Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

**Дільний Володимир Миколайович**

*УДК 517.5*

# АСИМПТОТИЧНІ ТА АПРОКСИМАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.01 — математичний аналіз

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії функцій і теорії ймовірностей Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

**Науковий консультант:**

доктор фізико-математичних наук,
професор **Шеремета Мирослав Миколайович**,
завідувач кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей
Львівського національного університету імені Івана Франка

**Офіційні опоненти:**

доктор фізико-математичних наук,
професор **Зелінський Юрій Борисович**,
завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу
Інституту математики НАН України;

доктор фізико-математичних наук,
професор **Фаворов Сергій Юрійович**,
професор кафедри фундаментальної математики
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна

доктор фізико-математичних наук,
професор **Філевич Петро Васильович**,
завідувач кафедри інформаційних технологій
ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені
Василя Стефаника"

Захист відбудеться 09 червня 2016 р. о 15.00 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий 04 травня 2016 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Гуран І.Й.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Одним з базових підходів до дослідження об'єктів складної природи як у математиці загалом, так і в математичному аналізі зокрема є їх наближення простішими. Найвідомішим і найпродуктивнішим методом цього напрямку є зображення функцій рядами Тейлора, Фур'є, Діріхле та іншими. Проте при застосуваннях цих розкладів виникають труднощі, часто пов'язані з вузькістю класу функцій, які можна розвинути в той чи інший ряд. Одним із вдалих способів подолати ці труднощі є одержана в 1949 році теорема А. Бьорлінга про апроксимацію функцій з простору Гарді в одиничному крузі скінченними лінійними комбінаціями функцій системи $\{G(z)z^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Десятьма роками пізніше П. Лакс переніс цей результат на випадок просторів Гарді у півплощині. При цьому природним виявилося дослідження повноти системи $\{G(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\}$. Подальші дослідження показали, що результати, одержані для просторів Гарді, часто мають прямі аналоги для об'єктів складнішої природи, бо теорія цих просторів, розроблена Ф. і М. Ріссами, Н. Вінером, Р. Пелі, є досить прозорою і потужною. Елегантність результатів А. Бьорлінга та П. Лакса викликала потужний інтерес до цієї тематики, що розвинулася в дослідження циклічних, мультициклічних, гіперциклічних функцій та операторів, трансляційно інваріантних підпросторів. Цими питаннями активно займалися, зокрема, Х. Шапіро, який і ввів термін "циклічна функція", В. П. Хавін, Н. К. Нікольський, В. І. Васюнін, В. Рудін, Б. Юсефі, Н. Гогус, К. Массанеда, Н. Зорбоска, А. Бонілла, В. П. Гурарій, Х. Хеденмальм, Б. В. Винницький, В. В. Капустін, А. Д. Баранов, В. Е. Кім та багато інших.

З огляду на результати цих авторів природний інтерес викликали вагові узагальнення просторів Гарді. Багато результатів одержано для ваг степеневого типу, зокрема ваг Макенхаупта. Проте завершених результатів для вагових просторів Гарді з вагою експоненціального типу є порівняно небагато. Зокрема, відкритою залишалася **проблема** опису всіх циклічних функцій у просторах такого типу. Б. Винницький розглянув ваговий простір Гарді $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \sigma < +\infty$, функцій, аналітичних у правій півплощині, що характеризуються експоненційним ростом. Цей простір є з одного боку, як показав А. Седлецький, узагальненням простору Гарді у правій півплощині $H^p(\mathbb{C}_+)$, а з іншого — аналогом для півплощини добре відомого простору Пелі-Вінера $W^p_\sigma$, що складається з цілих функцій експоненціального типу $\leq \sigma$, що належать $L^p(\mathbb{R})$. Однак спроби одержати критерій циклічності в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ наштовхнулися на необхідність глибокої розробки теорії цих просторів. Зокрема, виявилися потрібними аналоги результатів типу теорем Пелі-Вінера про зображення та про аналітичне продовження, інтегральних формул Коші та Пуассона, теорем Фрагмена-Ліндельофа у різних областях комплексної площини. У процесі досліджень виявилося, що властивості просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 < \sigma < +\infty$, кардинально відрізняються від властивостей у неваговому випадку $H^p(\mathbb{C}_+)$. Зокрема, у ваговому випадку швидке спадання функції по дійсній півосі пов'язане зі швидким зростанням її по уявній осі. Для отримання критерію циклічності виникає **проблема** точного опису цього зв'язку.

Дослідження циклічності у просторах аналітичних функцій, як детально показано у монографіях Н. Нікольського, тісно пов'язані з деякими питаннями функціонального аналізу. Окремим потужним напрямком тут є дослідження операторів у просторах типу Гарді, чим, крім згаданих вище математиків санкт-петербурзької школи, займалися Ж. Шапіро, П. Бурдон, Е. Стейн, Р. Койфман, Г. Вейсс, Є. М. Динькін, Б. П. Осіленкер, Г. Семпсон, Д. Фонг, Й. Пен, К. Жао, Ж. Кіма, В. Росс та інші вчені.

Дослідження циклічності повязані із вивченням "переповнених" систем, у зв'язку з чим виникають задачі їх "прорідження", знаходження фреймів, абсолютно зображувальних систем, базисів у системах експонент з вагою, а також використання грунтовно розробленої А. Ф. Лєонтьєвим, М. М. Шереметою, О. Б. Скасківим, П. В. Філевичем та їх учнями теорії рядів Діріхле.

Певні труднощі для застосувань результатів, одержаних при вивченні просторів Гарді, виникають через різноманітність областей, на яких ці простори розглядаються. Крім класичних одиничного круга і півплощини, багато цікавих результатів одержано для смуги, півсмуги, кута і т. д. У зв'язку з цим природною є **проблема** узагальнення отриманих результатів на області загальнішого виду, однією з яких є необмежена багатокутна область.

Дослідження, об'єктом яких є простори Гарді аналітичних функцій, часто знаходять застосування у комплексному та функціональному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, а також у прикладних напрямах: геодинаміці, теорії інформації, квантовій фізиці. Тому можна очікувати практично важливих застосувань і для результатів з теорії вагових просторів Гарді.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана на кафедрі теорії функцій і теорії ймовірностей механіко–математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Львівського національного університету імені Івана Франка. Дослідження виконані в рамках держбюджетних тем Мг–145 Ф "Нові комплексно-ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами" (номер держреєстрації 0113 U 003051) та Мг–159Ф "Методи комплексного та гармонійного аналізу в теорії аналітичних функцій у банахових просторах" (номер держреєстрації 0113 U 000184).

**Мета і завдання дослідження.** *Метою дисертації* є отримання нових апроксимаційних та асимптотичних властивостей у просторах аналітичних функцій, що передбачає вирішення таких завдань:

- поширити теорію просторів Гарді на простори $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, зокрема довести аналоги класичних теорем про зображення;
- одержати критерій циклічності у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- встановити аналог принципу невизначеності в гармонічному аналізі для $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- встановити для функцій з простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \leq p < +\infty$, точний зв'язок швидкого зростання по уявній осі та швидкого спадання по дійсній півосі;
- отримати повний опис елементарних розв'язків рівняння типу згортки у півсмузі;
- встановити умови розщеплення функцій із $W^1_\sigma$;
- одержати аналог теорем про зображення та про згортку для просторів типу Смірнова у багатокутній необмеженій області;
- отримати еквівалентне формулювання гіпотези Рімана у термінах циклічності для вагового простору Гарді;
- встановити критерій повноти та критерій мінімальності системи $\{\cos t\rho_k + t\rho_k \sin t\rho_k : k \in \mathbb{N}\}$ у просторі $L_2(0;1)$.

*Об'єктами* дослідження є класичні та вагові простори Гарді, простори Пелі-Вінера та рівняння типу згортки в областях комплексної площини.
*Предметом* дослідження є властивості функцій із просторів аналітичних функцій, зокрема умови повноти систем функцій для вагових просторів Гарді та деяких просторів цілих функцій, а також дослідження властивостей розв'язків рівнянь типу згортки.

