21}(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}), \\ (a_{21} + a_{22})(k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22}) - a_{22}(k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21}) = -2a_{22}(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}), \\ a_{21}(k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21}) = -2a_{21}(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}), \\ a_{22}(k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22}) = -2a_{22}(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}). \end{array} \right. \quad (4.54)$$

Розглянемо систему (4.53). Перше рівняння є сумою другого та третього рівнянь, а четверте рівняння є сумою п'ятого та шостого рівнянь, тому перше та четверте рівняння можна вилучити з системи (4.53). У підсумку отримаємо модифіковану систему

$$\begin{cases} a_{11}(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}) = 0, \\ a_{12}(c_3 + k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20}) = 0, \\ a_{21}(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}) = 0, \\ a_{22}(c_3 + k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20}) = 0. \end{cases}$$

Оскільки коефіцієнти $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ відмінні від нуля, то переходимо до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів a_{10}, a_{20}

$$\begin{cases} k_{11}c_1a_{10} + k_{12}c_2a_{20} = -c_3, \\ k_{21}c_1a_{10} + k_{22}c_2a_{20} = -c_3. \end{cases}$$

Зауважимо, що отримана система збігається з системою (4.47), а, отже, розв'язки системи (4.47) є розв'язками отриманої системи.

Розглянемо таку підсистему

$$\begin{cases} a_{11}(k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21}) = -2a_{11}(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ a_{12}(k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22}) = -2a_{12}(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ a_{21}(k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21}) = -2a_{21}(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}), \\ a_{22}(k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22}) = -2a_{22}(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}) \end{cases}$$

Оскільки коефіцієнти $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ відмінні від нуля, то можемо перейти до системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21} = -2(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22} = -2(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21} = -2(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}), \\ k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22} = -2(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}) \end{cases}$$

Ця система розпадається на дві системи

$$\begin{cases} k_{11}c_1a_{11} + k_{12}c_2a_{21} = -2(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ k_{21}c_1a_{11} + k_{22}c_2a_{21} = -2(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}) \end{cases}, \quad \begin{cases} k_{11}c_1a_{12} + k_{12}c_2a_{22} = -2(c_1^2k_{13} + c_2^2k_{14}), \\ k_{21}c_1a_{12} + k_{22}c_2a_{22} = -2(c_1^2k_{23} + c_2^2k_{24}) \end{cases}$$

Зазначимо, що ці системи збігаються з системою (4.48), а, отже, розв'язки системи (4.48) є розв'язками отриманих систем. Варто зазначити,

що ці системи відрізняються між собою лише тим, що, розв'язавши першу, знайдемо значення невідомих коефіцієнтів a_{11}, a_{21} , а розв'язавши другу, знайдемо значення невідомих коефіцієнтів a_{12}, a_{22} , причому виконується рівність $a_{11} = a_{12}, a_{12} = a_{22}$, оскільки матриця в лівій частині та вектор вільних членів однакові. Підстановка знайдених невідомих коефіцієнтів $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ у систему рівнянь (4.54) перетворює їх у тотожність.

Крок 5. Враховуючи вигляд полінома (4.51) та розв'язки систем (15, 16), при виборі сталих $c_1 = c_2 = c_3 = 1, c_4 = -1$ отримуємо явні розв'язки системи залежно від значень визначника Δ системи (4.39).

Якщо визначник Δ відмінний від нуля, то розв'язки системи (4.39) набули вигляду

$$u(x, y, t) = \left(\frac{k_{12} - k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) + 2 \left(\frac{k_{23}k_{12} - k_{13}k_{22} + k_{24}k_{12} - k_{14}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) (th(x+y+t-1) + cth(x+y+t-1)),$$

$$v(x, y, t) = \left(\frac{k_{21} - k_{11}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) + 2 \left(\frac{k_{13}k_{21} - k_{11}k_{23} + k_{14}k_{21} - k_{11}k_{24}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \right) (th(x+y+t-1) + cth(x+y+t-1)).$$

Якщо визначник Δ дорівнює нулю та виконуються умови на коефіцієнти $k_{11} = k_{21}, k_{12} = k_{22}, k_{13} + k_{14} = k_{23} + k_{24}$, то розв'язки системи (4.39) набули вигляду

$$u(x, y, t) = -\frac{1+k_{12}A_{20}}{k_{11}} - \left(\frac{k_{12}A_{21} + 2(k_{13}+k_{14})}{k_{11}} \right) (th(x+y+t-1) + cth(x+y+t-1)),$$

$$v(x, y, t) = A_{20} + A_{21}(th(x+y+t) + cth(x+y+t)),$$

де A_{20}, A_{21} – довільні ненульові дійсні числа.

Крім того, система (4.39) має розв'язок $u(x, y, t) = v(x, y, t)$:

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) = -\frac{1}{k_{11} + k_{12}} - 2 \left(\frac{k_{13} + k_{14}}{k_{11} + k_{12}} \right) (th(x+y+t-1) + cth(x+y+t-1)).$$

Таким чином ми довели наступну теорему.

Теорема 4.8. У розв'язку системи (4.39), що є одночасно поліномом від гіперболічного тангенса, гіперболічного котангенса та суми гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса, коефіцієнти при однакових степенях гіперболічного тангенса та котангенса є рівні між собою.

Нижче наводимо графічну інтерпретацію розв'язків системи (4.39). Оскільки нелінійна динамічна система (4.39) описує еволюцію турбулентних потоків рідини, то функція u – це швидкість руху рідини вздовж додатного напряму осі абсцис, функція v – це швидкість руху рідини вздовж додатного напряму осі ординат. Вектор $U = (u, v)$ задає вектор руху рідини. Уведемо норму, яка характеризує інтенсивність руху рідини $\|U\| = \sqrt{u^2 + v^2}$. При побудові графіку, що відображає інтенсивність руху рідини, довжини стрілок, які засвідчують напрям руху рідини, масштабуватимемо за максимальним значенням норми $\|U\|_{\max}$ в розглядуваній області $\Omega \in R^2$ в момент часу t , тобто, якщо величині $\|U\|_{\max}$ відповідає довжина стрілки L , то довжину стрілки l у певній точці області обчислено за правилом $l = \frac{\|U\|}{\|U\|_{\max}} L$.

Щоб відобразити характер розв'язків системи (4.39), введемо області $\Omega_1 = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ та $\Omega_2 = \{(x, y) : x \in [-5, 5], y \in [-5, 5]\}$. Першу область Ω_1 використовуємо, щоб показати напрями руху рідини, а другу область Ω_2 використовуємо, щоб відобразити характер функцій u та v .

