Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Стець Юлія Василівна

УДК 517.537

АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

01.01.01 – математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії функцій і теорії ймовірностей Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Шеремета Мирослав Миколайович,
завідувач кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей
Львівського національного університету імені Івана Франка

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор
Філевич Петро Васильович,
завідувач кафедри інформаційних технологій ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника"

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Хаць Руслан Васильович,
доцент кафедри математики Інституту фізики, математики, економіки та інноваційних технологій Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Захист відбудеться 10 червня 2016 р. о 15.00 год
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18
у Львівському національному університеті імені Івана Франка
за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою:
м. Львів, вул. Драгоманова, 5, та на сайті:
www.lnu.edu/research/scientific-council-on-thesis-deference/phd-thesis

Автореферат розісланий 7 травня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради _________________ **І.Й. Гуран**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Ряди Діріхле з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками є безпосереднім узагальненням степеневих рядів. Їх роль як у математичному аналізі, так у теорії чисел, теорії диференціальних рівнянь та інших розділах сучасної математики добре відома. У другій половині минулого століття зацікавленість рядами Діріхле зросла завдяки дослідженням російських математиків А.Ф. Леонтьєва, Ю.Ф. Коробейника та їх учнів про зображення аналітичних функцій рядами Діріхле та їх узагальненнями.

Дещо інший напрямок досліджень властивостей аналітичних функцій, зображених рядами Діріхле, розробляється львівськими математиками М.М. Шереметою, Б.В. Винницьким, О.Б. Скасківим, М.В. Заболоцьким, П.В. Філевичем та іншими.

Зростання ряду Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності σ_a здебільшого ототожнюють зі зростанням максимум модуля $M(\sigma)$ його суми на вертикальній прямій з абсцисою $\sigma < \sigma_a$. Знаходження зв'язку між зростанням $M(\sigma)$ і поводженням коефіцієнтів ряду Діріхле здійснюється у два етапи. Спочатку знаходиться зв'язок між зростанням максимального члена $\mu(\sigma)$ ряду Діріхле і поводженням коефіцієнтів, а потім з огляду на нерівність Коші $\mu(\sigma) \leq M(\sigma)$ знаходяться оцінки $M(\sigma)$ через $\mu(\sigma)$ зверху.

Ще у 1903 р. Е. Ліндельоф вказав умови на тейлорові коефіцієнти цілої функції, за яких її порядок дорівнює нижньому порядку, а тип дорівнює нижньому типу. Для випадку цілих функцій експоненціального типу результат Е. Ліндельофа був перевідкритий М.В. Говоровим і Н.М. Черних[1]. М.М. Шеремета та М.В. Заболоцький[2], узагальнюючи теорему Е. Ліндельофа, знайшли умови на коефіцієнти і показники ряду Діріхле, за яких $\ln \mu(\sigma) \sim \Phi(\sigma)$ при $\sigma \uparrow \sigma_a$, де Φ - задана на $(-\infty, \sigma_a)$ опукла функція. Трохи пізніше М.М. Шеремета та О.М. Сумик[3] вказали умови, за яких $\Phi_1(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma) \leq \Phi_2(\sigma)$, де $\Phi_1(\sigma)$ і $\Phi_2(\sigma)$ - задані опуклі функції.

Зв'язок між зростанням $\ln M(\sigma)$ і $\ln \mu(\sigma)$ досліджували багато авторів. В термінах функції порівняння $\Phi(\sigma)$ найзагальніший результат отримав

[1]Говоров Н.В. *О признаках полной регулярности роста некоторых классов целых функций экспоненциального типа, представленных интегралами Бореля, рядами Ньютона, Дирихле и степенными рядами* / Н.В. Говоров, Н.М. Черных. // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 249, № 6. – С. 1295-1299.

[2]Заболоцький М.В. *Узагальнення теореми Ліндельофа* / М.В. Заболоцький, М.М. Шеремета // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, Вип. 9. – С. 1177–1192.

[3]Sumyk O.M. *A connection between the growth of Young conjugate function*/ O.M. Sumyk, M.M. Sheremeta // Nonlinear boundary problems. Sbornik nauch. trudov.– 2001.– Т. 11.– С. 197–201.

