Львівський Національний університет ім. І. Франка
Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я.С. Підстригача

На правах рукопису

Федорчук Володимир Іванович

УДК 519.46:517.944

ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ П'ЯТИВИМІРНИХ РІВНЯНЬ Д'АЛАМБЕРА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІНВАРІАНТИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НЕСПРЯЖЕНИХ ПІДГРУП ГРУПИ ПУАНКАРЕ P(1,4)

01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник

Сидоренко Юрій Миколайович

кандидат фізико-математичних

наук, доцент

Львів – 2015

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми. В багатьох випадках математичне моделювання різних процесів реального світу зводиться до побудови та дослідження диференціальних рівнянь в просторах різних вимірностей, які мають нетривіальні групи симетрії. З цією метою можна використати, зокрема, методи С. Лі та його учнів (див., наприклад [1–6]). Слід зазначити, що особливу актуальність ці методи набувають для нелінійних рівнянь, до яких не завжди можна застосувати класичні методи математичної фізики. Важливий внесок в розвиток теоретико-групових методів внесли Л.В. Овсянніков [7–9], Н.Х. Ібрагімов [10–16], П. Олвер (P. Olver) [17–19], Г. Біркгоф (G. Birkhoff) [20], Л.І. Сєдов [21], Д. Блумен (G. Bluman), Ю. Коул (J. Cole) [22, 23] та інші.

Значний вклад в розвиток групового аналізу диференціальних рівнянь внесли вітчизняні вчені. Серед них В.І. Фущич, А.Г. Нікітін, Л.Ф. Баранник, А.Ф. Баранник, М.І. Сєров, В.І. Лагно, Р.О. Попович, І.М. Цифра, В.А. Владіміров, В.Г. Костенко та інші [24–40].

Добре відомо, що при побудові математичних моделей реальних процесів досить часто отримуються диференціальні рівняння, які містять довільні функції (довільні параметри). Для дослідження таких рівнянь проводиться їх групова класифікація.

На даний час опубліковано багато наукових праць, які присвячені груповій класифікації лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь (систем диференціальних рівнянь) різних типів, які задані в просторах різних вимірностей. Серед них праці С. Лі (S. Lie), Л.В. Овсяннікова, Н.Х. Ібрагімова, П. Олвера (P. Olver), В. Еймса (W. Ames), Р. Поповича, С. Софоклеоуса (S. Sophocleous), А. Нікітіна, П. Ліча (P. Leach), В. Лагно, А. Самойленка, Р. Жданова, П. Басараб-Горвата (P. Basarab-Horwath), М. Сєрова, П. Вінтерніца (P. Winternitz), Р. Черніги, С. Мелешка, С. Спічака, В. Стогнія, В. Дородніцина, А. Орона (A. Oron), Е. Пуччі (E. Pucci), Д. Арріго (D. Arrigo), Р. Ередеро (R. Heredero), М. Гандаріаса (M. Gandarias), Н. Іванової, Р. Траціни (R. Tracina), О. Ванеєвої, І. Єгорченко та інших ([41–80]).

У дисертаційній роботі проведена групова класифікація певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4)\times R(u)$ (тут, і всюди надалі $R(u)$ – числова вісь залежної змінної u) шляхом побудови нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$, сформульовано та доведено критерій еквівалентності цих функціональних базисів, проведено симетрійну редукцію (в усіх випадках, коли це можливо зробити за допомогою класичного методу Лі) та побудовано класи інваріантних розв'язків для деяких $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера.

Узагальнена група Пуанкаре $P(1,4)$ – це група поворотів та зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Серед важливих для теоретичної та математичної фізики груп ця група посідає особливе місце. Вона є найменшою групою, що містить, як підгрупи, розширену групу Галілея $\widetilde{G}(1,3)$ [81] (групу симетрії класичної фізики) і групу Пуанкаре $P(1,3)$ (групу симетрії релятивістської фізики). Група $P(1,4)$ має широке застосування при розгляді різних питань теоретичної і математичної фізики [82–87].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано на кафедрі математичного моделювання Львівського національного університету імені Івана Франка та у відділі алгебри

Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Напрямок досліджень, обраний у дисертаційній роботі, пов'язаний із науковими дослідженнями кафедри математичного моделювання Львівського національного університету імені Івана Франка і є складовою частиною завдань держбюджетних тем:

– "Розробка математичних методів дослідження прямих, обернених і спектральних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними"(1997–2000 рр., номер держреєстрації № 0197U018069);

– "Побудова математичних моделей та розробка методів дослідження крайових задач для диференціальних рівнянь і випадкових еволюцій"(2000–2003рр., номер держреєстрації № 0100U001411);

та відділу алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України і є складовою частиною завдань держбюджетних тем:

– "Алгебраїчні та комбінаторні методи в матричних кільцях, скінченнопараметричних групах Лі та топологічних напівгрупах"(2002–2006 рр., номер держреєстрації: № 0102U000451);

– "Розробка теоретико-кільцевих і групових методів дослідження задач факторизації та класифікації матриць над кільцями скінченнопороджених головних ідеалів і вивчення структурних властивостей скінченновимірних алгебр Лі"(2007–2011 рр., номер державної реєстрації: № 0107U000361);

– "Дослідження матричних алгебричних систем та їх застосування"(2012–2016 рр., номер держреєстрації: № 0111U008859).

Автор брав участь у цих дослідженнях як виконавець вищевказаних держбюджетних тем.

Мета і задачі дослідження. *Метою* даної роботи є групова класифікація певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4) \times R(u)$ а також проведення симетрійної редукції та побудова класів інваріантних розв'язків для деяких $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера.

Завдання дисертаційної роботи конкретизується такими пунктами:

1) провести групову класифікацію певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4) \times R(u)$;
2) сформульовати і довести критерій еквівалентності функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;
3) побудувати в явному вигляді нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку для всіх неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;
4) провести симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) та побудувати класи інваріантних розв'язків для деяких $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера.

Об'єктом дослідження є певний клас п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4) \times R(u)$, функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$, деякі диференціальні рівняння другого порядку, інваріантні відносно групи $P(1,4)$.

Предметом дослідження є групова класифікація, симетрійна редукція та класи інваріантних розв'язків таких рівнянь.

Методи дослідження. У роботі використано апарат групового аналізу диференціальних рівнянь.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1) проведено групову класифікацію певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4) \times R(u)$;

2) сформульовано і доведено критерій еквівалентності функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;

3) побудовано в явному вигляді нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку для всіх неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;

4) проведено симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) та побудовано класи інваріантних розв'язків для деяких $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при побудові та дослідженні моделей теоретичної та математичної фізики в просторі $M(1,4) \times R(u)$, які інваріантні відносно неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Результати дисертації можна використати у наукових дослідженнях, які проводяться у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Інституті математики НАН України, Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Полтавському національному технічному університеті імені Юрія Кондратюка, Полтавському державному педагогічному університеті ім. В.Г. Короленка, Східноєвропейському національному університеті імені Лесі Українки, Національному технічному університеті «Київський політехнічний інститут», Інституті геофізики ім. С.І. Суботіна НАН України, Національному університеті харчових технологій.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації опубліковано у 11 статтях [88–98]. З них – 6 в наукових фахових виданнях

України, 5 – в закордонних виданнях. З них – 9 ([88, 89, 91–97]) опубліковано у виданнях, що включені до міжнародної науко-метричної бази MathSciNet. Також результати додатково висвітлено в матеріалах і тезах 9-ти ([99–107]) наукових математичних конференцій.

Постановка задач належить науковому керівнику Ю.М. Сидоренку. У спільних статтях [90, 92–96] В.М. Федорчуку належать результати по вивченню підгрупової структури групи $P(1,4)$ та обговорення отриманих результатів. У спільній роботі [89] В.М. Федорчуку належать результати з вивчення підгрупової структури групи $P(1,4)$, диференціальних інваріантів першого та другого порядків в просторі $M(1,3) \times R(u)$ для розщеплюваних підгруп групи $P(1,4)$. У спільній роботі [91] В.М. Федорчуку належать результати з вивчення підгрупової структури групи $P(1,4)$ та класів диференціальних рівнянь першого порядку в просторі $M(1,3) \times R(u)$ з нетривіальною симетрією. Інші результати, які опубліковано в спільних з Федорчуком В.М. статтях, зокрема, критерій еквівалентності функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$ та побудова в явному вигляді нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів належать дисертантові. Результати, які виносяться на захист, отримано дисертантом самостійно.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися дисертантом на таких конференціях:

– Fourth Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics"(July 9—15, 2001, Kyiv);

– International Conference on Functional Analysis and its Applications Dedicated to the 110-th anniversary of Stefan Banach (May 28–31, 2002, Lviv, Ukraine);

– Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача, (24–27 травня 2005 року, Львів);

– Sixth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (20–26 June 2005, Kyiv);

– 8th International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (June 21–27, 2009, Kyiv);

– Конференція молодих учених "Підстригачівські читання" (23–25 травня 2012 року, Львів);

– V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (19–21 вересня 2013 року, Івано-Франківськ);

– Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2015" (26–28 травня 2015 р., Львів);

– Міжнародна конференція молодих математиків (3–6 червня 2015 р., Київ);

– 10-та Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька (25–28 серпня 2015, Дрогобич),

та Федорчуком В.М. (у випадках спільних доповідей) на наступних наукових конференціях:

– Український математичний конгрес (21–23 серпня 2001 року, Київ);

– Міжнародній математичній конференції, присвяченій сторіччю від початку роботи Д.О. Граве (1863–1939) в Київському університеті (17–22 червня 2002, Київ);

– Fifth Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics"(June 23–29, 2003);

– 10th International Conference on Differential Geometry and Its Applications In honour of the 300th anniversary of the birth of Leonhard Euler (27–31 August, 2007, Olomouc, Czech Republic);

– "Український математичний конгрес – 2009" до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова (27–29 серпня 2009 року, Київ),

а також доповідалися дисертантом і обговорювалися на наукових семінарах:

– кафедри математичного моделювання механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка (керівники: доктор фізико-математичних наук, професор Заболоцький М.В.; кандидат фізико-математичних наук, доцент Сидоренко Ю.М.);

– відділу алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (керівник семінару – доктор фізико-математичних наук, професор Петричкович В.М.);

– математичному семінарі Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (керівники: член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор Пташник Б.Й.; доктор фізико-математичних наук, професор Войтович М.М.; доктор фізико-математичних наук Пелих В.О.; доктор фізико-математичних наук, професор Петричкович В.М.);

– Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор Пташник Б.Й.; доктор фізико-математичних наук, професор Іванчов М.І.; доктор фізико-математичних наук, професор Каленюк П.І.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 11 статтях [88–98]. З них – 6 в наукових фахових виданнях України, 5 – в закордонних виданнях. Принаймі 9 з них ([88, 89, 91–97]) опубліковано у виданнях, що включені до міжнародної науко-метричної бази MathSciNet, а також додатково висвітлено в 9 тезах [99–107] наукових конференцій.

Структура, обсяг та зміст дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації становить 154 сторінки, основного тексту – 130 сторінок. Список використаних джерел складає 167 найменувань.

Подяки. Виражаю щиру вдячність науковому керівнику – кандидату фізико–математичних наук, доценту Юрію Миколайовичу Сидоренку за постановку задач, суттєву підтримку і стимулювання моїх досліджень, члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико–математичних наук, професору Анатолію Глібовичу Нікітіну за корисні поради; доктору фізико–математичних наук Василю Максимовичу Федорчуку за підтримку, суттєву допомогу та стимулювання моїх досліджень. Автор також вдячний усім учасникам наукового семінару відділу алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України за цінні зауваження, зроблені під час обговорення результатів.

Розділ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У даному розділі проведено короткий огляд літератури, пов'язаної з темою дисертації. Короткий огляд літератури, в якому розглядаються групова класифікація диференціальних рівнянь, виконано у підрозділі 1.1. У підрозділі 1.2 проаналізовано деякі роботи, які пов'язані з диференціальними інваріантами локальних груп Лі точкових перетворень.

1.1 Групова класифікація диференціальних рівнянь

Започаткована ця тематика у 1881 р. працею S. Lie [41], у якій була розв'язана проблема групової класифікації лінійного двовимірного рівняння гіперболічного типу.

Один з найбільш вражаючих результатів в груповій класифікації належить С.Лі, який повністю прокласифікував звичайні диференціальні рівняння другого порядку [6].

Л.В. Овсянніков в [8] запропонував регулярний метод для класифікації диференціальних рівнянь з нетривіальною симетрією і провів повну групову класифікацію класу рівнянь нелінійної теплопровідності.

Від цього часу опубліковано багато наукових праць присвячених груповій класифікації класів диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП) та звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Поскільки дисертаційна робота присвячена груповій класифікації певного класу ДРЧП, то нижче ми наводимо короткий огляд наукових праць, що відносяться до групової класифікації ДРЧП.

Розглядаючи ці праці зауважимо, що переважна більшість з них містить результати групової класифікації класів скалярних ДРЧП довільні функції в яких залежать від однієї змінної. Нижче наводимо деякі з них.

1. $u_{tt} = (f(u)u_x)_x$ [42].

2. $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(K_i(T)\dfrac{\partial T}{\partial x_i}\right) + Q(T),\ K_i(T) \geq 0$ [43].

3. $u_t = [K(u)u_x]_x + [\varphi(u)]_x, \quad u_{tt} = [K(u)u_x]_x$ [44].

4. $u_{xt} = f(u)$ [45].

5. $u_{xx} - u_y^m u_{yy} = f(u)$ [46].

6. $u_{tt} = F[u], \quad u_{xt} = F[u]$ [47].

7. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}(yu) + \dfrac{\partial}{\partial y}(V'(x)u) + \gamma\dfrac{\partial}{\partial y}\left(yu + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ [48].

8. $u_{tt} = g(u_x)u_{xx} + h(u_x), \quad g_{u_x} \neq 0$ [49].

9. $u_t = b(t)uu_x + a(t)u_{xx}$ [50].

10. $u_t = [A(u)u_x]_x + B(u)u_x + C(u)$ [51].

11. $u_t = A(t)u_{xx} + B(t)u_{yy} + uu_x$ [52].

12. $f(x)u_t = (g(x)e^{nu}u_x)_x + h(x)e^{mu}$ [53].

13. $u_t + u^2u_x + a(t)u + b(t)u_{xxx} = 0$ [54].

14. $u_t + f(t)u_x + g(t)uu_x + h(t)u_{xxt} = 0$ [55].

15. $u_t \approx k(u_x)u_{xx} + \varepsilon f(u)$ [56].

16. $f(x)u_t = (g(x)A(u)u_x)_x + h(x)B(u)u_x$ [57].

Для всіх вищенаведених класів рівнянь проведена групова класифікація. Крім цього, для більшості з них побудовано класи інваріантних розв'язків.

Значно менше виявилося наукових праць присвячених груповій класифікації класів скалярних ДРЧП в яких довільні функції залежать від двох змінних. Наведемо деякі з них:

1. $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ [58].

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}[A(t,x)u] + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t,x)u]$ [59].

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}[A(t,x)u] - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t,x)u] = 0$ [60].

4. $i\psi_t + \Delta\psi + F(\psi, \psi^*) = 0$ [61].

5. $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\rho^2 x^{2\gamma}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + \beta x - \lambda\rho x^\gamma)\dfrac{\partial u}{\partial x} - xu = 0$ [62].

6. $u_t - f(x,u)u_x^2 - g(x,u)u_{xx} = 0$ [63].

7. $u_t = f_1(t,x)u_{xxxx} + f_2(t,x)u_{xxx} + f_3(t,x)u_{xx} + f_4(t,x)u_x + f_5(t,x)u + f_6(t,x)$ [64].

8. $iu_t + f(x,t)u_{xx} + k(x,t)u_x + g(x,t)|u|^2u + q(x,t)|u|^4u + h(x,t)u = 0$ [65].

9. $i\psi_t + \psi_{11} + \psi_{22} + |\psi|^2\psi + V(t,x)\psi = 0$ [66].

Для всіх вищенаведених класів рівнянь проведена групова класифікація. В роботі [63] також проведено аналіз деяких наукових праць присвячених попередній груповій класифікації. В цій же праці удосконалено метод попередньої групової класифікації. Представлено алгоритм повної попередньої групової класифікації.

Ще менше виявилося наукових праць присвячених груповій класифікації класів скалярних ДРЧП в яких довільні функції залежать від трьох змінних. Наведемо деякі з них:

1. $u_{x_\alpha}u_{x_\alpha} = F(t, u, u_t)$ [67].

2. $u_t = u_{xx} + u_{yy} + Q(u, u_x, u_y)$ [68].

3. $u_t - u_{xx} = g\left(x, u(x,t), u(x, t-\tau)\right)$ [69].

Для вищенаведених класів рівнянь проведена групова класифікація.

Тепер розглянемо деякі наукові праці присвячені груповій класифікації класів скалярних ДРЧП в яких довільні функції залежать від чотирьох змінних. Наведемо деякі з них:

1. $u_t = F(t,x,u,u_x)u_{xx} + G(t,x,u,u_x), \quad u = u(t,x), F \neq 0$ [70, 71].

2. $u_{tt} = u_{xx} + F(t,x,u,u_x)$ [72].

Для вищенаведених класів рівнянь проведена групова класифікація. Крім цього для другого класу рівнянь побудовано точні розв'язки.

Тепер розглянемо деякі наукові праці присвячені груповій класифікації класів скалярних ДРЧП в яких довільні функції залежать від п'яти змінних. Деякі з них:

1. $u_{xy} + f(x,y,u,u_x,u_y) = 0$ [73].

2. $u_t = F(t,x,u,u_x,u_{xx})u_{xxx} + G(t,x,u,u_x,u_{xx})$ [74].

3. $u_t = u_{xxx} + F(x,t,u,u_x,u_{xx})$ [75].

4. $\Delta u = F(x,y,u,u_x,u_y)$ [76].

5. $\Delta u = F(x,y,u,u_x,u_y)$ [77].

6. $u_t = F(t,x,u,u_x,u_{xx})u_{xxx} + G(t,x,u,u_x,u_{xx})$ [78].

Для вищенаведених класів рівнянь проведена групова класифікація. Крім цього в праці [74] вивчається зв'язок між структурою алгебр Лі і класифікаційною проблемою для класів диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Перейдемо до розгляду деяких наукових праць, присвячених груповій класифікації класів скалярних ДРЧП в яких довільні функції залежать від шести змінних. Наведемо деякі з них:

1. $u_t = -u_{xxxx} + F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx})$ [79].

2. $i\psi_t + \psi_{xx} + F(t,x,\psi,\psi^*,\psi_x,\psi_x^*) = 0$ [66].

Для вищенаведених класів рівнянь проведена групова класифікація. Крім цього в праці [66] автори переглядають поняття і підходи до групової класифікації класів систем диференціальних рівнянь.

Накінець розглянемо деякі наукові праці присвячені груповій класифікації класів скалярних ДРЧП в яких довільні функції залежать від семи змінних. Наведемо один з них:

$\psi_t + F(x, t, \psi\psi^*, \psi_x, \psi_x^*, \psi_{xx}, \psi_{xx}^*) = 0$ [80].

Для вищенаведеного класу рівнянь проведено групову класифікацію.

1.2 Диференціальні інваріанти

То, что современные физики называют теорией относительности, является теорией инвариантов четырехмерной области пространства — времени... относительно... «лоренцевой группы». Ф. Клейн

Інваріанти використовуються в різних розділах математики, зокрема для класифікації математичних об'єктів.

В 1872 році німецький математик Фелікс Клейн виступив в Ерлангенському університеті з доповіддю в якій він запропонував загальний алгебраїчний підхід до різних геометричних теорій. Згідно з цим підходом один розділ геометрії відрізняється від другого тим, що їм відповідають різні групи перетворень простору, а об'єктами вивчення є інваріанти таких перетворень.

Класифікація геометрії, запропонована Клейном в «Эрлангенській програмі» в 1872 році зберігається й до сьогоднішнього дня.

В теорії диференціальних рівнянь інваріанти неспряжених підгруп їх груп симетрії використовуються для симетрійної редукції цих рівнянь. При побудові диференціальних рівнянь з наперед заданою групою симетрії G використовуються диференціальні інваріанти різних порядків цієї групи.

Прикладами інваріантів в фізиці є енергія, компоненти імпульса і момента імпульса в замкнутих системах, інтервал та швидкість світла в вакуумі в спеціальній теорії відносності.

Герман Мінковський в 1905 році включив в схему Клейна теорію відносності, обгрунтувавши, що з математичної точки зору вона представляє собою теорію інваріантів групи Пуанкаре, яка діє в чотиривимірному просторі-часі.

В теоретичній і математичній фізиці при побудові математичних моделей (диференціальних рівнянь та їх систем) з нетривіальними групами симетрії широко використовуються диференціальні інваріанти різних порядків відповідних груп Лі точкових перетворень.

Нижче подаємо короткий огляд деяких наукових праць присвячених вивченню та застосуванню диференціальних інваріантів груп Лі точкових перетворень.

Спочатку коротко зупинимося на деяких працях в яких містяться загальні положення теорії диференціальних інваріантів.

Початок класичної теорії диференціальних інваріантів був покладений Софусом Лі [5]. В цій роботі, зокрема, вивчаються диференціальні інваріанти скінченних (endlichen) і нескінченних (unendlichen) неперервних груп.

Теорема про скінченність базису диференціальних інваріантів доведена в роботі [108]. Доведення цієї теореми з допомогою операторів інваріантного диференціювання викладено в [7].

В [18] мова йде про класифікацію диференціальних інваріантів груп перетворень і їх застосування до інваріатних диференціальних рівнянь і варіаційних задач.

Робота [109] є формулюванням теорії Лі для систем диференціальних рівнянь, які допускають групу Лі перетворень G як групу симетрії.

В роботах [110–112] інтерпретуються ідеї та результати С. Лі в контексті сучасної диференціальної геометрії і подано доведення основних теорем про диференціальні інваріанти. Детально розглядається питання про скінченний базис диференціальних інваріантів. Аналізується вплив С. Лі на подальший розвиток математики.

Оглядова робота [113] присвячена основним положенням теорії дифренціальних інваріантів неперервних груп. Вивчається структура алгебри Лі операторів інваріантного диференціювання. Побудовано базис дифренціальних інваріантів і алгебра операторів інваріантного диференціювання для алгебри Лі групи симетрії рівняння Кортевега-де Вріза.

В роботі [114] запропоновано новий підхід до побудови диференціальних інваріантів однопараметричних груп локальних перетворень в просторі двох змінних. Доведено, що повна множина її функціонально незалежних диференціальних інваріантів може бути отримана за допомогою однієї квадратури і диференціювань, якщо відомий один інваріант цієї групи.

На даний час опубліковано дуже багато наукових праць присвячених вивченню та різним застосуванням диференціальних інваріантів груп Лі точкових перетворень. Надалі обмежимося коротким оглядом тільки тих з них, які пов'язані з різними застосуваннями в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Важливою задачею групового аналізу диференціальних рівнянь є задача С. Лі про групове шарування даної системи диференціальних рівнянь на автоморфну і розв'язну системи, яка в загальному вигляді була розв'язана в [115].

Розглянемо коротко деякі наукові роботи, які належать до цього напрямку.

В роботі [116] використовується метод групового шарування для комплексного рівняння Монжа-Ампера. Запропоновано новий підхід в методі групового шарування, який базується на комутаторі алгебри операторів інваріантного диференціювання.

Метод групового шарування, як засіб для отримання не інваріантних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними з нескінченновимірними групами симетрії, запропоновано в роботі [117].

В роботі [118] розглядаються рівняння Ейлера для обертально симетричних рухів ідеального потоку. Обчислено базис диференціальних інваріантів для нескінченовимірної частини групи симетрії розглядуваного рівняння. Базис використовується для побудови групового шарування рівнянь Ейлера.

Тепер розглянемо деякі праці, в яких побудовані диференціальні інваріанти різних порядків для конкретних груп перетворень з метою застосування цих інваріантів для побудови нових класів диференціальних рівнянь з нетривіальними групами симетрії.

В роботі [119] побудовано базиси диференціальних інваріантів другого порядку алгебри Галілея для n - вимірних дійсних і комплексних скалярних функцій. Знайдені нові класи нелінійних нерелятивістських рівнянь.

Базиси диференціальних інваріантів другого порядку алгебр Пуанкаре та конформної алгебри для множини скалярних функцій в n - вимірному просторі Мінковського побудовано в роботі [120]. В ній також описано нові класи нелінійних конформно-інваріантних рівнянь.

В роботі [121] вивчаються скалярні представлення алгебри Пуанкаре $p(1,n)$ при $n \geq 2$. Представлено функціональні базиси диференціальних інваріантів першого та другого порядків для нелінійного представлення алгебри Пуанкаре $P(1,2)$ та описано нові нелінійні Пуанкаре-інваріантні рівняння.

В роботі [122] побудовано 33 види нелінійних хвильових рівнянь з нетривіальними групами симетрії, використовуючи диференціальні інваріанти.

В [123] автор отримав всі диференціальні рівняння з частинними похідними, які допускають фундаментальні представлення класичних груп $SL(n), SO(m,n), Sp(2n), U(n)$ і їх напівдобутків з трансляціями як наперед заданою групою симетрії. Зокрема, знайдено всі диференціальні інваріанти групи Галілея і групи Пуанкаре.

Побудові Пуанкаре-інваріантних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними присвячена робота [124].

В роботі [125] повністю прокласифіковано скалярні релятивістськи-інваріантні рівняння в $(1+1)$-вимірному просторі-часі. Отримано нові представлення алгебр Лі групи Пуанкаре і розширеної групи Пуанкаре. Автор побудував диференціальні інваріанти відповідних груп для кожної з отриманих реалізацій відповідних алгебр Лі.

Окрім вищенаведеного, диференціальні інваріанти різних порядків застосовуються також при розгляді інших питань групового аналізу диференціальних рівнянь. Розглянемо коротко деякі наукові праці з цього напрямку.

В роботах [126, 127] узагальнено класичні результати Лі стосовно базису диференціальних інваріантів для однопараметричних груп локальних перетворень на випадок довільного числа незалежних і залежних змінних. Представлено деякі застосування дифренціальних інваріантів першого порядку до систем типу Ріккаті.

Диференціальні інваріанти використовуються також при дослідженні комплексного рівняння Монжа-Ампера (див., [116]).

В [128] знайдені інваріанти сім'ї нелінійних хвильових рівнянь, використовуючи інфінітезимальний підхід. Диференціальні інваріанти використані до розв'язання проблеми лінеаризації.

Базиси диференціальних інваріантів для нескінченно вимірних груп Лі, які допускаються рівняннями Нав'є-Стокса і газової динаміки побудовано в роботі [129]. В ній також розглянуто можливості застосування отриманих базисів для побудови диференціально інваріантних розв'язків.

Диференціальні інваріанти для алгебр Пуанкаре, Галілея і конформної алгебри в багатовимірних просторах з точки зору симетрійного аналізу диференціальних рівнянь досліджуються в роботі [130].

Розділ 2
ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ ПЕВНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ П'ЯТИВИМІРНИХ РІВНЯНЬ Д'АЛАМБЕРА

Цей розділ присвячено груповій класифікації певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера.

У підрозділі 2.1 наведено деякі відомі факти з групового аналізу диференціальних рівнянь. Алгебра Лі групи $P(1,4)$ та її зображення коротко описані у підрозділі 2.2. У підрозділі 2.3. сформульовано і доведено критерій еквівалентності функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Груповій класифікації нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера присвячено підрозділ 2.4. В цьому підрозділі сформульовано і доведено теорему (Теорема 2.3) в якій представлено основний результат розділу. У підрозділах 2.4.1–2.4.9 сформульовано та доведено твердження про кількості $P(1,4)$-нееквівалентних підкласів рівнянь побудованих з використанням функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Відповідні функціональні базиси наведено в явному вигляді.

Основні результати цього розділу опубліковані в роботах [88, 90, 91, 93–97].

2.1 Деякі відомості з групового аналізу диференціальних рівнянь

Нижче наводимо деякі відомі факти з групового аналізу диференціальних рівнянь (див., наприклад, [131]).

Нехай G_r^N – локальна група Лі точкових перетворень простору E^N:

$$x' = T_a x = f(x,a), \quad x, x' \in E^N, \quad a \in E^r,$$

де $f(x,a)$ – достатньо гладкі функції своїх аргументів.

Означення 2.1 Не тотожньо стала функція $I(x)$ називається *інваріантом групи* G_r^N, якщо

$$I(T_a x) = I(x)$$

для всіх перетворень $T_a \in G_r^N$.

Базисні елементи алгебри Лі групи G_r^N позначимо через $X_1, X_2, ..., X_r$. Вони мають вигляд:

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \left(\begin{array}{c} i = 1, \dots, N \\ \alpha = 1, \dots, r \end{array}\right),$$

де $\xi_\alpha^i(x) = \left.\dfrac{\partial f^i}{\partial a^\alpha}\right|_{a=0}$. Функції $\xi_\alpha^i(x)$ називаються координатами операторів X_α.

Побудуємо матрицю із координат операторів X_α:

$$M = ||\xi_\alpha^i(x)||,$$

де α – номер рядка, i – номер стовпця, причому $\alpha = 1, \dots, r$; $i = 1, \dots, N$. Загальний ранг матриці M позначимо через R.

Теорема 2.1 *Група G_r^N має інваріанти тоді і тільки тоді, коли $R < N$. Якщо ця нерівність виконується, то існує $t = N - R$ функціонально незалежних інваріантів $I_\tau(x)$ $(\tau = 1, \dots, t)$ групи G_r^N таких, що довільний її інваріант є функцією від них.*

Означення 2.2 Інваріанти продовженої групи називаються *диференціальними інваріантами групи* G_r^N.

2.2 Алгебра Лі групи $P(1,4)$.

Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15 базисними елементами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4)$ і P'_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3, 4)$, які задовольняють комутаційним співвідношенням:

$$
\begin{aligned}
&\left[P'_\mu, P'_\nu\right] = 0,\\
&\left[M'_{\mu\nu}, P'_\sigma\right] = g_{\mu\sigma}P'_\nu - g_{\nu\sigma}P'_\mu,\\
&\left[M'_{\mu\nu}, M'_{\rho\sigma}\right] = g_{\mu\rho}M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M'_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M'_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M'_{\nu\rho},
\end{aligned}
$$

де $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,3,4)$ – метричний тензор з компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \neq \nu$. Тут і всюди в дальнішому $M'_{\mu\nu} = iM_{\mu\nu}$.

Для зручності перейдемо від $M'_{\mu\nu}$ і P'_μ до наступних лінійних комбінацій:

$$G = M'_{40}, \quad L_1 = M'_{32}, \quad L_2 = -M'_{31}, \quad L_3 = M'_{21},$$

$$P_a = M'_{4a} - M'_{a0}, \quad C_a = M'_{4a} + M'_{a0}, \quad (a = 1,2,3),$$

$$X_0 = \frac{1}{2}\left(P'_0 - P'_4\right), \quad X_k = P'_k \quad (k = 1,2,3), \quad X_4 = \frac{1}{2}\left(P'_0 + P'_4\right).$$

Неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ описані в роботах [132–136].

Одним із нетривіальних наслідків вивчення підгрупової структури групи $P(1,4)$ є те, що група $P(1,4)$ містить як підгрупи групу Пуанкаре $P(1,3)$ і розширену групу Галілея $\widetilde{G}(1,3)$ [81], тобто природньо об'єднує групи симетрії релятивістської та нерелятивістської фізики.

Алгебра Лі групи $\widetilde{G}(1,3)$ генерується наступними базисними елементами:

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4.$$

В основу дисертаційної роботи покладено повний список неспряжених (з точністю до $P(1,4)$ - спряженості) підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$, який можна знайти в [26].

Розглянемо наступне зображення алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$
\begin{aligned}
&P'_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P'_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad P'_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad P'_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \\
&P'_4 = -\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad M'_{\mu\nu} = -\left(x_\mu P'_\nu - x_\nu P'_\mu\right).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

2.3 Критерій еквівалентності функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$

Функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$ отримуються при розв'язуванні систем диференціальних рівнянь вигляду (див., наприклад, [5–7, 17]):

$$
\begin{cases}
\widetilde{X}_1 J(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) &= 0, \\
\widetilde{X}_2 J(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) &= 0, \\
\vdots & \\
\widetilde{X}_k J(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) &= 0,
\end{cases}
$$

де $\{\widetilde{X}_1, \ \widetilde{X}_2, ...\widetilde{X}_k, \ \ (k = 1, ..., 15)\}$ – один раз продовжені базисні оператори k-вимірної неспряженої підалгебри алебри Лі групи $P(1,4)$, $u_\mu \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4$.

Перше продовження базисних операторів алгебри Лі групи $P(1,4)$ має вигляд:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{G} &= -x_4 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_4} + u_4 \frac{\partial}{\partial u_0} + u_0 \frac{\partial}{\partial u_4}, \\
\widetilde{L}_1 &= x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_3}, \\
\widetilde{L}_2 &= -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - u_3 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_3}, \\
\widetilde{L}_3 &= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_2},
\end{aligned}
$$

$$
\widetilde{P}_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + (x_0 + x_4) \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_4} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} - (u_0 - u_4) \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_4},
$$

$$\widetilde{P}_2 = x_2\,\frac{\partial}{\partial x_0} + (x_0+x_4)\,\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\,\frac{\partial}{\partial x_4} - u_2\,\frac{\partial}{\partial u_0} - (u_0-u_4)\,\frac{\partial}{\partial u_2} - u_2\,\frac{\partial}{\partial u_4},$$
$$\widetilde{P}_3 = x_3\,\frac{\partial}{\partial x_0} + (x_0+x_4)\,\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\,\frac{\partial}{\partial x_4} - u_3\,\frac{\partial}{\partial u_0} - (u_0-u_4)\,\frac{\partial}{\partial u_3} - u_3\,\frac{\partial}{\partial u_4},$$
$$\widetilde{C}_1 = -x_1\,\frac{\partial}{\partial x_0} - (x_0-x_4)\,\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\,\frac{\partial}{\partial x_4} + u_1\,\frac{\partial}{\partial u_0} + (u_0+u_4)\,\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\,\frac{\partial}{\partial u_4},$$
$$\widetilde{C}_2 = -x_2\,\frac{\partial}{\partial x_0} - (x_0-x_4)\,\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\,\frac{\partial}{\partial x_4} + u_2\,\frac{\partial}{\partial u_0} + (u_0+u_4)\,\frac{\partial}{\partial u_2} - u_2\,\frac{\partial}{\partial u_4},$$
$$\widetilde{C}_3 = -x_3\,\frac{\partial}{\partial x_0} - (x_0-x_4)\,\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\,\frac{\partial}{\partial x_4} + u_3\,\frac{\partial}{\partial u_0} + (u_0+u_4)\,\frac{\partial}{\partial u_3} - u_3\,\frac{\partial}{\partial u_4},$$
$$\widetilde{X}_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_4}\right), \qquad \widetilde{X}_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \widetilde{X}_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$\widetilde{X}_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad \widetilde{X}_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial x_4}\right).$$

В даному розділі $N = 11$, бо координатами в один раз продовженому просторі є значення величин $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$.

Для довільної k-вимірної $(k = 1, 2, \ldots, 15)$ підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ матриця M матиме розмірність $k \times 11$. Загальний ранг такої матриці може приймати значення $1, 2, \ldots, min(k, 11)$.

З вище наведеної теореми 2.1 випливає, що всі ці підалгебри в один раз продовженому просторі матимуть $t = 11 - R$ – вимірні функціональні базиси інваріантів. Це рівнозначне тому, що всі k-вимірні підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ матимуть диференціальні інваріанти першого порядку, якщо $R < 11$. Для кожної підалгебри позначатимемо ці інваріанти через $\{J_1, J_2, \ldots, J_t\}$.

В процесі побудови функціональних базисів диференціальних інваріантів виявилося, що немає взаємно однозначної відповідності між неспряженими підалгебрами алгебри Лі групи $P(1,4)$ та відповідними функціональними базисами. Це означає, що деякі з цих базисів є еквівалентними.

Нехай $\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\}$ і $\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\}$ є функціональними базисами диференціальних інваріантів першого порядку відповідно для підалгебр

L^1 і L^2.

