

## Відгук

офіційного опонента про дисертаційну роботу

*Пасічник Олени Вікторівни*

“Задача Коші для рівняння дифузії з дробовою похідною в просторах  
узагальнених функцій”,

подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння

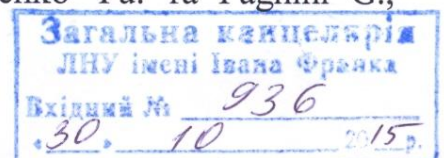
Дисертаційна робота Пасічник О.В. присвячена розвитку теорії задачі Коші для лінійних та півлінійних рівнянь з дробовою похідною за часовою змінною та початковими умовами і правими частинами, які є узагальненими функціями з просторів типу  $D'$  та  $S'$ .

На теперішній час спостерігається зростання уваги дослідників до дробового числення. У першу чергу це зумовлено різноманітними застосуваннями дробового інтегродиференціювання при описі широкого класу фізичних та хімічних процесів у фрактальних середовищах, при математичному моделюванні економічних та соціально-біологічних явищ. Теорія рівнянь з дробовими похідними істотно доповнює загальну теорію диференціальних рівнянь, дозволяє знайти тісний зв'язок між фактами, які, якщо залишатися в межах теорії диференціальних рівнянь цілого порядку, здаються незалежними. Наприклад, умова єдиності розв'язку задачі Коші для дифузійно-хвильового рівняння

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \alpha \in (0, 2],$$

при  $\alpha = 1$  збігається з умовою для рівняння теплопровідності, а при  $\alpha \rightarrow 2$  – з умовою для хвильового рівняння; при цьому, з цієї умови випливає, що для єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності слід вимагати, щоб шукані функції були обмеженими на нескінченності, а у випадку хвильового рівняння – ні. Добре відома також роль дробового числення в теорії рівнянь мішаного типу, рівнянь, що вироджуються в тому чи іншому розумінні.

Отже, розвиток теорії рівнянь з частинними похідними дробового порядку (зокрема, з дробовими похідними за часовою змінною) є актуальною і важливою задачею. Задача Коші для еволюційних рівнянь з дробовою похідною Рімана-Ліувілля за часовою змінною досить повно вивчена в класах гельдерових функцій (у працях Duan J., Hanuga A., Ейдельмана С.Д., Кочубея А.Н., Дріня Я.М., Городецького В.В., Івасишена С.Д., Літовченка В.А., Пташника Б.Й., Mainardi F., Luchko Yu. та Pagnini G.,





Metzler R. та Nonnenmacher T.F., Кілбаса А.О., Ворошилова О.О., Псху А.В. та інших). У той же час багато задач для таких рівнянь мають природну постановку і у різних просторах узагальнених функцій, оскільки часто функції в правих частинах рівнянь або функції, за допомогою яких задаються крайові задачі (зокрема, задача Коші) мають особливості в деяких точках або ділянках межі. Такі функції можуть допускати регуляризацію у різних просторах узагальнених функцій типу розподілів Соболева-Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо. Зазначені задачі ще мало вивчені, що також підкреслює актуальність проведених у дисертаційній роботі досліджень.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 94 найменування.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, висвітлено сучасний стан наукової проблеми, сформульовано мету і задачі дослідження, вказано наукову новизну, теоретичне і практичне значення одержаних результатів, а також подано інформацію про апробацію основних результатів дисертаційної роботи.

У першому розділі наведено огляд наукової літератури з тематики дослідження, окреслено коло математичних питань і проблем, які потребують дослідження і подальшого розвитку в теорії задачі Коші та крайових задач для рівнянь з дробовою похідною за часом у просторах узагальнених функцій, та описано основні результати дисертації.

Другий розділ носить допоміжний характер. У ньому введені основні позначення та подані деякі необхідні поняття (підрозділ 2.1). Описано один із відомих методів, який ґрунтується на узагальненні формули Гріна, дослідження крайових задач для еліптичних та параболічних рівнянь, коли функція в правій частині рівняння і задана на межі області функція є узагальненими функціями (підрозділ 2.2). Викладено відомі результати щодо розв'язності класичної задачі Коші для рівняння дифузії з регуляризованою дробовою похідною за часом (підрозділ 2.4). Новий результат сформульовано у підрозділі 2.3 дисертації – виведено формулу Гріна задачі Коші для оператора з дробовою похідною за часом.

Основні результати, отримані в дисертації, викладено у третьому та четвертому розділах роботи. Третій розділ дисертації присвячено дослідженню задачі Коші для лінійного рівняння дифузії із дробовою похідною за часом у випадку, коли права частина рівняння та початкова умова є узагальненими функціями. Доведено однозначну розв'язність вказаної задачі у просторах розподілів Шварца (підрозділ 3.1) та у просторі  $D'_b$  (підрозділ 3.2). Введено функціональні простори та вивчено на них



спряжені оператори Гріна, які використовувалися при доведенні теорем існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

У четвертому розділі розглянуто задачу Коші для півлінійного рівняння дифузії із дробовою похідною Рімана-Ліувілля з початковою умовою, яка є узагальненою функцією. Наведено два формулювання вказаної задачі (підрозділ 4.3) та доведено їх еквівалентність (підрозділ 4.4). Одне із формулювань ґрунтується на виведеній у підрозділі 2.3 формулі Гріна. Знайдено достатні умови розв'язності задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною за часом і узагальненою функцією у початковій умові (підрозділ 4.6). Доведено еквівалентність цієї задачі та деякого нелінійного інтегрального рівняння у ваговому функціональному просторі. Встановлено також залежність характеру особливостей розв'язку задачі Коші для лінійного та півлінійного рівнянь з дробовою похідною за часом від характеру особливостей початкових даних.