**Методи дослідження.** Для розв'язання поставлених задач використовувались методи теорії функцій комплексної змінної, математичного аналізу, функціонального аналізу та деякі прийоми з робіт А. Бьорлінга, Б. Я. Левіна, Ю. І. Любарського, А. М. Сєдлєцкого, Б. В. Винницького, В. П. Гурарія.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Усі наукові результати, які отримані в дисертаційній роботі, є новими і полягають у наступному:

- знайдено критерій циклічності функцій у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- отримано опис трансляційно інваріантних підпросторів у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- знайдено нову реалізацію принципу невизначеності в гармонічному аналізі для пари функцій: функції та їх перетворення Фур'є не можуть бути одночасно дуже малими;
- встановлено для функцій із простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \le p < +\infty$, еквівалентність швидкого зростання у деякому сенсі по уявній осі та швидкого спадання по дійсній півосі;
- знайдено нові зображення для функцій з вагових просторів Гарді;
- встановлено критерій розщеплення функцій із $W^1_\sigma$;
- завершено встановлення аналогу теорії спектрального аналізу В.П. Гурарія для простору Гарді-Смірнова у півсмузі $E^2[D_\sigma]$;
- одержано аналог теореми про зображення та теореми про згортку для просторів типу Смірнова у багатокутній необмеженій області;
- знайдено новий еквівалент гіпотези Рімана, чим узагальнено один результат Ж.-Ф. Бурноля;
- встановлено критерій повноти та критерій мінімальності системи $\{\cos t\rho_k + t\rho_k \sin t\rho_k : k \in \mathbb{N}\}$ у просторі $L_2(0;1)$.

**Практичне значення одержаних результатів.** Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть знайти застосування як у подальших дослідженнях з теорії функцій, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, функціональному аналізі так і в теорії інформації, квантовій механіці, геодинаміці.

**Особистий внесок здобувача.** Всі результати дисертаційної роботи отримані її автором самостійно. У статті, написаній у співавторстві з І. Б. Шепарович, співавтору належить ідея прикладу. У статті, спільній з Т. Війчуком, співавтору належить ідея спрощення доведення теореми 2. У статтях, спільних з Б. В. Винницьким, результати належать співавторам в однаковій мірі.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації апробовано на таких конференціях:

1) міжнародній науковій конференції "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь."(Дрогобич, 27 вересня – 1 жовтня 2004 р.)
2) міжнародній конференції "Математичний аналіз і суміжні питання." (Львів, 17 -20 листопада 2005 р.)
3) міжнародній зимовій математичній конференції для молодих вчених (Уфа, 2005 р.)
4) міжнародній конференції "Entire and subharmonic functions and related topics." (Харків, 14 – 17 серпня 2006)
5) міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24 – 28 вересня 2007 р.);
6) міжнародній конференції "Аналіз і топологія" (Львів, 26 травня – 07 червня 2008 р.);
7) міжнародній конференції з комплексного аналізу пам'яті А. А. Гольдберга (Львів, 31 травня – 5 червня 2010),
8) міжнародній конференції імені В.Е. Лянце (Львів, 17-21 листопада 2010 р.);
9) міжнародній конференції "Complex Analysis and its applications", присвяченій 70-річчю А. Ф. Грішина (Харків, 15–18 серпня 2011 р.);
10) міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.);

11) XXI літній конференції з математичного аналізу (Санкт-Петербург, Росія, 25–30 червня 2012 р.);
12) міжнародній математичній конференції "Complex analysis and related topics" (Львів, 23-28 вересня 2013 р.);
13) IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 р);
14) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 р).
15) міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25–28 серпня 2015 р.);

Результати дисертації неодноразово доповідалися на

- Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники — проф. О. Б. Скасків та проф. $\boxed{\text{А. А. Кондратюк}}$),
- семінарі з теорії потенціалу та її застосувань у Львівському національному університеті імені Івана Франка (керівники — проф. О. Б. Скасків, проф. І. Е. Чижиков),
- семінарі з комплексного аналізу та теорії потенціалу ІМ НАН України (керівник — проф. Ю. Б. Зелінський),
- семінарі з математичного аналізу у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка (керівник — проф. Б. В. Винницький),
- Харківському міському семінарі з комплексного аналізу (керівники — проф. $\boxed{\text{А. Ф. Грішин}}$, проф. С. Ю. Фаворов),
- семінарі з теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник — проф. А. С. Романюк),
- семінарі з теорії аналітичних функцій у Прикарпатському національному університеті ім. Василя Стефаника (керівник проф. П. В. Філевич),
- спільному засіданні семінарів з комплексного та нелінійного аналізу і функціонального аналізу у Львівському національному університеті імені Івана Франка (керівники проф. $\boxed{\text{А. А. Кондратюк}}$, проф. О. Г. Сторож, доц. Я. В. Микитюк),

- Київському семінарі з функціонального аналізу (керівники - акад. НАН України Ю. М. Березанський, член-кор. НАН України М. Л. Горбачук, акад. НАН України Ю. С. Самойленко).

**Публікації.** Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 41 статті і науковому повідомленні, з яких 24 (16 без співавторів ) — у фахових виданнях. З них 9 (7 без співавторів) — у базах даних Web of Science або SCOPUS.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, 7 розділів, висновків та списку використаних джерел, який налічує 201 найменування. Загальний обсяг дисертації — 303 сторінки, обсяг списку використаних джерел — 17 сторінок.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** дисертації розкрито суть і стан наукової роботи, якій присвячено дисертаційне дослідження, обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі дослідження. У **розділі 1** подано огляд літератури з вивчення асимптотичних та апроксимаційних властивостей аналітичних функцій, окреслено коло проблем, які залишалися нерозв'язаними, і сформульовано основні результати дисертації.

У перших двох підрозділах **Розділу 2** розглядаються задачі розщеплення у просторах $W^p_\sigma$ та $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, які полягають в тому, щоб функції, які є "великими" одночасно у верхній та нижній півплощині, зобразити у вигляді суми двох функцій, одна з яких є "великою" тільки у верхній півплощині, а інша — тільки в нижній.

В теорії просторів аналітичних функцій цікавими і практично важливими є теореми про розщеплення простору на суму чи добуток двох просторів з потрібними властивостями. Класичним є результат про розвинення кожної функції з простору $L^2(\mathbb{R})$ на суму двох функцій, одна з яких належить до класу Гарді $H^2$ у нижній півплощині, а інша належить до $H^2$ у верхній півплощині. У 1960 році Л. Еренпрайс поставив задачу про розщеплення функцій з деякого підпростору простору $W^p_\sigma$ на добуток двох функцій з цього ж підпростору, яку повністю розв'язав Р. Юлмухаметов в 1999 році. Іншим прикладом розвинення є досліджуване Ю. І. Любарським розвинення цілих функцій експоненціального типу з трикутною індикаторною діаграмою на суму двох функцій з простору Пелі-Вінера. Ідейно схожу задачу в термінах субгармонійних функцій розглянув І. Е. Чижиков.

Ми розглядаємо наступну проблему.

**Проблема 1.** *Чи кожна функція $f \in W_\sigma^p$ допускає зображення $f = f_2 - f_3$ для цілих функцій $f_2$, яка задовольняє умову $B(0;\pi)$ і $f_3$, що задовольняє умову $B(\pi; 2\pi)$, де*

$$B(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) : \sup_{\varphi \in (\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\} < +\infty\,? \tag{1}$$

Для ілюстрації проблеми 1 зазначимо, що її розв'язком для функції $f(z) = \sin z$ у випадку $p = \infty$ є

$$f_2(z) = \frac{e^{i\sigma z}}{2i}, \quad f_3(z) = \frac{e^{-i\sigma z}}{2i}.$$

Для випадку $p = 2$ маємо елементарний розв'язок проблеми 1, що базується на теоремі Пелі-Вінера:

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma} \varphi(t) e^{itz} dt, \quad f_3(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{0} \varphi(t) e^{itz} dt.$$

Але для випадку $p = 1$, який є найцікавішим для застосувань, вищенаведене розвинення не є розв'язком проблеми 1 в загальному випадку. Зазначимо, що $W_\sigma^1 \subset W_\sigma^2$ і функція $f$ належить до простору $W_\sigma^2$, $\sigma > 0$, тоді і тільки тоді, коли вона подається у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k c_k \frac{\pi \sin \sigma z}{\sigma z - \pi k}, \tag{2}$$

де $(c_k) \in l^2$. У цьому підрозділі розв'язуємо наступну задачу.

**Задача 1.** *Нехай $f \in W_\sigma^1$. За яких умов на коефіцієнти $c_k$ в зображенні (2) функція $f$ допускає декомпозицію $f = f_2 - f_3$ для цілих функцій $f_2$, $f_3$ які задовольняють при $p = 1$ умови $B(0;\pi)$ і $B(\pi; 2\pi)$ відповідно, де $B$ визначена рівністю* (1).

Ми одержали повний розв'язок задачі 1 у двох формах.

**Теорема 2.1.** *Якщо* $f \in W_\sigma^1$, *то шукана у задачі 1 декомпозиція існує тоді і тільки тоді, коли для коефіцієнтів* $c_k$ *в зображенні* (2) *виконується нерівність*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \theta_{k,m,\delta} \right| < +\infty,$$

*де*

$$\theta_{k,m,\delta} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m+k} e^{i\pi\delta m} - 1}{m - \delta m - k}, & m - \delta m - k \neq 0, \\ \pi i, & m - \delta m - k = 0, \end{cases}$$

*для деякого* $\delta \in (0;1)$.