Наведемо графіки розв'язків у різні моменти часу та при різних наборах коефіцієнтів, аналізуючи вплив зміни коефіцієнтів на розв'язки.

Розглянемо випадок $\Delta = 0$. Точний розв'язок нелінійної динамічної системи (4.39) при одиничних значеннях коефіцієнтів набув вигляду $u(x, y, t) = v(x, y, t) = -\frac{1}{2} - 2th(x + y + t - 1)$. В момент часу $t = 0$ розв'язок має такий вигляд

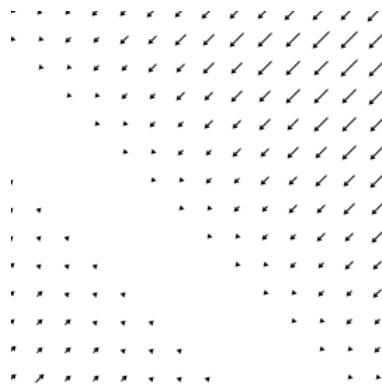


Рис. 4.5. Поле швидкості руху рідини в момент часу $t=0$ в області Ω_1

Графіки функцій u та v в момент часу $t=0$ наведені на рис. 4.6.

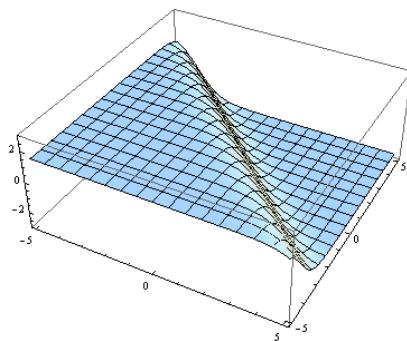


Рис. 4.6. Графік швидкостей u та v у момент часу $t=0$ в області Ω_2

У момент часу $t=0,5$ бачимо, що область, в якій руху немає, перемістилась в нижній лівий край, а в момент часу $t=1$ у всій області Ω_1 рідина рухається у від'ємному напрямі по осі абсцис та по осі ординат



Рис. 4.7. Поле швидкостей руху рідини в моменти часу $t=0,5$ та $t=1$

Графіки розв'язків u та v в області Ω_2 в моменти часу $t=0,5$ та $t=1$ наведено на рис. 4.8.

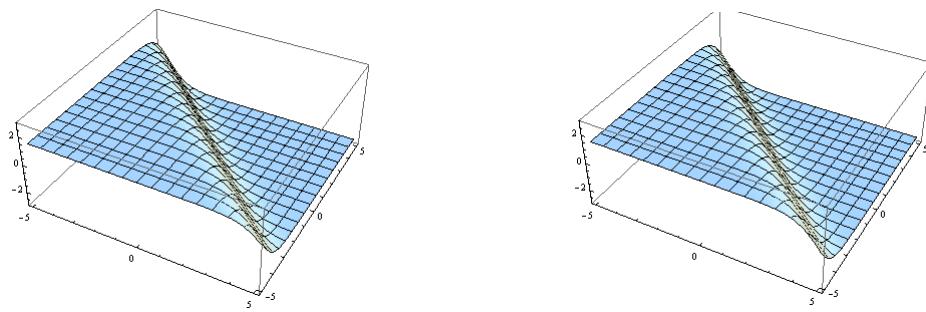


Рис. 4.8. Графік швидкостей u та v у моменти часу $t = 0,5$, $t = 1$ в області Ω_2

Якщо змінювати значення коефіцієнтів $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ у додатному діапазоні так, щоб визначник дорівнював нулю та виконувалися умови сумісності, то характер розв'язку не зміниться. Якщо $k_{11} = k_{12} = -1$, то напрям руху рідини змінюється на протилежний. На рис. 4.9. зображене поле руху рідини у початковий момент часу $t = 0$.



Рис. 4.9. Поле швидкостей руху рідини в момент часу $t = 0$

Графіки функцій u, v в момент часу $t = 0$ наведено на рис. 4.10.

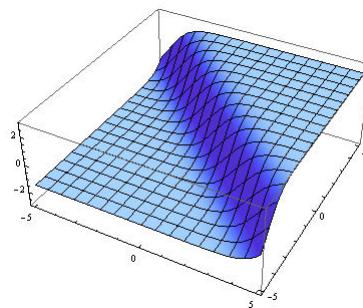


Рис. 4.10. Графіки функцій u, v у момент часу $t = 0$

Розглянемо вплив зміни коефіцієнтів $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}$ на характер розв'язку системи (4.39). Зафіксуємо значення коефіцієнтів системи (4.39) $k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ одиничними, а коефіцієнт k_{11} приймемо довільним. Тоді точний розв'язок для системи (4.39) набуде вигляду

$u(x, y, t) = 0, v(x, y, t) = -1 - 4th(x + y + t - 1)$. Ці розв'язки не залежать від коефіцієнта k_{11} , причому рух рідини відбувається лише вздовж осі ординат. Графік поля швидкостей такий

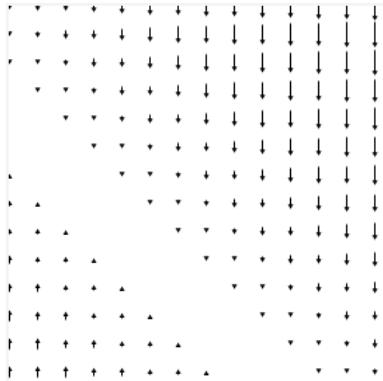


Рис. 4.11. Поле швидкостей у момент часу $t = 0$.

Графіки функцій u та v в момент часу $t = 0$ наведено на рис. 4.12.

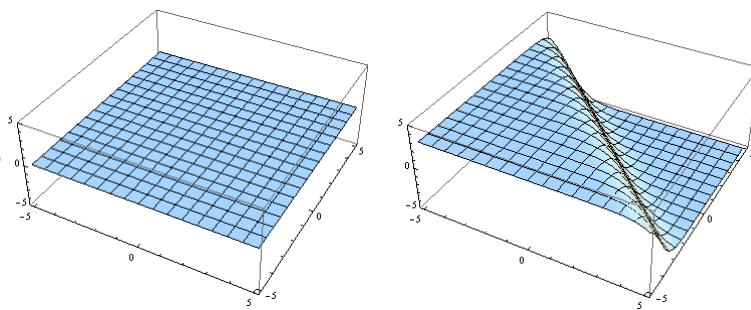


Рис. 4.12. Графіки функцій u та v у момент часу $t = 0$.