Означення 2.3 Кажемо, що функціональні базиси $\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\}$ і $\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\}$ є *еквівалентними*, якщо існують гладкі функції f_1, $f_2, ..., f_t$ і $g_1, g_2, ..., g_t$ такі що

$$\begin{cases} J_1^{(2)} = f_1\left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\right) \\ J_2^{(2)} = f_2\left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J_t^{(2)} = f_t\left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\right) \end{cases} \tag{2.2}$$

і

$$\begin{cases} J_1^{(1)} = g_1\left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\right) \\ J_2^{(1)} = g_2\left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J_t^{(1)} = g_t\left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\right). \end{cases} \tag{2.3}$$

Теорема 2.2 *Два функціональні базиси* $\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\}$ *і* $\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\}$ *є еквівалентними тоді і тільки тоді, якщо вони задовільняють наступні умови:*

$$\begin{cases} \widetilde{X}_1^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \quad \widetilde{X}_1^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \ \dots, \ \widetilde{X}_1^{(1)} J_t^{(2)} = 0 \\ \widetilde{X}_2^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \quad \widetilde{X}_2^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \ \dots, \ \widetilde{X}_2^{(1)} J_t^{(2)} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{X}_{r_1}^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \quad \widetilde{X}_{r_1}^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \ \dots, \ \widetilde{X}_{r_1}^{(1)} J_t^{(2)} = 0 \\ \widetilde{X}_1^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \quad \widetilde{X}_1^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \ \dots, \ \widetilde{X}_1^{(2)} J_t^{(1)} = 0 \\ \widetilde{X}_2^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \quad \widetilde{X}_2^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \ \dots, \ \widetilde{X}_2^{(2)} J_t^{(1)} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \widetilde{X}_{r_2}^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \quad \widetilde{X}_{r_2}^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \ \dots, \ \widetilde{X}_{r_2}^{(2)} J_t^{(1)} = 0 \end{cases}, \tag{2.4}$$

де

$\{\widetilde{X}_1^{(1)}, \widetilde{X}_2^{(1)}, ..., \widetilde{X}_{r_1}^{(1)}\}$, $\{\widetilde{X}_1^{(2)}, \widetilde{X}_2^{(2)}, ..., \widetilde{X}_{r_2}^{(2)}\}$ *– один раз продовжені базисні оператори підалгебр* L^1 *і* L^2 *відповідно;* r_1, r_2 *– розмірності підалгебр* L^1 *і* L^2.

Доведення. *Необхідність.*

Нехай функціональні базиси $\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\}$ і $\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\}$ є еквівалентними. Тоді існують фукнції $f_1, f_2, ..., f_t$ і $g_1, g_2, ..., g_t$ такі що

$$\begin{cases} J_1^{(2)} = f_1\left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\right) \\ J_2^{(2)} = f_2\left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J_t^{(2)} = f_t\left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\right) \end{cases}$$

і

$$\begin{cases} J_1^{(1)} = g_1\left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\right) \\ J_2^{(1)} = g_2\left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J_t^{(1)} = g_t\left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\right) \end{cases}.$$

Оскільки

$$f_1\left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\right),\ f_2\left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\right),\ ..., f_t\left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}\right)$$

є диференціальними інваріантами першого порядку підалгебри L^1, тому матимемо (див., наприклад [7, 17]):

$$\widetilde{X}_1^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \quad \widetilde{X}_1^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \quad ..., \quad \widetilde{X}_{r_1}^{(1)} J_t^{(2)} = 0.$$

Так як

$$g_1\left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\right),\ g_2\left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\right),\ ..., g_t\left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}\right)$$

є диференціальними інваріантами першого порядку підалгебри L^2, тому

$$\widetilde{X}_1^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \quad \widetilde{X}_1^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \quad ..., \quad \widetilde{X}_{r_2}^{(2)} J_t^{(1)} = 0.$$

Таким чином, умови (2.4) виконуються.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай умови (2.4) задовільняються. Умови

$$\widetilde{X}_1^{(1)} J_1^{(2)} = 0, \quad \widetilde{X}_1^{(1)} J_2^{(2)} = 0, \quad ..., \quad \widetilde{X}_{r_1}^{(1)} J_t^{(2)} = 0$$

дають нам (див., наприклад, [7, 17]), що функції $J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)}$ є диференціальними інваріантами першого порядку підалгебри L^1 і внаслідок цього, мають вигляд:

$$\begin{cases} J_1^{(2)} = f_1 \left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)} \right) \\ J_2^{(2)} = f_2 \left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)} \right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J_t^{(2)} = f_t \left(J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)} \right) \end{cases},$$

де $f_1, f_2, ..., f_t$ - довільні гладкі функції.

Умови

$$\widetilde{X}_1^{(2)} J_1^{(1)} = 0, \quad \widetilde{X}_1^{(2)} J_2^{(1)} = 0, \quad ..., \quad \widetilde{X}_{r_2}^{(2)} J_t^{(1)} = 0$$

означають, що функції $J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, ..., J_t^{(1)}$ є диференціальними інваріантами підалгебри L^2 і тому можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{cases} J_1^{(1)} = g_1 \left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)} \right) \\ J_2^{(1)} = g_2 \left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)} \right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ J_t^{(1)} = g_t \left(J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, ..., J_t^{(2)} \right) \end{cases},$$

де $g_1, g_2, ..., g_t$ – довільні гладкі функції.

Таким чином, отримуємо умови (2.2) і (2.3).

Достатність доведено.

2.4 Групова класифікація нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера

Розглянемо клас нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера вигляду:

$$\Box_5 u = F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4), \tag{2.5}$$

де $\Box_5 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_4^2}$ – оператор Д'Аламбера в просторі $M(1,4)$, F – довільна гладка функція, $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, $u_\mu = \dfrac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$.

Цей клас є широким узагальненням лінійного та нелінійного рівнянь Д'Аламбера, рівняння *sin*-Гордона, рівняння Ліувілля та рівняння *sinh*-Гордона.

Лінійні та нелінійні рівняння Д'Аламбера в просторах різних вимірностей використовуються для розв'язування багатьох задач диференціальної геометрії, теорії нелінійних хвиль, теоретичної та математичної фізики (див., наприклад, [86, 137–144]).

Кожне перетворення з конформної групи C(1,4) простору M(1,4) належить до групи еквівалентності класу (2.5). Для групової класифікації обмежимося підгрупою $P(1,4)$ групи $C(1,4)$. А саме: використаємо неспряжені підалгебри [132–136] алгебри Лі групи $P(1,4)$ (спряження розглядалося відносно групи $P(1,4)$) та нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку [93, 95] цих підалгебр. В цьому випадку групова класифікація розглядуваного класу рівнянь зводиться до побудови підкласів цього класу, які будуть інваріантними відносно неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Добре відомо, що ліва сторона рівняння, що досліджується, є інваріантною відносно групи $P(1,4)$. Тому наше завдання полягає на побудові правих сторін (функцій $F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$) інваріантних відносно неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Оскільки розглядувані функції залежать також від похідних першого порядку шуканої функції по незалежних змінних, то шукані підкласи рівнянь можна записати у такому вигляді:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_{t_1}), \tag{2.6}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_{t_1}\}(t_1 = 2, 3, ..., 10)$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Таким чином, задача групової класифікації класу рівнянь, що досліджується, звелася до побудови нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Основний результат цього розділу можна сформулювати у вигляді наступної теореми.

Теорема 2.3 *Існує 495 $P(1,4)$-нееквівалентнних підкласів рівнянь вигляду (2.6). Серед них:*

– один підклас побудований на основі двовимірного нееквівалентного функціонального базису диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;

– 7 підкласів побудованих на основі тривимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;

– 23 підкласи побудовані на основі чотиривимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;

– 62 підкласи побудовані на основі п'ятивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;

– 108 підкласів побудованих на основі шестивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;

– 136 підкласів побудованих на основі семивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;

– 89 підкласів побудованих на основі восьмивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;

– 49 підкласів побудованих на основі дев'ятивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$;

– 20 підкласів побудованих на основі десятивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Доведення. Для доведення розглядатимемо почергово всі підкласи диференціальних рівнянь згадані в теоремі.

2.4.1 Підкласи рівнянь вигляду $\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2)$

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2), \tag{2.7}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2\}$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Як видно з вищенаведеного, таких підкласів рівнянь буде стільки, скільки є двовимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.1 *З точністю до еквівалентності існує єдиний двовимірний функціональний базис диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$, що задається формулою (2.8):*

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 \,. \tag{2.8}$$

Відповідні неспряжені підалгебри мають ранг $R = 9$ і задаються формулами (2.9):

$$\begin{aligned}
&\langle G,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\\
&\langle L_3 + eG,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ e > 0\rangle,\\
&\langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\\
&\langle G,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\\
&\langle G,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Доведення. Для цього скористаємося Теоремою 2.1. В даному розділі:

$N = 11$, бо координатами в один раз продовженому просторі є значення величин $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$;

матриця M побудована з координат один раз продовжених базисних операторів алгебри Лі групи $P(1,4)$;

загальний ранг матриці M й надалі позначатимемо через R.

З теореми 2.1 випливає, що всі неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ в один раз продовженому просторі матимуть $t = 11 - R$ – вимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку.

Таким чином, двовимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку матимуть тільки неспряжені підалгебри для яких $R = 9$.

В результаті безпосередніх обчислень загальних рангів відповідних матриць M виявилося, що тільки 5 неспряжених підалгебр мають $R = 9$.

Це означає, що існує тільки 5 двовимірних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку.

Після побудови цих функціональних базисів в явному вигляді і застосування до них критерію еквівалентності (теорема 2.2) виявилося, що всі вони є еквівалентними.

Це означає, що нееквівалентним є тільки один з них.

Твердження доведено.

Наслідком цього є те, що існує тільки один підклас диференціальних рівнянь вигляду (2.7). Таким чином, доведено наступне твердження.

Твердження 2.2 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд рівняння (2.6), що права частина залежить від двох функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.7), де* J_1, J_2 *мають вигляд (2.8).*

Таким чином, вищенаведене в цьому підрозділі доводить ту частину Теореми 2.3, яка відноситься до підкласів рівнянь побудованих на основі двовимірних диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

2.4.2 Підкласи рівнянь вигляду $\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, J_3)$

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, J_3), \tag{2.10}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, J_3\}$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Як видно з вищенаведеного, таких підкласів рівнянь буде стільки скільки є тривимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.3 *З точністю до еквівалентності існує* 7 *тривимірних* *нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу $R = 8$ задаються формулами (2.11):*

$$\begin{aligned}
1.\ & J_1 = u,\ J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2,\ J_3 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} :\ \langle G,\ P_1,\\
& P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3 + eG,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\\
& X_3,\ X_4,\ e > 0\rangle,\ \langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\\
& \langle G,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle G + aX_3,\\
& L_3 + bX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a < 0,\ b < 0\rangle,\ \langle G,\\
& L_3 + bX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ b < 0\rangle; \qquad (2.11)\\
2.\ & J_1 = u,\ J_2 = u_1^2 + u_2^2,\ J_3 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle G,\ P_3,\ L_3,\ X_0,\\
& X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle, \langle G,\ P_3,\ C_3,\ L_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;\\
3.\ & J_1 = u,\ J_2 = u_3,\ J_3 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle G,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\\
& X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3 + eG,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ e > 0\rangle,\\
& \langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle G + a_3X_3,\ L_3 + d_3X_3,\\
& P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a_3 < 0,\ d_3 < 0\rangle,\ \langle G,\ L_3 + d_3X_3,\ P_1,\\
& P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ d_3 < 0\rangle;\\
4.\ & J_1 = u,\ J_2 = u_0,\ J_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 :\ \langle L_1 + \frac{1}{2}\left(P_1 + C_1\right),\\
& L_2 + \frac{1}{2}\left(P_2 + C_2\right),\ L_3 + \frac{1}{2}\left(P_3 + C_3\right),\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\\
& \langle L_1 + \frac{1}{2}\left(P_1 + C_1\right),\ L_2 + \frac{1}{2}\left(P_2 + C_2\right),\ L_3 + \frac{1}{2}\left(P_3 + C_3\right),\\
& L_3 - \frac{1}{2}\left(P_3 + C_3\right),\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1 + C_1,\\
& P_2 + C_2,\ P_3 + C_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_1 + \frac{1}{2}(P_1 + C_1),\\
& L_2 + \frac{1}{2}(P_2 + C_2),\ L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3),\ L_3 - \frac{1}{2}(P_3 + C_3) + \alpha(X_0 + X_4),\\
& X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0 - X_4,\ \alpha < 0\rangle;\\
5.\ & J_1 = u,\ J_2 = u_0^2 - u_4^2,\ J_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 :\ \langle G,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ X_0,\ X_1,
\end{aligned}$$

$X_2,\ X_3,\ X_4\rangle$;

6. $J_1 = u, \quad J_2 = u_4, \quad J_3 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1 - C_1,$ $P_2 - C_2,\ P_3 - C_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle$.

   Зазначимо, що наведені нижче неспряжені підалгебри належать до алгебри Лі групи $\widetilde{G}(1,3)$:

7. $J_1 = u,\ J_2 = u_0 - u_4,\ J_3 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,$ $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3 - P_3,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3,\ P_1,$ $P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,$ $X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3 - X_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3 + X_0,$ $L_3 + \beta X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \beta < 0\rangle$.

Доведення. Для цього скористаємося Теоремою 2.1. З теореми 2.1 випливає, що всі неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ в один раз продовженому просторі матимуть $t = 11 - R$ – вимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку.

Таким чином, тривимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку матимуть тільки неспряжені підалгебри для яких $R = 8$.

В результаті безпосередніх обчислень загальних рангів відповідних матриць M виявилося, що тільки 25 неспряжених підалгебр мають $R = 8$. Це означає, що існує тільки 25 тривимірних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку.

Після побудови цих функціональних базисів в явному вигляді і застосування до них критерію еквівалентності (теорема 2.2) виявилося, що нееквівалентних є тільки 7. Твердження доведено.

Беручи до уваги вищенаведене, доведено наступне

Твердження 2.4 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд*

7 підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від трьох функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.10), де J_1, J_2, J_3 мають вигляд (2.11).

Таким чином, вищенаведене в цьому підрозділі доводить ту частину Теореми 2.3, яка відноситься до підкласів рівнянь побудованих на основі тривимірних диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

2.4.3 Підкласи рівнянь вигляду $\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_4)$

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_4), \tag{2.12}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_4\}$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Як видно з вищенаведеного, таких підкласів рівнянь буде стільки, скільки є чотиривимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.5 *З точністю до еквівалентності існує* 23 *чотиривимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу $R = 7$ задаються формулами (2.13):*

$$\begin{aligned}
1.\ & J_1 = u,\ J_2 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \left(x_1 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_1\right)^2 + \\
& + \left(x_2 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2\right)^2,\ J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ : \\
& \langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_3,\ X_4 \rangle;
\end{aligned} \tag{2.13}$$

2. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = x_3 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_3,\ J_4 = u_0^2 - u_1^2 -$ $- u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4 \rangle,\ \langle L_3 + eG,$ $P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ e > 0 \rangle,\ \langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,$ $X_2,\ X_4 \rangle$;
3. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = u_1^2 + u_2^2,\ J_4 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :$ $\langle G,\ P_3,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \rangle$;
4. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = u_3,\ J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :$ $\langle G,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \rangle,\ \langle L_3 + eG,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,$ $X_3,\ X_4,\ e > 0 \rangle,\ \langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \rangle,\ \langle G + a_3 X_3,$ $L_3 + d_3 X_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a_3 < 0,\ d_3 < 0 \rangle,\ \langle G,\ L_3 + d_3 X_3,$ $P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ d_3 < 0 \rangle$;
5. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = u_3,\ J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_1,\ P_2,$ $X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4 \rangle,\ \langle L_3 + eG,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ e > 0 \rangle,$ $\langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4 \rangle$;
6. $J_1 = u,\ J_2 = u_3,\ J_3 = u_0^2 - u_4^2,\ J_4 = u_1^2 + u_2^2\ :\ \langle G,\ L_3,\ X_0,\ X_1,$ $X_2,\ X_3,\ X_4 \rangle$;
7. $J_1 = u,\ J_2 = u_1,\ J_3 = u_2,\ J_4 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ X_0,\ X_1,$ $X_2,\ X_3,\ X_4 \rangle,\ \langle G,\ P_3,\ C_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \rangle$;
8. $J_1 = u,\ J_2 = u_1^2 + u_2^2,\ J_3 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,\ J_4 = e \arctan \dfrac{u_1}{u_2} +$ $+ \ln(u_0 - u_4)\ :\ \langle L_3 + eG,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ e > 0 \rangle$;
9. $J_1 = u,\ J_2 = u_0,\ J_3 = u_1^2 + u_2^2,\ J_4 = u_3^2 + u_4^2\ :\ \langle P_3 + C_3,\ L_3,\ X_0,$ $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \rangle$;
10. $J_1 = x_0,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2\ :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,$ $P_1 + C_1,\ P_2 + C_2,\ P_3 + C_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0 - X_4 \rangle$,

$\langle L_1 + \frac{1}{2}(P_1 + C_1)\,,\ L_2 + \frac{1}{2}(P_2 + C_2)\,,\ L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3)\,,\ X_1,\ X_2,$
$X_3,\ X_0 - X_4\rangle,\ \langle L_1 + \frac{1}{2}(P_1 + C_1)\,,\ L_2 + \frac{1}{2}(P_2 + C_2)\,,\ L_3 +$
$+ \frac{1}{2}(P_3 + C_3)\,,\ L_3 - \frac{1}{2}(P_3 + C_3)\,,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0 - X_4\rangle;$

11. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 -$
$- 2(x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4)\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = u_0^2 - u_1^2 -$
$- u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4\rangle;$

12. $J_1 = u,\ J_2 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_3 = u_0^2 - u_4^2,\ J_4 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 :$
$\langle G,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

13. $J_1 = x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_4,\ J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2\ :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,$
$P_1 - C_1,\ P_2 - C_2,\ P_3 - C_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0 + X_4\rangle;$

14. $J_1 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_0u_0 + x_1u_1 +$
$+ x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4,\ J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ C_1,\ C_2,$
$C_3,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3\rangle;$

15. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = a\ln(u_0 - u_4) - \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_3 - x_3,$
$J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G + aX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,$
$X_4,\ a < 0\rangle,\ \langle G + aX_3,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a < 0\rangle,$
$\langle L_3 + bG + kX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ b > 0,\ k < 0,\ \dfrac{k}{b} = a\rangle;$

16. $J_1 = u,\ J_2 = x_3 - a_3\ln(u_0 - u_4),\ J_3 = u_3,\ J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :$
$\langle G + a_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a_3 < 0\rangle,\ \langle G + a_3X_3,\ L_3,\ P_1,$
$P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a_3 < 0\rangle,\ \langle L_3 + cG + bX_3,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,$
$X_2,\ X_4,\ c > 0,\ b < 0,\ \dfrac{b}{c} \equiv a_3 < 0\rangle.$

Зазначимо, що наведені нижче неспряжені підалгебри належать до алгебри Лі групи $\widetilde{G}(1,3)$:

17. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0 - u_4,\ J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 :$

$\langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3-P_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ d_3<0\rangle$;

18. $J_1=u,\ J_2=u_3,\ J_3=u_0-u_4,\ J_4=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2\ :\ \langle P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ d_3<0\rangle,\ \langle L_3-X_0,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle$;

19. $J_1=u,\ J_2=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2,\ J_3=u_0-u_4,\ J_4=u_1^2+u_2^2:\ \langle L_3,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle$;

20. $J_1=u,\ J_2=u_0-u_4,\ J_3=u_1^2+u_2^2,\ J_4=u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle$;

21. $J_1=u,\ J_2=(x_0+x_4)(u_0-u_4)+u_3,\ J_3=u_0-u_4,\ J_4=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ d_3<0\rangle,\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3-P_3+\alpha_0X_0,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \alpha_0=-1\rangle$;

22. $J_1=u,\ J_2=(x_0+x_4)(u_0-u_4)-\alpha_0u_3,\ J_3=u_0-u_4,\ J_4=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3-P_3+\alpha_0X_0,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \alpha_0<0,\ \alpha_0\neq-1\rangle$;

23. $J_1=u,\ J_2=u_1+(x_0+x_4)(u_0-u_4),\ J_3=u_0-u_4,\ J_4=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle P_1+X_0,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle$.

Доведення. Для цього скористаємося Теоремою 2.1. З теореми 2.1 випливає, що всі неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ в один раз продовженому просторі матимуть $t=11-R$ – вимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку.

Таким чином, чотиривимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку матимуть тільки неспряжені підалгебри для яких $R = 7$.

В результаті безпосередніх обчислень загальних рангів відповідних матриць M виявилося, що тільки 48 неспряжених підалгебр мають $R = 7$. Це означає, що існує 48 чотиривимірних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку.

Після побудови цих функціональних базисів в явному вигляді і застосування до них критерію еквівалентності (теорема 2.2) виявилося, що нееквівалентних є тільки 23. Твердження доведено.

Беручи до уваги вищенаведене, доведено наступне

Твердження 2.6 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд* 23 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від чотирьох функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.12), де* $J_1, J_2, ..., J_4$ *мають вигляд (2.13).*

Таким чином, вищенаведене в цьому підрозділі доводить ту частину Теореми 2.3, яка відноситься до підкласів рівнянь побудованих на основі чотиривимірних диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

2.4.4 Підкласи рівнянь вигляду $\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_5)$

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_5), \tag{2.14}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_5\}$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Як видно з вищенаведеного, таких підкласів рівнянь буде стільки скільки є п'ятивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.7 *З точністю до еквівалентності існує 62 п'ятивимірні нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу $R=6$ задаються формулами (2.15):*

$$1.\ J_1 = u,\ J_2 = \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_3 = x_3 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_3,\ J_4 = \frac{(u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4))^2 + (u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4))^2)}{((x_0+x_4)u_3+(u_0-u_4)x_3)^2}, \tag{2.15}$$

$J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 \ :\ \langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4\rangle$;

2. $J_1 = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3,\ J_4 = = u_0^2-u_4^2,\ J_5 = u_1^2+u_2^2+u_3^2\ :\ \langle G,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ X_0,\ X_4\rangle$;

3. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_3 = x_2 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2,\ J_4 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_3 + + x_3,\ J_5 = u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle G,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_4\rangle$;

4. $J_1 = u, J_2 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}, J_3 = \left(x_1 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1\right)^2 + \left(x_2 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2\right)^2,$
$J_4 = e\arctan\left(\dfrac{u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)}{u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4)}\right) + \ln(x_0+x_4),\ J_5 = = u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3+eG,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_3,\ X_4,\ e>0\rangle$;

5. $J_1 = u, J_2 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}, J_3 = \left(x_1 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1\right)^2 + \left(x_2 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2\right)^2,$
$J_4 = u_3,\ J_5 = u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2\ :\ \langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_3,\ X_4\rangle$;

6. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_3 = \dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_3 + u_3,\ J_4 = u_1^2+u_2^2,\ J_5 = = u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle$;

7. $J_1 = (x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_4 = u_1^2+u_2^2,\ J_5 = = u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ L_3,\ X_0,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle G,\ P_3,\ C_3,\ L_3,$ $X_0,\ X_3,\ X_4\rangle$;

8. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2\ :$ $\langle G,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle,\ \langle L_3+eG,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ e>0\rangle,$

$\langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle$;

9. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_3 = x_2 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2,\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_0^2 -$
$- u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_3,\ X_4\rangle$;

10. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_3 = e\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1 + ex_1 - x_3,\ J_4 = u_3,$
$J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_1,\ P_2,\ X_2,\ X_4,\ X_1 + eX_3,\ e > 0\rangle$;

11. $J_1 = u,\ J_2 = (x_0+x_4)(u_0+u_4),\ J_3 = u_3,\ J_4 = u_0^2 - u_4^2,\ J_5 =$
$= u_1^2 + u_2^2\ :\ \langle G,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle$;

12. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = u_3,\ J_4 = u_0^2 - u_4^2,\ J_5 = u_1^2 + u_2^2\ :\ \langle G,\ L_3,$
$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle$;

13. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_3 = u_1,\ J_4 = u_2,\ J_5 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :$
$\langle G,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle$;

14. $J_1 = x_2,\ J_2 = u,\ J_3 = u_1,\ J_4 = u_2,\ J_5 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,$
$X_0,\ X_1,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle G,\ P_3,\ C_3,\ X_0,\ X_1,\ X_3,\ X_4\rangle$;

15. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_3 = e\arctan\dfrac{u_1}{u_2} + \ln(x_0+x_4),\ J_4 =$
$= u_1^2 + u_2^2,\ J_5 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle L_3 + eG,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,$
$X_4,\ e > 0\rangle$;

16. $J_1 = u,\ J_2 = u_1,\ J_3 = u_2,\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_0^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ X_0,$
$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle$;

17. $J_1 = u,\ J_2 = u_3,\ J_3 = u_0^2 - u_4^2,\ J_4 = u_1^2 + u_2^2,\ J_5 = e\arctan\dfrac{u_1}{u_2} -$
$- \ln(u_0+u_4)\ :\ \langle L_3 + eG,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ e > 0\rangle$;

18. $J_1 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_0u_0 + x_3u_3 + x_4u_4,$
$J_4 = u_1^2 + u_2^2,\ J_5 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ C_3,\ L_3,\ X_1,\ X_2\rangle$;

19. $J_1 = x_0,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_1^2 + u_2^2,\ J_5 = u_3^2 + u_4^2\ :$
$\langle P_3 + C_3,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0 - X_4\rangle$;

20. $J_1 = u,\ J_2 = u_0,\ J_3 = u_1^2 + u_2^2,\ J_4 = u_3^2 + u_4^2,\ J_5 = u_1u_4 - u_2u_3 :$
$\langle P_3 + C_3 + 2L_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

21. $J_1 = u,\ J_2 = u_0,\ J_3 = u_1^2 + u_2^2,\ J_4 = u_3^2 + u_4^2,\ J_5 = 2\arctan\dfrac{u_1}{u_2} -$
$- e\arctan\dfrac{u_3}{u_4}\ :\ \langle P_3 + C_3 + eL_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ e > 2\rangle;$

22. $J_1 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$
$J_4 = x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4,\ J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 -$
$- u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3\rangle;$

23. $J_1 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_4 = u_0^2 - u_4^2,$
$J_5 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\ :\ \langle G,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3\rangle;$

24. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 +$
$+ x_4u_4,\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2\ :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1 + C_1,$
$P_2 + C_2,\ P_3 + C_3,\ X_0 + X_4\rangle;$

25. $J_1 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 +$
$+ x_3u_3,\ J_4 = u_4,\ J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2\ :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1 - C_1,$
$P_2 - C_2,\ P_3 - C_3,\ X_0 - X_4\rangle;$

26. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \left(x_1 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_1\right)^2 +$
$+ \left(x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_2\right)^2,\ J_4 = x_3 - a\ln(x_0 + x_4) + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_3 +$
$+ d\arctan\left(\dfrac{x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4)}{x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4)}\right),\ J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 -$
$- u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G + aX_3,\ L_3 + dX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4,\ a < 0, d < 0\rangle;$

27. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \left(\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}x_1 + u_1\right)^2 +$
$+ \left(\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}x_2 + u_2\right)^2,\ J_4 = x_3 - a\ln(u_0 - u_4) + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_3,$
$J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G + aX_3,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,$
$X_4,\ a < 0\rangle;$

28. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \left(\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_1 + u_1\right)^2 +$
$+ \left(\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_2 + u_2\right)^2,\ J_4 = x_3 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_3 +$
$+ d \arctan \left(\dfrac{x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4)}{x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4)}\right),\ J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 -$
$- u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ L_3 + dX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4,\ d < 0\rangle;$

29. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2 - \tilde{a}_2 \ln(x_0 + x_4),$
$J_4 = x_3 + u_3 \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G + \tilde{a}_2 X_2,$
$P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_4,\ \tilde{a}_2 < 0\rangle;$

30. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = x_3 - a_3 \ln(u_0 - u_4) + u_3 \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} +$
$+ d_3 \arctan \dfrac{u_1}{u_2},\ J_4 = u_1^2 + u_2^2,\ J_5 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G + a_3 X_3,$
$L_3 + d_3 X_3,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a_3 < 0,\ d_3 < 0\rangle;$

31. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4},\ J_3 = x_3 - a_3 \ln(x_0 + x_4) + u_3 \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$
$J_4 = u_1^2 + u_2^2,\ J_5 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G + a_3 X_3,\ L_3,\ P_3,\ X_1,$
$X_2,\ X_4,\ a_3 < 0\rangle;$

32. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4},\ J_3 = x_3 + u_3 \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} - d_3 \arctan \dfrac{u_2}{u_1},$
$J_4 = u_1^2 + u_2^2,\ J_5 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ L_3 + d_3 X_3,\ P_3,\ X_1,$
$X_2,\ X_4,\ d_3 < 0\rangle;$

33. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4},\ J_3 = x_3 - a_3 \ln(u_0 - u_4),\ J_4 = u_3,$
$J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G + a_3 X_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4,$
$a_3 < 0\rangle,\ \langle G + a_3 X_3,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a_3 < 0\rangle, \langle L_3 +$
$+ cG + bX_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ c > 0,\ b < 0,\ \dfrac{b}{c} \equiv a_3 < 0\rangle;$

34. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4},\ J_3 = x_2 - a_2 \ln(x_0 + x_4) + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2,$
$J_4 = u_3,\ J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G + a_2 X_2,\ P_1,\ P_2,\ X_1,$

$X_3,\ X_4,\ a_2 < 0\rangle$;

35. $J_1 = u,\ J_2 = x_3 - d\arctan\dfrac{u_2}{u_1} + a\ln(u_0 + u_4),\ J_3 = u_3,$

$J_4 = u_0^2 - u_4^2,\ J_5 = u_1^2 + u_2^2\ :\ \langle G + aX_3,\ L_3 + dX_3,\ X_0,\ X_1,$

$X_2,\ X_4,\ a < 0,\ d < 0\rangle$;

36. $J_1 = u,\ J_2 = x_3 + a\ln(u_0 + u_4),\ J_3 = u_3,\ J_4 = u_0^2 - u_4^2,\ J_5 =$

$= u_1^2 + u_2^2\ :\ \langle G + aX_3,\ L_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a < 0\rangle$;

37. $J_1 = u,\ J_2 = x_3 + d\arctan\dfrac{u_1}{u_2},\ J_3 = u_3,\ J_4 = u_0^2 - u_4^2,\ J_5 =$

$= u_1^2 + u_2^2\ :\ \langle G,\ L_3 + dX_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ d < 0\rangle$;

38. $J_1 = u,\ J_2 = x_2 - a\ln(u_0 - u_4),\ J_3 = u_1,\ J_4 = u_2,\ J_5 = u_0^2-$

$- u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G + aX_2,\ P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_3,\ X_4,\ a < 0\rangle$;

39. $J_1 = u,\ J_2 = 2x_0 - 2\alpha\arctan\dfrac{u_1}{u_2} + \beta\arctan\dfrac{u_4}{u_3},\ J_3 = u_0,$

$J_4 = u_1^2 + u_2^2,\ J_5 = u_3^2 + u_4^2\ :\ \langle P_3 + C_3 + \beta(X_0 + X_4),\ L_3+$

$+ \alpha(X_0 + X_4),\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0 - X_4,\ \alpha < 0,\ \beta \geq 0\rangle$;

40. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = x_3 - \mu x_1 - \mu\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_1+$

$+ \mu\alpha\ln(u_0 - u_4),\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :$

$\langle G + \alpha X_1,\ P_1,\ P_2,\ X_1 + \mu X_3,\ X_2,\ X_4,\ \alpha < 0,\ \mu > 0\rangle$.

Зазначимо, що наведені нижче неспряжені підалгебри належать до алгебри Лі групи $\widetilde{G}(1,3)$:

41. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \left(\dfrac{x_1}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_1}{u_0 - u_4}\right)^2 +$

$+ \left(\dfrac{x_2}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4}\right)^2,\ J_4 = u_0 - u_4,\ J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2-$

$- u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_3,\ X_4\rangle$;

42. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_3}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_4 = u_0 - u_4,$

$J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle,$

$\langle L_3 - P_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle,\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle;$

43. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_3,\ J_4 = u_0 - u_4,\ J_5 = u_0^2 - u_1^2 -$
$- u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,$
$X_3,\ X_4\rangle,\ \langle L_3 + d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ d_3 < 0\rangle;$

44. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = u_3,\ J_4 = u_0 - u_4,\ J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :$
$\langle P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle,\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle,$
$\langle L_3 - X_0,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle;$

45. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0 - u_4,\ J_4 = u_1^2 + u_2^2,\ J_5 = u_0^2 -$
$- u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle L_3,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

46. $J_1 = u,\ J_2 = u_1,\ J_3 = u_2,\ J_4 = u_0 - u_4,\ J_5 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :$
$\langle P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

47. $J_1 = u,\ J_2 = u_0 - u_4,\ J_3 = u_1^2 + u_2^2,\ J_4 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,\ J_5 =$
$= \arctan\dfrac{u_1}{u_2} - \dfrac{u_3}{u_0 - u_4}\ :\ \langle L_3 - P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

48. $J_1 = u,\ J_2 = u_0,\ J_3 = u_3,\ J_4 = u_4,\ J_5 = u_1^2 + u_2^2\ :\ \langle L_3,\ X_0,$
$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

49. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = (u_0 - u_4)(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) -$
$- 2(x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4)(x_0 + x_4),\ J_4 = u_0 - u_4,$
$J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4\rangle;$

50. $J_1 = x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_4,\ J_5 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\ :\ \langle L_1,\ L_2,$
$L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0 + X_4\rangle;$

51. $J_1 = x_0,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_4,\ J_5 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\ :\ \langle L_1,\ L_2,$
$L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0 - X_4\rangle;$

52. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_4,\ J_5 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\ :\ \langle L_1,$
$L_2,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

53. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \left(\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}x_1 + \dfrac{u_2}{x_0 + x_4} + u_1\right)^2 +$

$$+\left(\frac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_2-\frac{u_1}{x_0+x_4}+u_2\right)^2,\ J_4=u_0-u_4,\ J_5=u_0^2-u_1^2-$$
$$-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1,\ P_3,\ X_3,\ X_4\rangle;$$

54. $J_1=2\alpha_0x_3+(x_0+x_4)^2,\ J_2=u,\ J_3=\alpha_0u_3-(x_0+x_4)(u_0-u_4),$
$J_4=u_0-u_4,\ J_5=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3-P_3+\alpha_0X_0,\ P_1,$
$P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ \alpha_0<0,\ \alpha_0\neq-1\rangle;$

55. $J_1=(x_0+x_4)^2-2x_3,\ J_2=u,\ J_3=(x_0+x_4)(u_0-u_4)+u_3,\ J_4=$
$=u_0-u_4,\ J_5=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3+X_0,\ X_1,$
$X_2,\ X_4\rangle,\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle,\ \langle L_3-P_3+\alpha_0X_0,$
$P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ \alpha_0=-1\rangle;$

56. $J_1=u,\ J_2=x_0+x_4-\arctan\dfrac{u_2}{u_1},\ J_3=u_0-u_4,\ J_4=u_1^2+u_2^2,$
$J_5=u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3-X_0,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

57. $J_1=u,\ J_2=x_0+x_4+\dfrac{u_3}{u_0-u_4},\ J_3=u_0-u_4,\ J_4=u_1^2+u_2^2,\ J_5=$
$=u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3,\ P_3+X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

58. $J_1=u,\ J_2=(x_0+x_4)(u_0-u_4)+u_3-\beta(u_0-u_4)\arctan\dfrac{u_1}{u_2},\ J_3=$
$=u_1^2+u_2^2,\ J_4=u_0-u_4,\ J_5=u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3+\beta X_0,\ P_3+X_0,$
$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \beta<0\rangle;$

59. $J_1=u,\ J_2=u_1-(u_0-u_4)x_3,\ J_3=u_3,\ J_4=u_0-u_4,\ J_5=u_0^2-$
$-u_1^2-u_2^2-u_4^2\ :\ \langle P_1+X_3,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle;$

60. $J_1=u,\ J_2=u_1+(x_0+x_4)(u_0-u_4),\ J_3=u_3,\ J_4=u_0-u_4,$
$J_5=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2\ :\ \langle P_1+X_0,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

61. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=u_1-(u_0-u_4)x_3-(x_0+x_4)u_3,$
$J_4=u_0-u_4,\ J_5=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle P_1+X_3,\ P_2,\ P_3,$
$X_1,\ X_2,\ X_4\rangle;$

62. $J_1=u,\ J_2=(x_0+x_4)+\dfrac{u_3}{u_0-u_4},\ J_3=(x_0+x_4)^2-2x_3+$

$$+ 2\beta\frac{u_1}{u_0 - u_4},\ J_4 = u_0 - u_4,\ J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :$$

$$\langle P_1 + \beta X_3,\ P_2,\ P_3 + X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ \beta > 0\rangle.$$

Доведення. Для цього скористаємося Теоремою 2.1. З теореми 2.1 випливає, що всі неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ в один раз продовженому просторі матимуть $t = 11 - R$ – вимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку.