**Теорема 2.2.** *Якщо* $f \in W_\sigma^1$, *то шукана у задачі 1 декомпозиція існує тоді і тільки тоді, коли для коефіцієнтів* $c_k$ *в зображенні* (2) *виконуються нерівності*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_s \eta_{m,k,s} \right| < +\infty,$$

*де*

$$\eta_{m,k,s} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^s - (-1)^{k+m}}{k + m - s}, & s \neq k + m, \\ \pi i, & s = k + m, \end{cases}$$

*і*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \beta_{m,k} \right| < +\infty,$$

*де*

$$\beta_{m,k} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k+m} - 1}{m - k}, & m \neq k, \\ \pi i, & m = k. \end{cases}$$

Отримані умови досить складно перевірити для конкретних функцій. Часто зручніше скористатися простішими необхідними чи достатніми умовами.

**Наслідок 2.3.** *Якщо для* $f \in W_\sigma^1$, *шукана у задачі 1 декомпозиція існує, то для коефіцієнтів її розвинення* (2)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k = 0.$$

З цього наслідку легко одержати наступне твердження.

**Теорема 2.3.** *Існують функції $f \in W_\sigma^1$, для яких задача 1 розв'язку не має.*

**Теорема 2.4.** *Якщо в зображенні* (2) *функції $f \in W_\sigma^1$ коефіцієнти $c_k$ дорівнюють нулеві для всіх непарних $k \in \mathbb{Z}$, то шукана у задачі 1 декомпозиція існує.*

За теоремою 2.3 задача 1 позитивно розв'язується не для всіх функцій $f \in W_\sigma^1$. Проте важливі застосування може мати розв'язок цієї задачі з деякими послабленими вимогами до розщеплення, а саме вимогою вказаною у задачі 1 поведінки не у всій верхній (нижній) півплощині, а тільки у тих їх частинах, що перетинаються з правою півплощиною.

**Задача 2.** *За яких умов функція $f \in W_\sigma^p$, $1 \le p \le 2$, допускає розвинення $f = f_4 - f_5$, де функції $f_4$ і $f_5$ аналітичні в $\mathbb{C}_+$, $f_4$ задовольняє умову $B\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ і $f_5$ задовольняє $B\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$?*

Нами одержано наступні достатні умови розв'язності задачі 2.

**Теорема 2.5.** *Якщо в зображенні* (2) *функції $f \in W_\sigma^1$ є лише скінченна кількість ненульових коефіцієнтів $c_k$, то задача 2 для неї має позитивний розв'язок.*

**Теорема 2.6.** *Якщо в зображенні* (2) *функції $f \in W_\sigma^1$ коефіцієнти $c_k$ дорівнює нулю для всіх непарних $k \in \mathbb{N}$, то задача 2 для неї має позитивний розв'язок.*

Наступний підрозділ присвячений отриманню теорем типу Фрагмена-Ліндельофа для півсмуги та півплощини, що використовуються у наступних розділах. Одержано такі твердження.

**Теорема 2.9.** *Якщо для кожного прямокутника $M_k = \{z : k < \operatorname{Re} z < 0, |\operatorname{Im} z| < \sigma\}$, $k < 0$, $f$ належить до простору Смірнова $E^p[M_k]$, $1 \le p < +\infty$, $f \in L^p[\partial D_\sigma]$ і виконується нерівність*

$$(\forall \varepsilon > 0) : \sup_{u \in (-\infty; 0)} \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} |f(u + iv)|^p \exp\left(-\varepsilon e^{-\gamma u}\right) dv \right\} < +\infty,$$

*для деякого $\gamma < \frac{\pi}{\sigma}$ і $f(x) \exp\{-\delta e^{-\frac{\pi}{2\sigma} x}\} \in L^p(-\infty; -1)$ для деякого $\delta > 0$, то $f \in E^p[D_\sigma]$.*

Теорема 2.9 є $L^p$-аналогом теореми типу Фрагмена-Ліндельофа для півсмуги, встановленої незалежно різними математиками, зокрема Б. Я. Левіним, П. Лаксом, М. А. Євграфовим.

**Теорема 2.10.** *Якщо функція $f$ є аналітичною в $\mathbb{C}_+$, має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, $f \in L^p[\partial\mathbb{C}_+]$, $1 \le p < +\infty$, і*

$$(\forall\varepsilon > 0) : \sup_{|\varphi|<\pi/2} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \exp\left(-\varepsilon\left(r + \frac{1}{r}\right)\right) dr \right\} < +\infty,$$

*то $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$.*

Ця теорема є узагальненням однієї теореми В. Мартиросяна.

Останній підрозділ присвячений встановленню еквівалентного означення вагового простору Гарді $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Розглянемо простір $\widetilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma \geqslant 0, 1 \leqslant p < +\infty$, аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$||f||_{\widetilde{H}^p_\sigma} := \max\left\{ \sup_{y\in\mathbb{R}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|} dx \right\};\right.$$
$$\left. \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|} dy \right\} \right\}^{1/p} < +\infty.$$

**Теорема 2.11.** *Простори $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та $\widetilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geqslant 0$, $1 \leqslant p < +\infty$, співпадають, причому норми $||\cdot||_{H^p_\sigma}$ та $||\cdot||_{\widetilde{H}^p_\sigma}$ є еквівалентними.*

Ця теорема узагальнює одну теорему А. Седлецького про еквівалентне зображення просторів Гарді у півплощині.

У третьому розділі розглядаються теореми про зображення у просторах $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Починається він доведенням двох теорем типу Пелі-Вінера про зображення. Ці твердження також дозволяють глибше зрозуміти механізм одержання умов, що фігурують у розділі 4, зокрема у його першому та третьому підрозділах.

**Теорема 3.1.** *Функція $G$, визначена рівністю*

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\partial D_\sigma} g(w) e^{zw} dw, \tag{3}$$

*належить до простору $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0$, і виконується умова*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|G(x)|}{x} = -\infty$$

*тоді і тільки тоді, коли* $g \in E^2_*[D_\sigma]$ *і* $g$ *є цілою функцією.*

**Теорема 3.2.** *Функція* $G$*, визначена рівністю* (3)*, належить до простору* $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0$*, і виконується умова*

$$(\exists c_1 \in \mathbb{R}) : G(z) \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z - c_1 z\right) \in H^2(\mathbb{C}_+)$$

*тоді і тільки тоді, коли* $g \in E^2_*[D_\sigma]$*,* $g$ *є цілою функцією і*

$$(\exists c \in \mathbb{R}) : g(w) \exp\left(-ce^{-\frac{w\pi}{2\sigma}}\right) \in E^2[D_\sigma].$$

Для простору Гарді у півплощині відомі безпосередні узагальнення інтегральної формули Коші та формули Пуассона. Для просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, такими формулами скористатися неможливо, оскільки відповідні інтеграли можуть розбігатися. Наступні два короткі підрозділи присвячені одержанню аналогів формул Коші та Пуассона для вагового випадку. Ці результати використовуються в розділі 4. Отримано наступні твердження.

**Теорема 3.3.** *Якщо* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0$*, то*

$$-\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(iv)e^{-i\sigma(z-iv)}}{iv - z} dv - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{f(iv)e^{i\sigma(z-iv)}}{iv - z} dv -$$
$$-\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(u)\sin\sigma(z-u)}{u - z} du = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}_+, \\ 0, z \in \ \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}}_+, \end{cases}$$

**Теорема 3.4.** *Якщо* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0$*, то*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{xe^{-i\sigma(z-iv)} f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xe^{i\sigma(z-iv)} f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv$$
$$-\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{xf(u)\sin\sigma(z-u)}{(u-z)(u+\overline{z})} du, z = x + iy \in \mathbb{C}_+,$$

$$f(z)=\frac{i}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(v-y)e^{-i\sigma(z-iv)}f(iv)}{(y-v)^2+x^2}dv$$

$$+\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(v-y)e^{i\sigma(z-iv)}f(iv)}{(y-v)^2+x^2}dv$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(u-iy)f(u)\sin\sigma(z-u)}{(u-z)(u+\overline{z})}du, z=x+iy\in\mathbb{C}_+.$$

Останній підрозділ третього розділу присвячений отриманню опису функцій, що визначені на уявній осі і є кутовими граничними функціями деяких аналітичних у правій півплощині функцій, що задовольняють певні стандартні умови. Отримано наступне твердження.