М.М. Шеремета, який вказав необхідну і достатню умови на показники для того, щоб для кожного ряду Діріхле з фіксованою послідовністю показників з нерівності $\ln\mu(\sigma) \le \Phi(\sigma)$ випливала нерівність $\ln M(\sigma) \le \Phi(\sigma) + \Phi_1(\sigma)$, де $\Phi_1(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$ при $\sigma \uparrow \sigma_a$. У зв'язку з цим результатом виникла актуальна проблема опису асимптотичного поводження функції $\Phi_1(\sigma)$, для розв'язання якої стало актуальним отримання оцінок зверху і знизу суми ряду Діріхле з невід'ємними коефіцієнтами.

У теорії цілих функцій зусиллями харківських математиків з'явився новий напрямок - дослідження властивостей основних характеристик у термінах спочатку двохчленної, а потім багаточленної асимптотики. М.М. Шеремета вперше подібну задачу розв'язав для цілих рядів Діріхле. Спочатку він [4] для цілих рядів Діріхле у термінах двохчленної степеневої асимптотики встановив зв'язок між зростанням $\mu(\sigma)$ і спаданням коефіцієнтів, а потім[5] - між зростанням $M(\sigma)$ і $\mu(\sigma)$. О.М Сумик у термінах двохчленних степеневих асимптотик вказала зв'язок між зростанням $\ln\mu(\sigma)$ і поводженням коефіцієнтів як для цілих рядів Діріхле, так і для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності. Також О.М. Сумик[6] і М.М. Гриців[7] вивчили багаточленну асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле у термінах n-членної показникової асимптотики для $n \ge 3$. Тричленну степеневу асимптотику $\ln\mu(\sigma)$ для цілих рядів Діріхле дослідили М.М. Шеремета і Л.Л. Лугова[8]. Залишилась відкритою актуальна задача про зв'язок між зростанням і поводженням коефіцієнтів рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності у термінах багаточленної і зокрема тричленної степеневої асимптотики.

Для цілої функції порядку ρ і нижнього порядку λ, задану лакунарним степеневим рядом зі степенями λ_n, Дж. Уіттекер довів, що $\lambda \le \varrho\beta$, де $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\lambda_n}{\ln\lambda_{n+1}}$. Л. Сонс[9] зробила спробу довести, що для аналітичних в одиничному крузі функцій порядку ρ^0 і нижнього порядку λ^0 правильна оцінка $\lambda^0 + 1 \le$

[4] Шеремета М.Н. *Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле* / М.Н. Шеремета // Теория функций, функциональный анализ и их приложения (Харьков) – 1990. – Вып. 54. – С. 16–25.

[5] Sheremeta M.M. *On the second term of asymptotic behaviour of entire Dirichlet series* / M.M. Sheremeta // J. Analysis. – 1995. – V. 3. – P. 213–218.

[6] Sumyk O.M. *On n-member asymptotics for logarithm of maximal term of entire Dirichlet series* / O.M. Sumyk // Мат. студії. – 2001. – Т. 15, № 2. – С. 200–208.

[7] Гриців М.М. *Тричленна показникова асимптотика логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле* / М.М. Гриців, М.М. Шеремета // Мат. студії. - 2011. - Т.35, № 1. - С. 37-49.

[8] Лугова Л.Л. *Про тричленну степеневу асимптотику цілого ряду Діріхле* / Л.Л. Лугова, М.М. Шеремета // Мат. студії. – 2007. – Т. 28, № 1. – С. 37–40.

[9] Sons L.R. *Regularity of growth and gaps* / Sons L.R. // J. Math. Anal. and Appl. - 1968. - V.24 - P. 296-306.

$(\varrho^0+1)\beta$. Як виявилось, міркування Л. Сонс були помилковими і правильним є повний аналог нерівності Уіттекера $\lambda^0 \le \varrho^0\beta$. П.В. Філевич і М.М. Шеремета[10] перенесли ці результати на цілі ряди Діріхле скінченного R-порядку і абсолютно збіжні ряди логарифмічного порядку. З іншого боку, А.М. Гайсин[11] для характеристики зростання рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності ввів так званий R-порядок. Тому актуальною стала проблема отримати аналоги теореми Е. Ліндельофа і нерівності Дж. Уіттекера для абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле скінченного R-порядку за Гайсиним.

