МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я.С. Підстригача

Федорчук Володимир Іванович

УДК 519.46:517.944

ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ П'ЯТИВИМІРНИХ РІВНЯНЬ Д'АЛАМБЕРА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІНВАРІАНТИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НЕСПРЯЖЕНИХ ПІДГРУП ГРУПИ ПУАНКАРЕ P(1,4)

01.01.02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного моделювання Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України та відділі алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент
Сидоренко Юрій Миколайович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка, доцент кафедри
математичного моделювання.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Сєров Микола Іванович,
Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка,
завідувач кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Нитребич Зіновій Миколайович,
Інститут прикладної математики та
фундаментальних наук
Національного університету «Львівська політехніка»,
завідувач кафедри вищої математики.

Захист відбудеться "____" _____________ 2016 р. о ____ годині на засіданні спеціалізованої Вченої ради Д 35.051.07 Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79001, м. Львів, вул. Університетська 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова 5).

Автореферат розісланий "____" _____________ _________ р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Остудін Б. А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В багатьох випадках математичне моделювання різних процесів реального світу зводиться до побудови та дослідження диференціальних рівнянь в просторах різних вимірностей, які мають нетривіальні групи симетрії. З цією метою можна використати, зокрема, методи С. Лі (S. Lie) та його учнів. Слід зазначити, що особливу актуальність ці методи набувають для нелінійних рівнянь до яких не завжди можна застосувати класичні методи математичної фізики. Важливий внесок в розвиток теоретико-групових методів внесли Л.В. Овсянніков, Н.Х. Ібрагімов, П. Олвер (P. Olver), Г. Біркгоф (G. Birkhoff), Л.І. Сєдов, Д. Блумен (G. Bluman), Ю. Коул (J. Cole) та інші.

Значний вклад в розвиток групового аналізу диференціальних рівнянь внесли вітчизняні вчені. Серед них В.І. Фущич, А.Г. Нікітін, Л.Ф. Баранник, А.Ф. Баранник, М.І. Сєров, В.І. Лагно, Р.О. Попович, І.М. Цифра, В.А. Владіміров, В.Г. Костенко та інші.

Добре відомо, що при побудові математичних моделей реальних процесів досить часто отримуються диференціальні рівняння, які містять довільні функції (довільні параметри). Для дослідження таких рівнянь проводиться їх групова класифікація.

На даний час опубліковано багато наукових праць, які присвячені груповій класифікації лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь (систем диференціальних рівнянь) різних типів, які задані в просторах різних вимірностей. Серед них праці С. Лі (S. Lie), Л.В. Овсяннікова, Н.Х. Ібрагімова, П. Олвера (P. Olver), В. Еймса (W. Ames), Р. Поповича, С. Софоклеоуса (S. Sophocleous), А. Нікітіна, П. Ліча (P. Leach), В. Лагно, А. Самойленка, Р. Жданова, П. Басараб-Горвата (P. Basarab-Horwath), М. Сєрова, П. Вінтерніца (P. Winternitz), Р. Черніги, С. Мелешка, С. Спічака, В. Стогнія, В. Дородніцина, А. Орона (A. Oron), Е. Пуччі (E. Pucci), Д. Арріго (D. Arrigo), Р. Ередеро (R. Heredero), М. Гандаріаса (M. Gandarias), Н. Іванової, Р. Траціни (R. Tracina), О. Ванеєвої, І. Єгорченко та інших.

У дисертаційній роботі проведена групова класифікація певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4) \times R(u)$ (тут, і всюди надалі $R(u)$ – числова вісь залежної змінної u) шляхом побудови нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів (ДІ) першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$, сформульовано та доведено критерій еквівалентності цих функціональних базисів, проведено симетрійну редукцію (в усіх випадках, коли це можливо зробити за допомогою класичного методу Лі) та побудовано класи інваріантних розв'язків для деяких $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера.

Узагальнена група Пуанкаре $P(1,4)$ це група поворотів та зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Серед важливих для теоретичної та математичної фізики груп ця група посідає особливе місце. Вона є найменшою групою, що містить, як підгрупи, розширену групу Галілея $\widetilde{G}(1,3)$ (групу симетрії класичної фізики) і групу Пуанкаре $P(1,3)$ (групу симетрії релятивістської фізики). Група $P(1,4)$ має широке застосування при розгляді різних питань теоретичної і математичної фізики. Деякі з них можна знайти в працях В.І. Фущича, А.Г. Нікітіна, І.Ю. Кривського, В.Г. Кадишевського, Л.П. Сокура та інших.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано на кафедрі математичного моделювання ЛНУ ім. Івана Франка та у відділі алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України.