Таким чином, п'ятивимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку матимуть тільки неспряжені підалгебри для яких $R = 6$.

В результаті безпосередніх обчислень загальних рангів відповідних матриць M виявилося, що 72 неспряжених підалгебри мають $R = 6$. Це означає, що існує 72 п'ятивимірних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку.

Після побудови цих функціональних базисів в явному вигляді і застосування до них критерію еквівалентності (теорема 2.2) виявилося, що нееквівалентних є тільки 62. Твердження доведено. Беручи до уваги вищенаведене, доведено наступне

Твердження 2.8 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд 62 підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від п'ятьох функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.14), де $J_1, J_2, ..., J_5$ мають вигляд (2.15).*

Таким чином, вищенаведене в цьому підрозділі доводить ту частину Теореми 2.3, яка відноситься до підкласів рівнянь побудованих на основі п'ятивимірних диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

2.4.5 Підкласи рівнянь вигляду $\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_6)$

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_6), \tag{2.16}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_6\}$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Як видно з вищенаведеного, таких підкласів рівнянь буде стільки, скільки є шестивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.9 *З точністю до еквівалентності існує* 108 *шестивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи* $P(1,4)$. *Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу* $R = 5$ *задаються формулами (2.17):*

1. $J_1 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$
$$J_4 = \frac{(u_1(x_0+x_4) + x_1(u_0-u_4))^2 + (u_2(x_0+x_4) + x_2(u_0-u_4))^2}{((x_0+x_4)u_3 + (u_0-u_4)x_3)^2},$$
$J_5 = x_3 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ L_3,$
$P_1,\ P_2,\ P_3\rangle;$ (2.17)

2. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),$
$J_4 = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3,\ J_5 = u_0^2 - u_4^2,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\ :$
$\langle G,\ L_1,\ L_2,\ L_3,\ X_4\rangle;$

3. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_3 = x_1 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1,\ J_4 = x_2 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2,$
$J_5 = x_3 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :$

$\langle G,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4\rangle$;

4. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = x_3 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_3,$

$J_4 = \left(x_1 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_1\right)^2 + \left(x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2\right)^2,$

$J_5 = e \arctan\left(\dfrac{u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4)}{u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4)}\right) + \ln(x_0 + x_4),$

$J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle L_3 + eG,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4,\ e > 0\rangle;$

5. $J_1 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$

$J_4 = \left(x_1 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_1\right)^2 + \left(x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2\right)^2,$

$J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_3\rangle;$

6. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = \left(x_1 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_1\right)^2 +$

$+ \left(x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2\right)^2,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :$

$\langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_4\rangle;$

7. $J_1 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 +$

$+ u_3,\ J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ L_3,\ X_1,\ X_2\rangle;$

8. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1,\ J_4 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$

$J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ L_3,\ X_3,\ X_4\rangle;$

9. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2,\ J_5 = u_3,$

$J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_4\rangle;$

10. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = u_1 + \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_1,\ J_4 = x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2,$

$J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_1,\ P_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

11. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = u_2 + \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_2,\ J_4 = e\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_1 +$

$+ e x_1 - x_3,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_1,\ P_2,\ X_4,$

$X_1 + eX_3,\ e > 0\rangle;$

12. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \left(x_1 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_1\right)^2 +$
$+ \left(x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2\right)^2,\ J_4 = \ln(x_0 + x_4) +$
$+ e \arctan\left(\dfrac{u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4)}{u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4)}\right),\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 -$
$- u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle L_3 + eG,\ P_1,\ P_2,\ X_3,\ X_4,\ e > 0\rangle;$

13. $J_1 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_4 = u_3,$
$J_5 = u_0^2 - u_4^2,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2\ :\ \langle G,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3\rangle;$

14. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_0^2 - u_4^2,$
$J_6 = u_1^2 + u_2^2\ :\ \langle G,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle;$

15. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1,\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_0^2 - u_4^2,$
$J_6 = u_1^2 + u_2^2\ :\ \langle G,\ L_3,\ X_0,\ X_3,\ X_4\rangle;$

16. $J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = u,\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :$
$\langle G,\ P_3,\ X_0,\ X_3,\ X_4\rangle,\ \langle G,\ P_3,\ C_3,\ X_0,\ X_3,\ X_4\rangle;$

17. $J_1 = x_2,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :$
$\langle G,\ P_3,\ X_1,\ X_3,\ X_4\rangle;$

18. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3,\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,$
$J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle;$

19. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_3 + x_3 - e x_1,\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,$
$J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ X_2,\ X_4,\ X_1 + eX_3,\ e > 0\rangle;$

20. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3,\ J_4 = e \arctan \dfrac{u_1}{u_2} +$
$+ \ln(x_0 + x_4),\ J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle L_3 + eG,\ P_3,$
$X_1,\ X_2,\ X_4,\ e > 0\rangle;$

21. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1,\ J_4 = e \arctan \dfrac{x_1}{x_2} +$

$+\ln(u_0-u_4),\ J_5=u_1^2+u_2^2,\ J_6=u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3+eG,\ P_3,$

$X_0,\ X_3,\ X_4,\ e>0\rangle;$

22. $J_1=x_3,\ J_2=u,\ J_3=u_1,\ J_4=u_2,\ J_5=u_3,\ J_6=u_0^2-u_4^2\ :$

$\langle G,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle;$

23. $J_1=u,\ J_2=(x_0+x_4)(u_0+u_4),\ J_3=u_1,\ J_4=u_2,\ J_5=u_3,$

$J_6=u_0^2-u_4^2\ :\ \langle G,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

24. $J_1=x_3,\ J_2=u,\ J_3=u_3,\ J_4=u_0^2-u_4^2,\ J_5=u_1^2+u_2^2,$

$J_6=e\arctan\dfrac{u_1}{u_2}-\ln(u_0+u_4)\ :\ \langle L_3+eG,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ e>0\rangle;$

25. $J_1=u,\ J_2=(x_0+x_4)(u_0+u_4),\ J_3=u_3,\ J_4=u_0^2-u_4^2,$

$J_5=u_1^2+u_2^2,\ J_6=e\arctan\dfrac{u_1}{u_2}-\ln(u_0+u_4)\ :\ \langle L_3+eG,\ X_1,\ X_2,$

$X_3,\ X_4,\ e>0\rangle;$

26. $J_1=(x_0^2-x_3^2-x_4^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=x_0u_0+x_3u_3+x_4u_4,\ J_4=u_1,$

$J_5=u_2,\ J_6=u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ C_3,\ X_1,\ X_2\rangle;$

27. $J_1=(x_3^2+x_4^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=x_3u_4-x_4u_3,\ J_4=u_0,\ J_5=u_1^2+u_2^2,$

$J_6=u_3^2+u_4^2\ :\ \langle P_3+C_3,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_0+X_4\rangle;$

28. $J_1=x_0,\ J_2=u,\ J_3=u_0,\ J_4=u_1^2+u_2^2,\ J_5=u_3^2+u_4^2,$

$J_6=u_1u_4-u_2u_3\ :\ \langle P_3+C_3+2L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0-X_4\rangle;$

29. $J_1=x_0,\ J_2=u,\ J_3=u_0,\ J_4=u_1^2+u_2^2,\ J_5=u_3^2+u_4^2,$

$J_6=2\arctan\dfrac{u_1}{u_2}-e\arctan\dfrac{u_3}{u_4}\ :\ \langle P_3+C_3+eL_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,$

$X_0-X_4,\ e>2\rangle;$

30. $J_1=u,\ J_2=u_0,\ J_3=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{1/2},\ J_4=x_1u_1+x_2u_2+$

$+x_3u_3+x_4u_4,\ J_5=x_1u_2-x_2u_1+x_4u_3-x_3u_4,\ J_6=u_1^2+u_2^2+$

$+u_3^2+u_4^2\ :\ \langle L_1+\dfrac{1}{2}\left(P_1+C_1\right),\ L_2+\dfrac{1}{2}\left(P_2+C_2\right),\ L_3+\dfrac{1}{2}\left(P_3+C_3\right),$

$L_3-\dfrac{1}{2}\left(P_3+C_3\right),\ X_0+X_4\rangle;$

31. $J_1 = x_0,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4,\ J_5 = u_0,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2\ :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1 + C_1,\ P_2 + C_2,\ P_3 + C_3\rangle;$

32. $J_1 = x_4,\ J_2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3,\ J_5 = u_4,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2\ :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1 - C_1,\ P_2 - C_2,\ P_3 - C_3\rangle;$

33. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = x_1 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_1 - a_2\ln(x_0 + x_4),$ $J_4 = x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_2,\ J_5 = x_3 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G + a_2X_1,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4,\ a_2 < 0\rangle;$

34. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = bx_3 - k\ln(x_0 + x_4) + b\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_3,$ $J_4 = \left(x_1 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_1\right)^2 + \left(x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_2\right)^2,\ J_5 = \ln(x_0 + x_4) + b\arctan\left(\dfrac{u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4)}{u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4)}\right),\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle L_3 + bG + kX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4,\ b > 0,\ k < 0\rangle;$

35. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \left(\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}x_1 + u_1\right)^2 + \left(\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}x_2 + u_2\right)^2,$ $J_4 = x_3 - a_3\ln(u_0 - u_4) + d_3\arctan\left(\dfrac{u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4)}{u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4)}\right),$ $J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G + a_3X_3,\ L_3 + d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ X_4,\ a_3 < 0,\ d_3 < 0\rangle;$

36. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4},\ J_3 = x_3 - a_3\ln(u_0 - u_4),$ $J_4 = \left(x_1 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_1\right)^2 + \left(x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_2\right)^2,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G + a_3X_3,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_4,\ a_3 < 0\rangle;$

37. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \left(\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}x_1 + u_1\right)^2 + \left(\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}x_2 + u_2\right)^2,$ $J_4 = x_3 + d_3\arctan\left(\dfrac{u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4)}{u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4)}\right),\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 -$

$-\, u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 \;:\; \langle G,\ L_3 + d_3 X_3,\ P_1,\ P_2,\ X_4,\ d_3 < 0\rangle;$

38. $J_1 = x_3 - a_3 \ln(x_0 + x_4),\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = x_2 -$

$-\, a_2 \ln(x_0 + x_4) + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 \;:$

$\langle G + a_2 X_2 + a_3 X_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_4,\ a_2 < 0,\ a_3 < 0\rangle;$

39. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = x_2 - a_2 \ln(u_0 - u_4) + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2,$

$J_5 = u_3, J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 : \langle G + a_2 X_2,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_4, a_2 < 0\rangle;$

40. $J_1 = x_3 - a_3 \ln(x_0 + x_4),\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_2 + u_2,$

$J_5 = u_3, J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 : \langle G + a_3 X_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_4, a_3 < 0\rangle;$

41. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2,\ J_4 = x_1 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_1 -$

$-\, a_1 \ln(u_0 - u_4),\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 \;:\; \langle G + a_1 X_1,\ P_1,$

$P_2,\ X_3,\ X_4,\ a_1 < 0\rangle;$

42. $J_1 = u,\ J_2 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_3 = x_3 + a \ln(u_0 + u_4) +$

$+\, d \arctan \dfrac{u_1}{u_2},\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_0^2 - u_4^2,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2 \;:\; \langle G + a X_3,$

$L_3 + d X_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a < 0,\ d < 0\rangle;$

43. $J_1 = x_3 - a \ln(x_0 + x_4),\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_4 = u_3,$

$J_5 = u_0^2 - u_4^2,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2 \;:\; \langle G + a X_3,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a < 0\rangle;$

44. $J_1 = u,\ J_2 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_3 = x_3 - d \arctan \dfrac{u_2}{u_1},\ J_4 = u_3,$

$J_5 = u_0^2 - u_4^2,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2 \;:\; \langle G,\ L_3 + d X_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ d < 0\rangle;$

45. $J_1 = x_2,\ J_2 = u,\ J_3 = x_1 - a \ln(u_0 - u_4),\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,$

$J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 \;:\; \langle G + a X_1,\ P_3,\ X_0,\ X_3,\ X_4,\ a < 0\rangle;$

46. $J_1 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_2 = u,\ J_3 = x_2 - a \ln(x_0 + x_4),\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,$

$J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 \;:\; \langle G + a X_2,\ P_3,\ X_1,\ X_3,\ X_4,\ a < 0\rangle;$

47. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = a \ln(u_0 - u_4) - \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_3 - x_3,\ J_4 = u_1,$

$J_5 = u_2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G + aX_3,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a < 0\rangle;$

48. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = d\arctan\dfrac{u_2}{u_1} - \ln(x_0 + x_4),\ J_4 = dx_3 -$
$- \alpha_3\ln(x_0 + x_4) + du_3\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :$
$\langle L_3 + dG + \alpha_3X_3,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ d > 0,\ \alpha_3 < 0\rangle;$

49. $J_1 = u,\ J_2 = x_3 - a_3\ln(u_0 - u_4),\ J_3 = u_1,\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_2,$
$J_6 = u_0^2 - u_4^2\ :\ \langle G + a_3X_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ a_3 < 0\rangle;$

50. $J_1 = u,\ J_2 = \kappa_3\ln(u_0 + u_4) + ex_3,\ J_3 = u_3,\ J_4 = u_0^2 - u_4^2,$
$J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = \ln(u_0 + u_4) - e\arctan\dfrac{u_1}{u_2}\ :\ \langle L_3 + eG + \kappa_3X_3,$
$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ e > 0,\ \kappa_3 < 0\rangle;$

51. $J_1 = u,\ J_2 = \alpha\arctan\dfrac{u_3}{u_4} - 2x_0,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_1^2 + u_2^2,\ J_5 = u_3^2 + u_4^2,$
$J_6 = u_1u_4 - u_2u_3\ :\ \langle P_3 + C_3 + 2L_3 + \alpha(X_0 + X_4),\ X_1,\ X_2,\ X_3,$
$X_0 - X_4,\ \alpha < 0\rangle;$

52. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \mu(x_1 - \alpha\ln(u_0 - u_4)) - x_3 - \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_3,$
$J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G + \alpha X_1,\ P_3,\ X_1 + \mu X_3,$
$X_2,\ X_4,\ \alpha < 0,\ \mu > 0\rangle;$

53. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \alpha\ln(u_0 - u_4) - \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_2 - x_2,$
$J_4 = x_3 - \mu x_1 - \mu\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_1,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :$
$\langle G + \alpha X_2,\ P_1,\ P_2,\ X_1 + \mu X_3,\ X_4,\ \alpha < 0,\ \mu > 0\rangle;$

54. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_2,\ J_4 = x_3 - \mu x_1 -$
$- \mu\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_1 + \mu\alpha\ln(u_0 - u_4),\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :$
$\langle G + \alpha X_1,\ P_1,\ P_2,\ X_1 + \mu X_3,\ X_4,\ \alpha < 0,\ \mu > 0\rangle;$

55. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_3 = \beta\ln(u_0 - u_4) - \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_2 - x_2,\ J_4 =$
$= x_3 - \mu x_1 - \mu\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_1 + \mu\alpha\ln(u_0 - u_4),\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 -$

$-u_2^2-u_4^2\ :\ \langle G+\alpha X_1+\beta X_2,\ P_1,\ P_2,\ X_1+\mu X_3,\ X_4,\ \alpha>0,$

$\beta>0,\ \mu>0\rangle.$

Зазначимо, що наведені нижче неспряжені підалгебри належать до алгебри Лі групи $\widetilde{G}(1,3)$:

56. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{x_3}{x_0+x_4}+\dfrac{u_3}{u_0-u_4},\ J_4=$
$=\left(\dfrac{x_1}{x_0+x_4}+\dfrac{u_1}{u_0-u_4}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_0+x_4}+\dfrac{u_2}{u_0-u_4}\right)^2,\ J_5=u_0-u_4,$
$J_6=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4\rangle;$

57. $J_1=x_0+x_4, J_2=u, J_3=\dfrac{x_2}{x_0+x_4}+\dfrac{u_2}{u_0-u_4}, J_4=\dfrac{x_3}{x_0+x_4}+\dfrac{u_3}{u_0-u_4},$
$J_5=u_0-u_4,\ J_6=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_4\rangle;$

58. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=\left(\dfrac{x_1}{x_0+x_4}+\dfrac{u_1}{u_0-u_4}\right)^2+$
$+\left(\dfrac{x_2}{x_0+x_4}+\dfrac{u_2}{u_0-u_4}\right)^2,\quad J_4=u_3,\ J_5=u_0-u_4,\ J_6=u_0^2-u_1^2-$
$-u_2^2-u_4^2\ :\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

59. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=\arctan\left(\dfrac{u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)}{u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4)}\right)-$
$-\dfrac{u_3}{u_0-u_4},\ J_4=\left(\dfrac{x_1}{x_0+x_4}+\dfrac{u_1}{u_0-u_4}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_0+x_4}+\dfrac{u_2}{u_0-u_4}\right)^2,$
$J_5=u_0-u_4, J_6=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2:\langle L_3-P_3, P_1, P_2, X_3, X_4\rangle;$

60. $J_1=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3,\ J_4=u_0,$
$J_5=u_4,\ J_6=u_1^2+u_2^2+u_3^2\ :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ X_0,\ X_4\rangle;$

61. $J_1=x_3,\ J_2=x_0+x_4,\ J_3=u,\ J_4=u_3,\ J_5=u_0-u_4,\ J_6=u_0^2-u_1^2-$
$-u_2^2-u_4^2\ :\ \langle P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle,\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle;$

62. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{x_2}{x_0+x_4}+\dfrac{u_2}{u_0-u_4},\ J_4=u_3,\ J_5=u_0-u_4,$
$J_6=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2\ :\ \langle P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_3,\ X_4\rangle;$

63. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=e\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1+ex_1-x_3,\ J_4=u_3,\ J_5=u_0-$

$- u_4,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle P_1,\ P_2,\ X_4,\ X_2,\ X_1 + eX_3,\ e > 0\rangle;$

64. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3,\ J_4 = u_0 - u_4,$
$J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle L_3,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle;$

65. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_4 = u_0 - u_4,$
$J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle L_3,\ P_3,\ X_0,\ X_3,\ X_4\rangle;$

66. $J_1 = x_2,\ J_2 = u,\ J_3 = u_1,\ J_4 = u_2,\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :$
$\langle P_3,\ X_0,\ X_1,\ X_3,\ X_4\rangle;$

67. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_1,\ J_4 = u_2,\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_0^2 -$
$- u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

68. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0 - u_4,\ J_4 = u_1^2 + u_2^2,\ J_5 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,$
$J_6 = \arctan\dfrac{u_1}{u_2} - \dfrac{u_3}{u_0 - u_4}\ :\ \langle L_3 - P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

69. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2\ :$
$\langle L_3,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle;$

70. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2\ :$
$\langle L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

71. $J_1 = x_0,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2\ :$
$\langle L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0 - X_4\rangle;$

72. $J_1 = u,\ J_2 = u_0,\ J_3 = u_1,\ J_4 = u_2,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_4\ :\ \langle X_0 + X_4,$
$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0 - X_4\rangle;$

73. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,$
$J_4 = x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4,\ J_5 = u_0 - u_4,$
$J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3\rangle;$

74. $J_1 = x_0,\ J_2 = x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\ :$
$\langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3\rangle;$

75. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_3 + \dfrac{x_0 + x_4 - \tilde{h}_3}{u_0 - u_4}u_3 + d_3\times$

$$\times \arctan\left(\frac{u_1(x_0+x_4)^2+x_1(x_0+x_4)(u_0-u_4)-x_2(u_0-u_4)+u_1}{u_2(x_0+x_4)^2+x_2(x_0+x_4)(u_0-u_4)+x_1(u_0-u_4)+u_2}\right),$$

$$J_4=\left(x_1+\frac{u_2}{u_0-u_4}+\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1\right)^2+\left(x_2-\frac{u_1}{u_0-u_4}+\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2\right)^2,$$

$J_5=u_0-u_4,\ J_6=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3+d_3X_3,\ P_1+X_2,$

$P_2-X_1,\ P_3+\tilde{h}_3X_3,\ X_4,\ d_3<0\rangle;$

76. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=\left(x_1+\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1\right)^2+\left(x_2+\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2\right)^2,$

$$J_4=x_3-d_3\arctan\left(\frac{u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4)}{u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)}\right)+\frac{x_0+x_4-1}{u_0-u_4}u_3,$$

$J_5=u_0-u_4,\ J_6=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,$

$P_3+X_3,\ X_4,\ d_3<0\rangle;$

77. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=(u_0-u_4)x_3+(x_0+x_4)u_3-u_3\tilde{h}_3,$

$J_4=(x_1(u_0-u_4)+u_2+u_1(x_0+x_4))^2+(x_2(u_0-u_4)-u_1+$

$+u_2(x_0+x_4))^2,\ J_5=u_0-u_4,\ J_6=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :$

$\langle L_3,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1,\ P_3+\tilde{h}_3X_3,\ X_4\rangle;$

78. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=x_3+\dfrac{x_0+x_4-1}{u_0-u_4}u_3,$

$$J_4=\left(\frac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_1+u_1\right)^2+\left(\frac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_2+u_2\right)^2,\ J_5=u_0-u_4,$$

$J_6=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_3,\ X_4\rangle;$

79. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=\left(\dfrac{x_1}{x_0+x_4}+\dfrac{u_1}{u_0-u_4}\right)^2+$

$$+\left(\frac{x_2}{x_0+x_4}+\frac{u_2}{u_0-u_4}\right)^2,\ J_4=x_3+\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_3-$$

$$-\,d_3\arctan\left(\frac{x_2(u_0-u_4)+u_2(x_0+x_4)}{x_1(u_0-u_4)+u_1(x_0+x_4)}\right),\ J_5=u_0-u_4,$$

$J_6=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4,\ d_3<0\rangle;$

80. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=\left(\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_1+\dfrac{u_2}{x_0+x_4}+u_1\right)^2+$

$$+\left(\frac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_2-\frac{u_1}{x_0+x_4}+u_2\right)^2,\ J_4=u_3,\ J_5=u_0-u_4,$$

$J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 \ : \ \langle L_3,\ P_1 + X_2,\ P_2 - X_1,\ X_3,\ X_4\rangle$;

81. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = (x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4) + \mu_2)^2 +$
$+ (x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4) - \mu_1)^2,\ J_4 = \dfrac{u_3}{u_0 - u_4} -$
$- \arctan\left(\dfrac{x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4) + \mu_2}{x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4) - \mu_1}\right),\ J_5 = u_0 - u_4,$
$J_6 = u_3^2 - u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_4^2 \ : \ \langle L_3 - P_3,\ P_1 + \mu X_2,\ P_2 - \mu X_1,$
$X_3,\ X_4,\ \mu > 0\rangle$;

82. $J_1 = u,\ J_2 = (x_0 + x_4)^2 - 2x_3 - 2d \arctan\dfrac{u_1}{u_2},\ J_3 = x_0 + x_4 +$
$+ \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_4 = u_0 - u_4,\ J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 \ :$
$\langle L_3 + dX_3,\ P_3 + X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ d < 0\rangle$;

83. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_3 + d \arctan\dfrac{u_1}{u_2} + u_3\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$
$J_4 = u_0 - u_4,\ J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 \ :$
$\langle L_3 + dX_3,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ d < 0\rangle$;

84. $J_1 = (x_0 + x_4)^2 - 2x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 - u_4) + u_3,$
$J_4 = u_0 - u_4,\ J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 \ : \ \langle L_3,\ P_3 + X_0,$
$X_1,\ X_2,\ X_4\rangle$;

85. $J_1 = x_2(u_0 - u_4) - u_3,\ J_2 = u,\ J_3 = u_1,\ J_4 = u_2,\ J_5 = u_0 - u_4,$
$J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 \ : \ \langle P_3 + X_2,\ X_0,\ X_1,\ X_3,\ X_4\rangle$;

86. $J_1 = u,\ J_2 = (x_0 + x_4)(u_0 - u_4) + u_3,\ J_3 = u_1,\ J_4 = u_2,\ J_5 = u_0 - u_4,$
$J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 \ : \ \langle P_3 + X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle$;

87. $J_1 = u,\ J_2 = \alpha_0\dfrac{u_3}{u_0 - u_4} - x_0 - x_4,\ J_3 = u_0 - u_4,\ J_4 = u_1^2 + u_2^2,$
$J_5 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,\ J_6 = u_3 - (u_0 - u_4) \arctan\dfrac{u_1}{u_2} \ :$
$\langle L_3 - P_3 + \alpha_0 X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \alpha_0 < 0\rangle$;

88. $J_1 = u,\ J_2 = d_3 \arctan\dfrac{u_1}{u_2} + x_3,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_4,$

$J_6 = u_1^2 + u_2^2 \ : \ \langle L_3 + d_3X_3, \ X_0, \ X_1, \ X_2, \ X_4, \ d_3 < 0\rangle;$

89. $J_1 = u, \ J_2 = 2x_0 + \tilde{d}_0 \arctan\dfrac{u_2}{u_1}, \ J_3 = u_0, \ J_4 = u_3, \ J_5 = u_4,$

$J_6 = u_1^2 + u_2^2 \ : \ \langle L_3 + \tilde{d}_0X_0, \ X_1, \ X_2, \ X_3, \ X_0 - X_4, \ \tilde{d}_0 < 0\rangle;$

90. $J_1 = x_0 + x_4, \ J_2 = u, \ J_3 = u_1 - x_3(u_0 - u_4), \ J_4 = u_3,$

$J_5 = u_0 - u_4, \ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 \ : \ \langle P_1 + X_3, \ P_2, \ X_1, \ X_2, \ X_4\rangle;$

91. $J_1 = x_0 + x_4, \ J_2 = u, \ J_3 = u_2 - \dfrac{u_1}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}x_2, \ J_4 = u_3,$

$J_5 = u_0 - u_4, \ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 \ : \ \langle P_1 + X_2, \ P_2, \ X_1, \ X_3, \ X_4\rangle;$

92. $J_1 = u, \ J_2 = \beta u_2 - x_3(u_0 - u_4), \ J_3 = u_1 + (u_0 - u_4)(x_0 + x_4),$

$J_4 = u_3, \ J_5 = u_0 - u_4, \ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 \ :$

$\langle P_1 + X_0, \ P_2 + \beta X_3, \ X_1, \ X_2, \ X_4, \ \beta > 0\rangle;$

93. $J_1 = x_3, \ J_2 = u, \ J_3 = \dfrac{u_1}{u_0 - u_4} + x_0 + x_4, \ J_4 = u_3, \ J_5 = u_0 - u_4,$

$J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 \ : \ \langle P_1 + X_0, \ P_2, \ X_1, \ X_2, \ X_4\rangle;$

94. $J_1 = u, \ J_2 = \gamma u_2 + (u_0 - u_4)(x_0 + x_4), \ J_3 = (x_0 + x_4)^2 + 2\gamma\times$

$\times\left(\dfrac{u_1}{u_0 - u_4} - x_2\right), \ J_4 = u_3, \ J_5 = u_0 - u_4, \ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :$

$\langle P_1 + X_2, \ P_2 + \gamma X_0, \ X_1, \ X_3, \ X_4, \ \gamma > 0\rangle;$

95. $J_1 = 2x_2 - (x_0 + x_4)^2, \ J_2 = u, \ J_3 = u_2 + (u_0 - u_4)(x_0 + x_4),$

$J_4 = u_3, \ J_5 = u_0 - u_4, \ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 \ :$

$\langle P_1, \ P_2 + X_0, \ X_1, \ X_3, \ X_4\rangle;$

96. $J_1 = x_0 + x_4, \ J_2 = u, \ J_3 = u_2 + \mu(x_0 + x_4)u_1 + (\mu x_1 - x_3)(u_0 - u_4),$

$J_4 = u_3, \ J_5 = u_0 - u_4, \ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 \ : \ \langle P_1, \ P_2 + X_3,$

$X_1 + \mu X_3, \ X_2, \ X_4, \ \mu > 0\rangle;$

97. $J_1 = u, \ J_2 = x_0 + x_4 + \dfrac{u_1}{u_0 - u_4}, \ J_3 = \mu(x_0 + x_4)^2 - 2(\mu x_1 - x_3)-$

$- 2\beta\dfrac{u_2}{u_0 - u_4}, \ J_4 = u_3, \ J_5 = u_0 - u_4, \ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 \ :$

$\langle P_1 + X_0, \ P_2 + \beta X_3, \ X_1 + \mu X_3, \ X_2, \ X_4, \ \beta > 0, \ \mu > 0\rangle;$

98. $J_1 = u,\ J_2 = (x_0 + x_4)(u_0 - u_4) + u_1,\ J_3 = \mu((x_0 + x_4)^2 - 2x_1) +$
$+ 2x_3,\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :$
$\langle P_1 + X_0,\ P_2,\ X_1 + \mu X_3,\ X_2,\ X_4,\ \mu > 0\rangle;$

99. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4) - \beta u_1 + u_3,$
$J_4 = x_3(u_0 - u_4) + (x_0 + x_4)u_3 - u_2,\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 -$
$- u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle P_1 + \beta X_2,\ P_2 + X_3,\ P_3 - X_2,\ X_1,\ X_4,\ \beta > 0\rangle;$

100. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = (u_0 - u_4)x_2 + (x_0 + x_4)u_2 + u_3,$
$J_4 = (u_0 - u_4)x_3 + (x_0 + x_4)u_3 - u_2,\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 -$
$- u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle P_1,\ P_2 + X_3,\ P_3 - X_2,\ X_1,\ X_4\rangle;$

101. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4) - \gamma u_1 + u_3,$
$J_4 = u_3(\gamma(x_0 + x_4) - \gamma\mu - \delta) - u_2(\delta(x_0 + x_4) + \gamma) - (x_2\delta - \gamma x_3)\times$
$\times (u_0 - u_4),\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle P_1 +$
$+ \gamma X_2 + \delta X_3,\ P_2 + X_3,\ P_3 - X_2 + \mu X_3,\ X_1,\ X_4,\ \mu > 0,\ \gamma > 0\rangle;$

102. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4) + u_3,$
$J_4 = x_3(u_0 - u_4) + (x_0 + x_4 - \mu)u_3 - \delta u_1 - u_2,\ J_5 = u_0 - u_4,$
$J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle P_1 + \delta X_3,\ P_2 + X_3,\ P_3 - X_2 + \mu X_3,$
$X_1,\ X_4,\ \delta > 0\rangle;$

103. $J_1 = x_0 + x_4, J_2 = u, J_3 = x_2 + \dfrac{u_2(x_0 + x_4) + u_3}{u_0 - u_4}, J_4 = x_3(u_0 - u_4) +$
$+ (x_0 + x_4 - \mu)u_3 - u_2, J_5 = u_0 - u_4, J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :$
$\langle P_1,\ P_2 + X_3,\ P_3 - X_2 + \mu X_3,\ X_1,\ X_4\rangle;$

104. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_2 - \gamma\dfrac{u_1}{u_0 - u_4},$
$J_4 = (\delta x_2 - \gamma x_3)(u_0 - u_4) + (\delta u_2 - u_3\gamma)(x_0 + x_4) + u_3\gamma,$
$J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle P_1 + \gamma X_2 + \delta X_3,$
$P_2,\ P_3 + X_3,\ X_1,\ X_4,\ \gamma > 0\rangle;$

105. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_4 = x_3(u_0 - u_4) +$

$$+ u_3(x_0+x_4) - \delta u_1 - u_3,\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 -$$

$$- u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle P_1 + \delta X_3,\ P_2,\ P_3 + X_3,\ X_1,\ X_4,\ \delta > 0\rangle;$$

106. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_2 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2,\ J_4 = x_3\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4} +$

$$+ u_3 - \frac{u_3}{x_0+x_4},\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :$$

$$\langle P_1,\ P_2,\ P_3 + X_3,\ X_1,\ X_4\rangle;$$

107. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_3}{x_0+x_4} + \dfrac{u_3}{u_0-u_4},\ J_4 = u_1 -$

$$- u_2(x_0+x_4) - x_2(u_0-u_4),\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 -$$

$$- u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle P_1 + X_2,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_4\rangle;$$

108. $J_1 = u,\ J_2 = \alpha \arctan\dfrac{u_1}{u_2} - x_0 - x_4,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_4,$

$$J_6 = u_1^2 + u_2^2\ :\ \langle L_3 + \alpha(X_0 + X_4),\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ \alpha < 0\rangle.$$

Доведення. Для цього скористаємося Теоремою 2.1. З теореми 2.1 випливає, що всі неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ в один раз продовженому просторі матимуть $t = 11 - R$ – вимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку.

Таким чином, шестивимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку матимуть неспряжені підалгебри для яких $R = 5$.

В результаті безпосередніх обчислень загальних рангів відповідних матриць M виявилося, що 109 неспряжених підалгебр мають $R = 5$. Це означає, що існує 109 шестивимірних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку.

Після побудови цих функціональних базисів в явному вигляді і застосування до них критерію еквівалентності (теорема 2.2) виявилося, що нееквівалентних є тільки 108. Твердження доведено.