Зв'язок роботи з науковими програмами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Матеріал дисертації є складовою частиною держбюджетних тем: Мг–159 Ф "Методи комплекного та гармонійного аналізу в теорії аналітичних функцій у банахових просторах"(номер держреєстрації 0113 U 000184), Мг–145 Ф "Нові комплексно-ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами"(номер держреєстрації 0113 U 003051).

Мета і завдання досліджень. Метою є:
- для рядів Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності і додатними коефіцієнтами отримати оцінки знизу і зверху їх сум;
- застосувати отримані оцінки до встановлення зв'язку між зростанням логарифмів максимума модуля і максимального члена у термінах функції порівняння;
- в термінах багаточленної (зокрема тричленної) степеневої асимптотики встановити зв'язок між зростанням логарифмів максимуму модуля та максимального члена і поводженням коефіцієнтів рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності;
- для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності скінченного R-порядку за Гайсиним отримати аналоги теореми Ліндельофа і нерівності Уіттекера.

Об'єктом дослідження є ряди Діріхле з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками.

---

[10] Філевич П.В. *Про одну теорему Л. Сонс та асимптотичне поводження рядів Діріхле* / Філевич П.В., Шеремета М.М. // Укр. матем. вісник - 2006. - Т.3, N 2. - С. 187-198.

[11] Гайсин А.М. *Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуплоскости* / А.М. Гайсин // Матем. сб. – 1982. – Т. 117 (159), № 3. – С. 412–424.

Предметом дослідження є оцінки суми ряду Діріхле, багаточленна степенева асимптотика ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, регулярність зростання таких рядів скінченного R-порядку за Гайсиним.

Методи дослідження. Для розв'язання цих задач використовуються методи математичного аналізу і результати М.М. Шеремети та О.М. Сумик.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації є новими. У роботі вперше:
- отримано нові оцінки зверху та знизу ряду Діріхле з додатними коефіцієнтами, за допомогою яких отримано непокращувані результати про співвідношення між зростанням максимума модуля, максимального члена і поводженням коефіцієнтів;
- у термінах багаточленної (зокрема, тричленної) степеневої асимптотики встановлено зв'язок між зростанням максимуму модуля і максимального члена і поводженням коефіцієнтів ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності;
- для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності скінченного R-порядку за Гайсиним отримано аналоги теореми Ліндельофа і нерівності Уіттекера.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретичний характер. Її результати є внеском в теорію рядів Діріхле і можуть бути використані як у загальній теорії аналітичних функцій, так і в інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Наведені результати отримано самостійно. У спільних з науковим керівником статтях співавтору належить постановка задач та загальне керівництво. Зі спільної з О.М. Сумик статті, отримані співавтором результати у дисертацію не увійшли.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на міжнародній науковій конференції ім. В. Я. Скоробагатька (19-23 вересня, 2011 р., Дрогобич); міжнародній науковій математичній конференції присвяченій 120-річчю з дня народження Стефана Банаха (17-21 вересня, 2012 р., Львів); міжнародній науковій конференції "Complex Analysis and Related Topics"(Lviv, Ukraine, September 23-28, 2013); IV міжнародній конференції присвячена пам'яті Ганса Гана (1879-1934) (30 червня – 5 липня, 2014 р., Чернівці); науковій конференції присвяченій 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (1-4 липня, 2015, Чернівці); міжнародній математичній конференції присвяченій пам'яті В.Я. Скоробагатька (25-28 серпня, 2015, Дрогобич); львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. А. А. Кондратюк і проф. О. Б. Скасків), семінарі з теорії потенціалу та його застосувань у Львівському національному університеті ім. Івана Франка (керівники проф. О. Б. Скасків і проф. І. Е. Чижиков), науковому семінарі з теорії аналітичних функцій у Прикарпатському державному університеті ім. В. Стефаника (керівник проф. П.В. Філевич).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 12 статтях та наукових повідомленнях, з яких 6 опубліковано у фахових виданнях.