Напрямок досліджень, обраний у дисертаційній роботі, пов'язаний із науковими дослідженнями кафедри математичного моделювання Львівського національного університету імені Івана Франка і є складовою частиною завдань держбюджетних тем:

– "Розробка математичних методів дослідження прямих, обернених і спектральних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними"(1997–2000 рр., номер держреєстрації № 0197U018069);

– "Побудова математичних моделей та розробка методів дослідження крайових задач для диференціальних рівнянь і випадкових еволюцій"(2000–2003 рр., номер держреєстрації № 0100U001411);

та відділу алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України і є складовою частиною завдань наступних держбюджетних тем:

– "Алгебраїчні та комбінаторні методи в матричних кільцях, скінченнопараметричних групах Лі та топологічних напівгрупах"(2002–2006 рр., номер держреєстрації: № 0102U000451);

– "Розробка теоретико-кільцевих і групових методів дослідження задач факторизації та класифікації матриць над кільцями скінченнопороджених головних ідеалів і вивчення структурних властивостей скінченновимірних алгебр Лі"(2007–2011 рр., номер державної реєстрації: № 0107U000361);

– "Дослідження матричних алгебричних систем та їх застосування"(2012–2016 рр., номер держреєстрації: № 0111U008859).

Автор брав участь у цих дослідженнях як виконавець вищевказаних держбюджетних тем.

Мета і задачі дослідження. *Метою* даної роботи є групова класифікація певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4)\times R(u)$ а також проведення симетрійної редукції та побудова класів інваріантних розв'язків для деяких $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера.

Завдання дисертаційної роботи конкретизується такими пунктами:

1) Провести групову класифікацію певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4) \times R(u)$.
2) Сформульовати і довести критерій еквівалентності функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.
3) Побудувати в явному вигляді нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку для всіх неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.
4) Провести симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) та побудувати класи інваріантних розв'язків для деяких $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера.

Об'єктом дослідження є певний клас п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4) \times R(u)$, функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$, деякі диференціальні рівняння другого порядку, інваріантні відносно групи $P(1,4)$.

Предметом дослідження є групова класифікація, симетрійна редукція та класи інваріантних розв'язків таких рівнянь.

Методи дослідження. У роботі використано апарат групового аналізу диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі.

1) Проведено групову класифікацію певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4) \times R(u)$.
2) Сформульовано і доведено критерій еквівалентності функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.
3) Побудовано в явному вигляді нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку для всіх неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.
4) Проведено симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) та побудовано класи інваріантних розв'язків для деяких $P(1,4)$–інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при побудові та дослідженні моделей теоретичної та математичної фізики в просторі $M(1,4) \times R(u)$, які інваріантні відносно неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач належить науковому керівнику Ю.М. Сидоренку. У спільних статтях [3, 5–9] В.М. Федорчуку належать результати по вивченню підгрупової структури групи $P(1,4)$ та обговорення отриманих результатів. У спільній роботі [2] В.М. Федорчуку належать результати з вивчення підгрупової структури групи $P(1,4)$, диференціальних інваріантів першого та другого порядків в просторі $M(1,3) \times R(u)$ для розщеплюваних підгруп групи $P(1,4)$. У спільній роботі [4] В.М. Федорчуку належать результати з вивчення підгрупової структури групи $P(1,4)$ та класів диференціальних рівнянь першого порядку в просторі $M(1,3) \times R(u)$ з нетривіальною симетрією. Інші результати, які опубліковано в спільних з Федорчуком В.М. статтях, зокрема, критерій еквівалентності функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$ та побудова в явному вигляді нееквівалентних функціональних базисів ДІ належать дисертантові. Результати, які виносяться на захист, отримано дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися дисертантом на таких конференціях: Fourth Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics"(July 9—15, 2001); International Conference on Functional Analysis and its Applications Dedicated to the 110-th anniversary of Stefan Banach (May 28–31, 2002, Lviv, Ukraine); Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача, (24–27 травня 2005 року, Львів); Sixth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (20–26 June 2005, Kyiv, Ukraine); 8th International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (June 21–27, 2009, Kyiv, Ukraine); Конференція молодих учених "Підстригачівські читання" (23–25 травня 2012 року, Львів); V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (19–21 вересня 2013 року, м. Івано-Франківськ); Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2015" , 26–28 травня 2015 р., Львів; Міжнародна конференція молодих математиків, 3–6 червня 2015 р., Київ; 10-та Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька, 25–28 серпня 2015, Дрогобич;
та Федорчуком В.М. (у випадках спільних доповідей) на наступних наукових конференціях: Український математичний конгрес, 21–23 серпня 2001 року, Київ; Міжнародній математичній конференції, присвяченій сторіччю від початку роботи Д.О. Граве (1863–1939) в Київському університеті, (17–22 червня 2002, м. Київ); Fifth Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics"(June 23–29, 2003); 10th International Conference on Differential Geometry and Its Applications In honour of the 300th anniversary of the birth of Leonhard Euler (27–31 August, 2007, Olomouc, Czech Republic); "Український математичний конгрес – 2009" (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова), 27–29 серпня 2009 року, Київ;
а також доповідалися дисертантом і обговорювалися на наукових семінарах:

– кафедри математичного моделювання механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка (керівники: доктор фізико-математичних наук, професор Заболоцький М.В.; кандидат фізико-математичних наук, доцент Сидоренко Ю.М.);

– відділу алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (керівник семінару – доктор фізико-математичних наук, професор Петричкович В.М.);

– математичному семінарі Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (керівники: член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор Пташник Б.Й.; доктор фізико-математичних наук, професор Войтович М.М.; доктор фізико-математичних наук Пелих В.О.; доктор фізико-математичних наук, професор Петричкович В.М.);

– Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор Пташник Б.Й., доктор фізико-математичних наук, професор Іванчов М.І., доктор фізико-математичних наук, професор Каленюк П.І.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 11 статтях [1–11]. З них – 6 в наукових фахових виданнях України, 5 – в закордонних виданнях. З них – 9 ([1, 2, 4–10]) опубліковано у виданнях, що включені до міжнародної науко-метричної бази MathSciNet, а також додатково висвітлено в матеріалах і тезах 9 ([12–20]) наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 154 сторінки, основного тексту – 130 сторінок. Список використаних джерел налічує 167 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** дисертаційної роботи обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету і задачі дослідження, вказано наукову новизну та апробацію одержаних результатів.

У першому розділі проведено короткий огляд літератури, пов'язаної з темою дисертації.

Другий розділ дисертації містить результати групової класифікації певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера.

У першому підрозділі наведено деякі відомі факти з групового аналізу диференціальних рівнянь.

Нехай G_r^N – локальна група Лі точкових перетворень простору E^N:

$$x' = T_a x = f(x, a), \quad x, x' \in E^N, \quad a \in E^r,$$

де $f(x, a)$ – достатньо гладкі функції своїх аргументів.

Означення 2.1 Не тотожньо стала функція $I(x)$ називається *інваріантом групи* G_r^N, якщо

$$I(T_a x) = I(x)$$

для всіх перетворень $T_a \in G_r^N$.

Базисні елементи алгебри Лі групи G_r^N позначимо через $X_1, X_2, ..., X_r$. Вони мають вигляд:

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, N \\ \alpha = 1, \ldots, r \end{pmatrix},$$

де $\xi_\alpha^i(x) = \left.\dfrac{\partial f^i}{\partial a^\alpha}\right|_{a=0}$. Функції $\xi_\alpha^i(x)$ називаються координатами операторів X_α.

Побудуємо матрицю із координат операторів X_α:

$$M = ||\xi_\alpha^i(x)||,$$

де α – номер рядка, i – номер стовпця, причому $\alpha = 1, \ldots, r$; $i = 1, \ldots, N$. Загальний ранг матриці M позначимо через R.

Теорема 2.1 *Група* G_r^N *має інваріанти тоді і тільки тоді, коли* $R < N$. *Якщо ця нерівність виконується, то існує* $t = N - R$ *функціонально незалежних інваріантів* $I_\tau(x)$ $(\tau = 1, \ldots, t)$ *групи* G_r^N *таких, що довільний її інваріант є функцією від них.*

Означення 2.2 Інваріанти продовженої групи називаються *диференціальними інваріантами групи* G_r^N.

Другий підрозділ містить опис алгебри Лі групи $P(1,4)$.

Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15 базисними елементами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,3,4)$ і P'_μ $(\mu = 0,1,2,3,4)$, які задовільняють комутаційним співвідношенням:

$$\left[P'_\mu, P'_\nu\right] = 0,$$

$$\left[M'_{\mu\nu}, P'_\sigma\right] = g_{\mu\sigma}P'_\nu - g_{\nu\sigma}P'_\mu,$$

$$\left[M'_{\mu\nu}, M'_{\rho\sigma}\right] = g_{\mu\rho}M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M'_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M'_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M'_{\nu\rho},$$

де $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,3,4)$ – метричний тензор з компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \neq \nu$. Тут і всюди в дальнішому $M'_{\mu\nu} = iM_{\mu\nu}$.