Беручи до уваги вищенаведене, доведено наступне

Твердження 2.10 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд* 108 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від шести функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.16), де $J_1, J_2, ..., J_6$ мають вигляд (2.17).*

Таким чином, вищенаведене в цьому підрозділі доводить ту частину Теореми 2.3, яка відноситься до підкласів рівнянь побудованих на основі шестивимірних диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

2.4.6 Підкласи рівнянь вигляду $\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_7)$

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_7), \tag{2.18}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_7\}$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Як видно з вищенаведеного, таких підкласів рівнянь буде стільки скільки є семивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.11 *З точністю до еквівалентності існує* 136 *семивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу $R = 4$ задаються формулами (2.19):*

$$\begin{aligned}
&1.\ J_1 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1 u_1 + \\
&\quad + x_2 u_2 + x_3 u_3,\ J_5 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_6 = u_0^2 - u_4^2, \\
&\quad J_7 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\ :\ \langle G,\ L_1,\ L_2,\ L_3 \rangle; \qquad (2.19)\\
&2.\ J_1 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},
\end{aligned}$$

$$J_4 = x_1 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1,\ J_5 = x_2 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2,\ J_6 = x_3 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_3,$$
$$J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_1,\ P_2,\ P_3\rangle;$$

3. $J_1 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$
$$J_4 = \left(x_1 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1\right)^2 + \left(x_2 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2\right)^2,\ J_5 = \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_3+$$
$$+ x_3,\ J_6 = b\arctan\left(\frac{u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)}{u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4)}\right) + \ln(x_0+x_4),$$
$$J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle L_3 + eG,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ e>0\rangle;$$

4. $J_1 = x_3,\ J_2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$
$$J_5 = \left(x_1 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1\right)^2 + \left(x_2 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2\right)^2,\ J_6 = u_3,$$
$$J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ L_3,\ P_1,\ P_2\rangle;$$

5. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, J_2 = u, J_3 = x_1u_2 - x_2u_1, J_4 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}, J_5 = u_3+$
$$+ \frac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_3,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ L_3,\ X_4\rangle;$$

6. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4 = u_1 + \dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_1,\ J_5 = x_2+$
$$+ \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle G,\ P_1,\ P_2,\ X_4\rangle;$$

7. $J_1 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1+$
$$+ x_1,\ J_5 = x_2 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :$$
$$\langle G,\ P_1,\ P_2,\ X_3\rangle;$$

8. $J_1 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$
$$J_4 = \left(x_1 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1\right)^2 + \left(x_2 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2\right)^2,\ J_5 = \ln(x_0+x_4)+$$
$$+ e\arctan\left(\frac{u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)}{u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4)}\right),\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2-$$
$$- u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\ :\ \langle L_3 + eG,\ P_1,\ P_2,\ X_3,\ e>0\rangle;$$

9. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4 = \left(x_1 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1\right)^2 +$

$$+\left(x_2+\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2\right)^2,\ J_5=e\arctan\left(\frac{u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)}{u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4)}\right)+$$

$$+\ln(x_0+x_4),\ J_6=u_3,\ J_7=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2\ :$$

$$\langle L_3+eG,\ P_1,\ P_2,\ X_4,\ e>0\rangle;$$

10. $J_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}, J_2=u, J_3=x_1u_2-x_2u_1, J_4=(x_0+x_4)(u_0+u_4),$

$J_5=u_3,\ J_6=u_1^2+u_2^2,\ J_7=u_0^2-u_4^2\ :\ \langle G,\ L_3,\ X_3,\ X_4\rangle;$

11. $J_1=x_3,\ J_2=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_3=u,\ J_4=x_1u_2-x_2u_1,\ J_5=u_3,$

$J_6=u_0^2-u_4^2, J_7=u_1^2+u_2^2\ :\ \langle G,\ L_3,\ X_0,\ X_4\rangle;$

12. $J_1=x_3,\ J_2=(x_0^2-x_4^2)^{1/2},\ J_3=u,\ J_4=(x_0+x_4)(u_0+u_4),$

$J_5=u_3,\ J_6=u_0^2-u_4^2,\ J_7=u_1^2+u_2^2\ :\ \langle G,\ L_3,\ X_1,\ X_2\rangle;$

13. $J_1=x_2,\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4=\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_3+u_3,\ J_5=u_1,$

$J_6=u_2,\ J_7=u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ X_1,\ X_4\rangle;$

14. $J_1=x_1,\ J_2=x_2,\ J_3=u,\ J_4=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_5=u_1,\ J_6=u_2,$

$J_7=u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ X_3,\ X_4\rangle;$

15. $J_1=(x_0^2-x_3^2-x_4^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4=\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_3+$

$+u_3,\ J_5=u_1,\ J_6=u_2,\ J_7=u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ X_1,\ X_2\rangle;$

16. $J_1=x_2, J_2=u, J_3=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}, J_4=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_3-ex_1+x_3, J_5=u_1,$

$J_6=u_2,\ J_7=u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :\ \langle G,\ P_3,\ X_4,\ X_1+eX_3,\ e>0\rangle;$

17. $J_1=(x_0^2-x_3^2-x_4^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4=\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_3+u_3,$

$J_5=d\arctan\dfrac{u_1}{u_2}+\ln(x_0+x_4),\ J_6=u_1^2+u_2^2,\ J_7=u_0^2-u_3^2-u_4^2\ :$

$\langle L_3+eG,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ e>0\rangle;$

18. $J_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=x_1u_2-x_2u_1,\ J_4=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$

$J_5=\ln(x_0+x_4)+d\arctan\dfrac{x_1}{x_2},\ J_6=u_1^2+u_2^2,\ J_7=u_0^2-u_3^2-u_4^2:$

$\langle L_3+eG,\ P_3,\ X_3,\ X_4,\ e>0\rangle;$

19. $J_1 = x_2,\ J_2 = x_3,\ J_3 = u,\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,\ J_6 = u_3,$

$J_7 = u_0^2 - u_4^2:\ \langle G,\ X_0,\ X_1,\ X_4\rangle;$

20. $J_1 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_4 = u_1,$

$J_5 = u_2,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2 - u_4^2:\ \langle G,\ X_1,\ X_2,\ X_3\rangle;$

21. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,$

$J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2 - u_4^2:\ \langle G,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle;$

22. $J_1 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_4 = u_3,$

$J_5 = u_0^2 - u_4^2,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = e\arctan\dfrac{u_1}{u_2} - \ln(u_0 + u_4):$

$\langle L_3 + eG,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ e > 0\rangle;$

23. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_4 = u_3,\ J_5 = u_0^2 - u_4^2,$

$J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = e\arctan\dfrac{u_1}{u_2} - \ln(u_0 + u_4):$

$\langle L_3 + eG,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ e > 0\rangle;$

24. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_4 = u_3,$

$J_5 = u_0^2 - u_4^2,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = e\arctan\dfrac{u_1}{u_2} - \ln(u_0 + u_4):$

$\langle L_3 + eG,\ X_0,\ X_3,\ X_4,\ e > 0\rangle;$

25. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,$

$J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_5 = x_0u_0 + x_3u_3 + x_4u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,$

$J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle G,\ P_3,\ C_3,\ L_3\rangle;$

26. $J_1 = x_2,\ J_2 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_0u_0 + x_3u_3 + x_4u_4,$

$J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle G,\ P_3,\ C_3,\ X_1\rangle;$

27. $J_1 = x_0,\ J_2 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_3u_4 - x_4u_3,\ J_5 = u_0,$

$J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_3^2 + u_4^2:\ \langle P_3 + C_3,\ L_3,\ X_1,\ X_2\rangle;$

28. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_4 = u_0,$

$J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_3^2 + u_4^2,\ J_7 = 2\arctan\dfrac{u_1}{u_2} - e\arctan\dfrac{u_3}{u_4}:$

$\langle P_3 + C_3 + eL_3,\ X_0,\ X_3,\ X_4,\ e > 2\rangle$;

29. $J_1 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_3u_4 - x_4u_3,\ J_4 = x_3u_2 - x_4u_1,$
$J_5 = u_0,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_3^2 + u_4^2:\ \langle P_3 + C_3 + 2L_3,\ X_1,$
$X_2,\ X_0 + X_4\rangle$;

30. $J_1 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_3u_4 - x_4u_3,\ J_4 = e\arctan\dfrac{x_3}{x_4} -$
$- 2\arctan\dfrac{u_1}{u_2},\ J_5 = u_0,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_3^2 + u_4^2:$
$\langle P_3 + C_3 + eL_3,\ X_1,\ X_2,\ X_0 + X_4,\ e > 2\rangle$;

31. $J_1 = x_0,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_5 =$
$= x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4,\ J_6 = x_1u_2 - x_2u_1 + x_4u_3 - x_3u_4,$
$J_7 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2:\ \langle L_1 + \frac{1}{2}(P_1 + C_1),\ L_2 + \frac{1}{2}(P_2 + C_2),$
$L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3),\ L_3 - \frac{1}{2}(P_3 + C_3)\rangle$;

32. $J_1 = u,\ J_2 = u_0,\ J_3 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_4 = x_1u_1 + x_2u_2 +$
$+ x_3u_3 + x_4u_4,\ J_5 = x_1u_2 - x_2u_1 + x_4u_3 - x_3u_4,\ J_6 = x_2u_3 +$
$+ x_4u_1 - x_1u_4 - x_3u_2,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2:\ \langle L_1 + \frac{1}{2}(P_1 + C_1),$
$L_2 + \frac{1}{2}(P_2 + C_2),\ L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3),\ X_0 + X_4\rangle$;

33. $J_1 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$
$J_4 = \left(x_1 + u_1\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}\right)^2 + \left(x_2 + u_2\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}\right)^2,\ J_5 = x_3 -$
$- a_3\ln(x_0 + x_4) + d_3\arctan\left(\dfrac{(x_0 + x_4)u_1 + (u_0 - u_4)x_1}{(x_0 + x_4)u_2 + (u_0 - u_4)x_2}\right),\ J_6 = u_3,$
$J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2:\ \langle G + a_3X_3,\ L_3 + d_3X_3,\ P_1,\ P_2, a_3, d_3 < 0\rangle$;

34. $J_1 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4},\ J_4 = x_3 -$
$- a_3\ln(x_0 + x_4),\ J_5 = \left(u_1 + x_1\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}\right)^2 + \left(u_2 + x_2\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}\right)^2,$
$J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2:\ \langle G + a_3X_3,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ a_3 < 0\rangle$;

35. $J_1=(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_4^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$
$J_4=\left(x_1\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4}+u_1\right)^2+\left(x_2\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4}+u_2\right)^2,\ J_5=x_3+$
$+\,d_3\arctan\left(\dfrac{(x_0+x_4)u_1+(u_0-u_4)x_1}{(x_0+x_4)u_2+(u_0-u_4)x_2}\right),\ J_6=u_3,\ J_7=u_0^2-u_1^2-$
$-\,u_2^2-u_4^2:\ \langle G,\ L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ d_3<0\rangle;$

36. $J_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4=x_1u_2-x_2u_1,$
$J_5=d_3\arctan\dfrac{x_1}{x_2}+x_3-a_3\ln(u_0-u_4)+u_3\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_6=u_1^2+u_2^2,$
$J_7=u_0^2-u_3^2-u_4^2:\ \langle G+a_3X_3,\ L_3+d_3X_3,\ P_3,\ X_4,\ a_3<0,\ d_3<0\rangle;$

37. $J_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4=u_1x_2-u_2x_1,$
$J_5=x_3-a_3\ln(x_0+x_4)+u_3\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_6=u_1^2+u_2^2,\ J_7=u_0^2-u_3^2-$
$-\,u_4^2:\ \langle G+a_3X_3,\ L_3,\ P_3,\ X_4,\ a_3<0\rangle;$

38. $J_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4},\ J_4=x_1u_2-x_2u_1,$
$J_5=d_3\arctan\dfrac{x_1}{x_2}+x_3+u_3\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_6=u_1^2+u_2^2,\ J_7=u_0^2-u_3^2-$
$-\,u_4^2:\ \langle G,\ L_3+d_3X_3,\ P_3,\ X_4,\ d_3<0\rangle;$

39. $J_1=a_3\ln(x_0+x_4)-x_3,\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4=x_2\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4}+$
$+\,u_2,\ J_5=a_3u_1\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}+a_3x_1-a_1x_3,\ J_6=u_3,\ J_7=u_0^2-u_1^2-$
$-\,u_2^2-u_4^2:\ \langle G+a_1X_1+a_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ X_4,\ a_1<0,\ a_3<0\rangle;$

40. $J_1=x_3,\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4=u_2+x_2\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4},\ J_5=x_1-$
$-\,a_1\ln(x_0+x_4)+u_1\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_6=u_3,\ J_7=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2:$
$\langle G+a_1X_1,\ P_1,\ P_2,\ X_4,\ a_1<0\rangle;$

41. $J_1=a_3\ln(u_0-u_4)-x_3,\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4=u_1\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}+$
$+\,x_1,\ J_5=u_2+x_2\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4},\ J_6=u_3,\ J_7=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2:$
$\langle G+a_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ X_4,\ a_3<0\rangle;$

42. $J_1 = cx_3 - b\ln(x_0+x_4),\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$
$J_4 = \left(x_1\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4}+u_1\right)^2 + \left(x_2\dfrac{u_0-u_4}{x_0+x_4}+u_2\right)^2,\ J_5 = \ln(u_0-u_4)+$
$+\,c\arctan\left(\dfrac{u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)}{u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4)}\right),\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2-u_1^2-$
$-\,u_2^2-u_4^2:\ \langle L_3+cG+bX_3,\ P_1,\ P_2,\ X_4,\ c>0,\ b<0\rangle;$

43. $J_1 = (x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1u_2-x_2u_1,\ J_4 = a\ln(u_0+u_4)+$
$+\,x_3+d\arctan\dfrac{u_1}{u_2},\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2-u_4^2,\ J_7 = u_1^2+u_2^2:$
$\langle G+aX_3,\ L_3+dX_3,\ X_0,\ X_4,\ a<0,\ d<0\rangle;$

44. $J_1 = (x_1^2+x_2^2)^{1/2}, J_2 = u, J_3 = x_1u_2-x_2u_1, J_4 = a\ln(u_0+u_4)+x_3,$
$J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2-u_4^2,\ J_7 = u_1^2+u_2^2:\ \langle G+aX_3, L_3, X_0, X_4, a<0\rangle;$

45. $J_1 = (x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2 = x_3+d\arctan\dfrac{x_1}{x_2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2-x_2u_1,$
$J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2-u_4^2,\ J_7 = u_1^2+u_2^2:\ \langle G, L_3+dX_3, X_0, X_4, d<0\rangle;$

46. $J_1 = (x_0^2-x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0+x_4)(u_0+u_4),\ J_4 = x_3-$
$-\,a\ln(x_0+x_4)+d\arctan\dfrac{u_1}{u_2},\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2-u_4^2,\ J_7 = u_1^2+u_2^2:$
$\langle G+aX_3,\ L_3+dX_3,\ X_1,\ X_2,\ a<0,\ d<0\rangle;$

47. $J_1 = (x_0^2-x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0+x_4)(u_0+u_4),\ J_4 = x_3-$
$-\,a\ln(u_0-u_4),\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2-u_4^2,\ J_7 = u_1^2+u_2^2:$
$\langle G+aX_3,\ L_3,\ X_1,\ X_2,\ a<0\rangle;$

48. $J_1 = (x_0^2-x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0+x_4)(u_0+u_4),\ J_4 = x_3+$
$+\,d\arctan\dfrac{u_1}{u_2},\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2-u_4^2,\ J_7 = u_1^2+u_2^2:$
$\langle G,\ L_3+dX_3,\ X_1,\ X_2,\ d<0\rangle;$

49. $J_1 = u,\ J_2 = \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_3 = x_2-a_2\ln(u_0-u_4),\ J_4 = u_3\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}+$
$+\,x_3-a_3\ln(u_0-u_4),\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_0^2-u_3^2-u_4^2:$
$\langle G+a_2X_2+a_3X_3,\ P_3,\ X_1,\ X_4,\ a_2<0,\ a_3<0\rangle;$

50. $J_1 = x_2 - a_2 \ln(x_0 + x_4),\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = u_3 \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} +$
$+\, x_3,\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle G + a_2 X_2,\ P_3,\ X_1,$
$X_4,\ a_2 < 0\rangle;$

51. $J_1 = x_2, J_2 = u, J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, J_4 = x_3 - a_3 \ln(x_0 + x_4) + u_3 \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$
$J_5 = u_1, J_6 = u_2, J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 : \langle G + a_3 X_3, P_3, X_1, X_4, a_3 < 0\rangle;$

52. $J_1 = x_2,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = x_1 - a \ln(u_0 - u_4),\ J_5 = u_1,$
$J_6 = u_2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle G + a X_1,\ P_3,\ X_3,\ X_4,\ a < 0\rangle;$

53. $J_1 = x_2,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = b\,(x_1 - a_1 \ln(u_0 - u_4)) -$
$-\, x_3 - u_3 \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :$
$\langle G + a_1 X_1,\ P_3,\ X_1 + b X_3,\ X_4,\ a_1 < 0,\ b > 0\rangle;$

54. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = x_2 - \tilde{a}_2 \ln(u_0 - u_4),\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,$
$J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2 - u_4^2 :\ \langle G + \tilde{a}_2 X_2,\ X_0,\ X_1,\ X_4,\ \tilde{a}_2 < 0\rangle;$

55. $J_1 = u, J_2 = x_3 - a_3 \ln(u_0 - u_4), J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4), J_4 = u_1,$
$J_5 = u_2,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2 - u_4^2 : \langle G + a_3 X_3, X_1, X_2, X_4, a_3 < 0\rangle;$

56. $J_1 = \ln(x_0 + x_4) + e \arctan \dfrac{u_1}{u_2},\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),$
$J_4 = \kappa_3 \ln(u_0 + u_4) + e x_3,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_4^2,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 :$
$\langle L_3 + eG + \kappa_3 X_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ e > 0,\ \kappa_3 < 0\rangle;$

57. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4,$
$J_4 = x_1 u_2 - x_2 u_1 - x_3 u_4 + x_4 u_3,\ J_5 = 2x_0 + b \times$
$\times \arctan \left(\dfrac{x_1 u_3 + x_2 u_4 - x_3 u_1 - x_4 u_2}{x_1 u_4 - x_2 u_3 + x_3 u_2 - x_4 u_1} \right),\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 +$
$+\, u_3^2 + u_4^2 :\ \langle L_1 + \dfrac{1}{2}(P_1 + C_1),\ L_2 + \dfrac{1}{2}(P_2 + C_2),\ L_3 + \dfrac{1}{2}(P_3 + C_3),$
$L_3 - \dfrac{1}{2}(P_3 + C_3) + b(X_0 + X_4),\ b < 0\rangle;$

58. $J_1 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_2 = 2x_0 + \alpha \arctan \dfrac{x_4}{x_3},\ J_3 = u,\ J_4 = x_3 u_4 - x_4 u_3,$

$J_5 = u_0,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_3^2 + u_4^2 :\ \langle L_3,\ P_3 + C_3 + \alpha(X_0 + X_4),$

$X_1,\ X_2,\ \alpha < 0\rangle;$

59. $J_1 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_3u_4 - x_4u_3,\ J_4 = \beta \arctan \dfrac{x_4}{x_3} +$

$+ 2x_0 - 2\alpha \arctan \dfrac{u_1}{u_2},\ J_5 = u_0,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_3^2 + u_4^2 :$

$\langle L_3 + \alpha(X_0 + X_4),\ P_3 + C_3 + \beta(X_0 + X_4),\ X_1,\ X_2,\ \alpha < 0,\ \beta < 0\rangle;$

60. $J_1 = \alpha \ln(x_0 + x_4) - x_2,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = \mu x_1 - x_3 -$

$- \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_3,\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :$

$\langle G + \alpha X_2,\ P_3,\ X_4,\ X_1 + \mu X_3,\ \alpha < 0,\ \mu > 0\rangle;$

61. $J_1 = x_2 - \beta \ln(x_0 + x_4),\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_3 +$

$+ \mu(\alpha \ln(x_0 + x_4) - x_1) + x_3,\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :$

$\langle G + \alpha X_1 + \beta X_2,\ P_3,\ X_1 + \mu X_3,\ X_4,\ \alpha < 0,\ \beta < 0,\ \mu > 0\rangle.$

Зазначимо, що наведені нижче неспряжені підалгебри належать до алгебри Лі групи $\widetilde{G}(1,3)$:

62. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,$

$J_4 = \left(\dfrac{x_1}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_1}{u_0 - u_4}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4}\right)^2,$

$J_5 = \dfrac{x_3}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_6 = u_0 - u_4, J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 -$

$- u_3^2 - u_4^2 : \langle L_3, P_1, P_2, P_3\rangle;$

63. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_1}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_1}{u_0 - u_4},\ J_4 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4} +$

$+ \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_5 = \dfrac{x_3}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 -$

$- u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_4\rangle;$

64. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,$

$J_4 = \left(\dfrac{x_1}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_1}{u_0 - u_4}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4}\right)^2,\ J_5 = u_3,$

$J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_3\rangle;$

65. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = \left(\dfrac{x_1}{x_0+x_4} + \dfrac{u_1}{u_0-u_4}\right)^2 +$

$+ \left(\dfrac{x_2}{x_0+x_4} + \dfrac{u_2}{u_0-u_4}\right)^2,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 -$

$- u_2^2 - u_4^2 :\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_4\rangle;$

66. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_3 + \dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_3,$

$J_4 = \left(\dfrac{x_1}{x_0+x_4} + \dfrac{u_1}{u_0-u_4}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_0+x_4} + \dfrac{u_2}{u_0-u_4}\right)^2,$

$J_5 = \arctan\left(\dfrac{u_1(x_0+x_4) + x_1(u_0-u_4)}{u_2(x_0+x_4) + x_2(u_0-u_4)}\right) - \dfrac{u_3}{u_0-u_4},$

$J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle L_3 - P_3,\ P_1,\ P_2,\ X_4\rangle;$

67. $J_1 = x_4, J_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, J_3 = u, J_4 = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3,$

$J_5 = u_0,\ J_6 = u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ X_0 + X_4\rangle;$

68. $J_1 = x_0,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3,$

$J_5 = u_0,\ J_6 = u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ X_0 - X_4\rangle;$

69. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_1 + x_2u_2 +$

$+ x_3u_3,\ J_5 = u_0,\ J_6 = u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 :\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3,\ X_4\rangle;$

70. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4),$

$J_5 = u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1,\ P_2,\ X_1,\ X_4\rangle;$

71. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4),$

$J_4 = u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4),\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,$

$J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1,\ P_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

72. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4),$

$J_4 = e\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1 + ex_1 - x_3,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,$

$J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1,\ P_2,\ X_4,\ X_1 + eX_3,\ e > 0\rangle;$

73. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = (x_0 + x_4)u_3 +$

$+ (u_0 - u_4)x_3,\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :$

$\langle L_3,\ P_3,\ X_1,\ X_2\rangle$;

74. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,$
$J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle L_3,\ P_3,\ X_3,\ X_4\rangle$;

75. $J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = u,\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,\ J_6 = u_0 - u_4,$
$J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_3,\ X_0,\ X_3,\ X_4\rangle$;

76. $J_1 = x_2,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,\ J_6 = u_0 - u_4,$
$J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_3,\ X_1,\ X_3,\ X_4\rangle$;

77. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3,\ J_4 = u_1,$
$J_5 = u_2,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle$;

78. $J_1 = x_0 + x_4, J_2 = u, J_3 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_3 + x_3 - ex_1, J_4 = u_1, J_5 = u_2,$
$J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_3,\ X_2,\ X_4,\ X_1 + eX_3,\ e > 0\rangle$;

79. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_3}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_4 = u_0 - u_4,$
$J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,\ J_7 = \arctan\dfrac{u_1}{u_2} - \dfrac{u_3}{u_0 - u_4} :$
$\langle L_3 - P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle$;

80. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_4 = u_0 - u_4,$
$J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,$
$J_7 = \arctan\dfrac{u_1}{u_2} - \dfrac{u_3}{u_0 - u_4} :\ \langle L_3 - P_3,\ X_0,\ X_3,\ X_4\rangle$;

81. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_3,$
$J_6 = u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3,\ X_0,\ X_3,\ X_4\rangle$;

82. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_4,$
$J_7 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4\rangle$;

83. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 :$
$\langle L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_0 + X_4\rangle$;

84. $J_1 = x_0,\ J_2 = x_3,\ J_3 = u,\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 :$

$\langle L_3,\ X_1,\ X_2,\ X_0 - X_4\rangle;$

85. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_4:$

$\langle X_0 + X_4,\ X_1,\ X_2,\ X_0 - X_4\rangle;$

86. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_4:$

$\langle X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

87. $J_1 = x_0,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_4:$

$\langle X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_0 - X_4\rangle;$

88. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_3 + u_3\dfrac{x_0 + x_4 - \tilde{h}_3}{u_0 - u_4},$

$$J_4 = \left(x_1 + u_1\frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}\right)^2 + \left(x_2 + u_2\frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}\right)^2,\ J_5 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0 + x_4} +$$

$$+ 2x_4 + \frac{x_3^2}{x_0 + x_4 - \tilde{h}_3} - \arctan\left(\frac{x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4)}{x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4)}\right),$$

$J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle L_3 - X_4,\ P_1,\ P_2,$

$P_3 + \tilde{h}_3 X_3,\ \tilde{h}_3 > 0\rangle;$

89. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_3\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} + u_3,$

$$J_4 = \left(x_1\frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} + u_1\right)^2 + \left(x_2\frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} + u_2\right)^2,\ J_5 = 2x_4 +$$

$$+ \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_0 + x_4} - \arctan\left(\frac{x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4)}{x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4)}\right),$$

$J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle L_3 - X_4,\ P_1,\ P_2,\ P_3\rangle;$

90. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_3}{x_0 + x_4 - 1} + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},$

$$J_4 = \left(\frac{x_1}{x_0 + x_4} + \frac{u_1}{u_0 - u_4}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0 + x_4} + \frac{u_2}{u_0 - u_4}\right)^2,$$

$$J_5 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2 - x_3^2\frac{x_0 + x_4}{x_0 + x_4 - 1},\ J_6 = u_0 - u_4,$$

$J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3 + X_3\rangle;$

91. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \left(x_1 + u_1\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}\right)^2 +$

$$+\left(x_2+u_2\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}\right)^2,\ J_4=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_4^2+(x_0+x_4)\times$$
$$\times\arctan\left(\frac{x_1(u_0-u_4)+u_1(x_0+x_4)}{x_2(u_0-u_4)+u_2(x_0+x_4)}\right),\ J_5=u_3,\ J_6=u_0-u_4,$$
$$J_7=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2:\ \langle L_3-X_4,\ P_1,\ P_2,\ X_3\rangle;$$

92. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=u_3,\ J_4=u_0-u_4,\ J_5=x_3+d_3\times$
$$\times\arctan\left(\frac{u_1(x_0+x_4)^2+x_1(x_0+x_4)(u_0-u_4)-x_2(u_0-u_4)+u_1}{u_2(x_0+x_4)^2+x_2(x_0+x_4)(u_0-u_4)+x_1(u_0-u_4)+u_2}\right),$$
$$J_6=\left(x_1+\frac{u_2}{u_0-u_4}+u_1\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}\right)^2+\left(x_2-\frac{u_1}{u_0-u_4}+u_2\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}\right)^2,$$
$$J_7=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2:\ \langle L_3+d_3X_3,P_1+X_2,P_2-X_1,X_4,d_3<0\rangle;$$

93. $J_1=x_0+x_4,J_2=u,J_3=\left(x_1+u_1\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}\right)^2+\left(x_2+u_2\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}\right)^2,$
$$J_4=x_3-d_3\arctan\left(\frac{x_2(u_0-u_4)+u_2(x_0+x_4)}{x_1(u_0-u_4)+u_1(x_0+x_4)}\right),\ J_5=u_3,\ J_6=$$
$$=u_0-u_4,\ J_7=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2:\ \langle L_3+d_3X_3,P_1,P_2,X_4,d_3<0\rangle;$$

94. $J_1=x_3,\ J_2=x_0+x_4,\ J_3=u,\ J_4=(x_1(u_0-u_4)+u_1(x_0+x_4)+$
$$+u_2)^2+(x_2(u_0-u_4)-u_1+u_2(x_0+x_4))^2,\ J_5=u_3,\ J_6=u_0-u_4,$$
$$J_7=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2:\ \langle L_3,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1,\ X_4\rangle;$$

95. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=\frac{x_3}{x_0+x_4}+\frac{u_3}{u_0-u_4},\ J_4=(mu_2+$
$$+x_1(u_0-u_4)+u_1(x_0+x_4-k))^2+(u_2(x_0+x_4-k)+x_2(u_0-u_4)-$$
$$-mu_1)^2,\ J_5=\arctan\left(\frac{x_1(u_0-u_4)+u_1(x_0+x_4-k)+mu_2}{x_2(u_0-u_4)+u_2(x_0+x_4-k)-mu_1}\right)-$$
$$-\frac{u_3}{u_0-u_4},\ J_6=u_0-u_4,\ J_7=u_3^2-u_0^2+u_1^2+u_2^2+u_4^2:$$
$$\langle L_3-P_3,\ P_1+kX_1+mX_2,\ P_2-mX_1+kX_2,\ X_4,\ m>0,\ k>0\rangle;$$

96. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=\frac{x_3}{x_0+x_4}+\frac{u_3}{u_0-u_4},$
$$J_4=\left(\frac{x_1}{x_0+x_4-k}+\frac{u_1}{u_0-u_4}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_0+x_4-k}+\frac{u_2}{u_0-u_4}\right)^2,$$
$$J_5=\frac{u_3}{u_0-u_4}-\arctan\left(\frac{x_1(u_0-u_4)+u_1(x_0+x_4-k)}{x_2(u_0-u_4)+u_2(x_0+x_4-k)}\right),$$

$J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_3^2 - u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_4^2:\ \langle L_3 - P_3,\ P_1 + kX_1,$

$P_2 + kX_2,\ X_4,\ k > 0\rangle;$

97. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_3 + u_3\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = (x_1(u_0 - u_4) +$

$+ u_1(x_0 + x_4) + mu_2)^2 + (x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4) - mu_1)^2,$

$J_5 = \dfrac{u_3}{u_0 - u_4} - \arctan\left(\dfrac{x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4) + mu_2}{x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4) - mu_1}\right),$

$J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_3^2 - u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_4^2:\ \langle L_3 - P_3,\ P_1 + mX_2,$

$P_2 - mX_1,\ X_4,\ m > 0\rangle;$

98. $J_1 = (x_0 + x_4)^2 - 2hx_3,\ J_2 = u,\ J_3 = -3h(2x_3 - h)(x_0 + x_4) +$

$+ 2(x_0 + x_4)^3 + 3h^2 \arctan\dfrac{u_1}{u_2} - 6h^2 x_4,\ J_4 = (x_0 + x_4)(u_0 - u_4) +$

$+ hu_3,\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:$

$\langle L_3 - X_4,\ P_3 + hX_0,\ X_1,\ X_2,\ h > 0\rangle;$

99. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3,$

$J_4 = \dfrac{x_3^2}{x_0 + x_4} - \arctan\dfrac{u_1}{u_2} + 2x_4,\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,$

$J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle L_3 - X_4,\ P_3,\ X_1,\ X_2\rangle;$

100. $J_1 = (x_0 + x_4)^2 - 2x_3,\ J_2 = 2(x_0 + x_4)^3 - 6x_3(x_0 + x_4) +$

$+ 3(x_0 - x_4),\ J_3 = u,\ J_4 = (x_0 + x_4)(u_0 - u_4) + u_3,\ J_5 = u_0 - u_4,$

$J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle L_3,\ P_3 + X_0,\ X_1,\ X_2\rangle;$

101. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1,\ J_4 = x_0 + x_4 +$

$+ \arctan\dfrac{u_1}{u_2},\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:$

$\langle L_3 - X_0,\ P_3,\ X_3,\ X_4\rangle;$

102. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1,\ J_4 = x_0 + x_4 +$

$+ \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:$

$\langle L_3,\ P_3 + X_0,\ X_3,\ X_4\rangle;$

103. $J_1 = x_2,\ J_2 = u,\ J_3 = x_1 - \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,$

$J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_3 + X_1,\ X_0,\ X_3,\ X_4\rangle;$

104. $J_1 = x_2,\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 - u_4) + u_3,\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,$

$J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_3 + X_0,\ X_1,\ X_3,\ X_4\rangle;$

105. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = x_2 - \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_3 = u,\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,$

$J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_3 + X_2,\ X_1,\ X_3,\ X_4\rangle;$

106. $J_1 = (x_0 + x_4)^2 - 2x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = x_0 + x_4 + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_4 = u_1,$

$J_5 = u_2,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 : \langle P_3 + X_0, X_1, X_2, X_4\rangle;$

107. $J_1 = (x_0 + x_4)^2 - 2x_3 + 2bx_1,\ J_2 = u,\ J_3 = (x_0 + x_4)(u_0 - u_4)+$

$+ u_3,\ J_4 = u_1,\ J_5 = u_2,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :$

$\langle P_3 + X_0,\ X_1 + bX_3,\ X_2,\ X_4,\ b > 0\rangle;$

108. $J_1 = 2x_3\alpha_0 + (x_0 + x_4)^2,\ J_2 = u,\ J_3 = \alpha_0\dfrac{u_3}{u_0 - u_4} - x_0 - x_4,$

$J_4 = u_0 - u_4,\ J_5 = u_1^2 + u_2^2,\ J_6 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,\ J_7 = \arctan\dfrac{u_1}{u_2} -$

$- \dfrac{u_3}{u_0 - u_4} :\ \langle L_3 - P_3 + \alpha_0 X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ \alpha_0 < 0\rangle;$

109. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_0 - x_4 + \arctan\dfrac{u_1}{u_2},\ J_4 = u_0,$

$J_5 = u_3,\ J_6 = u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3 - X_4,\ X_1,\ X_2,\ X_3\rangle;$

110. $J_1 = x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_3 + d_3 \arctan\dfrac{u_1}{u_2},\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_3,$

$J_6 = u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3 + d_3 X_3,\ X_1,\ X_2,\ X_0 + X_4,\ d_3 < 0\rangle;$

111. $J_1 = x_0,\ J_2 = u,\ J_3 = x_3 - d_3 \arctan\dfrac{u_2}{u_1},\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_3,$

$J_6 = u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3 + d_3 X_3,\ X_1,\ X_2,\ X_0 - X_4,\ d_3 < 0\rangle;$

112. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = d \arctan\dfrac{u_1}{u_2} - 2x_0,\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_3,$

$J_6 = u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3 + dX_4,\ X_1,\ X_2,\ X_0 - X_4,\ d < 0\rangle;$

113. $J_1 = x_3,\ J_2 = u,\ J_3 = \alpha \arctan\dfrac{u_1}{u_2} - x_0 - x_4,\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_3,$

$J_6 = u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2:\ \langle L_3 + \alpha(X_0 + X_4),\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ \alpha < 0\rangle;$

114. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \alpha \arctan \dfrac{u_1}{u_2} + x_3,\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_3,$

$J_6 = u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2:\ \langle L_3 + \alpha X_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4,\ \alpha < 0\rangle;$

115. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_4 = \beta \arctan \dfrac{x_1}{x_2}-$

$- \dfrac{u_3}{u_0 - u_4} - x_0 - x_4,\ J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_0^2-$

$- u_3^2 - u_4^2:\ \langle L_3 + \beta X_0,\ P_3 + X_0,\ X_3,\ X_4,\ \beta < 0\rangle;$

116. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4) + u_2,$

$J_4 = x_2(u_0 - u_4) - (x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4))(x_0 + x_4 - \beta) - u_1,$

$J_5 = u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2:\ \langle P_1 + X_2,$

$P_2 - X_1 + \beta X_2,\ X_3,\ X_4,\ \beta > 0\rangle;$

117. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_1 + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4} + u_1\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$

$J_4 = \dfrac{x_2(u_0 - u_4) - u_1}{x_0 + x_4} - x_1(u_0 - u_4) - u_1(x_0 + x_4),\ J_5 = u_3,$

$J_6 = u_0 - u_4, J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 : \langle P_1 + X_2, P_2 - X_1, X_3, X_4\rangle;$

118. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_1 + u_1\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = x_2\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4 - 1}+$

$+ u_2,\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2:$

$\langle P_1,\ P_2 + X_2,\ X_3,\ X_4\rangle;$

119. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4) - \gamma u_1,$

$J_4 = x_2\delta - \gamma x_3 + u_2\dfrac{\delta(x_0 + x_4) + \gamma}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,$

$J_7 = u_2^2 - u_0^2 + u_1^2 + u_4^2 : \langle P_1 + \gamma X_2 + \delta X_3, P_2 + X_3, X_1, X_4, \gamma > 0\rangle;$

120. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_4 = \dfrac{\delta u_1 + u_2}{u_0 - u_4} - x_3,$

$J_5 = u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2:\ \langle P_1 + \delta X_3,$

$P_2 + X_3,\ X_1,\ X_4,\ \delta > 0\rangle;$

121. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_2 + u_2\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = u_2 - x_3(u_0 - u_4),$

$J_5 = u_3, J_6 = u_0 - u_4, J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 : \langle P_1, P_2 + X_3, X_1, X_4\rangle;$

122. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \beta x_2 - x_3 + \beta u_2 \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = x_2 +$
$+ u_2 \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} - \dfrac{u_1}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 -$
$- u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1 + X_2 + \beta X_3,\ P_2,\ X_1,\ X_4,\ \beta > 0\rangle;$

123. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = u_1 - u_2(x_0 + x_4) - x_2(u_0 - u_4),$
$J_5 = u_3, J_6 = u_0 - u_4, J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 : \langle P_1 + X_2, P_2, X_1, X_4\rangle;$

124. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_3 - \dfrac{u_1}{u_0 - u_4},\ J_4 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},$
$J_5 = u_3, J_6 = u_0 - u_4, J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 : \langle P_1 + X_3, P_2, X_1, X_4\rangle;$

125. $J_1 = u, J_2 = u_2 + (x_0 + x_4)(u_0 - u_4), J_3 = 2\delta x_2 - 2\gamma x_3 - \delta(x_0 + x_4)^2,$
$J_4 = 2x_2 - (x_0 + x_4)^2 - 2\gamma \dfrac{u_1}{u_0 - u_4},\ J_5 = 2(\gamma x_3 - x_2\delta)(u_0 - u_4)^2 +$
$+ 2\delta(x_0 + x_4)^2(u_0 - u_4)^2 + 2\delta(u_0 - u_4)(x_0 + x_4)u_2 + \delta(u_0^2 - u_1^2 - u_4^2),$
$J_6 = u_3,\ J_7 = u_0 - u_4 :\ \langle P_1 + \gamma X_2 + \delta X_3,\ P_2 + X_0,\ X_1,\ X_4,\ \gamma > 0\rangle;$