**Теорема 3.7.** *Якщо* $f_0 : i\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f_0(it)e^{-\sigma|t|}\in L^1(\mathbb{R})$ *та існує функція* $f_2$, *така що*

*1)* $f_2\in H^p_{2\sigma}(\mathbb{C}_+)$;

*2)* $f_3(iv) := f_1(iv)+f_2(iv)\in L^p(-\infty;0)$, $f_1(iv) := f_0(iv)e^{-\sigma v}$;

*3) для майже всіх* $\tau<0$

$$\int_0^{+\infty}f_1(iv)e^{i\tau v}dv+\frac{1}{i}\int_0^{+\infty}f_2(u)e^{\tau u}du+\int_{-\infty}^{0}f_3(iv)e^{i\tau v}dv=0,$$

*то існує аналітична в* $\mathbb{C}_+$ *функція* $f$, *для якої* $f_0$ *є кутовою граничною функцією і*

$$\sup\left\{\int\limits_{0}^{+\infty}\left|f(re^{i\varphi})\right|e^{-\sigma r|\sin\varphi|}dr : \varphi\in(-\pi/2;\pi/2)\backslash(-\delta;\delta)\right\}<+\infty \qquad (4)$$

*для всіх* $\delta\in(0;\pi/4)$.

Центральне місце у дисертаційній роботі займає розділ 4. Він складається з п'ятьох підрозділів та висновків. Головний результат сформульовано у третьому підрозділі, перші два є для нього підготовчими, але становлять певний самостійний інтерес. У першому підрозділі одержано одну з реалізацій принципу невизначеності в гармонічному аналізі. Твердження цього типу полягають у тому, що функція і її перетворення Фур'є не можуть бути одночасно "дуже малими". Однією з перших теорем у цьому напрямку є теорема С. Мандельбройта. Позначимо $D_1=\{z : \operatorname{Re} z<0, -2\sigma<\operatorname{Im} z<0\}$,

$D_1^* = \mathbb{C}\backslash\overline{D}_1$, $D_3 = \{z : \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < 2\sigma\}$, $D_3^* = \mathbb{C}\backslash\overline{D}_3$. Через $E_*^p[D_1]$, $E_*^p[D_3]$ позначимо простори Гарді-Смірнова аналітичних відповідно в областях $D_1^*$ чи $D_3^*$ функцій $f$, для яких

$$\sup\left\{\int\limits_{\gamma} |f(z)|^p |dz|\right\}^{1/p} < +\infty, \tag{5}$$

де супремум береться за всіма відрізками $\gamma$, що лежать відповідно в $D_1^*$ чи $D_3^*$ і є паралельними до координатних осей.

Нами одержано наступне твердження.

**Теорема 4.2.** *Нехай для функцій* $\Omega_1 : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$, $\Omega_3 : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ *виконуються умови*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|\Omega_j(x)|}{x} = -\infty, \quad j \in \{1; 3\},$$

*та*

$$(\Omega_1(x) + \Omega_3(x))\, e^{\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x} \in L^2(0; +\infty),$$

*і для функцій* $q_j$, *визначених рівностями*

$$q_j(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \Omega_j(x) e^{-xw} dx, j \in \{1; 3\},$$

*виконуються умови* $q_1 \in E_*^2[D_1]$, $q_3 \in E_*^2[D_3]$.
*Тоді знайдеться таке* $c \in \mathbb{R}$, *що*

$$\Omega_1(z) e^{-i\sigma z} e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+),\ \Omega_3(z) e^{i\sigma z} e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+),$$

*де* $\ln z$ *– головне значення логарифма в* $\mathbb{C}_+$.

Другий підрозділ четвертого розділу присвячений встановленню еквівалентності між деякими умовами у просторі $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$, одні з яких визначаються поведінкою функції тільки на додатній півосі, а інші — тільки на уявній осі. Для формулювання наступного результату зауважимо, що гранична функція $h$ функції $G \in H^p(\mathbb{C}_+)$ визначається з точністю до адитивної сталої і значень в точках неперервності рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x\to 0+} \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln|G(x+iy)| dy - \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln|G(iy)| dy.$$

**Теорема 4.4.** *Нехай* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma > 0$, *і* $G(z) \neq 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$, *а також* $h(t) \equiv const$. *Тоді наступні умови є еквівалентними:*

$$1)\ \underline{\lim}_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt-2\sigma\ln r\right)=-\infty;$$

$$2) G_1 \notin H^p(\mathbb{C}_+) \text{ для кожного } \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\text{де } G_1(z) = G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z - cz\right\};$$

$$3)\ \lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt-2\sigma\ln r\right)=-\infty;$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)=+\infty;$$

$$5)\ \overline{\lim}_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)=+\infty.$$

Зауважимо, що для випадку $\sigma = 0$ кожна з умов 1)–5) визначає порожню множину у просторі $H^p_0(\mathbb{C}_+) \equiv H^p(\mathbb{C}_+)$. Нам невідомі подібні результати для інших вагових просторів Гарді. Щодо випадку $\sigma = 0$, тобто класу $H^p(\mathbb{C}_+)$, то одержати умови, які пов'язували б "малість" модуля функції на $\partial\mathbb{C}_+$ з "великістю" її модуля на $\mathbb{R}_+$, принципово неможливо. Справді, коли $G$ належить до простору $H^p(\mathbb{C}_+)$, не має нулів у $\mathbb{C}_+$ і її інтегральна гранична функція є сталою, то

$$|G(x)| = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{t^2+x^2}\ln|G(it)|dt + cx\right\},$$

тобто, коли $|G_1(it)| \le |G_2(it)|$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$ і $c = 0$, то $|G_1(x)| \le |G_2(x)|$ для всіх $x > 0$.

Також показано, що у попередній теоремі позбутися умов тривіальності граничної функції та відсутності нулів у правій півплощині не можна. Проте, дещо модифікувавши умови теореми, можна одержати наступне твердження.

**Теорема 4.6.** *Нехай* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1) $$(\forall\, c \in \mathbb{R}) : G\,(z) \exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z - cz\right\} \notin H^p\,(\mathbb{C}_+);$$

2) $$\underline{\lim}_{r\to+\infty} \left(K(r) - \frac{\sigma}{\pi}\log r\right) = -\infty,$$

*де*

$$K(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log|G\,(it)|\, dt$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh\,(t)| - \sum_{1<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right) \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|};$$

3) $$\lim_{r\to+\infty} \left(K(r) - \frac{\sigma}{\pi}\log r\right) = -\infty;$$

4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} = +\infty \ \textit{або} \ \lim_{x\to+\infty}{}^{*} \left(\frac{\log|G\,(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x\right) = +\infty,$$

*де границя* $\lim^*$ *розглядається поза деякою множиною* $E$ *скінченної логарифмічної міри;*

5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} = +\infty, \ \textit{або} \ \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left(\frac{\log|G\,(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x\right) = +\infty.$$

Зауважимо, що для випадку $\sigma = 0$ кожна з умов 1) - 5) визначає порожню множину.

У третьому підрозділі одержано критерій циклічності у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$.
**Теорема 4.8.** *Нехай* $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0, G \not\equiv 0$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними:*
1) $G$ *є циклічною у просторі* $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$*;*
2) $G$ *не має жодного нуля в* $\mathbb{C}_+$*, інтегральна гранична функція* $h$ *функції* $G$ *є сталою і виконується одна з умов 1)–5) теореми 4.4.*

Четвертий підрозділ четвертого розділу присвячений опису трансляційно інваріантних підпросторів, породжених нециклічними функціями у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0$. Позначивши через $\operatorname{span}_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ замикання лінійної оболонки системи $\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$, отримали наступне твердження.

**Теорема 4.13.** *Нехай* $\sigma > 0$ *і*

$$G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+),$$

*для деякого* $c \in \mathbb{R}$. *Тоді* $span_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)}\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ *співпадає з множиною всіх таких функцій вигляду*

$$Q(z) = \varkappa(z)e^{-\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{\widetilde{c}z},$$

*що* $\varkappa \in H^2(\mathbb{C}_+)$, *причому послідовність нулів функції* $G$ *є підпослідовністю послідовності нулів функції* $\varkappa$, $h_\varkappa - h_G$ *є незростаючою і*

$$\widetilde{c} = \overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right).$$

На основі попередніх теорем можемо сформулювати твердження, яке показує, що за певних умов трансляційно інваріантний підпростір, породжений функцією $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, або співпадає зі всім простором $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, або з простором Гарді, домноженим на деяку фіксовану функцію.

**Наслідок 4.4.** *Якщо* $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $G(z) \ne 0$ *для кожного* $z \in \mathbb{C}_+$ *і* $h_G$ *є сталою, то*

$$span_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)}\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$$

$$= \begin{cases} H^2(\mathbb{C}_+)I^*_G(z), & G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+) \text{ для деякого } c \in \mathbb{R}, \\ H^2_\sigma(\mathbb{C}_+) & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Останній підрозділ цього розділу присвячений інтерпретації критерію циклічності для випадку одиничного круга. При цьому розглядається простір Гарді в крузі з вагою, зосередженою поблизу точки на одиничному колі. На нашу думку, перспективною є задача одержання аналогів тверджень цієї дисертації для просторів, які розглядали С. Ю. Фаворов і Л. Б. Голинський, вага у яких зосереджена поблизу множини міри нуль на одиничному колі.