Для зручності перейдемо від $M'_{\mu\nu}$ і P'_μ до наступних лінійних комбінацій:

$$G = M'_{40}, \quad L_1 = M'_{32}, \quad L_2 = -M'_{31}, \quad L_3 = M'_{21},$$

$$P_a = M'_{4a} - M'_{a0}, \quad C_a = M'_{4a} + M'_{a0}, \quad (a = 1,2,3),$$

$$X_0 = \frac{1}{2}\left(P'_0 - P'_4\right), \quad X_k = P'_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad X_4 = \frac{1}{2}\left(P'_0 + P'_4\right).$$

Одним із нетривіальних наслідків вивчення підгрупової структури групи $P(1,4)$ є те, що група $P(1,4)$ містить як підгрупи групу Пуанкаре $P(1,3)$ і розширену групу Галілея $\widetilde{G}(1,3)$, тобто природньо об'єднує групи симетрії релятивістської та нерелятивістської фізики.

Алгебра Лі групи $\widetilde{G}(1,3)$ генерується наступними базисними елементами:

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4.$$

Розглянемо наступне зображення алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$\begin{aligned} &P'_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P'_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad P'_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad P'_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ &P'_4 = -\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad M'_{\mu\nu} = -\left(x_\mu P'_\nu - x_\nu P'_\mu\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

У третьому підрозділі сформульовано та доведено критерій еквівалентності функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$ отримуються при розв'язуванні систем диференціальних рівнянь виду:

$$\begin{cases} \widetilde{X}_1 J(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) &= 0, \\ \widetilde{X}_2 J(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) &= 0, \\ \vdots & \\ \widetilde{X}_k J(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) &= 0, \end{cases}$$

де $\{\widetilde{X}_1,\ \widetilde{X}_2, ...\widetilde{X}_k, \quad (\,k\ =\ 1, ..., 15\,)\}$ – один раз продовжені базисні оператори k-вимірної неспряженої підалгебри алебри Лі групи $P(1,4)$, $u_\mu \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Перше продовження базисних операторів алгебри Лі групи $P(1,4)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \widetilde{G} &= -x_4 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_4} + u_4 \frac{\partial}{\partial u_0} + u_0 \frac{\partial}{\partial u_4}, \\ \widetilde{L}_1 &= x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_3}, \\ \widetilde{L}_2 &= -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - u_3 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_3}, \\ \widetilde{L}_3 &= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_2}, \end{aligned}$$

$$\widetilde{P}_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + (x_0 + x_4) \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_4} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} - (u_0 - u_4) \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_4},$$
$$\widetilde{P}_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} + (x_0 + x_4) \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_4} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_0} - (u_0 - u_4) \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_4},$$
$$\widetilde{P}_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_0} + (x_0 + x_4) \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - u_3 \frac{\partial}{\partial u_0} - (u_0 - u_4) \frac{\partial}{\partial u_3} - u_3 \frac{\partial}{\partial u_4},$$
$$\widetilde{C}_1 = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - (x_0 - x_4) \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_4} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} + (u_0 + u_4) \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_4},$$
$$\widetilde{C}_2 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} - (x_0 - x_4) \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_4} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_0} + (u_0 + u_4) \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_4},$$
$$\widetilde{C}_3 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_0} - (x_0 - x_4) \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} + u_3 \frac{\partial}{\partial u_0} + (u_0 + u_4) \frac{\partial}{\partial u_3} - u_3 \frac{\partial}{\partial u_4},$$
$$\widetilde{X}_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_4} \right), \qquad \widetilde{X}_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \widetilde{X}_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$\widetilde{X}_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad \widetilde{X}_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial x_4} \right).$$

В даному розділі $N = 11$, бо координатами в один раз продовженому просторі є значення величин $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$.

Для довільної k-вимірної $(k = 1, 2, \ldots, 15)$ підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ матриця M матиме розмірність $k \times 11$. Загальний ранг такої матриці може приймати значення $1, 2, \ldots, min(k, 11)$.

З вище наведеної теореми 2.1 випливає, що всі ці підалгебри в один раз продовженому просторі матимуть $t = 11 - R$ – вимірні функціональні базиси інваріантів. Це рівнозначне тому, що всі k-вимірні підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ матимуть ДІ першого порядку, якщо $R < 11$. Для кожної підалгебри позначатимемо ці інваріанти через $\{J_1, J_2, \ldots, J_t\}$.

В процесі побудови функціональних базисів ДІ виявилося, що немає взаємно однозначної відповідності між неспряженими підалгебрами алгебри Лі групи $P(1,4)$ та відповідними функціональними базисами. Це означає, що деякі з цих базисів є еквівалентними.

Нехай $\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\}$ і $\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\}$ є функціональними базисами ДІ першого порядку відповідно для підалгебр L^1 і L^2.