126. $J_1 = 2x_2 - (x_0 + x_4)^2,\ J_2 = u,\ J_3 = \delta \dfrac{u_1}{u_0 - u_4} - x_3,\ J_4 = x_0 + x_4 +$
$+ \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :$
$\langle P_1 + \delta X_3,\ P_2 + X_0,\ X_1,\ X_4,\ \delta > 0\rangle;$

127. $J_1 = x_3, J_2 = 2x_2 - (x_0 + x_4)^2, J_3 = u, J_4 = u_2 + (x_0 + x_4)(u_0 - u_4),$
$J_5 = u_3, J_6 = u_0 - u_4, J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 : \langle P_1, P_2 + X_0, X_1, X_4\rangle;$

128. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \left(\delta(x_0 + x_4) + \mu(x_0 + x_4)^2 + \gamma\right) u_2 +$
$+ \left(\gamma\mu x_1 + \delta x_2 - \gamma x_3 + \mu x_2(x_0 + x_4)\right)(u_0 - u_4),\ J_4 = \mu\gamma \times$
$\times u_1(x_0 + x_4) + u_2\left(\delta(x_0 + x_4) + \gamma\right) + (\mu\gamma x_1 + \delta x_2 - x_3\gamma)(u_0 - u_4),$
$J_5 = u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1 + \gamma X_2 + \delta X_3,$
$P_2 + X_3,\ X_1 + \mu X_3,\ X_4,\ \mu > 0\rangle;$

129. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_4 = x_3 - \mu x_1 -$
$- u_1 \dfrac{\mu(x_0 + x_4) + 1}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :$

$\langle P_1 + X_3,\ P_2,\ X_1 + \mu X_3,\ X_4,\ \mu > 0\rangle$;

130. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_1 - u_2(x_0 + x_4) - x_2(u_0 - u_4)$,
$J_4 = \mu\left(x_1 + x_2(x_0 + x_4) + u_2\dfrac{(x_0 + x_4)^2}{u_0 - u_4}\right) - x_3 + \dfrac{\gamma u_1}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_3$,
$J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1 + X_2 + \gamma X_3,\ P_2$,
$X_1 + \mu X_3,\ X_4,\ \mu > 0\rangle$;

131. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4)$,
$J_4 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4 - 1} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_5 = x_3\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4 - \gamma} + u_3,\ J_6 = u_0 - u_4$,
$J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_1,\ P_2 + X_2,\ P_3 + \gamma X_3,\ X_4,\ \gamma > 0\rangle$;

132. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4) + u_2 - u_3\beta$,
$J_4 = (u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4) + u_2)\,(x_0 + x_4 - \delta) +$
$+ \beta\left((x_3 - \beta x_2)(u_0 - u_4) - \beta u_2(x_0 + x_4)\right),\ J_5 = x_2(u_0 - u_4) +$
$+ u_2(x_0 + x_4) - u_1,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 :$
$\langle P_1 + X_2 + \beta X_3,\ P_2 - X_1,\ P_3 + \beta X_1 + \delta X_3,\ X_4,\ \beta > 0\rangle$;

133. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_3 + x_3\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4 - \delta},\ J_4 = u_2(x_0 + x_4) +$
$+ \dfrac{u_2}{x_0 + x_4} + x_1\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} + x_2(u_0 - u_4),\ J_5 = u_1(x_0 + x_4) +$
$+ x_1(u_0 - u_4) + u_2,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 :$
$\langle P_1 + X_2,\ P_2 - X_1,\ P_3 + \delta X_3,\ X_4\rangle$;

134. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4) + u_2 - u_3\beta$,
$J_4 = (u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4))\,(\gamma\beta + x_0 + x_4 - \delta) -$
$- u_2\left(\beta^2(x_0 + x_4 - \mu) - (x_0 + x_4) + \delta\right) + (x_3 - \beta x_2)(u_0 - u_4)\beta$,
$J_5 = (\beta(x_0 + x_4 - \mu) - \gamma)\,(u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4) + u_2) \times$
$\times\,(x_0 + x_4) + \left[(x_1 + x_2(x_0 + x_4))\,(u_0 - u_4) - (u_1(x_0 + x_4) +\right.$
$\left.+ x_1(u_0 - u_4))\left((x_0 + x_4)^2 - \mu(x_0 + x_4) + 1\right)\right]\beta, \quad J_6 = u_0 - u_4$,
$J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_1 + X_2 + \beta X_3,\ P_2 - X_1 + \mu X_2 +$

$$+\gamma X_3,\ P_3+\beta X_1+\gamma X_2+\delta X_3,\ X_4, \mu>0,\ \beta>0\rangle;$$

135. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=x_1(u_0-u_4)+u_1(x_0+x_4)+u_2,$

$$J_4=(x_0+x_4-\delta)u_3+(u_0-u_4)x_3-u_2\gamma,\ J_5=\big[(x_0+x_4)^2-$$

$$-(x_0+x_4)\mu+1\big]\,u_2-\gamma u_3(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)+x_2(x_0+x_4)\times$$

$$\times\,(u_0-u_4),\ J_6=u_0-u_4,\ J_7=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2:$$

$$\langle P_1+X_2,\ P_2-X_1+\mu X_2+\gamma X_3,\ P_3+\gamma X_2+\delta X_3,\ X_4,\ \gamma>0\rangle;$$

136. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=u,\ J_3=x_1(u_0-u_4)+u_1(x_0+x_4)+u_2,$

$$J_4=x_3+u_3\frac{x_0+x_4-\delta}{u_0-u_4},\ J_5=\big[(x_0+x_4)^2-(x_0+x_4)\mu+1\big]\,u_2+$$

$$+\left[x_1+x_2(x_0+x_4)\right](u_0-u_4),\ J_6=u_0-u_4,\quad J_7=u_0^2-u_1^2-$$

$$-\,u_2^2-u_3^2-u_4^2:\ \langle P_1+X_2,\ P_2-X_1+\mu X_2,\ P_3+\delta X_3,\ X_4\rangle.$$

Доведення. Для цього скористаємося Теоремою 2.1. З теореми 2.1 випливає, що всі неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ в один раз продовженому просторі матимуть $t=11-R$ – вимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку.

Таким чином, семивимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку матимуть неспряжені підалгебри для яких $R=4$.

В результаті безпосередніх обчислень загальних рангів відповідних матриць M виявилося, що 136 неспряжених підалгебр мають $R=4$. Це означає, що існує 136 семивимірних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку.

Після побудови цих функціональних базисів в явному вигляді і застосування до них критерію еквівалентності (теорема 2.2) виявилося, що нееквівалентних є 136. Твердження доведено.

Беручи до уваги вищенаведене, доведено наступне

Твердження 2.12 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд*

136 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від семи функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.18), де* $J_1, J_2, ..., J_7$ *мають вигляд (2.19).*

Таким чином, вищенаведене в цьому підрозділі доводить ту частину Теореми 2.3, яка відноситься до підкласів рівнянь побудованих на основі семивимірних диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

2.4.7 Підкласи рівнянь вигляду $\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_8)$

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_8), \tag{2.20}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_8\}$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Як видно з вищенаведеного, таких підкласів рівнянь буде стільки, скільки є восьмивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.13 *З точністю до еквівалентності існує* 89 *восьмивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи* $P(1,4)$. *Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу* $R = 3$ *задаються формулами (2.21):*

1. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,$
   $J_4 = x_1 u_2 - x_2 u_1,\ J_5 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_6 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3,$
   $J_7 = u_1^2 + u_2^2,\ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle G,\ P_3,\ L_3 \rangle;$
2. $J_1 = x_3,\ J_2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$

$$J_5 = x_1 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_1, \ J_6 = x_2 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2, \ J_7 = u_3,$$

$$J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 : \ \langle G, \ P_1, \ P_2 \rangle; \qquad (2.21)$$

3. $J_1 = x_3, \ J_2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2}, \ J_3 = u, \ J_4 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$

$J_5 = \left(x_1 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_1 \right)^2 + \left(x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2 \right)^2, \ J_6 = \ln(x_0 + x_4) +$

$+ \, c \arctan \left(\dfrac{u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4)}{u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4)} \right), \ J_7 = u_3, \ J_8 = u_0^2 - u_1^2 -$

$- \, u_2^2 - u_4^2 : \ \langle L_3 + eG, \ P_1, \ P_2, \ e > 0 \rangle;$

4. $J_1 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, \ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_3 = u, \ J_4 = x_1 u_2 - x_2 u_1,$

$J_5 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4), \ J_6 = u_3, \ J_7 = u_0^2 - u_4^2, \ J_8 = u_1^2 + u_2^2 :$

$\langle G, \ L_3, \ X_3 \rangle;$

5. $J_1 = x_3, J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, J_3 = u, J_4 = x_1 u_2 - x_2 u_1, J_5 = (x_0 + x_4) \times$

$\times \, (u_0 + u_4), \ J_6 = u_3, \ J_7 = u_0^2 - u_4^2, \ J_8 = u_1^2 + u_2^2 : \ \langle G, \ L_3, \ X_4 \rangle;$

6. $J_1 = x_1, \ J_2 = x_2, \ J_3 = u, \ J_4 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \ J_5 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3,$

$J_6 = u_1, \ J_7 = u_2, \ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 : \ \langle G, \ P_3, \ X_4 \rangle;$

7. $J_1 = x_2, \ J_2 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, \ J_3 = u, \ J_4 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \ J_5 = u_3 +$

$+ \, \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3, \ J_6 = u_1, \ J_7 = u_2, \ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 : \ \langle G, \ P_3, \ X_1 \rangle;$

8. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_2 = u, \ J_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \ J_4 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$

$J_5 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3, \ J_6 = d \arctan \dfrac{u_1}{u_2} + \ln(x_0 + x_4), \ J_7 = u_1^2 + u_2^2,$

$J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 : \ \langle L_3 + eG, \ P_3, \ X_4, \ e > 0 \rangle;$

9. $J_1 = x_1, \ J_2 = x_2, \ J_3 = x_3, \ J_4 = u, \ J_5 = u_1, \ J_6 = u_2, \ J_7 = u_3,$

$J_8 = u_0^2 - u_4^2 : \ \langle G, \ X_0, \ X_4 \rangle;$

10. $J_1 = x_3, \ J_2 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, \ J_3 = u, \ J_4 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),$

$J_5 = u_1, \ J_6 = u_2, \ J_7 = u_3, \ J_8 = u_0^2 - u_4^2 : \ \langle G, \ X_1, \ X_2 \rangle;$

11. $J_1 = x_2, \ J_2 = x_3, \ J_3 = u, \ J_4 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4), \ J_5 = u_1,$

$J_6 = u_2,\ J_7 = u_3,\ J_8 = u_0^2 - u_4^2 :\ \langle G,\ X_1,\ X_4\rangle;$

12. $J_1 = x_3,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_5 = u_3,$
$J_6 = u_0^2 - u_4^2,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2,\ J_8 = e\arctan\dfrac{u_1}{u_2} - \ln(u_0 + u_4) :$
$\langle L_3 + eG,\ X_0,\ X_4,\ e > 0\rangle;$

13. $J_1 = x_3,\ J_2 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),$
$J_5 = u_3,\ J_6 = u_0^2 - u_4^2,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2,\ J_8 = e\arctan\dfrac{u_1}{u_2} - \ln(u_0 + u_4) :$
$\langle L_3 + eG,\ X_1,\ X_2,\ e > 0\rangle;$

14. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = \ln(x_0 + x_4) + e\arctan\dfrac{x_1}{x_2},\ J_3 = u,$
$J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_5 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2 - u_4^2,$
$J_8 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3 + eG,\ X_3,\ X_4,\ e > 0\rangle;$

15. $J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_4 = u,\ J_5 = x_0u_0 +$
$+ x_3u_3 + x_4u_4,\ J_6 = u_1,\ J_7 = u_2,\ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle G,\ P_3,\ C_3\rangle;$

16. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,$
$J_5 = x_3u_4 - x_4u_3,\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2,\ J_8 = u_3^2 + u_4^2 :$
$\langle P_3 + C_3,\ L_3,\ X_0 + X_4\rangle;$

17. $J_1 = x_0,\ J_2 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_3u_4 - x_4u_3,$
$J_5 = x_3u_2 - x_4u_1,\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2,\ J_8 = u_3^2 + u_4^2 :$
$\langle P_3 + C_3 + 2L_3,\ X_1,\ X_2\rangle;$

18. $J_1 = x_0,\ J_2 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_3u_4 - x_4u_3,$
$J_5 = e\arctan\dfrac{x_3}{x_4} - 2\arctan\dfrac{u_1}{u_2},\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2,$
$J_8 = u_3^2 + u_4^2 :\ \langle P_3 + C_3 + eL_3,\ X_1,\ X_2,\ e > 2\rangle;$

19. $J_1 = x_0,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_5 = u_0,$
$J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_3^2 + u_4^2,\ J_8 = 2\arctan\dfrac{u_1}{u_2} - e\arctan\dfrac{u_3}{u_4} :$
$\langle P_3 + C_3 + eL_3,\ X_3,\ X_0 - X_4,\ e > 0\rangle;$

20. $J_1 = x_0,\ J_2 = u,\ J_3 = u_0,\ J_4 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2},$

$J_5 = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4,\ J_6 = x_1u_2 - x_2u_1 + x_4u_3 - x_3u_4,$

$J_7 = x_2u_3 + x_4u_1 - x_1u_4 - x_3u_2,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 :$

$\langle L_1 + \frac{1}{2}\left(P_1 + C_1\right),\ L_2 + \frac{1}{2}\left(P_2 + C_2\right),\ L_3 + \frac{1}{2}\left(P_3 + C_3\right)\rangle;$

21. $J_1 = x_3 - a_3\ln(x_0 + x_4),\ J_2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,$

$J_4 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_5 = x_1 + u_1\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_6 = x_2 + u_2\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_7 = u_3,$

$J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle G + a_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ a_3 < 0\rangle;$

22. $J_1 = cx_3 - b\ln(x_0 + x_4),\ J_2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,$

$J_4 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_5 = \left(x_1 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_1\right)^2 + \left(x_2 + \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_2\right)^2,$

$J_6 = c\arctan\left(\dfrac{u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4)}{u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4)}\right) + \ln(x_0 + x_4),\ J_7 = u_3,$

$J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle L_3 + cG + bX_3,\ P_1,\ P_2,\ c > 0,\ b < 0\rangle;$

23. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, J_2 = u, J_3 = x_1u_2 - x_2u_1, J_4 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),$

$J_5 = d\arctan\dfrac{u_1}{u_2} + x_3 - a\ln(x_0 + x_4),\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2 - u_4^2,$

$J_8 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle G + aX_3,\ L_3 + dX_3,\ X_4,\ a < 0,\ d < 0\rangle;$

24. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, J_2 = u, J_3 = x_1u_2 - x_2u_1, J_4 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),$

$J_5 = x_3 + a\ln(u_0 + u_4),\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2 - u_4^2,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2 :$

$\langle G + aX_3,\ L_3,\ X_4,\ a < 0\rangle;$

25. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, J_2 = u, J_3 = x_1u_2 - x_2u_1, J_4 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),$

$J_5 = x_3 + d\arctan\dfrac{u_1}{u_2},\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0^2 - u_4^2,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2 :$

$\langle G,\ L_3 + dX_3,\ X_4,\ d < 0\rangle;$

26. $J_1 = x_2,\ J_2 = x_1 - a_1\ln(x_0 + x_4),\ J_3 = u,\ J_4 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$

$J_5 = x_3 - a_3\ln(x_0 + x_4) + u_3\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_6 = u_1,\ J_7 = u_2,$

$J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle G + a_1X_1 + a_3X_3,\ P_3,\ X_4,\ a_1 < 0,\ a_3 < 0\rangle;$

27. $J_1=x_2,\ J_2=u,\ J_3=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_4=x_1-a_1\ln(u_0-u_4),$

$J_5=x_3+u_3\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_6=u_1,\ J_7=u_2,\ J_8=u_0^2-u_3^2-u_4^2:$

$\langle G+a_1X_1,\ P_3,\ X_4,\ a_1<0\rangle;$

28. $J_1=x_1,\ J_2=x_2,\ J_3=u,\ J_4=x_3-a_3\ln(u_0-u_4)+u_3\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$

$J_5=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_6=u_1,\ J_7=u_2,\ J_8=u_0^2-u_3^2-u_4^2:$

$\langle G+a_3X_3,\ P_3,\ X_4,\ a_3<0\rangle;$

29. $J_1=x_2-a_2\ln(x_0+x_4),\ J_2=(x_0^2-x_3^2-x_4^2)^{1/2},\ J_3=u,$

$J_4=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_5=(u_0-u_4)\dfrac{x_3}{x_0+x_4}+u_3,\ J_6=u_1,\ J_7=u_2,$

$J_8=u_0^2-u_3^2-u_4^2:\ \langle G+a_2X_2,\ P_3,\ X_1,\ a_2<0\rangle;$

30. $J_1=x_2,\ J_2=x_3,\ J_3=u,\ J_4=x_1-c\ln(u_0-u_4),\ J_5=u_1,$

$J_6=u_2,\ J_7=u_3,\ J_8=u_0^2-u_4^2:\ \langle G+cX_1,\ X_0,\ X_4,\ c<0\rangle;$

31. $J_1=x_3+a_3\ln(x_0-x_4), J_2=(x_0^2-x_4^2)^{1/2}, J_3=u, J_4=(x_0+x_4)\times$

$\times\,(u_0+u_4),\ J_5=u_1,\ J_6=u_2,\ J_7=u_3,\ J_8=u_0^2-u_4^2:$

$\langle G+a_3X_3,\ X_1,\ X_2,\ a_3<0\rangle;$

32. $J_1=x_3,\ J_2=u,\ J_3=(x_0+x_4)(u_0+u_4),\ J_4=x_2+\tilde a_2\ln(u_0+u_4),$

$J_5=u_1, J_6=u_2, J_7=u_3, J_8=u_0^2-u_4^2:\langle G+\tilde a_2X_2,\ X_1,\ X_4,\ \tilde a_2<0\rangle;$

33. $J_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=x_1u_2-x_2u_1,\ J_4=\ln(u_0+u_4)-$

$-\,e\arctan\dfrac{x_1}{x_2},\ J_5=\kappa_3\ln(u_0+u_4)+ex_3,\ J_6=u_3,\ J_7=u_0^2-u_4^2,$

$J_8=u_1^2+u_2^2:\ \langle L_3+eG+\kappa_3X_3,\ X_0,\ X_4,\ e>0,\ \kappa_3<0\rangle;$

34. $J_1=(x_0^2-x_4^2)^{1/2},\ J_2=\kappa_3\ln(x_0+x_4)-ex_3,\ J_3=u,\ J_4=(x_0+x_4)\times$

$\times\,(u_0+u_4),\ J_5=u_3,\ J_6=u_0^2-u_4^2,\ J_7=u_1^2+u_2^2,\ J_8=\ln(u_0+u_4)-$

$-\,e\arctan\dfrac{u_1}{u_2}:\ \langle L_3+eG+\kappa_3X_3,\ X_1,\ X_2,\ e>0,\ \kappa_3<0\rangle;$

35. $J_1=(x_3^2+x_4^2)^{1/2},\ J_2=\alpha\arctan\dfrac{x_3}{x_4}-2x_0,\ J_3=u,\ J_4=x_3u_4-x_4u_3,$

$J_5=u_1u_4-u_2u_3,\ J_6=u_0,\ J_7=u_1^2+u_2^2,\ J_8=u_3^2+u_4^2:$

$\langle P_3+C_3+2L_3+\alpha(X_0+X_4),\ X_1,\ X_2,\ \alpha<0\rangle;$

36. $J_1=(x_3^2+x_4^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=x_3u_4-x_4u_3,\ J_4=ex_0+\alpha\arctan\dfrac{u_2}{u_1},$

$J_5=\alpha\arctan\dfrac{u_4}{u_3}+2x_0,\ J_6=u_0,\ J_7=u_1^2+u_2^2,\ J_8=u_3^2+u_4^2:$

$\langle P_3+C_3+eL_3+\alpha(X_0+X_4),\ X_1,\ X_2,\ e>2,\alpha<0\rangle;$

37. $J_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2=u,\ J_3=x_1u_2-x_2u_1,\ J_4=\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$

$J_5=d\arctan\dfrac{u_1}{u_2}+\ln(x_0+x_4),\ J_6=dx_3-\alpha_3\ln(x_0+x_4)+$

$+du_3\dfrac{x_0+x_4}{u_0-u_4},\ J_7=u_1^2+u_2^2,\ J_8=u_0^2-u_3^2-u_4^2:\ \langle L_3+dG+$

$+\alpha_3X_3,\ P_3,\ X_4,\ d>0,\ \alpha_3<0\rangle.$

Зазначимо, що наведені нижче неспряжені підалгебри належать до алгебри Лі групи $\widetilde{G}(1,3)$:

38. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2)^{1/2},\ J_3=u,$

$J_4=\dfrac{x_1}{x_0+x_4}+\dfrac{u_1}{u_0-u_4},\ J_5=\dfrac{x_2}{x_0+x_4}+\dfrac{u_2}{u_0-u_4},\ J_6=\dfrac{x_3}{x_0+x_4}+$

$+\dfrac{u_3}{u_0-u_4},\ J_7=u_0-u_4,\ J_8=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2:\ \langle P_1,\ P_2,\ P_3\rangle;$

39. $J_1=x_3,\ J_2=x_0+x_4,\ J_3=(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_4^2)^{1/2},\ J_4=u,$

$J_5=\left(\dfrac{x_1}{x_0+x_4}+\dfrac{u_1}{u_0-u_4}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_0+x_4}+\dfrac{u_2}{u_0-u_4}\right)^2,\ J_6=u_3,$

$J_7=u_0-u_4,\ J_8=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2:\ \langle L_3,\ P_1,\ P_2\rangle;$

40. $J_1=x_0+x_4, J_2=(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2)^{1/2}, J_3=u, J_4=\dfrac{x_3}{x_0+x_4}+$

$+\dfrac{u_3}{u_0-u_4},\ J_5=\left(\dfrac{x_1}{x_0+x_4}+\dfrac{u_1}{u_0-u_4}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_0+x_4}+\dfrac{u_2}{u_0-u_4}\right)^2,$

$J_6=\arctan\left(\dfrac{u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)}{u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4)}\right)+\dfrac{x_3}{x_0+x_4},\ J_7=u_0-u_4,$

$J_8=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2:\ \langle L_3-P_3,\ P_1,\ P_2\rangle;$

41. $J_1=x_0,\ J_2=x_4,\ J_3=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2},\ J_4=u,\ J_5=x_1u_1+$

$+x_2u_2+x_3u_3,\ J_6=u_0,\ J_7=u_4,\ J_8=u_1^2+u_2^2+u_3^2:\ \langle L_1,\ L_2,\ L_3\rangle;$

42. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,$

$J_4 = u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4),\ J_5 = u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4),$

$J_6 = u_3,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1,\ P_2,\ X_3\rangle;$

43. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = x_3,\ J_3 = u,\ J_4 = u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4),$

$J_5 = u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4),\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0 - u_4,$

$J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1,\ P_2,\ X_4\rangle;$

44. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,$

$J_5 = (x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2,$

$J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle L_3,\ P_3,\ X_4\rangle;$

45. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = (x_0 + x_4)u_3 +$

$+ (u_0 - u_4)x_3,\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :$

$\langle P_3,\ X_1,\ X_2\rangle;$

46. $J_1 = x_2,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = (x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3,$

$J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_3,\ X_1,\ X_4\rangle;$

47. $J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = x_0 + x_4,\ J_4 = u,\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,$

$J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_3,\ X_3,\ X_4\rangle;$

48. $J_1 = x_2,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_3 + x_3 - ex_1,\ J_5 = u_1,$

$J_6 = u_2, J_7 = u_0 - u_4, J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 : \langle P_3,\ X_4,\ X_1 + eX_3,\ e > 0\rangle;$

49. $J_1 = x_0 + x_4, J_2 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, J_3 = u, J_4 = \dfrac{x_3}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},$

$J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,\ J_8 = \arctan\dfrac{u_1}{u_2} -$

$- \dfrac{u_3}{u_0 - u_4} :\ \langle L_3 - P_3,\ X_1,\ X_2\rangle;$

50. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,$

$J_5 = u_0 - u_4,\ J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,\ J_8 = \arctan\dfrac{u_1}{u_2} -$

$- \dfrac{u_3}{u_0 - u_4} :\ \langle L_3 - P_3,\ X_3,\ X_4\rangle;$

51. $J_1 = x_3,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_5 = u_0,$

$J_6 = u_3,\ J_7 = u_4,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3,\ X_0,\ X_4\rangle;$

52. $J_1 = x_0,\ J_2 = x_3,\ J_3 = x_4,\ J_4 = u,\ J_5 = u_0,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_4,$

$J_8 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3,\ X_1,\ X_2\rangle;$

53. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,$

$J_5 = u_0,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_4,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3,\ X_3,\ X_4\rangle;$

54. $J_1 = x_0,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_5 = u_0,$

$J_6 = u_3,\ J_7 = u_4,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3,\ X_3,\ X_0 - X_4\rangle;$

55. $J_1 = x_2,\ J_2 = x_3,\ J_3 = u,\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_3,$

$J_8 = u_4 :\ \langle X_0 + X_4,\ X_1,\ X_0 - X_4\rangle;$

56. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,$

$J_7 = u_3,\ J_8 = u_4 :\ \langle X_4,\ X_1,\ X_2\rangle;$

57. $J_1 = x_0,\ J_2 = x_3,\ J_3 = u,\ J_4 = u_0,\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_3,$

$J_8 = u_4 :\ \langle X_1,\ X_2,\ X_0 - X_4\rangle;$

58. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,$

$$J_4 = \left(\frac{x_1}{x_0 + x_4} + \frac{u_1}{u_0 - u_4}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0 + x_4} + \frac{u_2}{u_0 - u_4}\right)^2,\ J_5 = x_3 +$$

$$+ d_3 \arctan\left(\frac{(x_0 + x_4)u_1 + (u_0 - u_4)x_1}{(x_0 + x_4)u_2 + (u_0 - u_4)x_2}\right),\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0 - u_4,$$

$J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle L_3 + d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ d_3 < 0\rangle;$

59. $$J_1 = x_0 + x_4, J_2 = 2x_4 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0 + x_4 - 1} + \frac{x_3^2}{x_0 + x_4}, J_3 = u, J_4 = \frac{x_3}{x_0 + x_4} +$$

$$+ \frac{u_3}{u_0 - u_4}, J_5 = \left(u_1 + x_1\frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4 - 1}\right)^2 + \left(u_2 + x_2\frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4 - 1}\right)^2,$$

$$J_6 = \arctan\left(\frac{x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4 - 1)}{x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4 - 1)}\right) - \frac{u_3}{u_0 - u_4}, J_7 = u_0 - u_4,$$

$J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle L_3 - P_3,\ P_1 + X_1,\ P_2 + X_2\rangle;$

60. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = 2d \arctan \dfrac{x_1}{x_2} - (x_0 + x_4)^2 + 2x_3,\ J_3 = u,$

$J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_5 = (x_0 + x_4)(u_0 - u_4) + u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,$

$J_7 = u_1^2 + u_2^2,\ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle L_3 + dX_3,\ P_3 + X_0,\ X_4,\ d < 0\rangle;$

61. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_4 = x_0 + x_4,$

$J_5 = d\arctan\dfrac{x_2}{x_1} - u_3\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} - x_3,\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2,$

$J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle L_3 + dX_3,\ P_3,\ X_4,\ d < 0\rangle;$

62. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = (x_0 + x_4)^2 - 2x_3,\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,$

$J_5 = u_3 + (x_0 + x_4)(u_0 - u_4),\ J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = u_1^2 + u_2^2,$

$J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle L_3,\ P_3 + X_0,\ X_4\rangle;$

63. $J_1 = (x_0 + x_4)^2 - 2x_3,\ J_2 = 2(x_0 + x_4)^3 - 6x_3(x_0 + x_4) + 3(x_0 - x_4),$

$J_3 = u,\ J_4 = (x_0 + x_4) + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_0 - u_4,$

$J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_3 + X_0,\ X_1,\ X_2\rangle;$

64. $J_1 = x_2,\ J_2 = (x_0 + x_4)^2 - 2x_3,\ J_3 = u,\ J_4 = (x_0 + x_4) + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},$

$J_5 = u_1, J_6 = u_2, J_7 = u_0 - u_4, J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 : \langle P_3 + X_0,\ X_1,\ X_4\rangle;$

65. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = x_2 + \dfrac{x_3}{x_0 + x_4},\ J_3 = u,\ J_4 = \dfrac{x_3}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},$

$J_5 = u_1, J_6 = u_2, J_7 = u_0 - u_4, J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 : \langle P_3 + X_2,\ X_1,\ X_4\rangle;$

66. $J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = u,\ J_4 = (x_0 + x_4) + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_1,$

$J_6 = u_2,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_3 + X_0,\ X_3,\ X_4\rangle;$

67. $J_1 = x_2,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = x_1 - \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,$

$J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle P_3 + X_1,\ X_3,\ X_4\rangle;$

68. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_2 - \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_4 = (x_0 + x_4)\dfrac{u_3}{u_0 - u_4} +$

$+ x_3 - bx_1,\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :$

$\langle P_3 + X_2,\ X_1 + bX_3,\ X_4,\ b > 0\rangle;$

69. $J_1 = x_2,\ J_2 = (x_0 + x_4)^2 - 2(x_3 - bx_1),\ J_3 = u,\ J_4 = (x_0 + x_4)\times$

$\times (u_0 - u_4) + u_3,\ J_5 = u_1,\ J_6 = u_2,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :$

$\langle P_3 + X_0,\ X_1 + bX_3,\ X_4,\ b > 0\rangle$;

70. $J_1 = 2(x_0 + x_4)^3 + \dfrac{6\alpha_0}{x\ \ _3}(x_0 + x_4) + 3\alpha_0^2(x_0 - x_4),\ J_2 = (x_0 + x_4)^2 +$
$+ 2\alpha_0 x_3,\ J_3 = u,\ J_4 = x_0 + x_4 - \alpha_0 \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_0 - u_4,$
$J_6 = u_1^2 + u_2^2,\ J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,\ J_8 = \dfrac{u_3}{u_0 - u_4} - \arctan\dfrac{u_1}{u_2}:$
$\langle L_3 - P_3 + \alpha_0 X_0,\ X_1,\ X_2,\ \alpha_0 < 0\rangle$;

71. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, J_2 = u, J_3 = \alpha_0 \arctan\dfrac{u_1}{u_2} - x_0 - x_4, J_4 = \dfrac{u_3}{u_0 - u_4} -$
$- \arctan\dfrac{x_1}{x_2},\ J_5 = (x_0 + x_4)(u_0 - u_4) - \alpha_0 u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,$
$J_7 = u_1^2 + u_2^2,\ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle L_3 - P_3 + \alpha_0 X_0,\ X_3,\ X_4,\ \alpha_0 < 0\rangle$;

72. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = u,\ J_3 = x_2 u_1 - x_1 u_2,\ J_4 = d_3 \arctan\dfrac{x_1}{x_2} + x_3,$
$J_5 = u_0, J_6 = u_3, J_7 = u_4, J_8 = u_1^2 + u_2^2 : \langle L_3 + d_3 X_3,\ X_0,\ X_4,\ d_3 < 0\rangle$;

73. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_4,\ J_3 = x_0 + \tilde{d} \arctan\dfrac{u_2}{u_1},\ J_4 = u,\ J_5 = u_0,\ J_6 = u_3,$
$J_7 = u_4,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2:\ \langle L_3 + \tilde{d}(X_0 + X_4),\ X_1,\ X_2,\ \tilde{d} < 0\rangle$;

74. $J_1 = 2x_4 + \tilde{d}_4 \arctan\dfrac{x_1}{x_2},\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1 u_2 - x_2 u_1,$
$J_5 = u_0,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_4,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2:\ \langle L_3 + \tilde{d}_4 X_4,\ X_3,$
$X_0 + X_4,\ \tilde{d}_4 < 0\rangle$;

75. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = x_0 + x_4 + \alpha \arctan\dfrac{u_2}{u_1},\ J_3 = u,$
$J_4 = x_1 u_2 - x_2 u_1,\ J_5 = u_0,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_4,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2:$
$\langle L_3 + \alpha(X_0 + X_4),\ X_3,\ X_4,\ \alpha < 0\rangle$;

76. $J_1 = x_0,\ J_2 = x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = \alpha \arctan\dfrac{u_1}{u_2} + x_3,\ J_5 = u_0,\ J_6 = u_3,$
$J_7 = u_4,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2:\ \langle L_3 + \alpha X_3,\ X_1,\ X_2,\ \alpha < 0\rangle$;

77. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = \dfrac{x_1^2 + x_4^2 - x_0^2}{x_0 + x_4} + \dfrac{x_2^2}{x_0 + x_4 - 1},\ J_3 = u,$
$J_4 = \dfrac{x_1}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_1}{u_0 - u_4},\ J_5 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4 - 1} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_6 = u_3,$
$J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2:\ \langle P_1,\ P_2 + X_2,\ X_3\rangle$;

78. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = u_1 + x_1\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_2}{x_0 + x_4},$

$J_4 = \delta\left(u_1\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} + x_1\right) - \gamma\dfrac{u_1}{u_0 - u_4} + x_3,\ J_5 = \dfrac{u_1}{u_0 - u_4} +$

$+\left(u_1\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} + x_1\right)(x_0 + x_4 - \mu) - x_2,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0 - u_4,$

$J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1 + X_2 + \gamma X_3,\ P_2 - X_1 + \mu X_2 + \delta X_3,$

$X_4,\ \mu > 0,\ \gamma > 0\rangle;$

79. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = \delta u_2 - x_3(u_0 - u_4),\ J_4 = u_1(x_0 + x_4) +$

$+ x_1(u_0 - u_4) + u_2,\ J_5 = \left(u_1\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} + x_1\right)(x_0 + x_4 - \mu) +$

$+\dfrac{u_1}{u_0 - u_4} - x_2,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :$

$\langle P_1 + X_2,\ P_2 - X_1 + \mu X_2 + \delta X_3,\ X_4,\ \delta > 0\rangle;$

80. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4) + u_2,$

$J_5 = x_2(u_0 - u_4) - (x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4))(x_0 + x_4 - \mu) - u_1,$

$J_6 = u_3,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :$

$\langle P_1 + X_2,\ P_2 - X_1 + \mu X_2,\ X_4,\ \mu > 0\rangle;$

81. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4) + u_2,\ J_3 = u_2 +$

$+ u_2(x_0 + x_4)^2 + (x_2(x_0 + x_4) + x_1)(u_0 - u_4),\ J_4 = \beta\dfrac{u_2}{u_0 - u_4} -$

$-\dfrac{x_3 - \beta x_2}{x_0 + x_4},\ J_5 = u,\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :$

$\langle P_1 + X_2 + \beta X_3,\ P_2 - X_1,\ X_4,\ \beta > 0\rangle;$

82. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = x_1 + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4} + u_1\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$

$J_4 = u_2(x_0 + x_4) + \dfrac{u_2}{x_0 + x_4} + \left(\dfrac{x_1}{x_0 + x_4} + x_2\right)(u_0 - u_4),\ J_5 = u,$

$J_6 = u_3, J_7 = u_0 - u_4, J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 : \langle P_1 + X_2, P_2 - X_1, X_4\rangle;$

83. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_1 + u_1\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_4 = x_3 + \gamma\dfrac{x_1}{x_0 + x_4} -$

$-\delta\dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_5 = \dfrac{u_1^2 + u_2^2}{(u_0 - u_4)^2} - 2\dfrac{u_4}{u_0 - u_4},\ J_6 = \dfrac{x_0 + x_4 - 1}{u_0 - u_4}u_2 + x_2,$

$J_7 = u_3,\ J_8 = u_0 - u_4 :\ \langle P_1 + \gamma X_3,\ P_2 + X_2 + \delta X_3,\ X_4,\ \gamma > 0\rangle;$

84. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = u,\ J_3 = x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4),\ J_4 = x_3 - \delta\dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_5 = u_2(x_0 + x_4 - 1) + x_2(u_0 - u_4),\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1,\ P_2 + X_2 + \delta X_3,\ X_4,\ \delta > 0\rangle;$

85. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = x_1\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} + u_1,\ J_5 = u_2 + - x_2\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4 - 1},\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :$ $\langle P_1,\ P_2 + X_2,\ X_4\rangle;$

86. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = x_3 + \dfrac{x_1}{x_0 + x_4},\ J_3 = u,\ J_4 = u_1\dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} + x_1,$ $J_5 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1 + X_3,\ P_2,\ X_4\rangle;$

87. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = u,\ J_4 = \left(\dfrac{x_1}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_1}{u_0 - u_4}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4}\right)^2,\ J_5 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2 + (x_0 + x_4)\times \arctan\left(\dfrac{x_1(u_0 - u_4) + u_1(x_0 + x_4)}{x_2(u_0 - u_4) + u_2(x_0 + x_4)}\right),\ J_6 = u_3,\ J_7 = u_0 - u_4,$ $J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1,\ P_2,\ L_3 - X_4\rangle;$

88. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = 2x_4 + \dfrac{x_1^2}{x_0 + x_4} + \dfrac{x_2^2}{x_0 + x_4 - \alpha} + \dfrac{x_3^2}{x_0 + x_4 - \gamma},$ $J_3 = u,\ J_4 = u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4),\ J_5 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4 - \alpha} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},$ $J_6 = u_0 - u_4,\ J_7 = x_3\dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4 - \gamma} + u_3,\ J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 :$ $\langle P_1,\ P_2 + \alpha X_2,\ P_3 + \gamma X_3,\ \alpha > 0\rangle;$

89. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = x_3,\ J_3 = u,\ J_4 = \arctan\dfrac{u_1}{u_2} + x_0 - x_4,\ J_5 = u_0,$ $J_6 = u_3,\ J_7 = u_4,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3 - X_4,\ X_1,\ X_2\rangle.$

Доведення. Для цього скористаємося Теоремою 2.1. З теореми 2.1 випливає, що всі неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ в один раз продовженому просторі матимуть $t = 11 - R$ – вимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку.