Розділ 5 присвячений дослідженню деяких інтегральних операторів у просторах аналітичних функцій. Він складається з трьох підрозділів та висновків. У першому підрозділі розглядається оператор

$$Tf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{uK(x-u)}{(u-x)(u+x)}f(u)du.$$

в просторі $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, інтерес до якого зумовлений, зокрема, деякими питаннями розділів 3 і 4.

**Теорема 5.1.** *Нехай $K : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ є непарною, $\frac{2\pi}{\sigma}$ – періодичною функцією, $K$ зображається на проміжку $\left[-\frac{\pi}{\sigma}; \frac{\pi}{\sigma}\right]$ рядом Фур'є за синусами*

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\sigma t,$$

*і*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k| < +\infty.$$

*Тоді $T$ є обмеженим оператором з $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ в $L^1(0; +\infty)$ з нормою*

$$\|T\| \leqslant \frac{\pi\alpha}{2},$$

*де*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

Для порівняння з цим результатом нами показано, що $T$ не є обмеженим оператором з $L^1(0; +\infty)$ в $L^1(0; +\infty)$ для випадку $K(t) = \sin \sigma t$.

Нехай $E^p[D_\sigma]$ та $E^p_*[D_\sigma], 1 \le p < +\infty, \sigma > 0$, є просторами аналітичних функцій відповідно в областях $D_\sigma = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma, \operatorname{Re} z < 0\}$ та $D^*_\sigma = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_\sigma$, для яких виконується нерівність (5), у якій супремум береться за всіма відрізками $\gamma$, що лежать відповідно в $D_\sigma$ та $D^*_\sigma$. Функції $f$, що належать цим просторам, мають майже скрізь на $\partial D_\sigma$ кутові граничні значення, що позначаємо через $f(z)$ і $f \in L^p[\partial D_\sigma]$.

Наступні два підрозділи присвячені аналізу у термінах перетворення Фур'є-Лапласа функції $f \in E^2[D_\sigma]$ розв'язків рівняння типу згортки у півсмузі

$$\int_{\partial D_\sigma} f(w + \tau) g(w) dw = 0, \quad \tau \le 0, \quad g \in E^2_*[D_\sigma]. \tag{6}$$

Отримано наступні необхідні умови нетривіальності розв'язку.

**Теорема 5.2.** *Нехай функція $f \in E_2[D_\sigma]$, $f \not\equiv 0$, є розв'язком рівняння (6). Тоді функція $F_1(iy)G(iy)e^{\sigma y}$, де*

$$F_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_1} f(w) e^{-zw} dw,$$

*є кутовою граничною функцією на $i\mathbb{R}$ деякої аналітичної в $\mathbb{C}_+$ функції $P_1$, такої що для кожного $\delta \in (0;\pi/4)$*

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty} \left|P_1(re^{i\varphi})\right| e^{-\sigma r|\sin\varphi|}dr : \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\setminus(-\delta;\delta)\right\} < +\infty.$$

В останньому підрозділі розглядаємо розв'язки рівняння (6), породжені "глибоким нулем" (у термінології В. П. Хавіна), функції $G$. В цьому підрозділі ми розглядаємо конструктивний опис розв'язків у випадку 3). Зазначимо, що цей випадок не має аналогу для $\sigma = 0$. Два інші випадки, за яких можливі нетривіальні розв'язки рівняння (6), а саме наявність хоч одного нуля в $\mathbb{C}_+$ чи нетривіальність інтегральної граничної функції функції $G$, вивчалися раніше Б. В. Винницьким і автором.

**Теорема 5.3.** *Нехай функція $f \in E^2[D_\sigma]$, $f \not\equiv 0$, є розв'язком рівняння* (6), *функція $G$ не має нулів в $\mathbb{C}_+$ і гранична функція $h$ функції $G$ є сталою. Тоді визначені рівностями*

$$F_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{l_j} f(w)e^{-zw}dw, \quad j \in \{1;2;3\},$$

*функції $F_1$ та $F_3$ є цілими і мають в $\mathbb{C}_+$ вигляд*

$$F_1(z) = e^{i\sigma z}e^{a_1 z}\varkappa_1(z)\prod_{|\lambda_n|\le 1}\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\prod_{|\lambda_n|>1}\frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n}\exp\left(\frac{z}{\lambda_n}+\frac{z}{\overline{\lambda}_n}\right),$$

$$F_3(z) = e^{-i\sigma z}e^{a_3 z}\varkappa_3(z)\prod_{|\mu_n|\le 1}\frac{z-\mu_n}{z+\overline{\mu}_n}\prod_{|\mu_n|>1}\frac{1-z/\mu_n}{1+z/\overline{\mu}_n}\exp\left(\frac{z}{\mu_n}+\frac{z}{\overline{\mu}_n}\right),$$

*де $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_3 \in \mathbb{R}$, $\varkappa_1 \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $\varkappa_3 \in H^2(\mathbb{C}_+)$, функції $\varkappa_1$ та $\varkappa_3$ не мають жодного нуля в $\mathbb{C}_+$ і їх граничні функції є сталими. Послідовності нулів $(\lambda_n)$ та $(\mu_n)$ відповідно функцій $F_1$ та $F_3$ містяться обидві в $\mathbb{C}_+$ і задовольняють умови*

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1}\operatorname{Re}\lambda_n < +\infty,$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}-\frac{\sigma}{\pi}\log r\right) = \beta_1,$$

$$\sum_{|\mu_n|\leq 1} \operatorname{Re}\mu_n < +\infty,$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \left( \sum_{1<|\mu_n|\leq r} \left( \frac{1}{|\mu_n|} - \frac{|\mu_n|}{r^2} \right) \frac{\operatorname{Re}\mu_n}{|\mu_n|} - \frac{\sigma}{\pi}\log r \right) = \beta_3,$$

*причому* $\beta_1 \in \mathbb{R}$, $\beta_3 \in \mathbb{R}$. *Також* $F_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, $F_3(z)e^{i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$.

Ця теорема завершує побудову аналогу теорії спектрального аналізу В. П. Гурарія в $E^2[D_\sigma]$.

Розділ 6 присвячений дослідженню просторів Гарді-Смірнова у необмеженій багатокутній області $D$ комплексної площини. У першому його підрозділі розглядається перетворення Фур'є-Лапласа функції $f \in E^2[D]$.

Нехай $D$ - необмежений опуклий $n$- кутник, $n \in \mathbb{N}$, що лежить в деякому куті комплексної площини, величина якого є меншою за $\pi$, і межа якого складається з півпрямих $l_1$ і $l_{n+1}$ та, можливо, відрізків $l_2$, ..., $l_n$, нумерація і орієнтація яких відповідає додатному обходу $\partial D$. Далі, нехай $D^* = \mathbb{C}\backslash\overline{D}$, а $E^p[D]$ і $E^p_*[D]$ - простори функцій, аналітичних відповідно в $D$ і $D^*$, для яких

$$\sup\left\{ \int_\gamma |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty$$

(тут під $|dz|$ розуміємо елемент довжини), де супремум береться за всіма відрізками $\gamma$, що лежать в $D$ (відповідно в $D^*$). В останньому означенні замість відрізків $\gamma$ супремум можна брати також за всіма ламаними, що містяться в $D$ (чи, відповідно в $D^*$), сторони яких паралельні сторонам (відрізкам чи прямим) $\partial D$. Ці простори розглядалися раніше Б. В. Винницьким. Там, зокрема, показано, що функції із цих просторів мають майже скрізь (м.с.) на $\partial D$ кутові граничні значення і $f \in L^p(\partial D)$.

У випадку, коли $D$ є областями $\mathbb{C}(\alpha,\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ чи $D_\sigma = \{z : \operatorname{Re} z < 0, |\operatorname{Im} z| < \sigma\}$, вказані простори співпадають з досліджуваними відповідно у М. М. Джрбашяном та Б. В. Винницьким.