На графіку з рис. 4.12. поверхня має вигляд площини, оскільки функція $u = 0$. Аналогічна картина спостерігатиметься, коли зафіксуємо значення коефіцієнтів системи (4.39) $k_{11}, k_{13}, k_{14}, k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ одиничними, а коефіцієнт k_{12} приймемо довільним. Тоді точний розв'язок для системи (4.39) при зазначених значеннях коефіцієнтів набуває вигляду $u(x, y, t) = -1 - 4th(x + y + t), v(x, y, t) = 0$. Цей розв'язок не залежить від коефіцієнта k_{12} . Рух рідини відбувається лише вздовж осі абсцис.

Зміна коефіцієнтів k_{21}, k_{22} не впливає на розв'язки системи (4.39) при одиничних значеннях решти коефіцієнтів. Характер розв'язків при зміні коефіцієнтів k_{21}, k_{22} такий самий як і характер розв'язків при зміні коефіцієнтів k_{11}, k_{12} .

Точний розв'язок системи (4.39) $u = v = -\frac{1}{2} - (k_{13} + 1)th(x + y + t - 1)$ отримано при k_{13} довільному, а решту коефіцієнтів приймемо такими, що дорівнюють одиниці. Якщо $k_{13} = -1$, то точний розв'язок цієї системи набув вигляду $u = v = -\frac{1}{2}$, тобто в області Ω рідина рухається у від'ємному напрямі вздовж осей абсцис та ординат.

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт $k_{11} = 1,1$, а коефіцієнт k_{13} у системі (4.39) довільний. Тоді точні розв'язки системи (4.39) набули вигляду $u(x, y, t) = 20(1 - k_{13})th(x + y + t - 1)$, $v(x, y, t) = -1 + 20(k_{13} - 1,1)th(x + y + t - 1)$. При $k_{13} = 1,2$ формули розв'язків такі $u(x, y, t) = -4th(x + y + t - 1)$, $v(x, y, t) = -1 + 2th(x + y + t - 1)$.

У момент часу $t = 0$ поле швидкостей наведено на рис. 4.13.

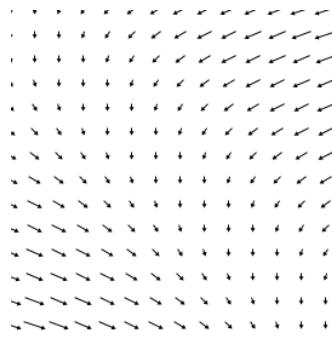


Рис. 4.13. Поле швидкостей у момент часу $t = 0$.

Розглянемо вплив числа Рейнольдса на розв'язки системи (4.39). Нехай коефіцієнти системи (4.39) при конвекційних доданках дорівнюють одиниці, а коефіцієнти $k_{13}, k_{14}, k_{23}, k_{24}$ дорівнюють числу $\frac{1}{Re}$. Точний розв'язок системи (4.39) при таких значеннях коефіцієнтів набув вигляду $u(x, y, t) = v(x, y, t) = -\frac{1}{2} - \frac{2}{Re} th(x + y + t - 1)$.

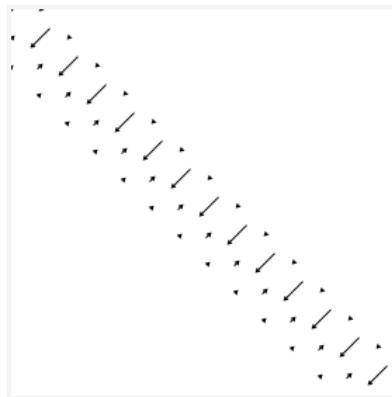
При значеннях числа $Re \in (0, 4)$ рідина рухається у від'ємному і в додатному напрямку вздовж осей абсцис та ординат. При значеннях числа $Re \geq 4$ рідина рухається у від'ємному напрямку вздовж осей абсцис та ординат. При збільшенні значень числа Re амплітуда функцій швидкостей

u, v зменшується. Якщо великі значення числа Re , то значення функцій u, v перебувають в околі числа $-\frac{1}{2}$.

Згідно з теоремою 4.8. вплив зміни коефіцієнтів системи (4.39) на розв'язок, що залежить від гіперболічного котангенса, такий самий як і вплив зміни коефіцієнтів системи (4.39) на розв'язок, що залежить від гіперболічного тангенса. Тому наведемо графіки точних розв'язків системи (4.39) у вигляді полінома від гіперболічного котангенса для певних значень коефіцієнтів.

Запишемо точний розв'язок нелінійної динамічної системи (4.39) при одиничних значеннях коефіцієнтів $u(x, y, t) = v(x, y, t) = -\frac{1}{2} - 2cth(x + y + t - 1)$.

Поле швидкостей у момент часу $t = 0,02$ наведено на рис. 4.14.



Rис. 4.14. Поле швидкостей в момент часу $t = 0,02$.

Оскільки стрілки, які вказують напрям руху рідини, масштабовані за нормою вектора швидкостей, то в області, де значення норми досягають безмежно великих значень, стрілки видимі. У підобласті, де значення норми порівняно малі, на рисунку виглядає як область, у якій руху немає. Проте вже в момент часу $t = 1,1$ поле швидкостей набуває вигляду

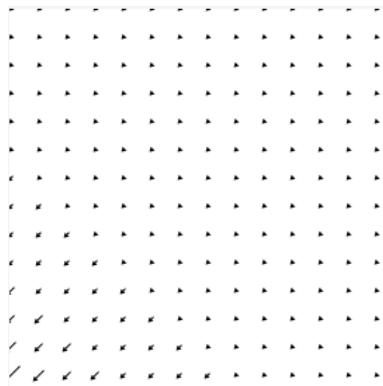


Рис. 4.15. Поле швидкостей в момент часу $t = 1,1$.

Графіки функцій u, v у початковий момент часу наведено на рис. 4.16.

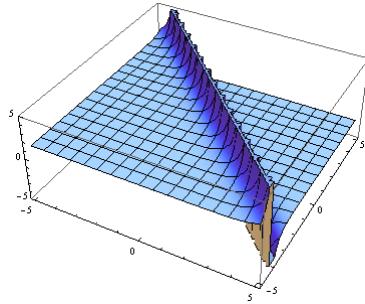


Рис. 4.16. Графіки функцій u та v у момент часу $t = 0$.