Означення 2.3 Кажемо, що функціональні базиси $\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\}$ і $\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\}$ є *еквівалентними*, якщо існують гладкі функції $f_1, f_2, ..., f_t$ і $g_1, g_2, ..., g_t$ такі що

$$\begin{cases} J_1^{(2)} = f_1\left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\right) \\ J_2^{(2)} = f_2\left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J_t^{(2)} = f_t\left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\right) \end{cases} \tag{2.2}$$

і

$$\begin{cases} J_1^{(1)} = g_1\left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\right) \\ J_2^{(1)} = g_2\left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J_t^{(1)} = g_t\left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\right). \end{cases} \tag{2.3}$$

Теорема 2.2 *Два функціональні базиси* $\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\}$ *і* $\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\}$ *є еквівалентними тоді і тільки тоді, якщо вони задовільняють наступні умови:*

$$\begin{cases} \widetilde{X}_1^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \quad \widetilde{X}_1^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \; \dots, \; \widetilde{X}_1^{(1)} J_t^{(2)} = 0 \\ \widetilde{X}_2^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \quad \widetilde{X}_2^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \; \dots, \; \widetilde{X}_2^{(1)} J_t^{(2)} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{X}_{r_1}^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \quad \widetilde{X}_{r_1}^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \; \dots, \; \widetilde{X}_{r_1}^{(1)} J_t^{(2)} = 0 \\ \widetilde{X}_1^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \quad \widetilde{X}_1^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \; \dots, \; \widetilde{X}_1^{(2)} J_t^{(1)} = 0 \\ \widetilde{X}_2^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \quad \widetilde{X}_2^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \; \dots, \; \widetilde{X}_2^{(2)} J_t^{(1)} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{X}_{r_2}^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \quad \widetilde{X}_{r_2}^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \; \dots, \; \widetilde{X}_{r_2}^{(2)} J_t^{(1)} = 0 \end{cases}, \tag{2.4}$$

де $\{\widetilde{X}_1^{(1)}, \widetilde{X}_2^{(1)}, ..., \widetilde{X}_{r_1}^{(1)}\}$, $\{\widetilde{X}_1^{(2)}, \widetilde{X}_2^{(2)}, ..., \widetilde{X}_{r_2}^{(2)}\}$ *– один раз продовжені базисні оператори підалгебр* L^1 *і* L^2 *відповідно;* r_1, r_2 *– розмірності підалгебр* L^1 *і* L^2.

У четвертому підрозділі проведено групову класифікацію певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера. Цей підрозділ складається з дев'яти підпідрозділів в яких описано отримані $P(1,4)$-нееквівалентні підкласи рівнянь.

Розглянемо клас нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера виду:

$$\Box_5 u = F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4), \tag{2.5}$$

де $\Box_5 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$ – оператор Д'Аламбера в просторі $M(1,4)$, F – довільна гладка функція, $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$.

Цей клас є широким узагальненням лінійного та нелінійного рівнянь Д'Аламбера, рівняння sin-Гордона, рівняння Ліувілля та рівняння sinh-Гордона.

Кожне перетворення з конформної групи C(1,4) простору M(1,4) належить до групи еквівалентності класу (2.5). Для групової класифікації обмежимося підгрупою $P(1,4)$ групи $C(1,4)$. А саме: використаємо неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ (спряження розглядалося відносно групи $P(1,4)$) та нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку цих підалгебр. В цьому випадку групова класифікація розглядуваного класу рівнянь зводиться до побудови підкласів цього класу, які будуть інваріантними відносно неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Добре відомо, що ліва сторона рівняння, що досліджується, є інваріантною відносно групи $P(1,4)$. Тому наше завдання полягає на побудові правих сторін (функцій $F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$) інваріантних відносно неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Оскільки розглядувані функції залежать також від похідних першого порядку шуканої функції по незалежних змінних, то шукані підкласи рівнянь можна записати у такому вигляді:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_{t_1}), \tag{2.6}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_{t_1}\}(t_1 = 2, 3, ..., 10)$ – нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Таким чином, задача групової класифікації класу рівнянь, що досліджується, звелася до побудови нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Основний результат цього розділу можна сформулювати у вигляді наступної

Теорема 2.3 *Існує 495 $P(1,4)$-нееквівалентнних підкласів рівнянь виду (2.6). Серед них:*

- *один підклас побудований на основі двовимірного нееквівалентного функціонального базису ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;*
- *7 підкласів побудованих на основі тривимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;*
- *23 підкласи побудовані на основі чотиривимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;*
- *62 підкласи побудовані на основі п'ятивимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;*
- *108 підкласів побудованих на основі шестивимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;*
- *136 підкласів побудованих на основі семивимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;*

- *89 підкласів побудованих на основі восьмивимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;*

- *49 підкласів побудованих на основі дев'ятивимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;*

- *20 підкласів побудованих на основі десятивимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.*

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь виду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2), \tag{2.7}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2\}$ – нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.1 *З точністю до еквівалентності існує єдиний двовимірний функціональний базис ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$, що задається формулою (2.8).*
Твердження 2.2 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд рівняння (2.6), що права частина залежить від двох функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.7), де J_1, J_2 мають вигляд (2.8).*