Структура і об'єм дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, який налічує 89 найменувань. Загальний обсяг дисертації - 160 сторінок, обсяг списку використаних джерел - 10 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Розділ 2 "Оцінки суми ряду Діріхле"присвячений оцінкам величини $M_1(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\}$ як для цілих, так і для абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it. \tag{2.1}$$

Через $S(\Lambda, A)$ позначимо клас рядів Діріхле (2.1) зі заданою послідовністю $\Lambda = (\lambda_n)$ показників і абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = A$. Оскільки $M(\sigma, F) \leq M_1(\sigma, F)$, то з оцінок зверху для $M_1(\sigma, F)$ негайно отримуються такі ж оцінки для $M(\sigma, F)$. Зауважимо також, що у випадку додатних коефіцієнтів $M_1(\sigma, F) = M(\sigma, F)$ і, отже, оцінки знизу для $M_1(\sigma, F)$ і $M(\sigma, F)$ збігаються. Цією обставиною ми будемо користуватися для застосування отриманих результатів.

Оцінки знизу отримано у підрозділі 2.1. Тут доведено такі теореми.

Теорема 2.1. *Нехай* $A = +\infty$*,* $\Phi \in \Omega(+\infty)$*,* γ *- невід'ємна неперервна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція. Для* $q \in (0, 1)$ *і* $x \geq 1$ *приймемо* $\Delta_\gamma(x; q) = \frac{1}{x}\left(\gamma^{-1}(x) - \gamma^{-1}(x - e^{-qx})\right)$.
Якщо коефіцієнти цілого ряду Діріхле задовольняють умову $\ln |a_n| \geq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n \geq n_0$*, існує* $q \in (0, 1)$*, таке, що* $\Delta_\gamma(x; q)\varphi(\gamma^{-1}(x)) \to 0$ *при* $x \to +\infty$*, і виконується умова* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)} > 1$*, то*

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln M_1(\sigma,F)-\Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))}\geq 1-q>0.$$

Теорема 2.2. *Нехай $A=0$, $\Phi\in\Omega(0)$, γ - невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція. Якщо коефіцієнти абсолютно збіжного у півплощині $\{s: Re\,\sigma<0\}$ ряду Діріхле задовольняють умову $\ln|a_n|\geq-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n\geq n_0$, існує $q\in(0,1)$ таке, що $\Delta_\gamma(x;q)=O(1)$ при $x\to+\infty$, і виконується умова $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)}>1$, то*

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln M_1(\sigma,F)-\Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))}\geq 1-q>0.$$

У підрозділі 2.2 доведено теореми, які вказують на оцінки $M(\sigma,F)$ знизу. Основною тут є наступна теорема.

Теорема 2.3. *Нехай $A=+\infty$ або $A=0$, $F\in S(\Lambda,A)$, а функція $\Phi\in\Omega(A)$ така, що функція $\Phi'(\sigma)=O(\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma\uparrow A$. Припустимо, що невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція γ така, що функція $\gamma(x)/x$ незростаюча на $[x_0,+\infty)$ і $\gamma(x)=O(\Phi(\Psi(\varphi(x)))$ при $x\to+\infty$. Тоді, якщо $\ln|a_n|\leq-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n\geq n_0$, то з умови $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)}=0$ випливає, що*

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow A}\frac{\ln M_1(\sigma,F)-\Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))}\leq 0. \tag{2.6}$$

Крім цієї теореми у підрозділі 2.2 отримано результати у випадку, коли функція γ є близькою до степеневої, або повільно змінною.

Теорема 2.4. *Нехай $F\in S(\Lambda,+\infty)$, функція $\Phi\in\Omega(+\infty)$ така, що $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)\geq h>1$ і $\sigma\Phi''(\sigma)/\Phi'(\sigma)\leq H<+\infty$ для всіх $\sigma\geq\sigma_0$, а невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція γ задовольняє умови $\gamma(2x)=O(\gamma(x))$ і $\gamma(x)=O(x\Psi(\varphi(x)))$ при $x\to+\infty$. Тоді, якщо $\ln|a_n|\leq-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n\geq n_0$, то з $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)}=0$ випливає (2.6) з $A=+\infty$.*

Теорема 2.5. *Нехай $F\in S(\Lambda,+\infty)$, функція $\Phi\in\Omega(+\infty)$ така, що Φ' є повільно зростаючою функцією і $\Phi'(\sigma)=(1+o(1))\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma\to+\infty$. Припустимо, що невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція γ задовольняє умову $\gamma(x)=O(\varphi(x))$ при $x\to+\infty$ і γ^{-1} є повільно зростаючою* *функцією. Тоді, якщо* $\ln|a_n| \le -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n \ge n_0$ *і*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\gamma^{-1}(\ln n(t))}{t} < 1,$$

то правильна нерівність (2.6) з $A = +\infty$.