Нехай $\overline{m,n} = [m;n] \cap \mathbb{Z}$. Позначимо через $a_j$, $j = \overline{1,n}$, скінченні вершини області $D$, через $\alpha_j$, $j \in \overline{1,n+1}$ – величини кутів, що рахуються в додатному обході, між додатним напрямом осі абсцис і напрямним вектором променя чи відрізка $l_j$, який визначається раніше вибраним обходом $\partial D$, а через $l_j^*$ - пряму, що проходить через сторону $l_j$. Нехай $\frac{\pi}{\beta}$, $1 < \beta \leqslant +\infty$, – величина кута $\pi - \alpha_{n+1} + \alpha_1$. Через $\overrightarrow{b}$ при $\beta < +\infty$ позначимо вектор з початком у точці перетину прямих $l_1^*$ і $l_{n+1}^*$, який лежить на бісектрисі $l_1^*$ і $l_{n+1}^*$ та напрямлений в сторону області $D$. Якщо ж $\beta = +\infty$, то через $\overrightarrow{b}$ позначатимемо вектор, напрям якого співпадає з вибраним напрямом сторони $l_{n+1}$. Нехай $\varphi_*$, $0 \leqslant \varphi_* < 2\pi$, – кут між додатним напрямом дійсної осі і вектором $\overrightarrow{b}$, який вимірюється від цієї осі у додатному напрямі. Через $\pi_*(l_j)$ позначимо ту півплощину, утворену прямою $l_j^*$, що не містить області $D$. Нехай також $1/\alpha + 1/\beta = 1$ (якщо $\beta = +\infty$, то вважаємо, що $\alpha = 1$) і $h(\theta) = h(\theta, D)$, де

$$h(\theta, D) = \sup\left\{\operatorname{Re}\left(ze^{-i\theta}\right) : z \in \overline{D}\right\}.$$

Функція $h$ є неперервною на проміжку $\triangle_{\alpha,\varphi_*} = \{\theta : |\theta - \pi + \varphi_*| \leqslant \pi/(2\alpha)\}$. Позначимо через $H^p(D_\times, h)$, $1 \leqslant p < +\infty$, простір функцій $f$, аналітичних в куті $D_\times = \{z : |\arg z - \pi + \varphi_*| < \pi/(2\alpha)\}$, для яких

$$||f||^p := \sup_{|\varphi - \pi + \varphi^*| < \pi/(2\alpha)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-prh(\varphi)} dr \right\} < +\infty.$$

Нехай $W_\sigma^2$ – простір Вінера цілих функцій експоненціального типу $\leqslant \sigma$, звуження яких на $\mathbb{R}$ належать до простору $L^2(\mathbb{R})$, а через $H^2(\mathbb{C}_-)$ простір Гарді у півплощині $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$. Нехай далі $D_\times^- = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_\times$. Через $T^2(D_\times^-)$ позначимо множину всіх впорядкованих наборів $F = (F_1, F_2, ..., F_{n+1})$, де $F_1(ze^{-i\alpha_1})e^{a_1 z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, $F_{n+1}(ze^{i(\pi - \alpha_{n+1})})e^{a_{n+1} z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, а
$F_j\left(ze^{-i(\alpha_j - \pi/2)}\right) e^{\frac{a_j + a_{j-1}}{2} z} \in W^2_{\left|\frac{a_j - a_{j-1}}{2}\right|}$, причому

$$\sum_{j=1}^{n+1} F_j(z) = 0, \quad z \in D_\times^-. \tag{7}$$

Простір $T^2(D_\times^-)$ можна розглядати як нормований простір з нормою $||F|| = \max\left\{\max\left\{||F_j||_{W^2}, j \in \overline{2, n}\right\}; ||F_1||_{H^2}; ||F_{n+1}||_{H^2}\right\}$, де під $||F_j||_{H^2}$ та $||F_j||_{W^2}$ розуміємо норми у відповідних просторах Гарді та Вінера. Властивості просторів $H^2(D_\times, h)$ та $E_*^2[D]$ відзначено Б. В. Винницьким.

**Теорема 6.1.** *Рівності*

$$F_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{l_j} f(w) e^{-zw} dw, \; f \in E^2[D], \tag{8}$$

*де* $j \in \overline{1, n+1}$, *задають взаємно однозначне відображення простору* $E^2[D]$ *на* $T^2(D_\times^-)$ *і справедлива двоїста формула*

$$f(w) = \frac{-1}{i\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{n+1} e^{-i\varphi_j} \int\limits_0^{+\infty} F_j(re^{-i\varphi_j}) e^{re^{-i\varphi_j} w} dr,$$

*де* $w \in D$, $\varphi_j = \alpha_j - \pi/2$.

Основним результатом розділу є наступний аналог теореми про згортку.

**Теорема 6.3.** *Якщо* $f \in E^2[D]$ *і* $g \in E_*^2[D]$, *то для кожного* $\tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1}; \pi + \alpha_1)}$ *справджується рівність*

$$\int\limits_{\partial D} f(w+\tau) g(w) dw = \sum_{j=1}^{n+1} \int\limits_0^{+\infty e^{-i\varphi_j}} \Phi_j(z) e^{\tau z} dz,$$

*де* $\Phi_j = F_j G, j \in \overline{1; n+1}$, *функції* $F_j$ *визначені рівностями* (8), *а* $G$ – *рівністю*

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D} g(w) e^{zw} dw. \tag{9}$$

Також одержано критерій існування нетривіальних розв'язків рівняння типу згортки в області $D$.

**Теорема 6.5.** *Нехай функція* $G$ *визначена рівністю* (9). *Тоді рівняння*

$$\int\limits_{\partial D} f(w+\tau) g(w) dw = 0,$$

*в якому* $\tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1}; \pi + \alpha_1)}$, *має ненульовий розв'язок* $f \in E^2[D]$, $f \not\equiv 0$, *тоді і тільки тоді, коли система* $\left\{G(z)e^{\tau z} : \tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1}; \pi + \alpha_1)}\right\}$ *не є повною в* $H^2(D_\times, h)$.

Останній, сьомий, розділ починається зі встановлення еквівалентного формулювання гіпотези Рімана про нулі дзета-функції.

**Теорема 7.2.** *Нехай* $G_1$ – *аналітична в* $\mathbb{C}_+$ *функція, сингулярна гранична функція якої є сталою,* $G_1$ *має єдиний простий нуль в точці* $z = 1/2$, $G_1(z)\zeta(z+1/2) \in H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$, $\widehat{\sigma} > 0$ *і*

$$\liminf_{r \to +\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G_1(it)| \, dt - \frac{\widehat{\sigma}}{\pi} \ln r \right) = -\infty.$$

*Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

*1) справджується гіпотеза Рімана;*

*2) $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ – циклічна функція в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\sigma \geq \widehat{\sigma}$.*

Розглянувши конкретні функції $G_1$, можна одержати прозоріші твердження.

**Наслідок 7.2.** *Гіпотеза Рімана справджується тоді і тільки тоді, коли функція*

$$\frac{z-1/2}{(z+1/2)^2}\zeta(z+1/2)$$

*є циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для деякого $\sigma \geq 0$.*

Для випадку $\sigma = 0$ цей результат співпадає з однією теоремою Ж.-Ф. Бурноля. Також на конкретному прикладі розглянуто труднощі, з якими можна зіткнутися при спробі довести гіпотезу Рімана за допомогою теореми 7.2.

Другий підрозділ присвячено отриманню теореми про зображення для простору $\mathcal{E}$, який визначаємо як простір функцій $G$, що зображаються у вигляді

$$G(z) = \int\limits_0^1 (\cos(tz) + tz\sin(tz))g(t)dt,\ g \in L_2(0;1).$$

Позначимо клас парних функцій з $W^2_\sigma$ через $PW^2_{\sigma,+}$.

**Теорема 7.5.** *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) $G \in \mathcal{E}$;

2) $G$ *є парною цілою функцією експоненціального типу* $\sigma \leq 1$, *для якої функція*

$$\frac{G(w)-G(0)}{w^2}$$

*належить до $L_1(\mathbb{R})$, функція*

$$z\int\limits_z^{+\infty} \frac{G(w)}{w^2}dw$$

*належить до $L_2(0;+\infty)$ і виконується умова*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(w)-G(0)}{w^2}dw = 0;$$