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь виду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, J_3), \tag{2.10}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, J_3\}$ – нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.3 *З точністю до еквівалентності існує 7 тривимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу $R = 8$ задаються формулами (2.11).*
Твердження 2.4 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд 7 підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від трьох функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.10), де J_1, J_2, J_3 мають вигляд (2.11).*

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь виду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_4), \tag{2.12}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_4\}$ – нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.5 *З точністю до еквівалентності існує* 23 *чотиривимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи* $P(1,4)$. *Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу* $R = 7$ *задаються формулами (2.13).*

Твердження 2.6 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд* 23 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від чотирьох функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.12), де* $J_1, J_2, ..., J_4$ *мають вигляд (2.13).*

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь виду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_5), \tag{2.14}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_5\}$ – нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.7 *З точністю до еквівалентності існує* 62 *п'ятивимірні нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи* $P(1,4)$. *Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу* $R = 6$ *задаються формулами (2.15).*

Твердження 2.8 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд* 62 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від п'ятьох функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.14), де* $J_1, J_2, ..., J_5$ *мають вигляд (2.15).*

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь виду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_6), \tag{2.16}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_6\}$ – нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.9 *З точністю до еквівалентності існує* 108 *шестивимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи* $P(1,4)$. *Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу* $R = 5$ *задаються формулами (2.17).*

Твердження 2.10 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд* 108 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від шести функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.16), де* $J_1, J_2, ..., J_6$ *мають вигляд (2.17).*

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь виду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_7), \tag{2.18}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_7\}$ – нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.11 *З точністю до еквівалентності існує* 136 *семивимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи* $P(1,4)$. *Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу* $R = 4$ *задаються формулами (2.19).*

Твердження 2.12 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд* 136 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від семи функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.18), де* $J_1, J_2, ..., J_7$ *мають вигляд (2.19).*

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь виду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_8), \tag{2.20}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_8\}$ – нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.13 *З точністю до еквівалентності існує* 89 *восьмивимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи* $P(1,4)$. *Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу* $R = 3$ *задаються формулами (2.21).*

Твердження 2.14 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд* 89 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від восьми функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.20), де* $J_1, J_2, ..., J_8$ *мають вигляд (2.21).*

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь виду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_9), \tag{2.22}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_9\}$ – нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.15 *З точністю до еквівалентності існує* 49 *дев'ятивимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи* $P(1,4)$. *Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу* $R = 2$ *задаються формулами (2.23).*

Твердження 2.16 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд* 49 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від дев'яти функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.22), де* $J_1, J_2, ..., J_9$ *мають вигляд (2.23).*

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь виду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_{10}), \tag{2.24}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_{10}\}$ – нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.17 *З точністю до еквівалентності існує* 20 *десятивимірних нееквівалентних функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи* $P(1,4)$. *Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу* $R = 1$ *задаються формулами (2.25).*

Твердження 2.18 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд* 20 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від десяти функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.24), де* $J_1, J_2, ..., J_{10}$ *мають вигляд (2.25).*

У третьому розділі проведено симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) та побудовано класи інваріантних розв'язків для деяких $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера. Він складається з пяти підрозділів.

У першому підрозділі коротко описано симетрійну редукцію деяких $P(1,4)$-нееквівалентних підкласів п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера.

У другому підрозділі проведено симетрійну редукцію та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків лінійного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера

$$\Box_5 u = \lambda u, \;\; \lambda \in R. \tag{3.1}$$

Серед побудованих розв'язків є розв'язки, що виражаються через елементарні функції, розв'язки, що виражаються через спеціальні функції, та розв'язки, які містять довільні функції.

У третьому підрозділі проведено симетрійну редукцію та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків п'ятивимірного рівняння sin–Гордона

$$\Box_5 u = \sin u. \tag{3.27}$$

Серед побудованих розв'язків є розв'язки, що виражаються через елементарні функції, розв'язки, що виражаються через спеціальні функції, та розв'язки, які містять довільні функції.

У четвертому підрозділі проведено симетрійну редукцію та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків п'ятивимірного рівняння Ліувілля

$$\Box_5 u = e^u. \tag{3.41}$$

Серед побудованих розв'язків є розв'язки, що виражаються через елементарні функції та розв'язки, які містять довільні функції.

У п'ятому підрозділі проведено симетрійну редукцію та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків п'ятивимірного рівняння sinh–Гордона

$$\Box_5 u = \sinh u. \qquad (3.49)$$

Серед побудованих розв'язків є розв'язки, що виражаються через елементарні функції, розв'язки, що виражаються через спеціальні функції, та розв'язки, які містять довільні функції.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена груповій класифікації певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4) \times R(u)$, симетрійній редукції та побудові класів інваріантних розв'язків для деяких $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера. У дисертаційній роботі одержано такі нові результати.