Таким чином, восьмивимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку матимуть неспряжені підалгебри для яких $R = 3$.

В результаті безпосередніх обчислень загальних рангів відповідних матриць M виявилося, що 89 неспряжених підалгебр мають $R = 3$. Це означає, що існує 89 восьмивимірних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку.

Після побудови цих функціональних базисів в явному вигляді і застосування до них критерію еквівалентності (теорема 2.2) виявилося, що нееквівалентних є 89. Твердження доведено.

Беручи до уваги вищенаведене, доведено наступне

Твердження 2.14 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд* 89 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від восьми функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.20), де* $J_1, J_2, ..., J_8$ *мають вигляд (2.21).*

Таким чином, вищенаведене в цьому підрозділі доводить ту частину Теореми 2.3, яка відноситься до підкласів рівнянь побудованих на основі восьмивимірних диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1, 4)$.

2.4.8 Підкласи рівнянь вигляду $\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_9)$

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_9), \tag{2.22}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_9\}$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1, 4)$.

Як видно з вищенаведеного, таких підкласів рівнянь буде стільки скільки є дев'ятивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.15 *З точністю до еквівалентності існує* 49 *дев'ятивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи* $P(1,4)$. *Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу* $R = 2$ *задаються формулами (2.23):*

$$
\begin{aligned}
&1.\ J_1 = x_3,\ J_2 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_4 = u,\\
&\quad J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1,\ J_6 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_7 = u_3,\\
&\quad J_8 = u_0^2 - u_4^2,\ J_9 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle G,\ L_3\rangle;\\
&2.\ J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_4 = u,\\
&\quad J_5 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_6 = \frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3,\ J_7 = u_1,\ J_8 = u_2,\\
&\quad J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle G,\ P_3\rangle;\\
&3.\ J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\\
&\quad J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1,\ J_6 = \frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3,\ J_7 = \ln(x_0 + x_4) +\\
&\quad + e \arctan \frac{x_1}{x_2}, J_8 = u_1^2 + u_2^2, J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 : \langle L_3 + eG,\ P_3,\ e > 0\rangle;\\
&4.\ J_1 = x_2,\ J_2 = x_3,\ J_3 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_4 = u,\ J_5 = (x_0 + x_4)\times\\
&\quad \times (u_0 + u_4),\ J_6 = u_1,\ J_7 = u_2,\ J_8 = u_3,\ J_9 = u_0^2 - u_4^2 :\ \langle G,\ X_1\rangle;\\
&5.\ J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = x_3,\ J_4 = u,\ J_5 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\\
&\quad J_6 = u_1,\ J_7 = u_2,\ J_8 = u_3,\ J_9 = u_0^2 - u_4^2 :\ \langle G,\ X_4\rangle;\\
&6.\ J_1 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = \ln(x_0 + x_4) + e \arctan \frac{x_1}{x_2},\\
&\quad J_4 = u,\ J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1,\ J_6 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_7 = u_3,\\
&\quad J_8 = u_0^2 - u_4^2,\ J_9 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3 + eG,\ X_3,\ e > 0\rangle;\\
&7.\ J_1 = x_3,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = \ln(x_0 + x_4) + e \arctan \frac{x_1}{x_2},\ J_4 = u,
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

$J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_6 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_7 = u_3,\ J_8 = u_0^2 - u_4^2,$

$J_9 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle L_3 + eG,\ X_4,\ e > 0\rangle;$

8. $J_1 = x_0, J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, J_3 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, J_4 = u, J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,$

$J_6 = x_3u_4 - x_4u_3, J_7 = u_0, J_8 = u_1^2 + u_2^2, J_9 = u_3^2 + u_4^2 : \langle P_3 + C_3, L_3\rangle;$

9. $J_1 = x_1x_4 - x_2x_3,\ J_2 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_4 = u,$

$J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_6 = x_3u_4 - x_4u_3,\ J_7 = u_0,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2,$

$J_9 = u_3^2 + u_4^2 :\ \langle P_3 + C_3 + 2L_3,\ X_0 + X_4\rangle;$

10. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ J_3 = 2\arctan\dfrac{x_1}{x_2} - e\arctan\dfrac{x_3}{x_4},$

$J_4 = u,\ J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_6 = x_3u_4 - x_4u_3,\ J_7 = u_0,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2,$

$J_9 = u_3^2 + u_4^2 :\ \langle P_3 + C_3 + eL_3,\ X_0 + X_4,\ e > 2\rangle;$

11. $J_1 = x_3 - a\ln(x_0 + x_4),\ J_2 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$

$J_4 = u,\ J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_6 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_7 = u_3,$

$J_8 = u_0^2 - u_4^2,\ J_9 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle G + aX_3,\ L_3,\ a < 0\rangle;$

12. $J_1 = x_3 + d\arctan\dfrac{x_1}{x_2},\ J_2 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_4 = u,$

$J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_6 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_7 = u_3,\ J_8 = u_0^2 - u_4^2,$

$J_9 = u_1^2 + u_2^2 :\ \langle G,\ L_3 + dX_3,\ d < 0\rangle;$

13. $J_1 = x_1 - a\ln(x_0 + x_4),\ J_2 = x_2,\ J_3 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_4 = u,$

$J_5 = \dfrac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\ J_6 = \dfrac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}x_3 + u_3,\ J_7 = u_1,\ J_8 = u_2,\ J_9 = u_0^2-$

$- u_3^2 - u_4^2 :\ \langle G + aX_1,\ P_3,\ a < 0\rangle;$

14. $J_1 = x_3,\ J_2 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),$

$J_5 = x_2 + a_2\ln(u_0 + u_4),\ J_6 = u_1,\ J_7 = u_2,\ J_8 = u_3,\ J_9 = u_0^2 - u_4^2 :$

$\langle G + a_2X_2,\ X_1,\ a_2 < 0\rangle;$

15. $J_1 = x_1 - c\ln(x_0 + x_4),\ J_2 = x_2,\ J_3 = x_3,\ J_4 = u,\ J_5 = (x_0 + x_4)\times$

$\times (u_0 + u_4),\ J_6 = u_1,\ J_7 = u_2,\ J_8 = u_3,\ J_9 = u_0^2 - u_4^2 :$

$\langle G + cX_1,\ X_4,\ c < 0\rangle;$

16. $J_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2=\ln(x_0+x_4)+e\arctan\dfrac{x_1}{x_2},\ J_3=u,$

$J_4=x_1u_2-x_2u_1,\ J_5=(x_0+x_4)(u_0+u_4),\ J_6=\kappa_3\ln(u_0+u_4)+$

$+ex_3,\ J_7=u_3,\ J_8=u_0^2-u_4^2,\ J_9=u_1^2+u_2^2:\ \langle L_3+eG+\kappa_3X_3,$

$X_4,\ e>0,\ \kappa_3<0\rangle;$

17. $J_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2=(x_3^2+x_4^2)^{1/2},\ J_3=x_0+d\arctan\dfrac{x_2}{x_1},\ J_4=u,$

$J_5=x_1u_2-x_2u_1,\ J_6=x_3u_4-x_4u_3,\ J_7=u_0,\ J_8=u_1^2+u_2^2,$

$J_9=u_3^2+u_4^2:\ \langle P_3+C_3,\ L_3+d(X_0+X_4),\ d<0\rangle;$

18. $J_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2=(x_3^2+x_4^2)^{1/2},\ J_3=2x_0-2\alpha\arctan\dfrac{x_1}{x_2}+$

$+\beta\arctan\dfrac{x_4}{x_3},\ J_4=u,\ J_5=x_1u_2-x_2u_1,\ J_6=x_3u_4-x_4u_3,$

$J_7=u_0,\ J_8=u_1^2+u_2^2,\ J_9=u_3^2+u_4^2:\ \langle L_3+\alpha(X_0+X_4),$

$P_3+C_3+\beta(X_0+X_4),\ \alpha<0,\ \beta<0\rangle;$

19. $J_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_2=(x_0^2-x_4^2)^{1/2},\ J_3=u,\ J_4=\dfrac{x_0-x_4}{u_0+u_4},$

$J_5=x_1u_1+x_2u_2,\ J_6=\beta\arctan\dfrac{u_1}{u_2}+x_3-\alpha\ln(x_0+x_4),\ J_7=u_3,$

$J_8=u_0^2-u_4^2,\ J_9=u_1^2+u_2^2:\ \langle G+\alpha X_3,\ L_3+\beta X_3,\ \alpha<0,\ \beta<0\rangle.$

Зазначимо, що наведені нижче неспряжені підалгебри належать до алгебри Лі групи $\widetilde{G}(1,3)$:

20. $J_1=x_3,\ J_2=x_0+x_4,\ J_3=(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_4^2)^{1/2},\ J_4=u,$

$J_5=u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4),\ J_6=u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4),$

$J_7=u_3,\ J_8=u_0-u_4,\ J_9=u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2:\ \langle P_1,\ P_2\rangle;$

21. $J_1=x_0+x_4,\ J_2=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_3=(x_0^2-x_3^2-x_4^2)^{1/2},\ J_4=u,$

$J_5=x_1u_2-x_2u_1,\ J_6=(x_0+x_4)u_3+(u_0-u_4)x_3,\ J_7=u_0-u_4,$

$J_8=u_1^2+u_2^2,\ J_9=u_0^2-u_3^2-u_4^2:\ \langle L_3,\ P_3\rangle;$

22. $J_1=x_2,\ J_2=x_0+x_4,\ J_3=(x_0^2-x_3^2-x_4^2)^{1/2},\ J_4=u,$

$J_5=(x_0+x_4)u_3+(u_0-u_4)x_3,\ J_6=u_1,\ J_7=u_2,\ J_8=u_0-u_4,$

$J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2: \ \langle P_3, \ X_1\rangle;$

23. $J_1 = x_0 + x_4, J_2 = x_1, J_3 = x_2, J_4 = u, \ J_5 = (x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3,$

$J_6 = u_1, \ J_7 = u_2, \ J_8 = u_0 - u_4, \ J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2: \ \langle P_3, \ X_4\rangle;$

24. $J_1 = x_0 + x_4, \ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_3 = \arctan\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_3}{x_0 + x_4},$

$J_4 = u, \ J_5 = x_1u_2 - x_2u_1, \ J_6 = \dfrac{x_3}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4}, \ J_7 = u_0 - u_4,$

$J_8 = u_1^2 + u_2^2, \ J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2: \ \langle L_3 - P_3, \ X_4\rangle;$

25. $J_1 = x_3, \ J_2 = x_0 + x_4, \ J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_4 = u, \ J_5 = x_1u_2-$

$- x_2u_1, \ J_6 = u_0, \ J_7 = u_3, \ J_8 = u_4, \ J_9 = u_1^2 + u_2^2: \ \langle L_3, \ X_4\rangle;$

26. $J_1 = x_3, \ J_2 = x_4, \ J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_4 = u, \ J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,$

$J_6 = u_0, \ J_7 = u_3, \ J_8 = u_4, \ J_9 = u_1^2 + u_2^2: \ \langle L_3, \ X_0 + X_4\rangle;$

27. $J_1 = x_0, \ J_2 = x_3, \ J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_4 = u, \ J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,$

$J_6 = u_0, \ J_7 = u_3, \ J_8 = u_4, \ J_9 = u_1^2 + u_2^2: \ \langle L_3, \ X_0 - X_4\rangle;$

28. $J_1 = x_1, \ J_2 = x_2, \ J_3 = x_3, \ J_4 = u, \ J_5 = u_0, \ J_6 = u_1, \ J_7 = u_2,$

$J_8 = u_3, \ J_9 = u_4: \ \langle X_0 + X_4, \ X_0 - X_4\rangle;$

29. $J_1 = x_0 + x_4, \ J_2 = x_2, \ J_3 = x_3, \ J_4 = u, \ J_5 = u_0, \ J_6 = u_1, \ J_7 = u_2,$

$J_8 = u_3, \ J_9 = u_4: \ \langle X_1, \ X_4\rangle;$

30. $J_1 = x_0, \ J_2 = x_2, \ J_3 = x_3, \ J_4 = u, \ J_5 = u_0, \ J_6 = u_1, \ J_7 = u_2,$

$J_8 = u_3, \ J_9 = u_4: \ \langle X_1, \ X_0 - X_4\rangle;$

31. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_2 = (x_0 + x_4)^2 - 2hx_3, \ J_3 = 2(x_0 + x_4)^3-$

$- 3h(2x_3 - h)(x_0 + x_4) + 3h^2 \arctan\dfrac{x_1}{x_2} - 6h^2x_4, \ J_4 = u,$

$J_5 = x_1u_2 - x_2u_1, \ J_6 = (x_0 + x_4) + \dfrac{hu_3}{u_0 - u_4}, \ J_7 = u_0 - u_4,$

$J_8 = u_1^2 + u_2^2, \ J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2: \ \langle L_3 - X_4, \ P_3 + hX_0, \ h > 0\rangle;$

32. $J_1 = x_0 + x_4, \ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_3 = \dfrac{x_3^2}{x_0 + x_4} - \arctan\dfrac{x_1}{x_2} + 2x_4,$

$J_4 = u, \ J_5 = x_1u_2 - x_2u_1, \ J_6 = (x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3,$

$J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2,\ J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle L_3 - X_4,\ P_3\rangle;$

33. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = (x_0 + x_4)^2 - 2x_3,\ J_3 = 2(x_0 + x_4)^3 -$
$- 6x_3(x_0 + x_4) + 3(x_0 - x_4),\ J_4 = u,\ J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,$
$J_6 = x_0 + x_4 + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2,$
$J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle L_3,\ P_3 + X_0\rangle;$

34. $J_1 = x_2,\ J_2 = (x_0 + x_4)^2 - 2x_3,\ J_3 = 2(x_0 + x_4)^3 - 6x_3(x_0 + x_4) +$
$+ 3(x_0 - x_4),\ J_4 = u,\ J_5 = (x_0 + x_4)(u_0 - u_4) + u_3,\ J_6 = u_0 - u_4,$
$J_7 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,\ J_8 = u_1,\ J_9 = u_2:\ \langle P_3 + X_0,\ X_1\rangle;$

35. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = \dfrac{x_3}{x_0 + x_4} + x_2,\ J_3 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_4 = u,$
$J_5 = (x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3,\ J_6 = u_1,\ J_7 = u_2,\ J_8 = u_0 - u_4,$
$J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle P_3 + X_2,\ X_1\rangle;$

36. $J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = (x_0 + x_4)^2 - 2x_3,\ J_4 = u,\ J_5 = u_3 +$
$+ (x_0 + x_4)(u_0 - u_4),\ J_6 = u_1,\ J_7 = u_2,\ J_8 = u_0 - u_4,\ J_9 = u_0^2 -$
$- u_3^2 - u_4^2:\ \langle P_3 + X_0,\ X_4\rangle;$

37. $J_1 = x_2, J_2 = x_0 + x_4, J_3 = x_3 + x_1(x_0 + x_4), J_4 = u, J_5 = \dfrac{x_3}{x_0 + x_4} +$
$+ \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_6 = u_1,\ J_7 = u_2,\ J_8 = u_0 - u_4,\ J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:$
$\langle P_3 + X_1,\ X_4\rangle;$

38. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = (x_0 + x_4)^2 + 2\alpha_0 x_3,\ J_3 = \alpha_0 \arctan\dfrac{x_1}{x_2} -$
$- x_0 - x_4,\ J_4 = u,\ J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_6 = (x_0 + x_4)(u_0 - u_4) -$
$- \alpha_0 u_3,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_1^2 + u_2^2,\ J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:$
$\langle L_3 - P_3 + \alpha_0 X_0,\ X_4,\ \alpha_0 < 0\rangle;$

39. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,$
$J_5 = \arctan\dfrac{u_1}{u_2} + x_0 - x_4,\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_3,\ J_8 = u_4,\ J_9 = u_1^2 + u_2^2:$
$\langle L_3 - X_4,\ X_3\rangle;$

40. $J_1 = x_4,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_5 = x_3 +$
$+ d_3 \arctan \dfrac{u_1}{u_2},\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_3,\ J_8 = u_4,\ J_9 = u_1^2 + u_2^2 :$
$\langle L_3 + d_3X_3,\ X_0 + X_4,\ d_3 < 0\rangle;$

41. $J_1 = x_0,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = u,\ J_4 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_5 = x_3 +$
$+ d_3 \arctan \dfrac{x_1}{x_2},\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_3,\ J_8 = u_4,\ J_9 = u_1^2 + u_2^2 :$
$\langle L_3 + d_3X_3,\ X_0 - X_4,\ d_3 < 0\rangle;$

42. $J_1 = x_3,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = d_4 \arctan \dfrac{x_1}{x_2} - 2x_0,\ J_4 = u,$
$J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_3,\ J_8 = u_4,\ J_9 = u_1^2 + u_2^2 :$
$\langle L_3 + d_4X_4,\ X_0 - X_4,\ d_4 < 0\rangle;$

43. $J_1 = x_3,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = \alpha \arctan \dfrac{x_1}{x_2} - x_0 - x_4,\ J_4 = u,$
$J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_3,\ J_8 = u_4,\ J_9 = u_1^2 + u_2^2 :$
$\langle L_3 + \alpha(X_0 + X_4),\ X_4,\ \alpha < 0\rangle;$

44. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_3 = a_3 \arctan \dfrac{u_1}{u_2} + x_3,\ J_4 = u,$
$J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_3,\ J_8 = u_4,\ J_9 = u_1^2 + u_2^2 :$
$\langle L_3 + a_3X_3,\ X_4,\ a_3 < 0\rangle;$

45. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = x_3 + \dfrac{x_1}{x_0 + x_4},\ J_3 = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},$
$J_4 = u,\ J_5 = u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4),\ J_6 = u_2(x_0 + x_4) +$
$+ x_2(u_0 - u_4),\ J_7 = u_3,\ J_8 = u_0 - u_4,\ J_9 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :$
$\langle P_1 + X_3,\ P_2\rangle;$

46. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4 - \gamma} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_3 = \beta \dfrac{x_2}{x_0 + x_4 - \gamma} +$
$+ \dfrac{x_1}{x_0 + x_4} + x_3,\ J_4 = \dfrac{x_1^2}{x_0 + x_4} + \dfrac{x_2^2}{x_0 + x_4 - \gamma} + 2x_4,\ J_5 = u,$
$J_6 = u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4),\ J_7 = u_3,\ J_8 = u_0 - u_4,\ J_9 = u_0^2 -$
$- u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1 + X_3,\ P_2 + \gamma X_2 + \beta X_3,\ \gamma > 0,\ \beta > 0\rangle;$

47. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = x_1 + x_3(x_0 + x_4),\ J_3 = \dfrac{x_1^2}{x_0 + x_4} + \dfrac{x_2^2}{x_0 + x_4 - \gamma} +$
$+ 2x_4,\ J_4 = u,\ J_5 = \dfrac{x_1}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_1}{u_0 - u_4},\ J_6 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4 - \gamma} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},$
$J_7 = u_3,\ J_8 = u_0 - u_4,\ J_9 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1 + X_3,\ P_2 + \gamma X_2,$
$\gamma > 0\rangle;$

48. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = x_3 + \beta \dfrac{x_2}{x_0 + x_4 - 1},\ J_3 = \dfrac{x_1^2}{x_0 + x_4} + \dfrac{x_2^2}{x_0 + x_4 - 1} +$
$+ 2x_4,\ J_4 = u,\ J_5 = u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4),\ J_6 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4 - 1} +$
$+ \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_7 = u_3,\ J_8 = u_0 - u_4,\ J_9 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :$
$\langle P_1,\ P_2 + X_2 + \beta X_3,\ \beta > 0\rangle;$

49. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = \dfrac{x_1^2}{x_0 + x_4} + \dfrac{x_2^2}{x_0 + x_4 - 1} + 2x_4,\ J_4 = u,$
$J_5 = \dfrac{x_1}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_1}{u_0 - u_4},\ J_6 = \dfrac{x_2}{x_0 + x_4 - 1} + \dfrac{u_2}{u_0 - u_4},\ J_7 = u_3,$
$J_8 = u_0 - u_4,\ J_9 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2 :\ \langle P_1,\ P_2 + X_2\rangle.$

Доведення. Для цього скористаємося Теоремою 2.1. З теореми 2.1 випливає, що всі неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ в один раз продовженому просторі матимуть $t = 11 - R$ – вимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку.

Таким чином, дев'ятивимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку матимуть неспряжені підалгебри для яких $R = 2$.

В результаті безпосередніх обчислень загальних рангів відповідних матриць M виявилося, що 49 неспряжених підалгебр мають $R = 2$. Це означає, що існує 49 дев'ятивимірних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку.

Після побудови цих функціональних базисів в явному вигляді і застосування до них критерію еквівалентності (теорема 2.2) виявилося, що нееквівалентних є 49. Твердження доведено.

Беручи до уваги вищенаведене, доведено наступне

Твердження 2.16 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд* 49 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від дев'яти функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.22), де* $J_1, J_2, ..., J_9$ *мають вигляд (2.23).*

Таким чином, вищенаведене в цьому підрозділі доводить ту частину Теореми 2.3, яка відноситься до підкласів рівнянь побудованих на основі дев'ятивимірних диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

2.4.9 Підкласи рівнянь вигляду $\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_{10})$

Розглянемо підкласи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_{10}), \tag{2.24}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_{10}\}$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Як видно з вищенаведеного, таких підкласів рівнянь буде стільки, скільки є десятивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Твердження 2.17 *З точністю до еквівалентності існує* 20 *десятивимірних нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи* $P(1,4)$. *Ці базиси і відповідні їм неспряжені підалгебри рангу* $R = 1$ *задаються формулами (2.25):*

1. $J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = x_3,\ J_4 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_5 = u,$

   $J_6 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\ J_7 = u_1,\ J_8 = u_2,\ J_9 = u_3,$

$J_{10} = u_0^2 - u_4^2: \ \langle G \rangle;$

2. $J_1 = x_3, \ J_2 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, \ J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_4 = u,$

$J_5 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4), \ J_6 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \ J_7 = \ln(x_0 + x_4) +$

$+ e \arctan \frac{x_1}{x_2}, \ J_8 = u_3, \ J_9 = u_0^2 - u_4^2, \ J_{10} = u_1^2 + u_2^2:$

$$\langle L_3 + eG, \ e > 0 \rangle; \tag{2.25}$$

3. $J_1 = x_0, \ J_2 = x_1 x_4 - x_2 x_3, \ J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_4 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},$

$J_5 = u, \ J_6 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \ J_7 = x_3 u_4 - x_4 u_3, \ J_8 = u_0,$

$J_9 = u_1^2 + u_2^2, \ J_{10} = u_3^2 + u_4^2: \ \langle P_3 + C_3 + 2L_3 \rangle;$

4. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_2 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, \ J_3 = x_0, \ J_4 = u,$

$J_5 = 2 \arctan \frac{x_1}{x_2} - e \arctan \frac{x_3}{x_4}, \ J_6 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \ J_7 = x_3 u_4 - x_4 u_3,$

$J_8 = u_0, \ J_9 = u_1^2 + u_2^2, \ J_{10} = u_3^2 + u_4^2: \ \langle P_3 + C_3 + eL_3, \ e > 2 \rangle;$

5. $J_1 = x_1 - c \ln(x_0 + x_4), \ J_2 = x_2, \ J_3 = x_3, \ J_4 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},$

$J_5 = u, \ J_6 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4), \ J_7 = u_1, \ J_8 = u_2, \ J_9 = u_3,$

$J_{10} = u_0^2 - u_4^2: \ \langle G + cX_1, \ c < 0 \rangle;$

6. $J_1 = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, \ J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_3 = \kappa_3 \ln(x_0 + x_4) - e x_3,$

$J_4 = u, \ J_5 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4), \ J_6 = x_1 u_2 - x_2 u_1,$

$J_7 = \ln(x_0 + x_4) + e \arctan \frac{x_1}{x_2}, \ J_8 = u_3, \ J_9 = u_0^2 - u_4^2, \ J_{10} = u_1^2 + u_2^2:$

$\langle L_3 + eG + \kappa_3 X_3, \ e > 0, \ \kappa_3 < 0 \rangle;$

7. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_2 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, \ J_3 = e x_0 - \alpha \arctan \frac{x_1}{x_2}, \ J_4 = u,$

$J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \ J_6 = x_3 u_4 - x_4 u_3, \ J_7 = 2x_0 + \alpha \arctan \frac{u_4}{u_3}, \ J_8 = u_0,$

$J_9 = u_1^2 + u_2^2, \ J_{10} = u_3^2 + u_4^2: \ \langle P_3 + C_3 + eL_3 + \alpha(X_0 + X_4),$

$e > 2, \alpha < 0 \rangle;$

8. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ J_2 = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, \ J_3 = 2x_0 - \alpha \arctan \frac{x_1}{x_2}, \ J_4 = u,$

$J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \ J_6 = x_3 u_4 - x_4 u_3, \ J_7 = 2x_0 + \alpha \arctan \frac{u_4}{u_3}, \ J_8 = u_0,$

$J_9 = u_1^2 + u_2^2,\ J_{10} = u_3^2 + u_4^2:\ \langle P_3 + C_3 + 2L_3 + \alpha(X_0 + X_4), \alpha < 0\rangle.$

Зазначимо, що наведені нижче неспряжені підалгебри належать до алгебри Лі групи $\widetilde{G}(1,3)$:

9. $J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = x_0 + x_4,\ J_4 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_5 = u,$
$J_6 = (x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3,\ J_7 = u_0 - u_4,\ J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,$
$J_9 = u_1,\ J_{10} = u_2:\ \langle P_3\rangle;$

10. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_4 = u,$
$J_5 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_6 = \dfrac{x_3}{x_0 + x_4} + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},\ J_7 = \arctan\dfrac{x_1}{x_2} +$
$+ \dfrac{x_3}{x_0 + x_4}, J_8 = u_0 - u_4, J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2, J_{10} = u_1^2 + u_2^2 : \langle L_3 - P_3\rangle;$

11. $J_1 = x_0,\ J_2 = x_3,\ J_3 = x_4,\ J_4 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_5 = u,\ J_6 = x_1u_2 -$
$- x_2u_1,\ J_7 = u_0,\ J_8 = u_3,\ J_9 = u_4,\ J_{10} = u_1^2 + u_2^2:\ \langle L_3\rangle;$

12. $J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = x_3,\ J_4 = x_4,\ J_5 = u,\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_1,$
$J_8 = u_2,\ J_9 = u_3,\ J_{10} = u_4:\ \langle X_0 + X_4\rangle;$

13. $J_1 = x_0,\ J_2 = x_1,\ J_3 = x_2,\ J_4 = x_3,\ J_5 = u,\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_1,$
$J_8 = u_2,\ J_9 = u_3,\ J_{10} = u_4:\ \langle X_0 - X_4\rangle;$

14. $J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = x_3,\ J_4 = x_0 + x_4,\ J_5 = u,\ J_6 = u_0,\ J_7 = u_1,$
$J_8 = u_2,\ J_9 = u_3,\ J_{10} = u_4:\ \langle X_4\rangle;$

15. $J_1 = x_1,\ J_2 = x_2,\ J_3 = (x_0 + x_4)^2 - 2x_3,\ J_4 = 2(x_0 + x_4)^3 -$
$- 6x_3(x_0 + x_4) + 3(x_0 - x_4),\ J_5 = u,\ J_6 = x_0 + x_4 + \dfrac{u_3}{u_0 - u_4},$
$J_7 = u_1,\ J_8 = u_2,\ J_9 = u_0 - u_4,\ J_{10} = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle P_3 + X_0\rangle;$

16. $J_1 = x_2,\ J_2 = x_0 + x_4,\ J_3 = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ J_4 = x_1 + \dfrac{x_3}{x_0 + x_4},$
$J_5 = u,\ J_6 = (x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3,\ J_7 = u_1,\ J_8 = u_2,$
$J_9 = u_0 - u_4,\ J_{10} = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2:\ \langle P_3 + X_1\rangle;$

17. $J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ J_2 = (x_0 + x_4)^2 + 2\alpha_0 x_3,\ J_3 = \alpha_0 \arctan\dfrac{x_1}{x_2} -$

$$-x_0 - x_4,\ J_4 = 2(x_0+x_4)^3 + 6\alpha_0 x_3(x_0+x_4) + 3\alpha_0^2(x_0-x_4),$$

$$J_5 = u,\ J_6 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_7 = x_0 + x_4 - \alpha_0\frac{u_3}{u_0-u_4},\ J_8 = u_0 - u_4,$$

$$J_9 = u_1^2 + u_2^2,\ J_{10} = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 :\ \langle L_3 - P_3 + \alpha_0 X_0,\ \alpha_0 < 0\rangle;$$

18. $J_1 = x_3,\ J_2 = x_4,\ J_3 = (x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_4 = \tilde{d}\arctan\dfrac{x_1}{x_2} - x_0,\ J_5 = u,$

$J_6 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_7 = u_0,\ J_8 = u_3,\ J_9 = u_4,\ J_{10} = u_1^2 + u_2^2 :$

$\langle L_3 + \tilde{d}(X_0 + X_4),\ \tilde{d} < 0\rangle;$

19. $J_1 = x_0,\ J_2 = x_4,\ J_3 = (x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_4 = \alpha\arctan\dfrac{x_1}{x_2} + x_3,\ J_5 = u,$

$J_6 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_7 = u_0,\ J_8 = u_3,\ J_9 = u_4,\ J_{10} = u_1^2 + u_2^2 :$

$\langle L_3 + \alpha X_3,\ \alpha < 0\rangle;$

20. $J_1 = x_0 + x_4,\ J_2 = x_3,\ J_3 = (x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ J_4 = \arctan\dfrac{x_1}{x_2} + x_0 - x_4,$

$J_5 = u,\ J_6 = x_1u_2 - x_2u_1,\ J_7 = u_0,\ J_8 = u_3,\ J_9 = u_4,\ J_{10} = u_1^2 + u_2^2 :$

$\langle L_3 - X_4\rangle.$

Доведення. Для цього скористаємося Теоремою 2.1. З теореми 2.1 випливає, що всі неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ в один раз продовженому просторі матимуть $t = 11 - R$ – вимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку.

Таким чином, десятивимірні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку матимуть неспряжені підалгебри для яких $R = 1$.

В результаті безпосередніх обчислень загальних рангів відповідних матриць M виявилося, що 20 неспряжених підалгебр мають $R = 1$. Це означає, що існує 20 десятивимірних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку.

Після побудови цих функціональних базисів в явному вигляді і застосування до них критерію еквівалентності (теорема 2.2) виявилося, що нееквівалентних є 20.

Твердження доведено.

Беручи до уваги вищенаведене, доведено наступне

Твердження 2.18 *З точністю до еквівалентності загальний вигляд* 20 *підкласів рівняннь виду (2.6), що права частина залежить від десяти функціонально незалежних інваріантів, задається формулою (2.24), де* $J_1, J_2, ..., J_{10}$ *мають вигляд (2.25).*

Таким чином, вищенаведене в цьому підрозділі доводить ту частину Теореми 2.3, яка відноситься до підкласів рівнянь побудованих на основі десятивимірних диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Таким чином, Теорема 2.3. доведена.

Зауваження. При проведенні групової класифікації класу нелійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера 2.5 використано тільки підгрупу (група $P(1,4)$) групи еквівалентності цього класу. В літературі таку класифікацію часто називають "часткова попередня".

2.5 Висновки до розділу 2

1. Побудовано в явному вигляді нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку для всіх неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

2. Сформульовано і доведено критерій еквівалентності функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

3. Проведено групову класифікацію певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера вигляду (2.5).

4. Серед побудованих $P(1,4)$-нееквівалентних підкласів диференціальних рівнянь 252 є інваріантними відносно неспряжених підгруп розширеної групи Галілея $\widetilde{G}(1,3) \subset P(1,4)$.

Розділ 3
СИМЕТРІЙНА РЕДУКЦІЯ І КЛАСИ ІНВАРІАНТНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ $P(1,4)$-ІНВАРІАНТНИХ П'ЯТИВИМІРНИХ РІВНЯНЬ Д'АЛАМБЕРА

Цей розділ присвячено симетрійній редукції та побудові класів інваріантних розв'язків деяких $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера. В підрозділі 3.1 коротко описано симетрійну редукцію деяких $P(1,4)$-нееквівалентних підкласів п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера. В підрозділі 3.2 проведено симетрійну редукцію та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків лінійного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера. Підрозділ 3.3 присвячений симетрійній редукції та побудові деяких класів інваріантних розв'язків п'ятивимірного рівняння sin-Гордона. У підрозділі 3.4 проведено симетрійну редукцію та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків п'ятивимірного рівняння Ліувілля. Підрозділ 3.5 присвячений симетрійній редукції та побудові деяких класів інваріантних розв'язків п'ятивимірного рівняння $sinh$-Гордона.

Основні результати цього розділу опубліковані в [98].

3.1 Про симетрійну редукцію деяких $P(1,4)$-нееквівалентних підкласів п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера

В другому розділі дисертаційної роботи розглянуто групову класифікацію класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера вигляду (2.5):

$$\Box_5 u = F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4).$$

В результаті цього побудовано $P(1,4)$-нееквівалентні підкласи п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера. Ці підкласи можна записати у вигляді (2.6):

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, ..., J_{t_1}),$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, ..., J_{t_1}\}(t_1 = 2, 3, ..., 10)$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Ці базиси містять як інваріанти які не залежать від похідних u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, так і інваріанти які залежать від цих похідних.

Ті інваріанти, які не залежать від похідних (якщо число їх не менше двох) можна використати для побудови анзаців (підстановок), які редукують побудовані $P(1,4)$-нееквівалентні підкласи рівнянь до підкласів диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Якщо проглянути функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку, які наведені у Розділі 2, то виявилося, що 141 з них містить тільки один інваріант який не залежить від вищезгаданих похідних. Тому для тих підкласів диференціальних рівнянь, які побудовані з використанням цих базисів анзаци не будувалися і симетрійна редукція не проводилася. Для $P(1,4)$-нееквівалентних підкласів рівнянь, які побудовані за допомогою функціональних базисів диференціальних інваріантів неспряжених підгруп групи $P(1,4)$ (які містять два і більше інваріантів, що не залежать від похідних u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)) побудовано анзаци та проведено відповідну симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити за допомогою класичного методу Лі). За браком місця отримані результати не наведено.

В частинному випадку, коли $F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4) = F(u)$, отримані результати по симетрійній редукції деяких $P(1,4)$-нееквівалентних підкласів рівнянь (2.6) частково покриваються з результатами отриманими в працях [145–149].