3) *рівняння* $f(z)-zf'(z)=G(z)$ *має на* $(0;+\infty)$ *розв'язок* $f=F$, *що належить* $PW^2_{1,+}$;
4) $G$ *— парна ціла функція, і функція*

$$\widetilde{G}(z):=G(z)-z\int\limits_0^z\frac{G'(w)}{w}dw$$

*належить до простору* $PW^2_{1,+}$ ;
5) $G$ *— парна ціла функція експоненціального типу* $\sigma\le 1$, *функція*

$$\frac{G(w)-G(0)}{w^2}$$

*належить до* $L_1(\mathbb{R})$, *функція*

$$z\int\limits_z^{+\infty}\frac{G(w)}{w^2}dw$$

*належить до* $L_2(0;+\infty)$ *і* $G(z)=G_1(z)+G_1(-z)$, *де* $G_1$ *— ціла функція, для якої*

$$|G_1(z)|\le c_1\,(1+|z|)\,/\sqrt{1+\operatorname{Im}z},\quad Imz\ge 0.$$

Цю теорему в останньому підрозділі застосовуємо для встановлення критерію повноти та критерію повноти і мінімальності системи
$\{\cos t\rho_k+t\rho_k\sin t\rho_k : k\in\mathbb{N}\}$ у просторі $L_2(0;1)$. Подібні дослідження доповнюють деякі результати Б. В. Винницького та О. В. Шавали.
**Теорема 7.6.** *Нехай* $(\rho_k : k\in\mathbb{N})$ *— довільна послідовність таких різних комплексних чисел, що* $\rho_k^2\ne\rho_m^2$, *якщо* $k\ne m$. *Система* $\{v_k : k\in\mathbb{N}\}$, $v_k(t)=\cos t\rho_k+t\rho_k\sin t\rho_k$ *є неповною в просторі* $L_2(0;1)$ *тоді і тільки тоді, коли послідовність* $(\rho_k : k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\})$, $\rho_{-k}:=-\rho_k$, *є підпослідовністю нулів деякої ненульової цілої функції* $G\in\mathcal{E}$.
**Теорема 7.10.** *Нехай* $(\rho_k : k\in\mathbb{N})$ *— довільна послідовність різних комплексних чисел таких, що* $\rho_k^2\ne\rho_m^2$ *при* $k\ne m$. *Система* $\{v_k : k\in\mathbb{N}\}$ *є повною і мінімальною в* $L_2(0;1)$ *тоді і тільки тоді, коді послідовність* $(\rho_k : k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\})$, $\rho_{-k}:=-\rho_k$, $k\in\mathbb{N}$, *є послідовністю нулів такої парної цілої функції* $D\notin\mathcal{E}$, *що для деяких* $\alpha_k\in\mathbb{C}$ *і* $s\in\mathbb{C}$, $s^2\ne\rho_\nu^2$ *для всіх* $\nu\in\mathbb{N}$,

*функція*

$$T_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2}\left((z^2 - s^2) - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\right)$$

*або функція*

$$\widetilde{T}_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2}\left(1 - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\right)$$

*належить до простору* $\mathcal{E}$.

## ВИСНОВКИ

Дисертація містить нові науково обгрунтовані результати, що в сукупності значно просувають теорію просторів аналітичних функцій.

Зміст основних результатів дисертації полягає в наступному:

- знайдено критерій циклічності функцій у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- отримано опис трансляційно інваріантних підпросторів у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- знайдено нову реалізацію принципу невизначеності в гармонічному аналізі для пари функцій: функції та їх перетворення Фур'є не можуть бути одночасно дуже малими;
- встановлено для функцій із простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \le p < +\infty$, еквівалентність швидкого зростання у деякому сенсі по уявній осі та швидкого спадання по уявній осі;
- знайдено нові зображення для функцій з вагових просторів Гарді;
- встановлено критерій розщеплення функцій із $W^1_\sigma$;
- завершено встановлення аналогу теорії спектрального аналізу В.П. Гурарія для простору Гарді-Смірнова у півсмузі $E^2[D_\sigma]$;
- одержано аналог теореми про зображення та теореми про згортку для просторів типу Смірнова у багатокутній необмеженій області;
- знайдено новий еквівалент гіпотези Рімана, чим узагальнено один результат Ж.-Ф. Бурноля;
- встановлено критерій повноти та критерій мінімальності системи $\{\cos t\rho_k + t\rho_k \sin t\rho_k : k \in \mathbb{N}\}$ у просторі $L_2(0;1)$.

Основні результати дисертації мають завершений вигляд або критеріальний характер. При їх отриманні використовуються класичні та сучасні методи комплексного та функціонального аналізу та деякі прийоми з робіт А. Бьорлінга, Б. Я. Левіна, Ю. І. Любарського, А. М. Сєдлєцкого, Б. В. Винницького, В. П. Гурарія.

На основі доведених у розділах 4 і 7 результатів можна висунити такі загальні принципи:

1) якщо перетворення Фур'є суми двох функцій є "дуже малим" при природних обмеженнях на самі функції, то кожна з функцій є "дуже малою";

2) для функцій експоненціального зростання у півплощині "екстремальне" зростання їх модуля на межі є еквівалентним "екстремальному" спаданню всередині півлощини;

3) циклічність функції із вагового простору Гарді є еквівалентною відсутності "екстремальності" в поведінці модуля функції.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосованими у подальших дослідженнях з теорії аналітичних функцій, зокрема просторів типу Гарді, Неванлінни та Бергмана, теорії інтерполяції, теорії наближення, рядів Діріхле, також при вивченні мероморфних та субгармонійних функцій, в теорії ймовірності. Як і результати класичної теорії просторів Гарді, одержані результати можуть отримати застосування у теорії інформації, квантовій механіці, теорії керування, сейсмології та інших дисциплінах.

Результати дисертації опубліковано в фахових журналах, вони були оприлюднені на багатьох міжнародних наукових конференціях і спеціалізованих наукових семінарах. Це підтверджує їх достовірність.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ


1. Dil'nyi V. On solutions of homogeneous convolution equation generated by singularity / V. Dil'nyi, B. Vynnyts'kyi // Mat. Stud. – 2003. – V.19. – P. 149–155.

2. Дільний В. Про уточнення однієї оцінки добутку Неванлінни-Вейерштрасса / В. Дільний // Мат. Студ. – 2007. – Т.28, № 1. – С. 41–44.

3. Дільний В. Про формули типу Коші та Пуассона для одного вагового простору Гарді / В. Дільний, Б. Винницький // Мат. Студ. – 2007. – Т.28, № 2. – С. 209–212.

4. Дільний В. Про існування розв'язків одного рівняння типу згортки / В. Дільний // Доп. НАН України. – 2008. – № 11. – С. 7–10.

5. Dilnyi V. On some integral operators on weighted Hardy spaces / V. Dilnyi // Мат. Студ. – 2009. – Т.31, № 1. – С. 107–112.

6. Dilnyi V. On equivalence for subspaces of one weighted Hardy space / V. Dilnyi // Мат. Студ. – 2010. – Т.33, № 1. – С. 71–77.

7. Дільний В. Про зображення одного класу аналітичних функцій у кутовій області / В. Дільний // Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2012. – № 718. – С. 15–18.

8. Дильный В. Об одном обобщении теоремы Пели-Винера для весовых пространств Харди / В. Дильный, Б. Винницкий // Уфимский математический журнал. – 2013. – Т.5, № 4. – С. 31–37.

9. Дільний В. Про деякі функції із вагових просторів Гарді, що мають сингулярність / В. Дільний // Вісник Львівського ун-ту. – Серія мех.-мат. – 2013. – Вип.84. – С. 21–30.

10. Dilnyi V. On solutions of one convolution equation generated by a "deep zero" / V. Dilnyi, I. Sheparovych // Мат. студ. – 2013. – Т.39. – С. 45–53.

11. Dilnyi V. On estimations of solutions of one convolution type equation / V. Dilnyi, B. Vynnytskyi // Карпатські математичні публікації. – 2013. – Т.5, № 19. – С. 30–35.

12. Дільний В. Деякі властивості дзета-функції Рімана і циклічність у вагових просторах Гарді / В. Дільний // Мат. студ. – 2014. – Т.41, № 2. – С. 115–122.

13. Dilnyi V. On the solutions of a convolution equation in a semi-strip / V. Dilnyi // Мат. студ. – 2014. – Т.42, № 1. – С. 61–66.

14. Дільний В. Про циклічність функцій в одному ваговому просторі Гарді в крузі / В. Дільний // Буковинський мат. журн. – 2014. – Т.2, № 2-3. – С. 86–89.

15. Дільний В. Про одну реалізацію принципу невизначеності / В. Дільний, Т. Війчук // Карпатські математичні публікації. – 2015. – Т.7, № 1. – С.66–71.

16. Дильный В. Н. Об обобщении теоремы Берлинга–Лакса / В. Н. Дильный, Б. В. Винницкий // Мат. заметки. – 2006. – Т.79, № 3. – С. 362–368.

17. Дільний В. Про еквівалентність деяких умов для вагових просторів Гарді / В. Дільний // Укр. мат. журн. – 2006. – Т.58, № 9. – С. 1257–1263.

18. Дільний В. Еквівалентне означення деяких вагових просторів Гарді / В. Дільний // Укр. мат. журн. – 2008. – Т.60. – С. 1477–1482.

19. Dilnyi V. On Cyclic Functions in Weighted Hardy Spaces / V. Dilnyi // Jour. of Math. Phys., Anal., Geom. – 2011. – V.7, № 1. – P. 19–33.

20. Дільний В. Про поведінку на дійсній півосі функцій із вагових просторів Гарді / В. Дільний // Укр. мат. вісн. – 2012. – Т.10, № 4. – С. 455–468.

21. Дільний В. Про згортку функцій у кутових областях / В. Дільний // Укр. мат. журн. – 2012. – Т.64, № 9. – С.1155–1164.

