

**ВІДГУК**  
офіційного опонента  
на дисертацію Кузя Антона Мирославовича  
**,“Задачі з інтегральними умовами за часовою змінною**  
**для еволюційних рівнянь”,**  
подану до захисту на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння

Одним із важливих напрямків розвитку сучасної теорії диференціальних рівнянь є дослідження задач з інтегральними умовами, які є узагальненням дискретних нелокальних умов, для рівнянь із частинними похідними. Такі задачі мають багате практичне застосування – вони виникають при моделюванні процесів дифузії у турбулентній плазмі, соле- та вологопереносу в ґрунтах, деяких процесів тепlopровідності, при досліджені задач математичної біології, демографії, довгострокового прогнозування погоди тощо.

Однією з перших робіт, присвячених вивченню задач з інтегральними умовами, є праця Дж. Кенона (J. R. Cannon), у якій встановлено однозначну розв'язність задачі з інтегральною умовою за просторовою змінною для одновимірного рівняння тепlopровідності. У різних аспектах задачі з інтегральними умовами за певною виділеною змінною для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними вивчали Г. А. Авалішвілі, В. М. Борок, М. І. Іванчов, В. С. Ільків, М. І. Іонкін, П. І. Каленюк, В. Л. Камінін, І. Я. Кміть, А. І. Кожанов, З. О. Мельник, А. М. Нахушев, Б. П. Панеях, Л. С. Пулькіна, І. В. Тіхонов, М. Й. Юрчук, A. Bouziani, M. Bouzit, N. Merazga, S. Mesloub та інші автори. В їх працях досліджено коректність прямих задач для широких класів лінійних рівнянь із частинними похідними (гіперболічних, параболічних, безтипних) та диференціально-операторних і псевдодиференціальних рівнянь, а також обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення для лінійних і квазілінійних гіперболічних та параболічних рівнянь; вивчено властивості розв'язків цих задач.

Назагал, задачі з інтегральними умовами за виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними є умовно коректними, а їх розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників. У роботах Б. Й. Пташника та його учнів, П. І. Штабалюка та М. М. Симотюка, розглядалися нерегулярні випадки задач з інтегральними умовами за виділеною змінною у вигляді послідовних моментів від шуканої функції для лінійних гіперболічних та безтипних диференціальних рівнянь і систем рівнянь довільного порядку, а також псевдодифе-

БІБЛІОТЕКА КАНЦЕЛІЯ  
Інституту фізики Франківської  
Національної Академії наук України  
23 09. 766  
15

ренціальних рівнянь. Коректність таких задач було досліджено з використанням метричного підходу до оцінок знизу малих знаменників.

Дисертація А. М. Кузя присвячена вивченню задач з умовами за часовою змінною, частинним випадком яких є інтегральні умови у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції, та умовами майже періодичності за просторовими змінними для широких класів еволюційних рівнянь та систем рівнянь (гіперболічних, параболічних і рівнянь мішаного типу, а також рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом).

Результати дисертації отримані в рамках виконання держбюджетної теми "Дослідження коректності, побудова та вивчення властивостей розв'язків лінійних і нелінійних краївих задач для некласичних еволюційних рівнянь" (номер держреєстрації № 0110U004817) відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України та проекту № 41.1/004 "Розподіли нулів поліномів і гладких функцій та їх застосування при дослідженні умовно коректних краївих задач математичної фізики" Державного Фонду фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (номер держреєстрації № 0111U006625).

Дисертаційна робота викладена на 154 сторінках і складається з переліку основних умовних позначень, вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел, який налічує 132 найменування.

У *вступі* обґрунтовано актуальність тематики дисертаційної роботи, сформульовано мету та задачі дослідження, наведено отримані результати дисертації, відзначено їх новизну та апробацію.

У *першому розділі* проведено короткий огляд праць, які стосуються тематики дисертаційних досліджень. Вказано на задачі, які залишаються мало вивченими.

У *другому розділі* наведено простори функцій, майже періодичних за просторовими змінними, а також деякі допоміжні твердження з метричної теорії чисел, які використовуються в наступних розділах. Крім того, сформульовано загальну постановку, якою об'єднані всі розглядувані в дисертації задачі, подано схему їх дослідження й критерій єдності розв'язків.