Нижче наведено тільки деякі результати, які стосуються симетрійної редукції та класів інваріантних розв'язків для п'ятивимірних узагальнень рівнянь, що широко використовуються при розв'язуванні різних задач диференціальної геометрії, теорії нелінійних хвиль, теоретичної і математичної фізики.

3.2 Лінійне п'ятивимірне рівняння Д'Аламбера

Лінійні та нелінійні рівняння Д'Аламбера в просторах різних вимірностей використовуються при побудові та вивченні моделей теорії поля.

Багато різних застосувань рівняння Д'Аламбера в п'ятивимірній теорії поля можна знайти в монографії [150]. В п'ятивимірному просторі Мінковського $M(1,4)$ лінійні рівняння Д'Аламбера виникають в теорії поля з фундаментальною довжиною [86].

Розглянемо рівняння

$$\Box_5 u = \lambda u, \ \lambda \in R. \tag{3.1}$$

У цьому підрозділі проведено симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків рівняння (3.1).

3.2.1 Випадок $\lambda \neq 0$

Розглянемо анзаци вигляду:

$$u(x) = \varphi(\omega), \tag{3.2}$$

де $\omega(x)$ – деякі одновимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$. Ці анзаци редукують рівняння (3.1) до ЗДР вигляду:

$$k\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = \lambda\varphi, \tag{3.3}$$

де нові змінні ω і відповідні їм k виписані нижче:

$$\omega = x_0, \ k = 1; \qquad \omega = x_2, \ k = -1;$$

$$\omega = x_3, \ k = -1; \quad \omega = x_4, \ k = -1;$$

$$\omega = x_2 - a\ln(x_0 + x_4), \ k = -1; \tag{3.4}$$

$$\omega = x_3 - a\ln(x_0 + x_4),\ k = -1;$$

$$\omega = 2x_2 - (x_0 + x_4)^2,\ k = -4;$$

$$\omega = (x_0 + x_4)^2 + 2\alpha_0 x_3,\ k = -4\alpha_0^2;$$

$$\omega = \mu((x_0 + x_4)^2 - 2x_1) + 2x_3,\ k = -4(\mu^2 + 1);$$

$$\omega = 2(\delta x_2 - \gamma x_3) - \delta(x_0 + x_4)^2,\ k = -4(\delta^2 + \gamma^2).$$

Розв'язок редукованого рівняння (3.3) має наступний вигляд:

$$\varphi(\omega) = c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\omega\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\omega\right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного лінійного рівняння Д'Аламбера (3.1) є наступним:

$$u(x) = c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\omega\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\omega\right),$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі; відповідні ω і k виписані в формулах (3.4).

Для інваріантів

$$\begin{aligned} &\omega = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ \varepsilon = 1;\\ &\omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ \varepsilon = -1;\\ &\omega = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ \varepsilon = -1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

анзац (3.2) редукує рівняння (3.1) до ЗДР

$$\varepsilon\left(\varphi'' + \frac{\varphi'}{\omega}\right) = \lambda\varphi, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Розв'язок редукованого рівняння має вигляд:

$$\varphi(\omega) = c_1 J_0\left(\sqrt{-\lambda\varepsilon}\omega\right) + c_2 Y_0\left(\sqrt{-\lambda\varepsilon}\omega\right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного лінійного рівняння Д'Аламбера (3.1) є наступним:

$$u(x) = c_1 J_0\left(\sqrt{-\lambda\varepsilon}\omega\right) + c_2 Y_0\left(\sqrt{-\lambda\varepsilon}\omega\right),$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі; J, Y – функції Бесселя першого і другого порядків відповідно; відповідні ω і ε виписані в формулах (3.5).

Для інваріантів

$$\begin{aligned} \omega &= (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\ \varepsilon = 1; \\ \omega &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},\ \varepsilon = -1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

анзац (3.2) редукує рівняння (3.1) до ЗДР вигляду:

$$\varepsilon \left(\varphi'' + \frac{2}{\omega} \varphi' \right) = \lambda \varphi, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Розв'язок редукованого рівняння має наступний вигляд:

$$\varphi(\omega) = \frac{c_1}{\omega} \sinh \left(\sqrt{\lambda \varepsilon} \omega \right) + \frac{c_2}{\omega} \cosh \left(\sqrt{\lambda \varepsilon} \omega \right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного лінійного рівняння Д'Аламбера (3.1) є наступним:

$$u(x) = \frac{c_1}{\omega} \sinh \left(\sqrt{\lambda \varepsilon} \omega \right) + \frac{c_2}{\omega} \cosh \left(\sqrt{\lambda \varepsilon} \omega \right),$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі; відповідні ω і ε виписані в формулах (3.6).

Для інваріантів

$$\begin{aligned} \omega &= (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\ \varepsilon = 1; \\ \omega &= (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{1/2},\ \varepsilon = 1; \\ \omega &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ \varepsilon = -1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

анзац (3.2) редукує рівняння (3.1) до ЗДР вигляду:

$$\varepsilon \left(\varphi'' + \frac{3}{\omega} \varphi' \right) = \lambda \varphi, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Розв'язок редукованого рівняння має наступний вигляд:

$$\varphi(\omega) = \frac{c_1}{\omega} J_1 \left(\sqrt{-\lambda \varepsilon} \omega \right) + \frac{c_2}{\omega} Y_1 \left(\sqrt{-\lambda \varepsilon} \omega \right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного лінійного рівняння Д'Аламбера (3.1) є наступним:

$$u(x) = \frac{c_1}{\omega} J_1 \left(\sqrt{-\lambda \varepsilon} \omega \right) + \frac{c_2}{\omega} Y_1 \left(\sqrt{-\lambda \varepsilon} \omega \right),$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі; J, Y – функції Бесселя першого і другого порядків відповідно; відповідні ω і ε виписані в формулах (3.7).

Для інваріанта

$$\omega = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2} \tag{3.8}$$

анзац (3.2) редукує рівняння (3.1) до ЗДР вигляду:

$$\varphi'' + \frac{4}{\omega}\varphi' = \lambda\varphi.$$

Розв'язок цього редукованого рівняння:

$$\varphi(\omega) = \frac{c_1}{\omega^3}\exp\left(\sqrt{\lambda}\omega\right)\left(\sqrt{\lambda} - \lambda\omega\right) + \frac{c_2}{\omega^3}\exp\left(-\sqrt{\lambda}\omega\right)\left(\lambda\omega + \sqrt{\lambda}\right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного лінійного рівняння Д'Аламбера (3.1):

$$u(x) = \frac{c_1}{\omega^3}\exp\left(\sqrt{\lambda}\omega\right)\left(\sqrt{\lambda} - \lambda\omega\right) + \frac{c_2}{\omega^3}\exp\left(-\sqrt{\lambda}\omega\right)\left(\lambda\omega + \sqrt{\lambda}\right),$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі; ω виписане в формулі (3.8).

Розглянемо анзаци вигляду:

$$u(x) = \varphi(\omega_1, \omega_2), \tag{3.9}$$

де $\omega_1(x), \omega_2(x)$ – деякі двовимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

Для інваріантів

$$\omega_1 = x_2,\ \omega_2 = x_0 + x_4; \qquad \omega_1 = x_3,\ \omega_2 = x_0 + x_4 \tag{3.10}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.1) до диференціального рівняння

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2} = \lambda\varphi. \tag{3.11}$$

Розв'язок рівняння (3.11) має вигляд:

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = f_1(\omega_2)\sin(\sqrt{\lambda}\omega_1) + f_2(\omega_2)\cos(\sqrt{\lambda}\omega_1),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного лінійного рівняння Д'Аламбера (3.1) є наступним:

$$u(x) = f_1(\omega_2)\sin(\sqrt{\lambda}\omega_1) + f_2(\omega_2)\cos(\sqrt{\lambda}\omega_1),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; відповідні ω_1, ω_2 виписані в формулах (3.10).

Для інваріантів

$$\omega_1 = x_0 + x_4,\ \omega_2 = \frac{x_3}{x_0 + x_4} + x_2; \tag{3.12}$$

$$\omega_1 = x_0 + x_4,\ \omega_2 = x_3 + \frac{x_1}{x_0 + x_4}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.1) до рівняння вигляду

$$-\left(1 + \frac{1}{\omega_1^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_2^2} = \lambda \varphi.$$

Розв'язок цього редукованого рівняння:

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = f_1(\omega_1) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + 1}}\right) + f_2(\omega_1) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + 1}}\right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного лінійного рівняння Д'Аламбера (3.1):

$$u(x) = f_1(\omega_1) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + 1}}\right) + f_2(\omega_1) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + 1}}\right),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; відповідні ω_1, ω_2 виписані в формулі (3.12).

Для інваріантів

$$\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ \omega_2 = x_0 + x_4 \tag{3.13}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.1) до рівняння вигляду:

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_1^2} - \frac{1}{\omega_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_1} = \lambda \varphi.$$

Розв'язок цього редукованого рівняння:

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = f_1(\omega_2) J_0\left(\sqrt{\lambda}\omega_1\right) + f_2(\omega_2) Y_0\left(\sqrt{\lambda}\omega_1\right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного лінійного рівняння Д'Аламбера (3.1) є наступним:

$$u(x) = f_1(\omega_2) J_0\left(\sqrt{\lambda}\omega_1\right) + f_2(\omega_2) Y_0\left(\sqrt{\lambda}\omega_1\right),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; J, Y – функції Бесселя першого і другого порядків відповідно; відповідні ω_1, ω_2 виписані в (3.13).

Для інваріантів

$$\omega_1 = x_0 + x_4,\ \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \tag{3.14}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.1) до рівняння вигляду

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2} - \frac{2}{\omega_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} = \lambda\varphi.$$

Розв'язок редукованого рівняння має вигляд:

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \frac{f_1(\omega_1)}{\omega_2}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\omega_2\right) + \frac{f_2(\omega_1)}{\omega_2}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\omega_2\right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного лінійного рівняння Д'Аламбера (3.1) є наступним:

$$u(x) = \frac{f_1(\omega_1)}{\omega_2}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\omega_2\right) + \frac{f_2(\omega_1)}{\omega_2}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\omega_2\right),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; відповідні ω_1, ω_2 виписані в формулі (3.14).

3.2.2 Випадок $\lambda = 0$

В цьому підрозділі розглянемо рівняння вигляду:

$$\Box_5 u = 0. \tag{3.15}$$

Розглянемо анзаци вигляду (3.2):

$$u(x) = \varphi(\omega),$$

де $\omega(x)$ – деякі одновимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

Для інваріантів $\omega(x)$:

$$\begin{aligned}
&x_0,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_2 - a\ln(x_0+x_4),\quad x_3 - a\ln(x_0+x_4),\\
&2x_2 - (x_0+x_4)^2,\quad (x_0+x_4)^2 + 2\alpha_0 x_3, \qquad\qquad (3.16)\\
&\mu((x_0+x_4)^2 - 2x_1) + 2x_3,\quad 2(\delta x_2 - \gamma x_3) - \delta(x_0+x_4)^2
\end{aligned}$$

анзац (3.2) редукує рівняння (3.15) до звичайного диференціального рівняння (ЗДР) вигляду:

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = 0. \tag{3.17}$$

Розв'язок рівняння (3.17) має наступний вигляд:

$$\varphi(\omega) = c_1\omega + c_2,$$

а відповідний розв'язок однорідного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера (3.15):

$$u(x) = c_1\omega + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі; відповідні ω виписані в формулах (3.16).

Для інваріантів $\omega(x)$:

$$(x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad (x_3^2 + x_4^2)^{1/2} \tag{3.18}$$

анзац (3.2) редукує рівняння (3.15) до ЗДР вигляду

$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{\omega} = 0. \tag{3.19}$$

Розв'язок редукованого рівняння (3.19):

$$\varphi(\omega) = c_1 \ln(\omega) + c_2,$$

а відповідний розв'язок однорідного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера (3.15) є наступним:

$$u(x) = c_1 \ln(\omega) + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі; відповідні ω виписані в формулах (3.18).

Для інваріантів ω вигляду:

$$(x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \tag{3.20}$$

анзац (3.2) редукує рівняння (3.15) до ЗДР вигляду

$$\varphi'' + \frac{2}{\omega}\varphi' = 0.$$

Розв'язок редукованого рівняння має вигляд:

$$\varphi(\omega) = \frac{c_1}{\omega} + c_2,$$

а відповідний розв'язок однорідного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера (3.15) є наступним:

$$u(x) = \frac{c_1}{\omega} + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі; відповідні ω виписані в формулах (3.20).

Для інваріантів ω вигляду:

$$(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{1/2}, \quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2} \tag{3.21}$$

анзац (3.2) редукує рівняння (3.15) до ЗДР вигляду

$$\varphi'' + \frac{3}{\omega}\varphi' = 0.$$

Розв'язок редукованого рівняння має вигляд

$$\varphi(\omega) = \frac{c_1}{\omega^2} + c_2,$$

а відповідний розв'язок однорідного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера (3.15) є наступним:

$$u(x) = \frac{c_1}{\omega^2} + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі; відповідні ω виписані в формулах (3.21).

Для інваріанта

$$\omega = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2} \tag{3.22}$$

анзац (3.2) редукує рівняння (3.15) до ЗДР

$$\varphi'' + \frac{4}{\omega}\varphi' = 0.$$

Розв'язок редукованого рівняння має вигляд:

$$\varphi(\omega) = \frac{c_1}{\omega^3} + c_2,$$

а відповідний розв'язок однорідного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера (3.15) є наступним:

$$u(x) = \frac{c_1}{\omega^3} + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі; відповідне ω виписане в формулі (3.22).

Розглянемо анзаци вигляду (3.9):

$$u(x) = \varphi(\omega_1, \omega_2),$$

де $\omega_1(x), \omega_2(x)$ – деякі двовимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

Для інваріантів ω_1, ω_2:

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = x_2,\ \omega_2 = x_0 + x_4;\\
&\omega_1 = x_3,\ \omega_2 = x_0 + x_4;\\
&\omega_1 = \frac{x_3}{x_0 + x_4} + x_2,\ \omega_2 = x_0 + x_4;\\
&\omega_1 = x_3 + \frac{x_1}{x_0 + x_4},\ \omega_2 = x_0 + x_4
\end{aligned} \tag{3.23}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.15) до диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_1^2} = 0. \tag{3.24}$$

Розв'язок цього рівняння (3.24) має наступний вигляд

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 f_1(\omega_2) + f_2(\omega_2),$$

а відповідний розв'язок однорідного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера (3.15) є наступним:

$$u(x) = \omega_1 f_1(\omega_2) + f_2(\omega_2),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; відповідні ω_1, ω_2 виписані в формулах (3.23).

Для інваріантів

$$\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \omega_2 = x_0 + x_4 \tag{3.25}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.15) до ЗДР вигляду

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_1^2} - \frac{1}{\omega_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_1} = 0.$$

Розв'язок редукованого рівняння має вигляд:

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \ln(\omega_1) f_1(\omega_2) + f_2(\omega_2),$$

а відповідний розв'язок однорідного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера (3.15) є наступний:

$$u(x) = \ln(\omega_1) f_1(\omega_2) + f_2(\omega_2),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; відповідні $\omega_1,\ \omega_2$ виписані в формулі (3.25).

Для інваріантів

$$\omega_1 = x_0 + x_4, \quad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \tag{3.26}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.15) до ЗДР

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_2^2} - \frac{2}{\omega_2}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_2} = 0.$$

Розв'язок редукованого рівняння має вигляд:

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_2} f_1(\omega_1) + f_2(\omega_1),$$

а відповідний розв'язок однорідного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера (3.15) є наступний:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_2} f_1(\omega_1) + f_2(\omega_1),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; відповідні $\omega_1,\ \omega_2$ виписані в формулі (3.26).

3.3 П'ятивимірне рівняння sin-Гордона

Рівняння sin-Гордона в просторах різних вимірностей широко використовуються в фізиці і математиці. Двовимірне рівняння sin-Гордона використовується, зокрема, при описі: поширення дислокацій в кристалах, руху стінок Блоха в магнітних кристалах, поверхонь з постійною від'ємною кривизною, в унітарній теорії елементарних частинок, моделі Тіррінга в класичній і квантовій теорії поля, та ін.(див. [137, 139, 140, 151–153] і цитовану там літературу).

В просторах вищих вимірностей рівняння sin-Гордона також має застосування в фізиці і ретельно вивчалося [154–157].

Для двовимірних рівнянь sin-Гордона добре відомі солітонні розв'язки [158].

Багатопараметричні сім'ї точних розв'язків рівняння sin-Гордона в просторах різних вимірностей побудовані в роботах [27, 141, 142, 159, 160].

В цьому підрозділі розглянемо рівняння вигляду:

$$\Box_5 u = \sin u. \tag{3.27}$$

У цьому підрозділі проведено симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків рівняння (3.27).

Розглянемо анзаци вигляду (3.2):

$$u(x) = \varphi(\omega),$$

де $\omega(x)$ – деякі одновимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$. Ці анзаци редукують рівняння (3.27) до ЗДР вигляду:

$$\varepsilon \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = \sin\varphi, \tag{3.28}$$

де нові змінні ω і відповідні їм ε виписані нижче:

$$\begin{gathered}
\omega = x_0,\ \varepsilon = 1; \qquad \omega = x_2,\ \varepsilon = -1; \\
\omega = x_3,\ \varepsilon = -1; \quad \omega = x_4,\ \varepsilon = -1; \\
\omega = x_2 - a_2 \ln(x_0 + x_4),\ \varepsilon = -1; \\
\omega = x_3 - a \ln(x_0 + x_4),\ \varepsilon = -1.
\end{gathered} \tag{3.29}$$

Розв'язки редукованого рівняння (3.28) мають вигляд:

$$\varphi(\omega) = 4 \arctan\left(\alpha e^{\varepsilon_0 \omega}\right) - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\pi; \tag{3.30}$$

$$\varphi(\omega) = 2 \arccos\left[dn(\omega+\alpha, m)\right] + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi,\ 0 < m < 1; \tag{3.31}$$

$$\varphi(\omega) = 2\arccos\left[cn\left(\frac{\omega+\alpha}{m}, m\right)\right] + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi, \tag{3.32}$$

$$0 < m < 1, \alpha = const;$$

а відповідні розв'язки п'ятивимірного рівняння sin-Гордона (3.27):

$$u(x) = 4\arctan\left(\alpha e^{\varepsilon_0 \omega}\right) - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\pi; \tag{3.33}$$

$$u(x) = 2\arccos\left[dn(\omega+\alpha, m)\right] + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi,\ 0 < m < 1; \tag{3.34}$$

$$u(x) = 2\arccos\left[cn\left(\frac{\omega+\alpha}{m}, m\right)\right] + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi, \tag{3.35}$$

$$0 < m < 1, \alpha = const;$$

де $dnx,\ cnx$ - еліптичні функції Якобі, $\varepsilon_0 = \pm 1, \varepsilon = \pm 1, \alpha \in R$; відповідні ω і ε виписані в формулах (3.29).

Інший розв'язок редукованого рівняння (3.28) має вигляд

$$\varphi(\omega) = 4\arctan\left(\tanh\frac{\omega}{2}\right), \tag{3.36}$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного рівняння sin-Гордона (3.27) є

$$u(x) = 4\arctan\left(\tanh\frac{\omega}{2}\right), \tag{3.37}$$

де інваріанти ω виписані нижче:

$$x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_2 - a_2\ln(x_0+x_4), \quad x_3 - a\ln(x_0+x_4).$$

Інші редуковані ЗДР розв'язати не вдалося. Тому, за браком місця, ми їх не наводимо.

Розглянемо анзаци вигляду (3.9):

$$u(x) = \varphi(\omega_1, \omega_2),$$

де $\omega_1(x), \omega_2(x)$ – деякі двовимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

Для інваріантів ω_1, ω_2:

$$\begin{aligned} &\omega_1 = x_2,\ \omega_2 = x_0 + x_4;\\ &\omega_1 = x_3,\ \omega_2 = x_0 + x_4, \end{aligned} \tag{3.38}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.27) до диференціального рівняння

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2} = \sin\varphi\,. \tag{3.39}$$

Розв'язок рівняння (3.39) має наступний вигляд

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi + f_1(\omega_2)}} = \varepsilon\omega_1 + f_2(\omega_2),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного рівняння sin-Гордона (3.27) є

$$\int \frac{du(x)}{\sqrt{2\cos u(x) + f_1(\omega_2)}} = \varepsilon\omega_1 + f_2(\omega_2),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; відповідні ω_1, ω_2 виписані в формулах (3.38).

Для інваріантів

$$\begin{aligned} &\omega_1 = x_0 + x_4,\ \omega_2 = \frac{x_3}{x_0 + x_4} + x_2;\\ &\omega_1 = x_0 + x_4,\ \omega_2 = x_3 + \frac{x_1}{x_0 + x_4} \end{aligned} \tag{3.40}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.27) до ЗДР вигляду

$$-\left(1 + \frac{1}{\omega_1^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2} = \sin\varphi.$$

Розв'язок редукованого рівняння має вигляд:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\dfrac{2\omega_1^2}{\omega_1^2+1}\cos\varphi + f_1(\omega_1)}} = \varepsilon\omega_2 + f_2(\omega_1),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного рівняння sin-Гордона (3.27) є

$$\int \frac{du(x)}{\sqrt{\dfrac{2\omega_1^2}{\omega_1^2+1}\cos u(x) + f_1(\omega_1)}} = \varepsilon\omega_2 + f_2(\omega_1),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; $\varepsilon^2 = 1$; відповідні ω_1, ω_2 виписані в формулах (3.40).

Для решти редукованих рівнянь, на даний час, розв'язків не побудовано. За браком місця ми їх не наводимо.

Зауваження. Розв'язки вигляду (3.33)-(3.35), (3.37) для рівняння *sin*-Гордона в просторах різних вимірів отримані в [84, 141, 142]. Зокрема, розв'язки (3.33)-(3.35) при $\omega = x_0,\ \varepsilon = 1$ можна знайти в [27, 142].

3.4 П'ятивимірне рівняння Ліувілля

Рівняння Ліувілля виникає в задачах диференціальної геометрії, теорії нелінійних хвиль, а також в квантовій теорії поля [138].

В двовимірному випадку загальний розв'язок рівняння Ліувілля побудував в 1853 р. сам Ліувіль.

В [27, 141] проведена симетрійна редукція та побудовано деякі багатопараметричні сім'ї точних розв'язків тривимірного рівняння Ліувілля.

Симетрійна редукція рівняння Ліувілля в просторі Мінковського $R_{1,n}$ проведена в [161]. В цій же роботі також побудовано деякі класи точних розв'язків цього рівняння.

Сингулярні розв'язки рівняння Ліувілля побудовані і досліджені в роботах [162–164].

В цьому підрозділі розглянемо рівняння вигляду:

$$\Box_5 u = e^u. \tag{3.41}$$

У цьому підрозділі проведено симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків рівняння (3.41).

Розглянемо анзаци вигляду (3.2):

$$u(x) = \varphi(\omega),$$

де $\omega(x)$ – деякі одновимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$. Ці анзаци редукують рівняння (3.41) ЗДР вигляду:

$$k\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = e^{\varphi}, \tag{3.42}$$

де нові змінні ω і відповідні їм k виписані нижче:

$$
\begin{aligned}
&\omega = x_0,\ k = 1; \qquad \omega = x_2,\ k = -1;\\
&\omega = x_3,\ k = -1; \qquad \omega = x_4,\ k = -1;\\
&\omega = x_2 - a_2 \ln(x_0 + x_4),\ k = -1;\\
&\omega = x_3 - a_3 \ln(x_0 + x_4),\ k = -1;\\
&\omega = 2x_2 - (x_0 + x_4)^2,\ k = -4;\\
&\omega = (x_0 + x_4)^2 + 2\alpha_0 x_3,\ k = -4\alpha_0^2,\ \alpha_0 < 0;\\
&\omega = \mu((x_0 + x_4)^2 - 2x_1) + 2x_3,\ k = -4(\mu^2 + 1),\ \mu > 0;\\
&\omega = 2(\delta x_2 - \gamma x_3) - \delta(x_0 + x_4)^2,\ k = -4(\delta^2 + \gamma^2),\ \gamma > 0.
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

Розв'язок редукованого рівняння (3.42) має вигляд

$$\varphi(\omega) = \ln\left(\frac{c_1}{2}\left(\tan^2\left(\sqrt{\frac{c_1}{4k}}(\omega + c_2)\right) + 1\right)\right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного рівняння Ліувілля (3.41) є

$$u(x) = \ln\left(\frac{c_1}{2}\left(\tan^2\left(\sqrt{\frac{c_1}{4k}}(\omega + c_2)\right) + 1\right)\right),$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі; відповідні ω і k виписані в формулах (3.43).

Для інваріантів

$$
\begin{aligned}
&\omega = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\ \varepsilon = 1;\\
&\omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\ \varepsilon = -1;\\
&\omega = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\ \varepsilon = -1
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

анзац (3.2) редукує рівняння (3.41) до ЗДР вигляду

$$\varepsilon\left(\varphi'' + \frac{\varphi'}{\omega}\right) = e^{\varphi},\ \varepsilon = \pm 1.$$

Розв'язок редукованого рівняння має наступний вигляд

$$\varphi(\omega) = \ln\left(\frac{\varepsilon(c_1 - 4)}{2\omega^2}\left(\tan^2\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{c_1 - 4}(\ln\omega - c_2)\right) + 1\right)\right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного рівняння Ліувілля (3.41) є

$$u(x) = \ln\left(\frac{\varepsilon(c_1 - 4)}{2\omega^2}\left(\tan^2\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{c_1 - 4}(\ln\omega - c_2)\right) + 1\right)\right),$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі; відповідні ω і ε виписані в формулах (3.44).

Решта редукованих ЗДР не розв'язані. За браком місця ці ЗДР ми не наводимо.

Розглянемо анзаци вигляду (3.9):

$$u(x) = \varphi(\omega_1, \omega_2),$$

де $\omega_1(x), \omega_2(x)$ – деякі двовимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

Для інваріантів ω_1, ω_2 :

$$\omega_1 = x_2,\ \omega_2 = x_0 + x_4; \qquad \omega_1 = x_3,\ \omega_2 = x_0 + x_4 \tag{3.45}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.41) до диференціального рівняння

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_1^2} = e^{\varphi}\,. \tag{3.46}$$

Розв'язок цього редукованого рівняння (3.46) має вигляд

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \ln\left(-\frac{1}{2f_1^2(\omega_2)}\left(\tanh^2\left(\frac{f_2(\omega_2)+\omega_1}{2f_1(\omega_2)}\right) - 1\right)\right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного рівняння Ліувілля (3.41) є

$$u(x) = \ln\left(-\frac{1}{2f_1^2(\omega_2)}\left(\tanh^2\left(\frac{f_2(\omega_2)+\omega_1}{2f_1(\omega_2)}\right) - 1\right)\right),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; відповідні ω_1, ω_2 виписані в формулах (3.45)

Для інваріантів

$$\omega_1 = x_0 + x_4,\ \omega_2 = \frac{x_3}{x_0 + x_4} + x_2; \tag{3.47}$$
$$\omega_1 = x_0 + x_4,\ \omega_2 = x_3 + \frac{x_1}{x_0 + x_4}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.41) до рівняння вигляду

$$-\left(1 + \frac{1}{\omega_1^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_2^2} = e^{\varphi}.$$

Розв'язок цього редукованого рівняння має наступний вигляд

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \ln\left(-\frac{f_1(\omega_1)}{2\omega_1^2}\times\right.$$

$$\times\left(\tanh^2\left(\frac{\sqrt{(\omega_1^2+1)f_1(\omega_1)}(f_2(\omega_1)+\omega_2)}{2(\omega_1^2+1)}\right)-1\right)\Bigg),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного рівняння Ліувілля (3.41) є

$$u(x)=\ln\Bigg(-\frac{f_1(\omega_1)}{2\omega_1^2}\times$$

$$\times\left(\tanh^2\left(\frac{\sqrt{(\omega_1^2+1)f_1(\omega_1)}(f_2(\omega_1)+\omega_2)}{2(\omega_1^2+1)}\right)-1\right)\Bigg),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; відповідні ω_1, ω_2 виписані в формулі (3.47).

Для інваріантів

$$\omega_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ \omega_2=x_0+x_4 \tag{3.48}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.41) до рівняння вигляду

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2}-\frac{1}{\omega_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}=e^{\varphi}.$$

Розв'язок цього редукованого рівняння має наступний вигляд

$$\varphi(\omega_1,\omega_2)=$$

$$=\ln\left(\frac{4-f_1(\omega_2)}{2\omega_1^2}\left(\tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{f_1(\omega_2)-4}(f_2(\omega_2)-\ln(\omega_1))\right)+1\right)\right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного рівняння Ліувілля (3.41) є

$$u(x)=$$

$$=\ln\left(\frac{4-f_1(\omega_2)}{2\omega_1^2}\left(\tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{f_1(\omega_2)-4}(f_2(\omega_2)-\ln(\omega_1))\right)+1\right)\right),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; відповідні ω_1, ω_2 виписані в формулі (3.48).

Остальні редуковані рівняння не розв'язані. За браком місця ми їх не наводимо.

3.5 П'ятивимірне рівняння *sinh*-Гордона

Рівняння *sinh*-Гордона в просторах різних вимірностей широко використовуються в фізиці і математиці. Це рівняння виникає, зокрема, при розгляді деяких задач теорії поля [165].

Аналіз і фізична інтерпретація розв'язків двовимірних рівнянь $sinh$-Гордона подана в [166].

В роботах [27, 167] побудовані багатопараметричні сім'ї точних розв'язків рівняння $sinh$-Гордона в просторах різних вимірностей.

В роботі [164] автори будують і досліджують сингулярні розв'язки суттєво нелінійних рівнянь Ліувілля і $sinh$-Гордона. Автори також пропонують фізичну інтерпретацію сингулярних розв'язків.

В цьому підрозділі розглянемо рівняння вигляду:

$$\Box_5 u = \sinh u. \tag{3.49}$$

У цьому підрозділі проведено симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків рівняння (3.49).

Розглянемо анзаци вигляду (3.2):

$$u(x) = \varphi(\omega),$$

де $\omega(x)$ – деякі одновимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

Для інваріанта

$$\omega = x_0$$

анзац (3.2) редукує рівняння (3.49) до ЗДР вигляду:

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = \sinh \varphi. \tag{3.50}$$

Розв'язок редукованого рівняння (3.50) має вигляд

$$\varphi(\omega) = 2arctanh\left(\sin \omega\right),$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного рівняння $sinh$-Гордона (3.49) є наступний:

$$u(x) = 2arctanh\left(\sin x_0\right). \tag{3.51}$$

Інші розв'язки редукованого рівняння (3.50) мають вигляд:

$$\varphi(\omega) = 2arctanh\left[sn(z,k)\right],\ z = \frac{\sqrt{c+2}}{2}\omega,\ k^2 = \frac{c-2}{c+2},\ c > 2\,;$$

$$\varphi(\omega) = 4arctanh\,(e^{\omega})\,,\; c = 2\,;$$

де $\omega = x_0$, а відповідні розв'язки п'ятивимірного рівняння $sinh$-Гордона (3.49) є наступні:

$$u(x) = 2arctanh\,[sn(z,k)]\,,\; z = \frac{\sqrt{c+2}}{2}x_0,\; k^2 = \frac{c-2}{c+2}, c > 2\,; \tag{3.52}$$

$$u(x) = 4arctanh\,(e^{x_0})\,,\; c = 2\,. \tag{3.53}$$

Для інваріантів ω вигляду

$$x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_2 - a\ln(x_0 + x_4), \quad x_3 - a\ln(x_0 + x_4) \tag{3.54}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.49) до ЗДР вигляду

$$-\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = \sinh\varphi. \tag{3.55}$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$\varphi(\omega) = arccosh\left[\frac{c}{2}cn^2(z,k) + sn^2(z,k)\right],\; z = \frac{\sqrt{c+2}}{2}\omega,\; k^2 = \frac{c-2}{c+2}, c > 2,$$

а відповідний розв'язок п'ятивимірного рівняння $sinh$-Гордона (3.49)

$$u(x) = arccosh\left[\frac{c}{2}cn^2(z,k) + sn^2(z,k)\right],\; z = \frac{\sqrt{c+2}}{2}\omega,\; k^2 = \frac{c-2}{c+2}, c > 2,$$

де відповідні ω виписані в формулі (3.54).

Для інших редукованих ЗДР розв'язки не побудовано. За браком місця ми ці ЗДР не наводимо.

Розглянемо анзаци вигляду (3.9):

$$u(x) = \varphi(\omega_1, \omega_2),$$

де $\omega_1(x), \omega_2(x)$ – деякі двовимірні інваріанти підгруп групи $P(1,4)$.

Для інваріантів ω_1, ω_2:

$$\omega_1 = x_2,\; \omega_2 = x_0 + x_4; \qquad \omega_1 = x_3,\; \omega_2 = x_0 + x_4, \tag{3.56}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.49) до диференціального рівняння

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2} = \sinh\varphi\,. \tag{3.57}$$

Розв'язок рівняння (3.57) має наступний вигляд

$$\int \sqrt{\frac{e^{\varphi}}{f_1(\omega_2)e^{\varphi} - e^{2\varphi} - 1}} d\varphi = \varepsilon\omega_1 + f_2(\omega_2),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; $\varepsilon^2 = 1$; відповідні ω_1, ω_2 виписані в формулах (3.56).

Розв'язки п'ятивимірного рівняння $sinh$-Гордона отримуються із співвідношень вигляду:

$$\int \sqrt{\frac{e^{u}}{f_1(\omega_2)e^{u} - e^{2u} - 1}} du = \varepsilon\omega_1 + f_2(\omega_2).$$

Для інваріантів

$$\begin{aligned} &\omega_1 = x_0 + x_4,\ \omega_2 = \frac{x_3}{x_0 + x_4} + x_2; \\ &\omega_1 = x_0 + x_4,\ \omega_2 = x_3 + \frac{x_1}{x_0 + x_4} \end{aligned} \tag{3.58}$$

анзац (3.9) редукує рівняння (3.49) до ЗДР вигляду

$$-\left(1 + \frac{1}{\omega_1^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2} = \sinh\varphi.$$

Розв'язок цього редукованого рівняння має вигляд

$$\int \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + 1)e^{\varphi}}{f_1(\omega_1)(\omega_1^2 + 1)e^{\varphi} - \omega_1^2(e^{2\varphi} + 1)}} d\varphi = \varepsilon\omega_2 + f_2(\omega_1),$$

де f_1 і f_2 – довільні диференційовні функції; $\varepsilon^2 = 1$; відповідні ω_1, ω_2 виписані в формулах (3.58).

Розв'язки п'ятивимірного рівняння $sinh$-Гордона (3.49) отримуються із співвідношень вигляду:

$$\int \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + 1)e^{u}}{f_1(\omega_1)(\omega_1^2 + 1)e^{\varphi} - \omega_1^2(e^{2\varphi} + 1)}} du = \varepsilon\omega_2 + f_2(\omega_1).$$

Для інших редукованих рівнянь розв'язки не побудовано. За браком місця ми ці рівняння не наводимо.

В роботах [27, 167] побудовані багатопараметричні сім'ї точних розв'язків рівняння $sinh$-Гордона в просторах різних вимірностей.

Зауваження. Зокрема, розв'язки (3.51)–(3.53) з $\omega = x_0$ можна знайти в [27]. Таким чином, ми показали що деякі результати отримані в [27,167] з використанням узагальненого підходу Лі, у випадку рівняння sinh-Гордона в 1+4 вимірному просторі Мінковського $M(1,4)$, можуть бути отримані в рамках класичного методу Лі.

3.6 Висновки до розділу 3

1. Коротко описано симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) $P(1,4)$-нееквівалентних підкласів п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера до підкласів диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних.

2. Проведено симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків для наступних $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера:

– лінійне п'ятивимірне рівняння Д'Аламбера;

– п'ятивимірне рівняння sin-Гордона;

– п'ятивимірне рівняння Ліувілля;

– п'ятивимірне рівняння $sinh$-Гордона.