1. Проведено групову класифікацію певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4) \times R(u)$.

2. Сформульовано і доведено критерій еквівалентності функціональних базисів ДІ першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

3. Побудовано в явному вигляді нееквівалентні функціональні базиси ДІ першого порядку для всіх неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

4. Проведено симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків для наступних $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера:

– лінійне п'ятивимірне рівняння Д'Аламбера;

– п'ятивимірне рівняння sin–Гордона;

– п'ятивимірне рівняння Ліувілля;

– п'ятивимірне рівняння sinh–Гордона.

5. Серед побудованих класів інваріантних розв'язків є розв'язки, які виражаються через елементарні функції, спеціальні функції, та розв'язки, які залежать від двох довільних функцій.

6. Отримані результати можуть бути застосовані при побудові та дослідженні математичних моделей в просторі $M(1,4) \times R(u)$, які інваріантні відносно неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Федорчук В. І., Диференціальні рівняння першого порядку в просторі $M(1,4) \times R(u)$ з нетривіальними групами симетрії / В.І. Федорчук// Праці інституту математики НАН України. – 2001. – **36**, 283–292.

2. Fedorchuk V.M. On Differential Invariants of First- and Second-Order of the Splitting Subgroups of the Generalized Poincaré Group $P(1,4)$ / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics: Proc. 4th Int.

Conf. (Ukr. Math. Congr. Dedicated to 200th Anniversary of Mykhailo Ostrohrads'kyi), Kyiv, 9–15 July 2001. – Part 1. – Kyiv: Inst. of Math. of NAS of Ukraine. – 2002. – 140–144. – (Proc. Inst. of Math. of NAS of Ukraine. – 2002. – **43**, Part 1).

3. Fedorchuk V.M. On new differential equations of the first order in the space $M(1,4) \times R(u)$ with non-trivial symmetries / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia Mathematica III. – 2003. – Folia 16. – P. 49–53.

4. Fedorchuk V. Some new differential equations of the first-order in the spaces $M(1,3) \times R(u)$ and $M(1,4) \times R(u)$ with given symmetry groups / V. Fedorchuk, V. Fedorchuk // Functional Analysis and its Applications, North-Holland Mathematics Studies, 197, Editor: Saul Lubkin, Elsevier. – 2004. – P. 85–95.

5. Fedorchuk V.M. On the Differential First-Order Invariants of the Non-Splitting Subgroups of the Poincaré Group $P(1,4)$ / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // Proc. of the Fifth Internat. Conf. Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (23–29 June 2003, Kyiv, Ukraine), Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 85–91.

6. Федорчук В.М. Про функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неперервних підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$ / В.М. Федорчук, В.І. Федорчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, N 4. – С. 51–58.

7. Fedorchuk V.M. First-order differential invariants of the splitting subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica. – 2006. – Fasciculus XLIV. – P. 21–30.

8. Fedorchuk V.M. On first-order differential invariants of the non-conjugate subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // Differential Geometry and its Applications: Proc. of 10th Int. Conf. on DGA 2007, in Honour of Leonhard Euler, Olomouc, Czech Republic, 27-31 August 2007 World Scientific Publishing Company. – 2008. – P. 431–444.

9. Fedorchuk V.M. On functional bases of the first-order differential invariants for non-conjugate subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia Mathematica VII. – 2008. – Folia 63. – P. 41–50.

10. Федорчук В.І. Про часткову попередню групову класифікацію нелінійного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера / В.І. Федорчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2012. – Vol. 55, No 3. – С. 35–43. Translated in Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – **194**, No. 2. – P. 166–175.

11. Федорчук В.І. Про інваріантні роз'язки деяких п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера / В.І. Федорчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2014 .– **57**, No 4. – С. 27–34.

12. Федорчук В.М. Підгрупова структура узагальненої групи Пуанкаре $P(1,4)$ та моделі з нетривіальною симетрією / В.М. Федорчук, В.І. Федорчук // Український Математичний Конгрес, Математична фізика, Секція 5, Інститут математики НАН України: Тези доповідей. – Київ, 2001. – С. 32.

13. Fedorchuk V.I. Some new differential equations of the first-order in the space $M(1,4) \times R(u)$ with given symmetries / V.I. Fedorchuk // International Conference on "Functional Analysis and its Applications"Dedicated to the 110 th anniversary of Stefan Banach, May 28–31, 2002. Book of abstract – Lviv: Ivan Franko National University, 2002. – P. 70.