У *третьому розділі* для рівнянь типу Клейна-Гордона та гіперболічних за Гордінгом рівнянь, а також для систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами, гіперболічних за Петровським, встановлено коректність та побудовано розв'язки задач з умовами за часовою змінною, частинним випадком яких, окрім інтегральних умов, є умови типу Діріхле.

*Четвертий розділ* дисертації присвячений дослідженню задач з умовами за часовою змінною, частинними випадками яких є початкові або багатоточкові умови, для параболічного за Петровським рівняння зі змінними за часом коефіцієнтами та для системи рівнянь зі сталими коефіцієнтами, параболічної за

Шиловим. Отримано умови коректності розглянутих задач та побудовано явні формули для їх розв'язків. Виділено частинні випадки задач, у яких відсутня проблема малих знаменників.

У *п'ятому розділі* для рівнянь зі сталими коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом, встановлено коректність задачі з умовами за часовою змінною, частинним випадком яких є двоточкові крайові умови. Показано, що коли оператор диференціювання за просторовими змінними при старшій похідній за часом маєвищий порядок, ніж відповідні оператори при молодших похідних, то у задачі відсутня проблема малих знаменників. У цьому розділі також досліджено однозначну розв'язність задачі з інтегральною умовою за часовою змінною для параболо-гіперболічного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами; проаналізовано випадки появи та відсутності малих знаменників.

Робота має теоретичний характер, її результати можуть бути використані у подальших дослідженнях задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними, а також при дослідженні конкретних прикладних задач, моделями яких є розглянуті в дисертації задачі.

При виконанні дисертаційної роботи А. М. Кузь подолав значні труднощі як теоретичного характеру, пов'язані з доведенням нових метричних тверджень про оцінки знизу малих знаменників складної нелінійної структури, що виникли при побудові розв'язків розглянутих задач, так і аналітичного характеру, пов'язаних з явною побудовою розв'язків у вигляді рядів та оцінюванням їх норм у відповідних функціональних просторах.

Дисертаційна робота А. М. Кузя є цілісною, добре структурованою науково-дослідною роботою, яка написана на високому науковому рівні.

Результати дисертації є новими та строго обґрунтованими. Для сформульованих в роботі нових тверджень, лем та теорем наведено чіткі й достатньо повні доведення. Викладення результатів є послідовним; окремі задачі проілюстровано прикладами. Основні результати дослідження достатньо повно висвітлені автором у наукових фахових виданнях та апробовані на міжнародних і всеукраїнських конференціях.

Автореферат дисертації повно й точно відображає зміст основних положень дисертаційної роботи.

Серед критичних *зауважень* слід зазначити наступні:

1. У постановках задач припускається, що порядки  $r_j$  моментів є цілими невід'ємними числами, однак теореми єдності та існування розв'язків цих задач залишаються справедливими і у випадку коли  $r_j$  є довільними дійсними числами. Можливо варто було б формулювати задачі, розглядувані в дисертації, у загальнішій постановці.

2. При доведенні теореми 3.3 використовується методика, запроваджена П. І. Штабалюком, а при доведенні загальніших теорем 3.6, 3.10, 4.9, 5.7 – метод, запропонований у роботі М. М. Симотюка та О. М. Медвідь. У дисертації доречно було б зробити порівняння цих методик.
  3. При доведенні теореми 5.7 для спрошення викладок додатково припускається, що корені відповідного характеристичного многочлена (5.61) є простими. Варто було б зробити зауваження про випадок кратних коренів.
  4. Порядки  $d_j$  диференціальних виразів, що входять у рівняння (5.45), позначені тими ж буквами, що і сталі з оцінки спектру в формулі (2.1).
  5. У дисертації наявні описки та оргіхи стилістичного характеру (стор. 11, 16, 141, 145).

Однак перелічені недоліки не зменшують цінності дисертаційної роботи та не впливають на її загальну позитивну оцінку.

На основі вищесказаного вважаю, що дисертаційна робота Кузя Антона Мирославовича „Задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для еволюційних рівнянь” є завершеною науковою працею, в якій отримано нові науково обґрунтовані результати, що є вагомим внеском у теорію краївих задач для рівнянь із частинними похідними. Робота відповідає всім вимогам Департаменту атестації кадрів вищої кваліфікації щодо кандидатських дисертацій, а її автор заслуговує присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Завідувач кафедри диференціальних рівнянь  
Чернівецького національного університету  
імені Юрія Федьковича  
доктор фіз.-мат. наук, професор

Пукальський І. Д.