Оцінюючи дисертацію в цілому, зазначимо, що доведення всіх сформульованих тверджень є правильними і логічно обґрунтованими, висновки точно відтворюють зміст одержаних результатів та їхню новизну. Автореферат повно відображає зміст дисертації. Основні результати опубліковано в 5 статтях у відповідних наукових фахових виданнях і достатньо апробовані на семінарах та конференціях. Дисертація добре оформлена, доведення теорем свідчать про кваліфікованість дисертантки.

Серед основних результатів дисертантки відзначимо такі:

- 1) теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння дифузії із дробовою похідною за часом у випадку, коли права частина рівняння та початкова умова є узагальненими функціями з відповідних просторів;
- 2) формула Гріна задачі Коші для оператора з дробовою похідною за часом;
- 3) теорема про еквівалентність двох формулювань задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії із дробовою похідною Рімана-Ліувілля і початковою умовою з простору узагальнених функцій;
- 4) достатні умови розв'язності задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною за часом і узагальненою функцією у початковій умові;
- 5) еквівалентність задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною за часом і початковою умовою, яка є узагальненою функцією, та деякого нелінійного інтегрального рівняння у ваговому функціональному просторі;



- б) залежність характеру особливостей розв'язку задачі Коші для лінійного та півлінійного рівнянь з дробовою похідною за часом від характеру особливостей (порядків сингулярностей) початкових даних.

Зробимо також деякі зауваження щодо дисертаційної роботи.

1. У роботі, на жаль, зустрічаються орфографічні помилки, наприклад, “нелінійного” рівняння (с. 6), “наукомеричних” баз (с. 11), “молодшеми” (с. 15), “розв'язоку” (с. 25), “теорема 4.5” (с. 26), “використуватимемо” (с. 28), “інтегральне” рівняння (с. 108), “розв'зків” (с. 118).
2. При введенні позначень у підрозділі 2.1 на сторінці 28, описуючи множину  $Q$  зайвим є запис  $T > 0$ , але його бракує при описі множини  $Q_T$ .
3. Навівши на сторінці 36 формулу спряженого виразу  $A^*$ , допущено помилку на наступній сторінці при визначенні елементів  $e_j(x)$  (у другому доданку поданої формули диференціювання та сумування має відбуватися по  $j$ ).
4. Некоректно сформульоване на сторінках 18 та 53 означення простору  $S_\gamma(\mathbb{R})$  ( $\gamma \geq 0$ ), оскільки права частина нерівності  $|\phi^{(q)}(x)| \leq C_q \exp\{-a|x|^{1/\gamma}\}$  містить  $\frac{1}{\gamma}$ , а при  $\gamma = 0$  цей дріб не має змісту.  $S_0$  складається з усіх фінітних нескінченно диференційовних на  $\mathbb{R}$  функцій.
5. На сторінці 53 наведено приклад функції  $\phi(t) = \exp\{-|t|^{-\gamma}\}$ ,  $\gamma > 0$ , як елементу відповідного класу Жевре. Описуючи цей клас, змінна  $t \in [0, T]$ , а наведена функція не має змісту в точці  $t = 0$ . У точці  $t = 0$  слід покласти  $\phi(0) = 0$ .
6. У роботах Кочубея А.Н., на які посилається дисертантка, доведено, що нерівності (2.32) та (2.33) (с. 49-50) справедливі у випадку, коли порядок похідної  $j$  відповідної функції набуває значень  $j = 0, 1, 2, 3$ . У дисертації ж сказано, що  $j = 0, 1, 2, \dots$ , а це не є правильним.

Проте вказані зауваження не мають принципового значення і не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації в цілому як завершеної наукової праці. У ній отримані нові науково обґрунтовані результати, що в сукупності вирішують конкретну наукову задачу суттєвого значення для теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними дробового порядку.

Одержані результати та методи їх отримання можуть бути використані при подальших дослідженнях задачі Коші для лінійних та півлінійних рівнянь дифузії із дробовою похідною за часом у просторах узагальнених функцій.

На підставі вищесказаного вважаю, що дисертаційна робота Пасічник Олени Вікторівни “Задача Коші для рівняння дифузії з дробовою похідною в просторах узагальнених функцій” відповідає всім вимогам щодо кандидатських дисертацій зі спеціальності 01.01.02 – диференціальні рівняння, зокрема, вимогам постанови Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 року “Про порядок присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника”, а її автор заслуговує на присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент –  
кандидат фізико-математичних наук,  
доцент кафедри алгебри та інформатики  
Чернівецького національного університету  
імені Юрія Федьковича

Мартинюк О.В.