14. Fedorchuk V.M. On construction of the first-order differential equations in the space $M(1,4) \times R(u)$ with non trivial symmetry groups / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // The Int. Math. Conf. Honoring O.A. Graves's 100th year since the beginning of his work at Kyiv University, Kyiv, 17–22 June, 2002. Book of abstract – Kyiv: Inst. of Math. of NAS of Ukraine, Kyiv Nat. Taras Shevchenko Univ, 2002.– P. 21.

15. Федорчук В.І. Про функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку розщеплюваних підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$ / В.І. Федорчук // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і метематики ім. акад. Я.С. Підстригача, Львів, 24–27 травня 2005 р. Тези доповідей. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача, 2005, – С. 321–322.

16. Федорчук В.І. Про попередню групову класифікацію нелінійного п'ятивимірного рівняння д'Аламбера / В.І. Федорчук // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання Львів, 23–25 травня 2012 р. Тези доповідей. – Львів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: (http://iapmm.lviv.ua/chyt2012/materials/48.pdf).

17. Федорчук В.І. Про симетрійну редукцію деяких класів диференціальних рівнянь в просторі $M(1,4) \times R(u)$ до класів чотиривимірних диференціальних рівнянь / В.І. Федорчук // V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу Івано-Франківськ, 19–21 вересня 2013 р. Тези доповідей. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, 2013. – С. 73.

18. Fedorchuk V.I. On exact solutions of some linear and non-linear $P(1,4)$-invariant d'Alembert equations / V.I. Fedorchuk // Конференція молодих вчених "Під-

стригачівські читання – 2015 Львів, 26–28 травня 2015 р. Тези доповідей. – Львів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: (http://iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Fedorchuk.pdf).

19. Fedorchuk V.I. On Exact Solutions of Some $P(1,4)$-Invariant d'Alembert Equations / V.I. Fedorchuk // Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 3–6 червня 2015): Тези доповідей. – Київ, 2015. – С. 118.

20. Fedorchuk V.I. On Symmetry Reduction and Exact Solutions of Some $P(1,4)$-Invariant d'Alembert Equations / V.I. Fedorchuk // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька, Дрогобич, 25–28 серпня 2015 р. Тези доповідей. – Дрогобич, 2015. – С. 40.

АНОТАЦІЯ

Федорчук В.І. *Групова класифікація нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера та диференціальні інваріанти першого порядку неспряжених підгруп групи Пуанкаре P(1,4).* — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2015.

У дисертаційній роботі проведена групова класифікація певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4) \times R(u)$, побудовано нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Сформульовано і доведено критерій еквівалентності функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Для деяких $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера проведено симетрійну редукцію та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків.

Ключові слова: групова класифікація диференціальних рівнянь, неспряжені підгрупи, нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів, симетрійна редукція, інваріантні розв'язки.

АННОТАЦИЯ

Федорчук В.И. *Групповая классификация нелинейных пятимерных уравнений Д'Аламбера и дифференциальные инварианты первого порядка несопряженных подгрупп группы Пуанкаре P(1,4).* — На правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Львовский национальний университет имени Ивана Франка, Львов, 2015.

В диссертационной работе проведена групповая классификация одного класса нелинейных пятимерных уравнений Д'Аламбера в пространстве $M(1,4) \times R(u)$, построены неэквивалентные функциональные базисы дифференциальных инвариантов первого порядка несопряженных подгрупп группы $P(1,4)$. Сформулирован и доказан критерий эквивалентности функциональных базисов дифференциальных инвариантов первого порядка несопряженных подгрупп группы $P(1,4)$. Для некоторых $P(1,4)$-инвариантных пятимерных уравнений Д'Аламбера проведена симметрийная редукция и построены некоторые классы инвариантных решений.

Ключевые слова: групповая классификация дифференциальных уравнений, несопряженные подгруппы, неэквивалентные функциональные базисы дифференциальных инвариантов, симметрийная редукция, инвариантные решения.

ABSTRACT

Fedorchuk V.I. *Group classification of non-linear five-dimensional D'Alembert equations and first-order differential invariants of non-conjugate subgroups of the Poincaré group* $P(1,4)$. — On the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.02 — Differential equations. — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2015.

In the thesis a group classification of a certain class of non-linear five-dimensional D'Alembert equations in the space $M(1,4) \times R(u)$ has been performed. Non-equivalent functional bases of the first-order differential invariants for non-conjugate subgoups of the Poincaré group $P(1,4)$ have been constructed. A criterion of equivalence for functional bases of the first-order differential invariants for non-conjugate subgoups of the Poincaré group $P(1,4)$ has been formulated and proven. For some $P(1,4)$-invariant five-dimensional D'Alembert equations, the symmetry reduction has been performed and some classes of invariant solutions have been constructed.

Key words: group classification of differential equations, non-conjugate subgroups, non-equivalent functional bases of differential invariants, symmetry reduction, invariant solutions.