22. Дільний В. Про інваріантні підпростори у вагових просторах Гарді / В. Дільний // Укр. мат. журн. – 2014. – Т.66, № 6. – С. 853–857.

23. Дильный В. Расщепление некоторых пространств аналитических функций / В. Дильный //Уфимский математический журнал. – 2014. – Т.6, № 2. – С. 26–35.

24. Дильный В.Н. Об аппроксимационных свойствах одной тригонометрической системы / В. Н. Дильный, Б. В. Винницкий // Известия вузов. Математика. – 2014. – № 11. – С. 13–25.

## ПРАЦІ АПРОБАЦІЙНОГО ХАРАКТЕРУ

25. Дільний В. Достатня умова повноти системи експонент / В. Дільний // Міжн. наук. конф. "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь.": Тези доп. – Дрогобич, 27 вересня – 1 жовтня, 2004. – С. 53.

26. Dilnyi V. On equivalency of some conditions for a weighted Hardy space/ В. Дільний // Міжн. конф. "Математичний аналіз і суміжні питання.": Тези доп. – Львів, 17 -20 листопада, 2005. – С. 22.

27. Dilnyi V. On Completeness of a System in a Weighted Hardy Space / V. Dilnyi, B. Vynnytskyi // "International Ufa Winter Mathematical ... Conf.": Тезисы докл. – Уфа, 2005. – С. 57.

28. Dilnyi V. On one Beurling-Lax-type theorem / V. Dilnyi, B. Vynnytskyi // "Міжн. конф. "Entire and subharmonic functions and related topics": Тези доп. – Харків, 14 – 17 серпня 2006. – С. 38–39.

29. Dilnyi V. On some Poisson type formulas / V. Dilnyi, B. Vynnytskyi // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька: Тези доп. – Дрогобич, 24–28 вересня, 2007. – С. 53.

30. Dilnyi V. Riemann's hypothesis and weighted Hardy spaces / V. Dilnyi // Міжнародна конференція "Аналіз і Топологія": Тези доп. – Львів, 26 травня – 07 червня, 2008. – С. 12.

31. Дільний В. Гіпотеза Рімана і повнота системи зсувів / В. Дільний // Вісник Дрогобицького пед. ун-ту. – 2009. – Т.1, № 1. – С. 50–53.

32. Dilnyi V. On some analogues of Paley-Wiener theorem and one boundary value problem for Bessel operator / V. Dilnyi, B. Vynnytskyi // Міжнародна конференція з комплексного аналізу пам'яті А. А. Гольдберга: Тези доп. – Львів, 31 травня – 5 червня, 2010. – С. 63–64.

33. Dilnyi V. Special decomposition of Wiener space / V. Dilnyi // Міжнародна конференція з комплексного аналізу пам'яті А. А. Гольдберга: Тези доп. – Львів, 31 травня – 5 червня, 2010. – С. 13–14.

34. Dilnyi V. Some operators on weighted Hardy spaces / V. Dilnyi, // Міжн. конф. ім. В.Е. Лянце: Тези доп. – Львів, 17-21 листопада 2010 р. – С. 63–64.

35. Dilnyi V. On some decompositions of Wiener and weighted Hardy space / V. Dilnyi // "Complex Analysis and its applications". International conference dedicated to the 70th anniversary of A. F. Grishin: Book of abstracts – Kharkiv, August 15–18, 2011. – Kharkiv : V. N. Karazin Kharkiv National University, B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NASU, 2011. – P. 18.

36. Дільний В. Про розв'язки одного інтегрального рівняння типу Вінера-Хопфа у кутовій області / В. Дільний, Я. Ренчка // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька: Тези доп. – Дрогобич, 19–23 вересня, 2011. – С. 63.

37. Dilnyi V. On cyclic functions in a weighted Hardy space and some decompositions / V. Dilnyi // "Complex Analysis and its applications". 21st St. Petersburg Summer meeting in mathematical analysis: Book of abstracts – St. Petersburg, June 25–30, 2012. – P. 15–16.

38. Dilnyi V. Cyclic functions in Hardy spaces and related problems / V. Dilnyi // International conference dedicated... S. Banah: Тези доп. – Львів, 23–28 вересня 2013 р.– С. 128.

39. Дільний В. Умови циклічності у ваговому просторі Гарді в крузі / В. Дільний // IV міжн. ганська конф, присв. 135 річн. . . . Ганса Гана: Тези доп. – Чернівці, 30 червня–5 липня, 2014. – С. 51–52.

40. Дільний В. Про розщеплення в деяких просторах аналітичних функцій / В. Дільний // Всеукр. наук. конф.: Тези доп. – Ворохта, 25 лютого – 1 березня, 2015. – С. 14–15.

41. Dilnyi V. On upper-lower splitting in the Paley-Wiener spaces / V. Dilnyi, T. Hishchak, I. Hordienko // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька: Тези доп. – Дрогобич, 25–28 серпня, 2015. – С. 55.

## АНОТАЦІЯ

**Дільний В.М.** Асимптотичні та апроксимаційні властивості функцій експоненціального типу та їх застосування. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз. - Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2015.

У дисертаційній роботі розглянуто простори аналітичних функцій типу Гарді, зокрема вагові простори Харді з експоненціальною вагою. Одержано критерій циклічності функцій у цьому просторі. Для цього виявилося необхідним розробити теорію вагових просторів Гарді, зокрема отримати теореми типу Пелі-Вінера про зображення та аналітичне продовження, теореми типу Фрагмена-Ліндельофа, типу Пуассона. Одержані результати

застосовано для опису розв'язків рівняння типу згортки у півсмузі, дослідження дзета-функції Рімана. Доведено один із варіантів принципу невизначеності в гармонічному аналізі для пари функцій. Розглядаються задачі розщеплення функцій із просторів Пелі-Вінера та вагових просторів Гарді. Одержано необхідні і достатні умови їх розв'язності. Отримано теореми про зображення та про згортку для просторів Гарді-Смірнова у необмежених багатокутних областях.

Ключові слова: аналітична функція, простір Гарді, простір Смірнова, циклічна функція, простір Пелі-Вінера, теорема Пелі-Вінера, рівняння типу згортки, принцип невизначеності в гармонічному аналізі, повна система, мінімальна система, гіпотеза Рімана.


## ABSTRACT

**Dilnyi V.M.** Asymptotic and approximation properties of functions of exponential type and their applications. - Manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 - Mathematical Analysis. - Ivan Franko Lviv National University, Lviv, 2015.

In the dissertation paper we consider some spaces of analytic functions, in particular, weighted Hardy spaces with exponential growth of weight. The central result is the criterion for cyclicity of functions in this space. For this result we develop a theory of weighted Hardy spaces, including Paley-Wiener type theorems on representation and on analytic continuation, Phragmen-Lindelof type theorems, as well as Cauchy and Poisson type theorem.

These results are used to describe solutions of the convolution type equation in a half-strip, for studies on the Riemann zeta function.

We prove a variant of the uncertainty principle in harmonic analysis for pair of functions. Problems on decomposition in the Paley-Wiener and weighted Hardy spaces are considered. We obtain necessary and sufficient conditions of their solvability. For the Hardy-Smirnov space in unbounded polygonal domains representation theorem and convolution theorem are obtained.

Key words: analytic function, Hardy space, Smirnov space, cyclic function, Paley-Wiener space, Paley-Wiener theorem, convolution type equation, uncertainty principle in harmonic analysis, complete system, minimal system, Riemann hypothesis.

# АННОТАЦИЯ

**Дильный В.М.** Асимптотические и аппроксимационные свойства функций экспоненциального типа и их применения. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 - математический анализ. - Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2015.

В диссертационной работе рассмотрены пространства аналитических функций типа Харди, в частности весовые пространства Харди с экспоненциальным весом. Получен критерий цикличности в этом пространстве. Для этого оказалось необходимым разработать теорию весовых пространств Харди, в частности, доказать теоремы типа Пэли-Винера о представлении и аналитическом продолжении, теоремы типа Фрагмена-Линдельофа, типа Пуассона.

Полученные результаты применены для описания решений уравнения типа свёртки в полуполосе, изучения дзета-функции Римана. Доказано один из вариантов принципа неопределенности в гармоническом анализе для пары функций.

Рассматриваются задачи о расщеплении функций из пространств Пэли-Винера и весовых пространств Харди. Получены необходимые и достаточные условия их разрешимости. Доказаны теоремы о представлении и свертке для пространств Харди-Смирнова в неограниченных многоугольных областях.

Ключевые слова: аналитическая функция, пространство Харди, пространство Смирнова, циклическая функция, пространство Пэли-Винера, теорема Пэли-Винера, уравнение типа свертки, принцип неопределенности в гармоническом анализе, полная система, минимальная система, гипотеза Римана.