Проведемо графічну інтерпретацію розв'язків, які одночасно залежать від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса. Для наочності розглянемо графіки функцій $f_1(x) = \operatorname{th}(x)$, $f_2(x) = \operatorname{cth}(x)$, $f_3(x) = \operatorname{th}(x) + \operatorname{cth}(x)$

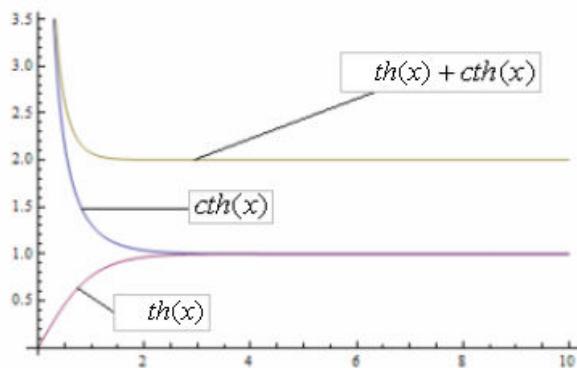


Рис. 4.17. Графіки функцій $f_1(x) = \operatorname{th}(x)$, $f_2(x) = \operatorname{cth}(x)$, $f_3(x) = \operatorname{th}(x) + \operatorname{cth}(x)$

З рис. 4.17. видно, що від $x = 0$ до значення $x \approx 2$ поведінку функції $f_3(x) = \operatorname{th}(x) + \operatorname{cth}(x)$ визначає функція $\operatorname{cth}(x)$, проте функція $f_3(x) = \operatorname{th}(x) + \operatorname{cth}(x)$ швидше досягає область, у якій похідна наближається до нуля, ніж функція $f_1(x) = \operatorname{th}(x)$. Якщо провести аналогію із розв'язками, що залежать від

гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса, то можна стверджувати, що розв'язок, що залежить одночасно від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса в деякій частині області в певний момент часу поводить себе як розв'язок, що залежить від гіперболічного тангенса, а в іншій, як розв'язок, що залежить від гіперболічного котангенса (тобто норма вектора швидкостей набуває безмежних значень).

Зобразимо графіки розв'язків системи (4.39) при одиничних значеннях коефіцієнтів, що залежать тільки від гіперболічного котангенса на рис.4.18.а) та залежать одночасно від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса в момент часу $t = 1,2$ на рис. 4.18.б).



Рис. 4.18. Поле швидкостей у момент часу $t = 1,2$. а) розв'язок, що залежить тільки від гіперболічного котангенса, б) розв'язок, що залежить одночасно від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса.

На рис. 4.18. а) розв'язок залежить тільки від гіперболічного котангенса, а на рис. 4.18.б) розв'язок залежить одночасно від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса в момент часу $t = 1,2$. Градієнт швидкостей на рис. 4.18. а) більший, ніж градієнт швидкостей на рис. 4.18. б) у момент часу $t = 1,2$.

У момент часу $t = 3$ градієнти швидкостей однакові, що зображені на рис. 4.19.а) та рис.4.19.б)

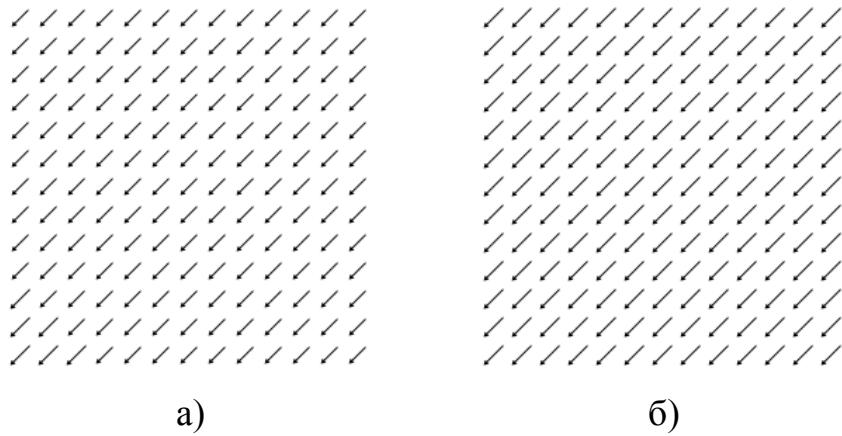


Рис. 4.19. Поле швидкостей у момент часу $t = 3$. а) розв'язок, що залежить тільки від гіперболічного котангенса, б) розв'язок, що залежить одночасно від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса.

На рис. 4.19.а) розв'язок залежить тільки від гіперболічного котангенса, а на рис. 4.19 б) розв'язок залежить одночасно від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса в момент часу $t = 3$.

Розмір стрілок на рис. 4.19 б) дещо більший за розмір стрілок на рис. 4.19.а), оскільки на рис. 4.19 б) показаний розв'язок, що є сумою гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса.

4.5. Висновки до розділу 4

Для нелінійних динамічних систем запропоновано комбінований алгоритм знаходження законів збереження. Здійснено порівняння пропонованого методу з асимптотичним методом для знаходження законів збереження для узагальненої динамічної системи Бюргерса та Буссінеска-Бюргерса. Розроблений алгоритм спрощує знаходження законів збереження та має переваги як над методом невизначених коефіцієнтів так і асимптотичним методом.

На основі методу Новікова-Богоявленського знайдено скінченновимірні інваріантні редукції динамічної системи Буссінеска-Бюргерса. Побудовано фазові портрети систем, які слугують інформацією для отримання періодичних розв'язків.

Для двовимірної нелінійної динамічної системи Бюргерса з числовими коефіцієнтами знайдено точні солітонні розв'язки, які виражаються через гіперболічний тангенс, гіперболічний котангенс. Запропоновану модифікацію способу визначення степенів поліноміальних розв'язків, які однозначно вказують на необхідний степінь поліноміального розв'язку. Знайдено умови на коефіцієнти, при яких існує безліч солітонних розв'язків та умови на коефіцієнти, при яких солітонні розв'язки не існують.

Отримані результати можна застосувати для дослідження обчислювальних схем розв'язування початково-крайових задач. Для аналізу впливу коефіцієнтів на характер розв'язків створено програмне забезпечення на мові C#.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [22, 23, 33, 33, 41, 94, 95, 96].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена побудові високоточних обчислювальних схем для динамічних систем та розвиненню методів верифікації обчислювальних схем. Основні результати дисертації розширяють і доповнюють відомі результати з теорії методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, стабілізованих схем МСЕ та інтегровних нелінійних динамічних систем.

У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

1. визначено умови збіжності узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для динамічних систем;
2. побудовано високоточні обчислювальні схеми для рівнянь адвекції та тепlopровідності на основі узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій;
3. побудовано та проведено верифікацію обчислювальних схем для сингулярно збурених задач адвекції-дифузії з постійними та змінними коефіцієнтами з використанням кусково-степеневих базисних функцій методу скінченних елементів;
4. модифіковано методи та алгоритми для знаходження законів збереження, імплектичних операторів, точних солітонних розв'язків та скінченновимірних редукцій нелінійних динамічних систем.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати стосуються подального розвитку методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, методу скінченних елементів та теорії інтегровних за Лаксом нелінійних динамічних систем. окремі теоретичні результати можуть знайти застосування при дослідженні математичних явищ, або процесів, що пов'язані з міграцією домішок.