3. Серед побудованих класів інваріантних розв'язків є розв'язки, які виражаються через елементарні функції, спеціальні функції, а також такі, які залежать від двох довільних функцій.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена груповій класифікації певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4)\times R(u)$, симетрійній редукції та побудові класів інваріантних розв'язків для деяких $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера. У дисертаційній роботі одержано такі нові результати.

1. Проведено групову класифікацію певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4) \times R(u)$.

2. Сформульовано і доведено критерій еквівалентності функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

3. Побудовано в явному вигляді нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку для всіх неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

4. Проведено симетрійну редукцію (для всіх випадків, коли це можливо зробити класичним методом Лі) та побудовано деякі класи інваріантних розв'язків для наступних $P(1,4)$-інваріантних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера:

– лінійне п'ятивимірне рівняння Д'Аламбера;

– п'ятивимірне рівняння sin-Гордона;

– п'ятивимірне рівняння Ліувілля;

– п'ятивимірне рівняння $sinh$-Гордона.

5. Серед побудованих класів інваріантних розв'язків є розв'язки, які виражаються через елементарні функції, спеціальні функції, та розв'язки, які залежать від двох довільних функцій.

6. Отримані результати можуть бути застосовані при побудові та дослідженні математичних моделей в просторі $M(1,4) \times R(u)$, які інваріантні відносно неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Lie S. Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche, endliche Gruppe gestatten / S. Lie // Math. Ann. – 1885. – **25**, № 1. – P. 71–151.

[2] Lie S. Klassification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten / S. Lie // Arch. Math. Naturv. – 1883. – **9**. – P. 371–393.

[3] Lie S. Transformationsgruppen: In 3 Bd./ S. Lie. – Leipzig, – 1893. – Bd. 3. 400 s.

[4] Lie S. Vorlesungen über continuierliche gruppen / S. Lie. – Leipzig: Teubner, 1893. – S. 805.

[5] Lie S. Über Differentialinvarianten / S. Lie // Math. Ann. – 1884. – **24**, N 1. – S. 537–578 (52–89).

[6] Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen: In 3 Bd. / S. Lie, F. Engel. – Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893. – Bd 1–3.

[7] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. – Москва: Наука, 1978. – 399 с.

[8] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности / Л.В. Овсянников // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**, № 3. — С. 492—495.

[9] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина / Л.В. Овсянников // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1960. — № 3. — С. 126–145.

[10] Ахатов И.Ш. Нелокальные симметрии. Эвристический подход / И.Ш. Ахатов, Р.К. Газизов, Н.Х. Ибрагимов // Итоги пауки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1989. — **34**. — С. 3—83.

[11] Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа / Н.Х. Ибрагимов. — Москва: Знание, 1989. — 48 с.

[12] Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений / Н.Х. Ибрагимов. — Новосибирск: Наука, 1967. — 59 с.

[13] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике / Н.Х. Ибрагимов. — Москва: Наука, 1983. — 280 с.

[14] CRC handbook of Lie group analysis of differential equations: In 3 volumes / [Ed. N.H. Ibragimov]. — Boca Raton: CRC Press, 1994. — Vol. 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws. — 429 p.

[15] CRC handbook of Lie group analysis of differential equations: In 3 volumes / [Ed. N.H. Ibragimov]. — Boca Raton: CRC Press, 1994. — Vol. 2: Applications in engineering and physical sciences. — 546 p.

[16] Ibragimov N.H. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics / N.H. Ibragimov. – Boston: Reidel. – 1985.

[17] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – Москва: Мир. – 1989. – 639 с.

[18] Olver P.J. Differential invariants and invariant differential equations / P.J. Olver // Lie Groups and their Appl.– 1994. – **1**. – P. 177–192.

[19] Olver P. Equivalence, invariants, and symmetry / P. Olver. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995. — 525 pp.

[20] Биркгоф Г. Гидродинамика / Г. Биркгоф — Москва: Из-во иностр. лит., 1963. — 400 с.

[21] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. — Москва: Наука, 1967. — 440 с.

[22] Bluman G.W. The general similarity solution of the heat equation / G.W. Bluman, J.D. Cole // J. Math. Mech. — 1969. — **18**, № 11. — P. 1025–1042.

[23] Bluman G.W. Simitarity Methods for Differential Equations / G.W. Bluman, J. Cole. — Berlin: Springer. — 1974. — 332 p.

[24] Фущич В.И. Как расширить симетрию дифференциальных уравнений? / В.И. Фущич // Симметрия и решения нелинейных уравне-ний математической физики. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С. 4–16.

[25] Фущич В.И. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения / В.И. Фущич, Р.З. Жданов. — Киев: Наук. думка, 1992. — 288 с.

[26] Фущич В.И. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений / В.И. Фущич, Л.Ф. Баранник, А.Ф. Баранник. — Киев: Наук. думка, 1991. — 304 с.

[27] Фущич В.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики / В.И. Фущич, В.М. Штелень, Н.И. Серов. — Киев: Наук. думка, 1989. — 336 с. (Fushchich W.I., Shtelen W.M., Serov N.I. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics, Kluver Academic Publishers, Dordrecht (1993), 435 p.)

[28] Фущич В.И. Симметрия уравнений Максвелла / В.И. Фущич, А.Г. Никитин. — Киев: Наук. думка, 1983. — 200 с.

[29] Fushchych W.I. Symmetries of nonlinear Dirac equations / W.I. Fushchych, R.Z. Zhdanov. — Kyiv: Mathematical Ukraina Publishers. — 1997. — 383 pp.

[30] Лагно В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу / В.І. Лагно, С.В. Спічак, В.І. Стогній. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — 360 с. (Праці Ін-ту матем. НАН України — Т. 45).

[31] Lahno H.O. Subgroups of extended Poincaré group and new exact solutions of Maxwell equations / H.O. Lahno, V.F. Smalij // Праці Ін-ту матем. НАН України.– 2002.– **43**, ч. 1.– С. 162–166.

[32] Lahno V. Towards a classification of realizations of the Euclid algebra e(3) / V. Lahno, R. Zhdanov // Праці Ін-ту матем. НАН України. – 2000. – **30**. – С. 146–150.

[33] Fushchych W.I. Symmetry reduction and exact solution of the Navier–Stokes equations. I / W.I. Fushchych, R.O. Popovych // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — **1**, № 1. — P. 75–113.

[34] Fushchych W.I. Symmetry reduction and exact solution of the Navier–Stokes equations. II / W.I. Fushchych, R.O. Popovych // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — **1**, № 2. — P. 158–188.

[35] Fushchych W.I. Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields / W.I. Fushchych, I.M. Tsyfra, V.M. Boyko // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**, N 2. – P. 210–221.

[36] Nikitin A.G. New symmetries and conservation laws for electromagnetic field, in: Group-Theoretical Methods in Physics / A.G. Nikitin, W. I. Fushchych, V.A. Vladimirov // Harwood Academic Publishers, Harwood. – 1985. – P. 497–505.

[37] Костенко В.Г. Інтегрування деяких нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних груповими методами / В.Г. Костенко. – Львів: Вид-во Львівського ун-ту. – 1959.

[38] Костенко В.Г. Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень / В.Г. Костенко, О.О. Веселовська // Вісник ЛДУ ім. Ів. Франка, Серія механіко-математична, Вип. 7, 1972. – С. 86–90.

[39] Костенко В.Г. Класифікація чотиричленних груп перетворень/ В.Г. Костенко, Р.В. Стасенко // Вісник ЛДУ ім. Ів. Франка, Серія механіко-математична, Вип. 8, 1973. – С. 13–20.

[40] Костенко В.Г. Інтегрування деяких лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку на площині зі змінними коефіцієнтами / В.Г. Костенко, О.О. Веселовська // Вісник ЛДУ ім. Ів. Франка, Серія механіко-математична, Вип. 9, 1974. – С. 52–55.

[41] Lie S. Ueber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen / S. Lie // Arch. for Math. – 1881. – **6**, H. 3. – P. 328–368.

[42] Ames W. F. Group properties of $u_{tt} = (f(u)u_x)_x$ / W.F. Ames, R.J. Lohner, E. Adams // Internat. J. Non-Linear Mech. – 1981. – **16**, no. 5–6. – P. 439–447.

[43] Dorodnitsyn V.A. Group properties of the heat equation with source in the two-dimensional and three-dimensional cases / V.A. Dorodnitsyn, I.V. Knyazeva, S.R. Svirshchevskiĭ // (Russian) Differentsial'nye Uravneniya. – 1983. – **19**, no. 7, P. 1215–1223.

[44] Oron A Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations / A. Oron, P. Rosenau // Phys. Lett. A. – 1986. – **118**, no. 4, P. 172–176.

[45] Pucci E. Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations / E. Pucci, M.C. Salvatori // Internat. J. Non-Linear Mech. – 1986. – **21**, No. 2. – P. 147–155.

[46] Arrigo D.J. Group properties of $u_{xx} - u_y^m u_{yy} = f(u)$ / D.J. Arrigo // Internat. J. Non-Linear Mech. – 1991. – **26**, no. 5, P. 619–629.

[47] Heredero R.H. Classification of invariant wave equations / R.H. Heredero, P.J. Olver // J. Math. Phys.– 1996.– **37**, no. 12, P. 6414–6438.

[48] Spichak S. Symmetry analysis of the Kramers equation / S. Spichak, V. Stogny // Reports on Math. Phys. – 1997. – **40**, No. 1. – P. 125–130.

[49] Gandarias M.L. Symmetry classification and optimal systems of a nonlinear wave equation / M.L. Gandarias, M. Torrisi, A. Valenti // Internat. J. Non-Linear Mech. – 2004. – **39**, no. 3, P. 389-–398.

[50] Sophocleous C. Transformation properties of a variable-coefficient Burgers equation / C. Sophocleous // Chaos Solitons Fractals. – 2004. – **20**, no. 5, P. 1047–1057.

[51] Cherniha R. Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations / R. Cherniha, M. Serov, I. Rassokha // J. Math. Anal. Appl.– 2008.– **342**, no. 2.– P. 1363–1379.

[52] Ivanova N.M. Lie group analysis of two-dimensional variable-coefficient Burgers equation / N.M. Ivanova, C. Sophocleous, R. Tracinà // Z. Angew. Math. Phys. – 2010. – **61**, no. 5, P. 793–809.

[53] Vaneeva O.O. Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities / O.O. Vaneeva, R.O. Popovych, C. Sophocleous // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – **396**, no. 1. – P. 225–242.

[54] Johnpillai A.G. Lie group classification and invariant solutions of mKdV equation with time-dependent coefficients / A.G. Johnpillai, C.M. Khalique // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2011. – **16**, no. 3. – P. 1207–1215.

[55] Molati M.K. Symmetry classification and invariant solutions of the variable coefficient BBM equation / M.K. Molati, C.M. Khalique // Appl. Math. Comput. – 2013. –**219**, no. 15. – P. 7917–7922.

[56] Alexandrova A.A. Group classification and conservation laws of nonlinear filtration equation with a small parameter / A.A. Alexandrova, N.H. Ibragimov, V.O. Lukashchuk // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2014. – **19**, no. 2, P. 364–370.

[57] Ivanova N.M. Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification / N.M. Ivanova, R.O. Popovych, C. Sophocleous // Lobachevskii J. Math. – 2010. – **31**, no. 2. – P. 100–122.

[58] Pucci E. Group analysis of the equation $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ / E. Pucci // Riv. Mat. Univ. Parma. – 1987. – **12**, N 4. – P. 71–87.

[59] Spichak S. Symmetry classification and exact solutions of the one-dimensional Fokker-Planck equation with arbitrary coefficients of drift and diffusion / S. Spichak, V. Stognii // J. Phys. A. – 1999. – **32**, No. 47. – P. 8341–8353.

[60] Spichak S. One-dimensional Fokker-Planck equation invariant under four- and six-parametrical group / S. Spichak, V. Stognii // Symmetry in nonlinear mathematical physics, Part 1, 2 (Kyiv, 1999), 204–209, Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos., **30**, Part 1, 2, Natsional. Akad. Nauk Ukraïni, Inst. Mat., Kiev, 2000.

[61] Nikitin A.G. Group classification of nonlinear Schr'́odinger equations / A.G. Nikitin, R.O. Popovich // Ukraiin. Mat. Zh. – 2001. – V. 53, no. 8. – P. 1053–1060; translation in Ukrainian Math. J. – 2001. – **53**, no. 8. – P. 1255–1265.

[62] Sinkala W. Invariance properties of a general bond-pricing equation / W. Sinkala, P.G.L. Leach, J.G. O'Hara // J. Differential Equations. – 2008. – **244**, no. 11. – P. 2820–2835.

[63] Dos Santos Cardoso-Bihlo E. Enhanced preliminary group classification of a class of generalized diffusion equations / E. Dos Santos Cardoso-Bihlo, A. Bihlo, R.O. Popovych // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2011. – **16**, no. 9, P. 3622–3638.

[64] Huang Q. Group classification of linear fourth-order evolution equations / Q. Huang, C. Qu, R. Zhdanov // Rep. Math. Phys. – 2012. – **70**, no. 3. – P. 331–343.

[65] Özemir C. Symmetry classification of variable coefficient cubic-quintic nonlinear Schroödinger equations / C. Özemir, F. Güngör // J. Math. Phys. – 2013. – **54**, no. 2, 023502, 13 pp.

[66] Popovych R.O. Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schr'́odinger equations / R.O. Popovych, M. Kunzinger, H. Eshraghi // Acta Appl. Math. – 2010. – **109**, no. 2, P. 315–359.

[67] Popovich R.O. Group classification of generalized eikonal equations / R.O. Popovich, I.A. Egorchenko // Ukrain. Mat. Zh. – 2001. – **53**, no. 11. – P. 1513–1520; translation in Ukrainian Math. J. – 2001. – **53**, no. 11. – P. 1841–1850.

[68] Arrigo D.J. Symmetry analysis of the two-dimensional diffusion equation with a source term / D.J. Arrigo, L.R. Suazo, O.M. Sule // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **333**, no. 1, P. 52–67.

[69] Meleshko S.V. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay / S.V. Meleshko, S. Moyo // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **338**, no. 1. – P. 448–466.

[70] Lagno V.I. Group classification of nonlinear evolution equations. I. Invariance under semisimple local transformation groups (Russian) / V.I. Lagno, A.M. Samoĭlenko // Differ. Uravn. – 2002. – **38**, no. 3. – P. 365–372, 430; translation in Differ. Equ. – 2002. – **38**, no. 3. – P. 384–391.

[71] Abramenko A.A. Group classification of nonlinear evolution equations. II. Invariance under solvable local transformation groups. (Russian) / A.A. Abramenko, V.I. Lagno, A.M. Samoĭlenko // Differ. Uravn. – 2002. – **38**, no. 4. – P. 482–489, 574; translation in Differ. Equ. – 2002. – **38**, no. 4, P. 502–509.

[72] Lahno V. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations / V. Lahno, R. Zhdanov, O. Magda // Acta Appl. Math. – 2006. – **91**, no. 3, P. 253–313.

[73] Juráš M. Some classification results for hyperbolic equations $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$ / M. Juráš // J. Differential Equations. – 2000. – **164**, no. 2, P. 296–320.

[74] Basarab-Horwath P. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations / V. Lahno, O. Magda // Symmetry in nonlinear mathematical physics. Part 1, 2, 3, 40-–46, Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos., **50**, Part 1, 2, 3, Natsional. Akad. Nauk Ukraïni, Inst. Mat., Kiev, 2004.

[75] Güngör F. Symmetry classification of KdV-type nonlinear evolution equations / F. Güngör, V.I. Lahno, R.Z. Zhdanov // J. Math. Phys. – 2004. – **45**, no. 6. – P. 2280-–2313.

[76] Lagno V.I. Group classification of quasilinear equations of elliptic type. I. Invariance with respect to Lie algebras with nontrivial Levi decomposition / V.I. Lagno, S.V. Spichak // Ukrain. Mat. Zh. – 2007. – **59**, no. 11, P. 1532–1545; translation in Ukrainian Math. J. – 2007. – **59**, no. 11, P. 1719–1736.

[77] Lahno V.I. Group classification of quasilinear elliptic-type equations. II. Invariance under solvable Lie algebras / V.I. Lahno, S.V. Spichak // Ukrainian Math. J. – 2011. – **63**, no. 2, P. 236–253.

[78] Basarab-Horwath P. Symmetry classification of third-order nonlinear evolution equations. Part I: Semi-simple algebras / P. Basarab-Horwath, F. Güngör, V. Lahno // Acta Appl. Math. – 2013. – **124**, 123-–170.

[79] Huang Q. Preliminary group classification of a class of fourth-order evolution equations / Q. Huang, V. Lahno, C.Z. Qu, R. Zhdanov // J. Math. Phys. – 2009. – **50**, no. 2, 023503, 23 pp.

[80] Rideau G. Evolution equations invariant under two-dimensional space-time Schrödinger group / G. Rideau, P. Winternitz // J. Math. Phys. – 1993. – **34**, no. 2, P. 558–570.

[81] Fushchich W.I. Reduction of the representations of the generalized Poincare algebra by the Galilei algebra / W.I. Fushchich, A.G. Nikitin // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1980. – Vol. 13, № 7. – P. 2319–2330.

[82] Fushchich W.I. On a possible approach to the variable mass problem / W.I. Fushchich, I.Yu. Krivsky // Nucl. Phys. B7. – 1968. – **17**, N 1. – P. 79–87.

[83] Fushchich W.I., Krivsky I.Yu. On representations of the inhomogeneous de Sitter group and equations in five–dimensional Minkovsky space / W.I. Fushchich, I.Yu. Krivsky // Nucl. Phys. B. – 1969. – **14**, N 2. – P. 537–544. 573–585.

[84] Фущич В. И. Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I / В.И. Фущич // Теорет. и мат. физика. – 1970. – **4**, N 3. – С. 360–367.

[85] Fushchich W.I. On a motion equations for two particles in relativistics quantum mechanics / W.I. Fushchich // Lett. Nuovo Cimento. – 1974. – **10**, N 4. – P. 163–168.

[86] Кадышевский В.Г. Новый подход к теории електромагнитных взаимодействий / В.Г. Кадышевский // Физика элементар. частиц и атомн. ядра. – 1980. – **11**, N 1. – С. 5–39.

[87] Фущич В.И. Симметрия уравнений квантовой механики. / В.И. Фущич, А.Г. Никитин. – Москва: Наука, 1990. – 400 с.

[88] Федорчук В.І., Диференціальні рівняння першого порядку в просторі $M(1,4) \times R(u)$ з нетривіальними групами симетрії / В.І. Федорчук// Праці інституту математики НАН України. – 2001. – 36, 283–292.

[89] Fedorchuk V.M. On Differential Invariants of First- and Second-Order of the Splitting Subgroups of the Generalized Poincaré Group $P(1,4)$ / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics: Proc. 4th Int. Conf. (Ukr. Math. Congr. Dedicated to 200th Anniversary of Mykhailo Ostrohrads'kyi), Kyiv, 9–15 July 2001. – Part 1. – Kyiv: Inst. of Math. of NAS of Ukraine. – 2002. – 140–144. – (Proc. Inst. of Math. of NAS of Ukraine. – 2002. – 43, Part 1).

[90] Fedorchuk V.M. On new differential equations of the first order in the space $M(1,4) \times R(u)$ with non-trivial symmetries / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia Mathematica III. – 2003. – Folia 16. – P. 49–53.

[91] Fedorchuk V. Some new differential equations of the first-order in the spaces $M(1,3)\times R(u)$ and $M(1,4)\times R(u)$ with given symmetry groups / V. Fedorchuk, V. Fedorchuk // Functional Analysis and its Applications, North-Holland Mathematics Studies, 197, Editor: Saul Lubkin, Elsevier. – 2004. – P. 85–95.

[92] Fedorchuk V.M. On the Differential First-Order Invariants of the Non-Splitting Subgroups of the Poincaré Group $P(1,4)$ / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // Proc. of the Fifth Internat. Conf. Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (23–29 June 2003, Kyiv, Ukraine), Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004. – V. 50, Part 1. – P. 85–91.

[93] Федорчук В.М. Про функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неперервних підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$ / В.М. Федорчук, В.І. Федорчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, N 4. – С. 51–58.

[94] Fedorchuk V.M. First-order differential invariants of the splitting subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica. – 2006. – Fasciculus XLIV. –P. 21–30.

[95] Fedorchuk V.M. On first-order differential invariants of the non-conjugate subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // Differential Geometry and its Applications: Proc. of 10th Int. Conf. on DGA 2007, in Honour of Leonhard Euler, Olomouc, Czech Republic, 27-31 August 2007 World Scientific Publishing Company. – 2008. – P. 431–444.

[96] Fedorchuk V.M. On functional bases of the first-order differential invariants for non-conjugate subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ /

V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia Mathematica VII. – 2008. – Folia 63. – P. 41–50.

[97] Федорчук В.І. Про часткову попередню групову класифікацію нелінійного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера / В.І. Федорчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2012. – Vol. 55, No 3. – С. 35–43. Translated in Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – **194**, No. 2. – P. 166–175.

[98] Федорчук В.І. Про інваріантні роз'язки деяких п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера / В.І. Федорчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2014 .– **57**, No 4. – С. 27–34.

[99] Федорчук В.М. Підгрупова структура узагальненої групи Пуанкаре $P(1,4)$ та моделі з нетривіальною симетрією / В.М. Федорчук, В.І. Федорчук // Український Математичний Конгрес, Математична фізика, Секція 5, Інститут математики НАН України: Тези доповідей. – Київ, 2001. – С. 32.

[100] Fedorchuk V.I. Some new differential equations of the first-order in the space $M(1,4) \times R(u)$ with given symmetries / V.I. Fedorchuk // International Conference on "Functional Analysis and its Applications"Dedicated to the 110 th anniversary of Stefan Banach, May 28–31, 2002. Book of abstract – Lviv: Ivan Franko National University, 2002. – P. 70.

[101] Fedorchuk V.M. On construction of the first-order differential equations in the space $M(1,4) \times R(u)$ with non trivial symmetry groups / V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk // The Int. Math. Conf. Honoring O.A. Graves's 100th year since the beginning of his work at Kyiv University, Kyiv, 17–22 June, 2002. Book of abstract – Kyiv: Inst. of Math. of NAS of Ukraine, Kyiv Nat. Taras Shevchenko Univ, 2002.– P. 21.

[102] Федорчук В.І. Про функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку розщеплюваних підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$ / В.І. Федорчук // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і метематики ім. акад. Я.С. Підстригача, Львів, 24–27 травня 2005 р. Тези доповідей. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. акад. Я.С. Підстригача, 2005, – С. 321–322.

[103] Федорчук В.І. Про попередню групову класифікацію нелінійного п'ятивимірного рівняння д'Аламбера / В.І. Федорчук // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання Львів, 23–25 травня 2012 р. Тези доповідей. – Львів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: (http://iapmm.lviv.ua/chyt2012/materials/48.pdf).

[104] Федорчук В.І. Про симетрійну редукцію деяких класів диференціальних рівнянь в просторі $M(1,4) \times R(u)$ до класів чотиривимірних диференціальних рівнянь / В.І. Федорчук // V Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу Івано-Франківськ, 19–21 вересня 2013 р. Тези доповідей. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, 2013. – С. 73.

[105] Fedorchuk V.I. On exact solutions of some linear and non-linear $P(1,4)$-invariant d'Alembert equations / V.I. Fedorchuk // Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання – 2015 Львів, 26–28 травня 2015 р. Тези доповідей. – Львів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: (http://iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Fedorchuk.pdf).

[106] Fedorchuk V.I. On Exact Solutions of Some $P(1,4)$-Invariant d'Alembert Equations / V.I. Fedorchuk // Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 3–6 червня 2015): Тези доповідей. – Київ, 2015. – С. 118.

[107] Fedorchuk V.I. On Symmetry Reduction and Exact Solutions of Some $P(1,4)$-Invariant d'Alembert Equations / V.I. Fedorchuk // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька, Дрогобич, 25–28 серпня 2015 р. Тези доповідей. – Дрогобич, 2015. – С. 40.

[108] Tresse A. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations / A. Tresse // Acta math. – 1894. – **18**. – P. 1–88.

[109] Olver P.J. Differential invariants. Geometric and algebraic structures in differential equations / P.J. Olver // Acta Applicandae Math. – 1995. – **41**, N 1–3. – P. 271–284.

[110] Kumpera A. Invariants différentiels d'un pseudogroupe de Lie, Géométrie diffentielle / A. Kumpera // Lecture Notes in Math., Springer, Berlin. – 1974. – **392**. – P. 121–162.

[111] Kumpera A. Invariants différentiels d'un pseudogroupe de Lie. I. / A. Kumpera // J. differential Geometry. – 1975. – **10**, N 2. – P. 289–345.

[112] Kumpera A. Invariants différentiels d'un pseudogroupe de Lie. II. / A. Kumpera // J. differential Geometry. – 1975. – **10**, N 3. – P. 347–416.

[113] Chupakhin A.P. Differential invariants: theorem of commutativity / A.P. Chupakhin // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2004. –**9**, Issue 1. – P. 25–33.

[114] Бойко В.М. Про диференціальні інваріанти в просторі двох змінних / В.М. Бойко, Р.О. Попович // Доповіді НАН України. – 2001. – N 5. – С. 7–10.

[115] Vessiot E. Sur l'integration des sistem differentiels qui admittent des groupes continus de transformations / E. Vessiot // Acta math. – 1904. – **28**. – P. 307–349.

[116] Nutku Y. Differential Invariants and group foliation for the complex Monge-Ampère equation / Y. Nutku, M.B. Sheftel // J. Phys. A: Math. Gen. – 2001. – **34**, P. 137–156.

[117] Sheftel M.B. Method of group foliation and non-invariant solutions of invariant equations / M.B. Sheftel // Symmetry in nonlinear mathematical physics, Part 1,2 (Kyiv,2001), Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos. – 2002. – **43**, Part 1,2, Natsional. Akad. Nauk. Ukrainy, Inst. Mat. Kiev. – P. 215–224.

[118] Golovin S.V. Group Foliation of Euler Equations in Nonstationary Rotationally Symmetrical Case / S.V. Golovin // Proceedings of Institute of NAS of Ukraine. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 110–117.

[119] Фущич В.И. Дифференциальные инварианты алгебры Галилея / В.И. Фущич, И.А. Егорченко // Докл. АН УССР. – 1989. – Сер. А, N 4. – С. 29–32.

[120] Фущич В.И. Дифференциальные инварианты алгебры Пуанкаре и конформной алгебры / В.И. Фущич, И.А. Егорченко // Докл. АН УССР. – 1989. – Сер. А, N 5. – С. 21–22.

[121] Yehorchenko I.A. Differential Invariants for nonlinear representation of the Poincaré algebra. Invariant equations / I.A. Yehorchenko // in Proc. of Second Internat. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics"Memorial Prof. W. Fushchych Conf. (7–13 July 1997, Kyiv), Editors M.I. Shkil', A.G. Nikitin and V.M. Boyko, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 1997. – **1**. – P. 200–205.

[122] Ibragimov N.H. Differential invariants of nonlinear equations $\nu_{tt} = f(x, \nu_x)\nu_{xx} + g(x, \nu_x)$ / N.H. Ibragimov, M. Torrisi, A. Valenti // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation – 2004. – **9**. – Issue 1. – P. 69–80.

[123] Xu, Xiaoping Differential invariants of classical groups / X. Xu // Duke Math. J. – 1998. – **94**, N 3. – P. 543–572.

[124] Lahno V.I. Realizations of the Poincaré algebra and Poicaré-invariant equations in three-dimensional space-time / V.I. Lahno // XXXI Symposium on Mathematical Physics (Toruń, 1999), Rep. Math. Phys. – 2000. – **46**, N 1-2. – P. 137–142.

[125] Lahno V.I. On new relativistically invariant nonlinear equations in two-dimensional space-time / V.I. Lahno // Rep. Math. Phys. – 1998. – **41**, N 3. – P. 271–277.

[126] Бойко В.М. Диференціальні інваріанти однопараметричних груп Лі / В.М. Бойко, Р.О. Попович // Праці Інституту математики НАН України. – 2001. – **36**, P. 51–62.

[127] Popovych R. O. Differential Invariants and Application to Riccati-Type Systems / R.O. Popovych, V.M. Boyko // Proc. of the Fourth Internat. Conf. Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (9–15 July 2001, Kyiv, Ukraine), Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv. – 2002. – **43**, Part 1, P. 184–193.

[128] Tracina R. Invariants of a family of nonlinear wave equations / R. Tracina // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2004. – **9**, Issue 1. – P. 127–133.

[129] Golovin S.V. Applications of the differential invariants of infinite dimensional groups in hydrodynamics / S.V. Golovin // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation – 2004. – **9**, Issue 1. – P. 35–51.

[130] Yegorchenko I.A. Second-order differential invariants for the Poincaré, Galilei and conformal algebras in many-dimensional spaces /

Yegorchenko I.A. // "Classical and Quantum Systems"(1991, Goslar), World Sci. Publishing, River Edge, NJ. – 1993. – P. 738–741.

[131] Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений / Овсянников Л.В. – Новосибирск: НГУ, 1966. – 131 с.

[132] Федорчук В.М. Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$ / Федорчук В.М. – Киев, 1978. – 36 с. – (Препринт/АН УССР. Ин–т математики; 78.18).

[133] Федорчук В.М. Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ / В.М. Федорчук // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, N 6. – С. 717–722.

[134] Федорчук В.М. Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ / В.М. Федорчук // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, N 5. – С. 696–700.

[135] Федорчук В.М. О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре / В.М. Федорчук, В.И. Фущич // Теоретико–групповые методы в физике: Тр. Междунар. семинара. Звенигород, 1979. – М.: Наука, 1980. – **1**. – С. 61–66.

[136] Fushchich W.I. Continuous subgroups of the Poincare group $P(1,4)$ / W.I. Fushchich, A.F. Barannik, L.F. Barannik, V.M. Fedorchuk // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – **18**, N 14. – P. 2893–2899.

[137] Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform / Ablowitz M.J., Segur H. // SIAM Studies in Appl. Math., **4**, Philadelphia (1981).

[138] Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Модель релятивистской струны в физике адронов / Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 176 с.

[139] Bhatnagar P.L. Nonlinear Waves in One-Dimensional Dispersive Systems, Clarendon, Oxford (1979).

[140] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи / Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. – М.: Наука, 1980. – 324 с.

[141] Fushchich W.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations / W.I. Fushchich, N.I. Serov // J. Phys. A: Math. Gen. – 1983. – **16**, P. 3645–3658.

[142] Grundland A.M. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations / A.M. Grundland, J. Harnad, P. Winternitz // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, No. 4, P. 791–806.

[143] Grundland A.M. Applications of the three-dimensional "φ^6" - model to structural phase transitions / A.M. Grundland, J.A. Tuszyński, P. Winternitz // Proc. XV Int. Colloq. on Group Theoretical Methods in Physics (Philadelphia, PA, 1986), World Sci. Publ., Teaneck, NJ (1987), pp. 589–601.

[144] Grundland A.M. Group theory and solutions of classical field theories with polynomial nonlinearities / A.M. Grundland, J.A. Tuszyński, P. Winternitz // Found. Phys. – 1993. – **23**, No. 4, P. 633–665.

[145] Федорчук В.М. О некоторых точных решениях пятимерного нелинейного волнового уравнения / В.М. Федорчук // Теоретико–групповые методы в физике: Тр. Третьего семинара. Юрмала, 1985.– М.: Наука, 1986.– **1**.–С. 495–497.

[146] Фущич В.И. Подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре и точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений /

Фущич В.И., Федорчук В.М., Федорчук И.М.–Киев, 1986.–36 с.–(Препринт/АН УССР. Ин–т математики; 86.27).

[147] Федорчук В.М. Редукция и точные решения пятимерных нелинейных волновых уравнений / Федорчук В.М., Федорчук И.М. – Киев, 1988. – 27 с.– (Препринт/АН УССР. Ин–т математики; 88.21).

[148] Федорчук В.М. Про симетрійну редукцію і точні розв'язки нелінійного п'ятивимірного хвильового рівняння / В.М. Федорчук // Доп. НАН України.– 1995. – N 9. – С. 21–23.

[149] Федорчук В.М. Симетрійна редукція і деякі точні розв'язки нелінійного п'ятивимірного хвильового рівняння / В.М. Федорчук // Укр. мат. журн.– 1996.– **48**, N 4. – С. 574–577.

[150] Румер Ю.Б. Исследования по 5-оптике. Государственное издательство технико-теоретической литературы / Румер Ю.Б. – Москва, 1956, 152 с.

[151] Barone A. Theory and applications of the sine-Gordon equation / A. Barone, F. Esposito, C.J. Magee, A.C. Scott // Nuovo Cimento. – 1971. – **1**, P. 227–267.

[152] Lamb G.L., Jr. Elements of Soliton Theory / Lamb G.L., Jr., John Wiley, 1980.

[153] Scott A.C. The soliton: a new concept in applied science/ A.C. Scott, F.Y.F. Chu, D.W. McLaughlin// Proc. IEEE.– 1973.– **61**.– P. 1443–1483.

[154] Anderson R.L. Bäcklund transformations and new solutions of nonlinear wave equations in four-dimensional space-time / R.L. Anderson, A.O. Barut, R. Rączka // Lett. Math. Phys.– 1979.– **3**, no. 5, P. 351–358.

[155] Christiansen P.L. Numerical study of 2+1-dimensional sine-Gordon solitons / P.L. Christiansen, P.S. Lomdahl // Phys. **2D**. – 1981, no. 3. – P. 482–494.

[156] Leibbrandt G. New exact solutions of the classical sine-Gordon equation in 2+1 and 3+1 dimensions / G. Leibbrandt // Phys. Rev. Lett. – 1978. – **41**. – P. 435–438.

[157] Whitham G.B. Comments on some recent multisoliton solutions / G.B. Whitham // J. Phys. – 1979. – **A12**. – L1–L3.

[158] Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Раджараман Р. – М. : Мир. – 1985. – 414 с.

[159] Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики / В.И. Фущич // “Теоретико-алгебраические исследования в математической физике”, отв. ред. В.И. Фущич, Киев, Институт математики АНУССР. – 1981. – с. 6–28

[160] Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P. Solutions of the multidimensional sine-Gordon equation obtained by symmetry reduction / A.M. Grundland, J. Harnad, P. Winternitz // Kinam Rev. Fi̍s. – 1982. – **4**, no. 3. – P. 333–344.

[161] Barannik A.F. Reduction of the Liouville equation in the Minkowski space $R_{1,n}$ / A.F. Barannik // Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A. – 1990. – no. 7. – P. 3–6, 87.

[162] Džordžadze G.P. Singular solutions of the equation $\Box u + \frac{m^2}{2} exp(u) = 0$ and the dynamics of singularities / G.P. Džordžadze, A.K. Pogrebkov, M.K. Polivanov //Teoret. Mat. Fiz. – 1979. – **40**, no. 3. – P. 221–234.

[163] Jorjadze G.P. Liouville field theory: IST and Poisson bracket structure / G.P. Jorjadze, A.K. Pogrebkov, M.C. Polivanov, S.V. Talalov //J. Phys. A. – 1986. – **19**, no. 1. – P. 121–139.

[164] Pogrebkov A.K. The Liouville and sinh-Gordon equations. Singular solutions, dynamics of singularities and the inverse problem method / A.K. Pogrebkov, M.K. Polivanov // Mathematical physics reviews, Vol. 5, 197–271, Soviet Sci. Rev. Sect. C Math. Phys. Rev., Vol. 5, Harwood Academic Publ., Chur, 1985.

[165] Newell A.C. The inverse scattering transform / Newell A.C.– Solitons (R.K. Bullough and P.J. Caudrey, Eds.), Springer, Berlin.– 1980, P. 177.

[166] Pogrebkov A.K. Interaction of particles and fields in classical theory / A.K. Pogrebkov, M.K. Polivanov // Soviet J. Particles and Nuclei. – 1983, **14**, no. 5, 450–457 (1984); translated from Fiz. Èlementar. Chastits i Atom. Yadra. – 1983. – **14**, no. 5. – P. 1073–1091.

[167] Fushchich W.I. Some exact solutions of the many-dimensional sine-Gordon equation / W.I. Fushchich, Yu.N. Seheda // Lettere Nuovo Cimento. – 1984. – **41**, N 14. – P. 462–464.