Крім того, результати роботи можуть використовуватися при читанні спеціальних курсів лекцій з обчислювальних методів математичної фізики та

моделювання нелінійних динамічних систем для студентів вищих навчальних закладів з фізико-математичного напрямку.

Запропоновані обчислювальні схеми узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій та методу скінчених елементів подано у вигляді, придатному до розробки універсальних пакетів чисельного розв'язування задач гідродинаміки, метеорології, екології.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абловиц М.* Солитоны и метод обратной задачи / *М. Абловиц, Х. Сигур.* – М.: Мир, 1987. – 479 с.
2. *Абрамов Є.* Кусково-лінійні апроксимації h -адаптивного методу скінчених елементів для одновимірних краєвих задач / *Є. Абрамов, О Ліпіна, Г. Шинкаренко, А. Ямлинець* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2006. – Вип. 11. С. 3–18.
3. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики / *В.И. Арнольд* – М.: Наука, 1979. – 432 с.
4. *Березин И.С.* Методы вычислений. Том. 1 / *И.С. Березин, Н.П. Жидков.* – М: Физматгиз, 1962. – 464 с.
5. *Бігун О.* Метод Лі-алгебричних апроксимацій у теорії динамічних систем / *О. Бігун, М. Притула* // Математичний вісник НТШ. – Т. 1. – 2004. – С. 24–31.
6. *Блахсиєвська О.В.* Про ефективність методу експоненціальної підгонки при розв'язуванні задач тепло-масо перенесення у пористих середовищах / *О.В. Блахсиєвська, Т.І. Мандзак* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2000. – Вип. 1. – С. 26–31.
7. *Боголюбов Н.Н.(мл)* Квантовая алгебра Ли токов – универсальная алгебраическая структура симметрий вполне интегрируемых нелинейных динамических систем теоретической и математической физики / *Н.Н.(мл) Боголюбов, А.К. Прикарпатский* // Теорет. и мат. физика. – 1988. – 75, №1. – С. 3–17.
8. *Боголюбов Н.Н. (мл)* Полная интегрируемость нелинейных систем Ито и Бенни – Каупа: градиентный алгоритм и представление Лакса / *Н.Н.(мл) Боголюбов, А.К. Прикарпатский* // Теорет. и мат. физика. – 1986. – 67, №3. – С. 410–425.

9. Боголюбов Н.Н. (мл) Классическая и квантовая вполне интегрируемая динамическая система типа Шредингера. / Н.Н.(мл) Боголюбов, А.К. Прикарпатский, В.Г. Самойленко // К.: 1984. – 32 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; С. 84-53).
10. Боголюбов Н.Н. (мл) Метод ускоренной сходимости в нелинейно механике / Н.Н. (мл) Боголюбов, Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко. – К.: Наук. думка, 1969. – 247 с.
11. Боголюбов Н.Н. (мл) Нелинейная модель типа Шредингера: законы сохранения, гамильтонова структура и полная интегрируемость / Н.Н.(мл) Боголюбов, А.К. Прикарпатський, А.М. Курбатов, В.Г. Самойленко // Теор. и мат. физика. – 1985. – 65, № 2. – С. 271–284.
12. Богоявленский О.Н. О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач / О.Н. Богоявленский, С.П. Новиков // Функциональный анализ и его приложения. – 1976. – 10. № 1. – С. 9–13.
13. Воробйова О.В. Солітонні розв'язки для інверсного рівняння Кортевега – де Фріза / О.В. Воробйова, М.М. Притула // Нелінійні коливання, 2003. – Т. 6, № 1. – С. 15–20.
14. Воробйова О.В. Скінченнонімірна інваріантна редукція інверсної динамічної системи Каупа–Броера / О.В. Воробйова, О.Є. Гентош, М.М. Притула // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2005. – Вип. 10. – С. 9–18.
15. Воробйова О.В. Аналіз повної інтегрованості чотиривимірної редукції нелінійної інверсної динамічної системи Кортевега – де Фріза / О.В. Воробйова, М.М. Притула // Математичний вісник НТШ. – 2005. – Т. 2. – С. 26–48.
16. Гачкевич О. Чисельне розв'язування нелінійних задач перенесення зарядів у напівпровідникових структурах / О. Гачкевич, О. Смірнов, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2010. – Вип. 10. – С. 98 – 110.

17. Гентоши О. Диференціально-геометричні та Лі-алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах / О. Гентоши, М. Притула, А. Прикарпатський. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, 2006. – 408 с.
18. Дод Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Дод, Дж.Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Морис. – М.: Мир. – 1988. – 694 с.
19. Дринфельд В.Г. Алгебра Ли и уравнения типа Кортевега – де Фриза / В.Г. Дринфельд, В.В. Соколов // Итоги науки и техники. Сер.: Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – М.: ВИНИТИ, 1984. – 15. – С. 81–180.
20. Захаров В.Е. Теория солитонов: метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
21. Калоджеро Ф. Спектральные преобразования и солитоны. Метод решения и исследования эволюционных уравнений / Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. – М.: Мир, 1985. – 472 с.
22. Кіндібалюк А.А. Бігамільтоновість і точні розв'язки узагальненої динамічної системи типу Бюргерса / А.А. Кіндібалюк, М.М. Притула // Вісн. Львів. ун-ту. Серія механіко-математична. – 2012. – Вип. 74. – С. 109 – 121.
23. Кіндібалюк А.А. Солітонні розв'язки двовимірної нелінійної динамічної системи Бюргерса з числовими коефіцієнтами / А.А. Кіндібалюк // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2012. – Вип. 18. – С. 106 – 129.
24. Кіндібалюк А.А. Застосування степеневих базисних функцій МСЕ до розв'язування сингулярно збуреної задачі адвекції-дифузії / А.А Кіндібалюк, М.М Притула // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 140 – 157.

25. *Кіндибалюк А.* Обоснование применения степенных базисных функций метода конечных элементов к сингулярно возмущенной краевой задачи адвекции-диффузии / A. Кіндибалюк, H. Притула // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1/2013. – С. 59 – 65.
26. *Кіндибалюк A.A.* Модифікований метод Лі-алгебричних апроксимацій для еліптичних рівнянь з неоднорідними краевими умовами / A.A. Кіндибалюк, M.M. Притула // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2013. – Вип. 19. – С. 56 – 67.
27. *Кіндибалюк A.A.* Застосування узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій до розв'язування задачі Коші з рівнянням адвекції / A.A. Кіндибалюк, M.M. Притула // Укр. мат. вісник. – 2014. – Том 11, № 2. – С. 158 – 180. (Переклад: *Kindybaliuk Arkadii. Application of the generalized method of Lie-algebraic discrete approximations to the solution of the Cauchy problem with the advection equation / Arkadii Kindybaliuk, Mykola Prytula // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 204, Is. 3. – P. 280 – 297.*)
28. *Кіндибалюк A.A.* Застосування узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій до розв'язування задачі Коші для двовимірного рівняння адвекції / A.A. Кіндибалюк // Вісн. Львів. ун-ту. Серія механіко-математична – 2014. – Вип. 79. – С. 48 – 68.
29. *Кіндибалюк A.A.* Властивості кусково-степеневих апроксимацій МСЕ для сингулярно збурених задач адвекції-дифузії-реакції / A.A. Кіндибалюк, Г.А. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2014. – Вип. 21. – С. 99 – 109.
30. *Кіндибалюк A.A.* Застосування кусково-степеневих апроксимацій МСЕ для сингулярно збурених задач адвекції-дифузії-реакції / A.A. Кіндибалюк, Г.А. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2014. – Вип. 22. – С. 60 – 74.

31. *Кіндибалюк Аркадій* Застосування узагальненого методу Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій до розв'язування задачі Коші для рівняння теплопровідності / *Аркадій Кіндибалюк* // Математичні Студії. – 2014. – Т. 42, № 2. – С. 181 – 194.
32. *Кіндибалюк А.А.* Бігамільтоновість узагальненої нелінійної динамічної системи типу Бюргерса та її солітонні розв'язки / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // IV Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача. Львів, Україна, 24–27 травня 2011 р. – С. 283 – 284.
33. *Кіндибалюк А.А.* Точні солітонні розв'язки двовимірної нелінійної динамічної системи Бюргерса / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // XVII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». Львів, Україна, 6–7 жовтня 2011 р. – С. 58.
34. *Кіндибалюк А.А.* Модифікація Лі-алгебричного методу дискретних апроксимацій для розв'язування краївих задач з неоднорідними краївими умовами / *А.А. Кіндибалюк* // П'ятнадцята всеукраїнська (десята міжнародна) студентська конференція з прикладної математики та інформатики СНКПМІ-2012. Львів, Україна, 5–6 квітня 2012 р. – С. 216 – 217.
35. *Кіндибалюк А.А.* Степеневі базисні функції МСЕ для сингулярно збуреної краївої задачі конвекції - дифузії // *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука. Київ, Україна, 19–21 квітня 2012 р. – Матеріали конференції. – Т.1. – С. 222.
36. *Кіндибалюк А.А.* Розв'язування МСЕ двовимірної краївої сингулярно збуреної задачі конвекції-дифузії з використанням степеневих базисних функцій / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // XVIII Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». Львів, Україна, 4–5 жовтня 2012 р. – С. 90 – 91.

37. *Кіндибалюк А.А.* Модифікація Лі-алгебричного методу дискретних апроксимацій для розв'язування двовимірних краївих задач з неоднорідними краївими умовами / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // Третя Всеукраїнська науково-практична конференція «Сучасні інформаційні технології в економіці, менеджменті та освіті». Львів, Україна, 21 листопада 2012 р. – С. 14.
38. *Кіндибалюк А.А.* Степеневі базисні функції МСЕ для сингулярно збуреної країової задачі дифузії-реакції / *А.А. Кіндибалюк* // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики». Львів, Україна, 21–25 травня 2013 р. – Т. 3. – С. 25 – 27.
39. *Кіндибалюк А.А.* Узагальнення схеми Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задач Коші / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // XIX Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». Львів, Україна, 3–4 жовтня 2013 р. – С. 75 – 77.
40. *Кіндибалюк А.А.* Збіжність узагальненого методу Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій для розв'язування задач Коші з динамічними системами / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // IV Всеукраїнська науково-практична конференція «Сучасні інформаційні технології в економіці, менеджменті та освіті». Львів, Україна, 20 березня 2014 р. – С. 42 – 44.
41. *Кіндибалюк А.А.* Закони збереження, оператор рекурсії та імплектичні оператори нелінійної динамічної системи Броера-Каупа-Купершмідта / *А.А. Кіндибалюк, М.М. Притула* // I міжнародна, XX Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». Львів, Україна, 7–9 квітня 2014 р. – С. 90 – 91.
42. *Кіндибалюк А.* Узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для нелінійних динамічних систем / *А. Кіндибалюк, М. Притула* // VII Міжнародна наукова конференція імені академіка І.І.

Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика». Київ, Україна, 9–10 жовтня 2014 р. – С. 56.

43. Копитко М. Чисельна схема з нелінійною корекцією потоків для розв'язування задач конвекції і дифузії / М. Копитко // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2000. – Вип. 2. – С. 135–141.
44. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 519 с.
45. Люстик М. Функціонально-операторний аналіз проблеми збіжності для методу дискретних апроксимацій Ф. Калоджеро в банахових просторах / М. Люстик, А. Прикарпатський, М. Притула, М. Вовк // Математичний вісник НТШ. – Т. 9. – 2012. – С. 168–179.
46. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. / Дж. Л. Лэм. – М.: Мир, 1983. – 294 с.
47. Марченко В.А. Периодическая задача уравнения Кортевега де – Фриза / В.А. Марченко // Мат. сб. – 1974. – 95, № 3. – С. 331–356.
48. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений / В.П. Маслов. – М.:Наука, 1988. – 312 с.
49. Меньшикова О.В. Солітонні розв'язки для інверсної модифікованої нелінійної динамічної системи Кортевега – де Фріза / О.В. Меньшикова, М.М. Притула // Математичний вісник НТШ. – 2006. – № 3. – С. 88–94.
50. Митропольский А. Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций линейных и нелинейных динамических систем математической физики / А. Митропольский, А.К. Прикарпатский, В. Гр. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40. – С. 453–458.
51. Митропольский Ю.А. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. / Ю.А. Митропольский, Н.Н. (мл) Боголюбов, А.К. Прикарпатський, В.Г. Самойленко. – К. Наук. думка , 1987. – 295 с.

52. Митропольский Ю.А. Асимптотический метод построения импликационных и рекурсионных операторов вполне интегрируемых динамических систем / Ю.А. Митропольский, А.К. Прикарпатський, В.Г. Самойленко // Докл. АН СССР. – 1986. – 287, № 6. – С. 1312–1317.
53. Прикарпатский А.К. Градиентный алгоритм построения критериев интегрируемости нелинейных динамических систем / А.К. Прикарпатський // Докл. АН. СССР. – 1986. – 267, № 4. – С.327–329.
54. Прикарпатський А. Про одну конструкцію скінченновимірних редукцій на функціональних многовидах / А. Прикарпатський, О. Бігун // Мат. методи та фіз.. мех. поля. – 2005. – Т.48, № 3. – С. 7–15.
55. Прикарпатський А.К. Скінченно-вимірні редукції узагальненої динамічної системи Бюргерса та їх інтегрованість / А.К. Прикарпатський, М.М. Притула, О.Є. Гентош // Нелінійні коливання. 2000. – Т. 3, № 1. – С. 95–102.
56. Притула М.М. Гамільтонова інваріантна редукція динамічної системи Каупа-Броера / М.М. Притула, О.В. Воробйова, О.Є. Гентош // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика.– 2000. – Вип.3. – С. 118–124.
57. Притула М.М. Закони збереження інверсної нелінійної динамічної системи Буссінеска / М.М. Притула, О.М. Дмуховська // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 1995. – Вип. 12. – С. 39–42.
58. Притула М.М. Структура скінченновимірних інваріантних підмноговидів параметрично інтегровних нелінійних динамічних систем / А.К. Прикарпатський, М.М. Притула // Вісн. Львів. ун-ту. Серія механіко-математична. – 1995. – Вип. 42. – С. 42–47.
59. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Моротон. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
60. Савула Я.Г. Чисельний аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я.Г. Савула. – Львів, 2004. – 221 с.

61. Савула Я. Г. Разномерная задача математической модели адвекции-диффузии в среде с тонким включением / Я. Г. Савула, Т. И. Мандзак // Компьютерная математика. – 2007. – № 2. – С. 59–70
62. Самарский А.А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.
63. Самойленко В. Гр. Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций динамических систем математической физики и оценки её точности / В.Гр. Самойленко // Асимптотические методы в задачах мат. физики. К.: Ин-т математики АН УССР. – 1988. – С. 144–151.
64. Сінчук Ю. Експоненціальні апроксимації МСЕ для сингулярно збурених задач конвекції–дифузії реакції / Ю. Сінчук. Г. Шинкаренко // Віsn. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика.– 2007. – Вип.12. – С. 157–169.
65. Тахтаджян Л.А. Гамильтонов поход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. – М.: Наука, 1986. – 527 с.
66. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 488 с.
67. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-країових задач / Г.А. Шинкаренко. – Київ: НМК ВО, 1991. – 88 с.
68. Шинкаренко Г. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: h -адаптивний метод скінченних елементів. Ч. 1. / Г. Шинкаренко Ю. Козаревська // Віsn. Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2002. – Вип. 5. С. 153 – 165
69. Andjerid S. Computational methods for singularly perturbed systems / S. Andjerid, M. Aiffa, J.E. Flatherty – Singular Perturbations Concepts of Differential Equations, Cronin J., O'Malley R. E., eds., AMS, Providence, 1998. – 34 р.

70. *Baldin D.* Symbolic computation of exact solutions expressible in hyperbolic and elliptic functions for nonlinear partial differential and differential-difference equations. / *D. Baldin, U. Goktas, W. Hereman, L. Hong, R.S. Martino, J.C. Miller* // 2001. – Available at URL: http://www.mines.edu/fs_home/whereman/.
71. *Bangers W.* Adaptive Finite Element Method for Differential Equations / *W. Bangers, W. Rannacher.* – Base: Birkhauser, 2003. – 207 p.
72. *Bermúdez B.* Solving an advection-diffusion equation with an advection dominant term / *B. Bermúdez, L. Juárez* // Computer Methods in Mathematics, Poznan, Poland, 27-31 August 2013. – P. TS04-13 – TS04-14.
73. *Bihun O.H.* Approximation properties of the Lie-algebraic scheme / *O.H. Bihun* // Matematychni Studii. – 2003. – Vol. 20, N 1. – P. 85–91.
74. *Bihun O.H.* Modification of the Lie-algebraic scheme and approximation error estimations / *O.H. Bihun* // Matematychni Studii. – 2003. – Vol 20. N 2. – P. 179–184.
75. *Bihun O.H.* Numerical tests and theoretical estimations for a Lie-algebraic scheme of discrete approximations / *O.H. Bihun, M.S. Lustyk* // Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science. – 2003. – Vol. 6 – P. 3–10.
76. *Bihun O.* The rank of projection-algebraic representations of some differential operators / *O. Bihun, M. Prytula* // Matematychni Studii. – 2011. – Vol. 35, Is 1 – P. 9–21.
77. *Blackmore D.* Nonlinear dynamical systems of the mathematical physics: spectral and differential-geometrical integrability analysis / *D. Blackmore, A.K. Prykarpatsky, V. Hr. Samoylenko.* – World Scientific Publ., NJ, USA, 2011. – 563 p.
78. *Calogero F.* Interpolation, differentiation and solution of eigen value problems in more than one dimension / *F. Calogero* // Lett. Nuovo Cimento. – 1983. – Vol. 38, N 13. – P. 453–459.

79. *Calogero F.* Numerical tests of a novel technique to compute the eigen values of differential operators / *F. Calogero, E. Franko* // Il Nuovo Cins. –1985. – Vol. 89, N 2. – P. 161–208.
80. *Casas F.* Solution of linear partial differential equations by Lie algebraic method / *F. Casas* // J. of Comp. and Appl. Math. – 1996. – Vol. 76. – P. 159–170.
81. *Donea J.* Finite Element Methods for Flow Problems / *J. Donea, A. Huerta* – Chichester: Wiley & Sons, 2003. – 350 p.
82. *Douglas Jr. J.* Numerical methods for convection-diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures. / *J. Douglas Jr., T.F. Russell*. // SIAM J. Numer. Anal. – 1982. – Vol. 19. – P. 871–885.
83. *Fan E.G.* Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equation / *Fan E.G.* // Phys. Lett. A. – 2000. – 227. – P. 212–218.
84. *Frati A.* Spectral approximation to advection-diffusion problems by the fictitious interface method. / *A. Frati, F. Pasquarelli, A. Quarteroni* // J comput. Phys. – 1993. – Vol. 107. – P. 201–212.
85. *Gander M.J.* Optimized schwarz methods for a diffusion problem with discontinuous coefficient / *M.J. Gander, O. Dubois* // Numer. Algorithms. – 2014.
86. *Gerardo-Giorda Luca A* Robin–Robin preconditioner for advection–diffusion equations with discontinuous coefficients / *Gerardo-Giorda Luca, Patrick Le Tallec, Frédéric Nataf* // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2004. – Vol. 193. – P. 745–764.
87. *De Groen P.P.N., Hemker P.W.* Error bounds for exponentially fitted Galerkin methods applied to stiff two-point boundary value problems / *P.P.N. De Groen, P.W. Hemker* // Numerical Analysis of Singular Perturbations Problems, Hemker P.W., J.J. II. Miller eds. New York: Academic Press, 1979. – P. 217–249.

88. *Hereman W.* Direct Methods and Symbolic Software for Conservation Laws of Nonlinear Equations / *W. Hereman, P.J. Adams, H.L. Eklund, M.S. Hickman, B.M. Herbst* // Advances in Nonlinear Waves and Symbolic Computation, Ed.: Z. Yan, Nova Science Publishers, New York, Chapter 2. – 2009. – P. 19-79.
89. *Hemker P.W.* A numerical study of stiff two-point boundary value problems / *P.W. Hemker*. – Amsterdam: Mathematical Center, 1977. – 178 p.
90. *Houston P.* Stabilized hp-finite element methods for first-order hyperbolic problems / *P. Houston, C. Schwab, E. Suli* // SIAM J. Numer. Anal. – 2000. – Vol. 37.. – P. 1618–1643.
91. *Hughes T.J.R.* A simple scheme for developing ‘upwind’ finite elements / *T.J.R. Hughes* // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1978. – Vol.12 – P. 1359-1365.
92. *Karlsen K. H.* Upwind difference approximations for degenerate parabolic convection-diffusion equations with discontinuous coefficient / *K. H. Karlsen, N.H. Risebro, J.D. Towers* // IMA, Journal of Numerical Analysis – 2002. – Vol. 22. – P. 623–664.
93. *Kindybaliuk A.* Generalized method of Lie-algebraic discrete approximations for solving Cauchy problems with evolution equation / *Arkadii Kindybaliuk* // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2014. – Vol. 12, № 2. – P. 51 – 62.
94. *Kindybaliuk A.* Combined algorithm for finding conservation laws and implectic operators for the Boussinesq-Burgers nonlinear dynamical system and its finite dimensional reductions / *Arkadii Kindybaliuk, Mykola Prytula* // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2014. – Vol. 13, № 3. – P. 85 – 99.
95. *Arkadii Kindybaliuk* Finite dimensional reduction of nonlinear hydrodynamic thin layered currents evolution on invariant two-dimensional submanifold // *Arkadii Kindybaliuk, Mykola Prytula* // XX International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties, Brno, Czech Republic, 17–21 September, 2012. – Abstracts. – P. 57 – 58.

96. *Arkadii Kindybaliuk* Finite dimensional reduction of generalized Burger's type nonlinear dynamical system on invariant two dimensional submanifold / *Arkadii Kindybaliuk, Mykola Prytula* // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, L'viv, Ukraine, 17–21 September 2012. – Abstracts of Reports. – P. 206 – 207.
97. *Lustyk M.* Lie-algebraic discrete approximation for nonlinear evolution equations / *M. Lustyk* // Journal of Mathematical Sciences. – 2002. – Vol. 109, N 1. – P. 1169–1172.
98. *Lustyk M.* The Lie-Algebraic Discrete Approximation Scheme for Evolution Equations with Dirichlet/Neumann Data / *M. Lustyk* // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica. – 2002. – Vol. 40. – P. 117–124.
99. *Melenk J.M.* hp-Finite Element Method for Singular Perturbations / *J.M. Melenk*. – Berlin: Springer 2002. – 283 p.
100. *Melenk J.M.* An hp finite element method for convection-diffusion problems / *J.M. Melenk, C. Schwab* – Technical Report 97-05. Eidgenössische Technische Hochschule, 1997. – 47 p.
101. *Morton K.* Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems / *K. Morton* – London: Chapman & Hall, 1996. – 372 p.
102. *Proft J.* Discontinuous Galerkin methods for convection-diffusion equations for varying and vanishing diffusivity / *J. Proft, B. Rivière* // International Journal of Numerical Analysis and Modelling, Institute of Scientific Computing and Information. – 2009. – Vol. 6. – P. 553 – 561.
103. *Prykarpatsky A.K.* Finite-dimensional reductions of conservative dynamical systems and numerical analysis / *A.K. Prykarpatsky, S. Brzychczy, V.Hr. Samoylenko* // Ukr. Math. Journ. – 2001. – V. 53, N. 2. – P. 220 – 228.
104. *Prykarpatsky A.K.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects. / *A.K. Prykarpatsky, I.V. Mykytiuk*. – Kluwer, Netherlands. – 1999. – 560 p.

105. *Prykarpatsky A.K.* The Lie-algebraic discrete approximations in computing analysis / A.K.Prykarpatsky, M.M.Prytula, O.O. Yerchenko // Volyn Mathematical Bulletin. – 1996. – Vol. 3. – P. 113–116.
106. *Ross Hans Görg* Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection – Diffusion – Reaction and flow problems / Hans Görg Ross, Martin Stynes, Lutz Tobiska. – Springer – Verlag, Berlin Heidelberg. – 2008. – 598p.
107. *Siegel P.* Solution of the advection-diffusion equation using a combination of discontinuous and mixed finite elements / P. Siegel, R. Mosè, P. Ackerer, J Jaffre.// Intl. J. Numer. Meth. Flu. – 1997. – Vol. 24. – P. 595–613.
108. *Tamsir Mohammad* A semi implicit finite-difference approach for two-dimensional coupled Burgers' equations / Mohammad Tamsir, Vineet Kumar Srivastava // International Journ. of Scientific & Engineering Research. – 2011. – Vol. 2. – Is. 6.
109. *Tao Chen* The generalized Broer-Kaup-Kupershmidt System and its Hamiltonian Extension / Chen Tao, Li-Li Zhu, Lei Zhang // Applied Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 5 (76). – P. 3767–3780.
110. *Trotta R.L.* Multidomain finite elements for advection-diffusion equations / R.L. Trotta.// Appl. Numer.Math. – 1996. – Vol. 21. – P. 91–118.
111. *Verfurth R.* A posteriori error estimator for convection-diffusion problem / R. Verfurth // Numer. Math. – 1998. – N. 80. – P. 641–663.
112. *Yusufoglu E.* On the Extended Tanh Method, Applications of Nonlinear Equations / E. Yusufoglu, A.Bekir // International Journal of Nonlinear Science. – 2007. – Vol. 4, No. 1. – P. 10–16.
113. *Wei J.* On global representations of the solution of linear differential equations as a product of exponentials / J. Wei, E. Norman // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – Vol. 15. – P. 327–334.
114. *Wolf F.* Lie algebraic solutions of linear Foker-Plank equations / F. Wolf // J. Math. Phys. –1988. – Vol. 29. – P. 305–307.