Теорема 2.6. *Нехай* $F \in S(\Lambda, 0)$, $\Phi \in \Omega(0)$ *і невід'ємна неперервна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція* γ *така, що* $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(2\sigma)))$ *і* $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(|\sigma|\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))$ *при* $\sigma \uparrow 0$. *Тоді, якщо* $\ln|a_n| \le -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n \ge n_0$ *і*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\gamma(\Phi'(\Psi(\varphi(\lambda_n))))} = 0,$$

то правильна нерівність (2.6) з $A = 0$.

Доведені у підрозділах 2.1 і 2.2 теореми застосовано у підрозділі 2.3 до вивчення зв'язку між зростанням функції $M(\sigma, F)$ і максимального члена $\mu(\sigma, F)$ ряду Діріхле (2.1) з довільною абсцисою абсолютної збіжності ($A = +\infty$, або $A = 0$) у термінах багаточленних асимптотик (степеневої та показникової для цілих рядів Діріхле і степеневої для рядів Діріхле з нульовою абсциссою абсолютної збіжності.)

Теорема 2.7. *Нехай* $T_1 > 0$, $T_j \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, j = \overline{2, n-1}$, $\tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $0 < \rho_n < \ldots < \rho_2 < \rho_1$. *Для того, щоб для кожної функції* $F \in S(\Lambda, 0)$ *співвідношення*

$$\ln M(\sigma, F) \le \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

і

$$\ln \mu(\sigma, F) \le \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma \uparrow 0.$$

були рівносильними, необхідно і досить, щоб $\ln n(t) = o(t^{\varrho/(\varrho_1+1)})$ *при* $t \to +\infty$. *Ця умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей*

$$\ln M(\sigma, F) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma \uparrow 0$$

і

$$\ln \mu(\sigma, F) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma \uparrow 0.$$

З огляду на теорему 2.7 для того, щоб встановити зв'язок між зростанням $M(\sigma, F)$ і поводженням коефіцієнтів, потрібно таку залежність встановити між максимальним членом і коефіцієнтами. Цій проблемі присвячено розділ 3 "Багаточленна степенева асимптотика ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності".

У підрозділі 3.1 доведено наступну теорему.

Теорема 3.1. *Якщо $\rho > 2\rho_2 - \rho_1$, то для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho}}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leq T_1(\rho_1 + 1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \sum_{j=2}^{m} T_j \left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} + (\tau + \varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1 + 1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \sum_{j=2}^{m} T_j \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} + (\tau - \varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}};$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho+\rho_1+2}{2(\rho_1+1)}}\right) \quad k \to \infty.$$

Умова $\rho > 2\rho_2 - \rho_1$ у теоремі 3.1 є важливою. Це видно на прикладі тричленної асимптотики, у дослідженні якої важливу роль відіграє така лема. Позначимо

$$U(x) = \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}} + \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1 + 1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}.$$

Лема 3.1. *Якщо функція $\Phi \in \Omega(0)$ така, що $\Phi(\sigma) = \dfrac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \dfrac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \dfrac{\tau}{|\sigma|^{\rho}} + \dfrac{\delta}{|\sigma|^{s}}$, $\sigma_0 \leq \sigma < 0$, а φ - функція обернена до Φ'. Тоді при $x \to +\infty$ правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s=\varrho>2\rho_2-\rho_1$ *і* $\tau+\delta\neq 0$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)-\frac{(\tau+\delta+o(1))\rho}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

2) якщо $s=\rho<2\rho_2-\rho_1$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)+\frac{2\rho_2-\rho_1+o(1)}{2}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

3) якщо $s=\rho=2\rho_2-\rho_1$, $\tau\neq\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $\tau+\delta\neq\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)-\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\tau+\delta-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

4) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=3\rho_2-2\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)\neq 0$, $\delta\neq\dfrac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)+\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-\right.$$
$$\left.-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-3\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

5) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)-\frac{\rho_1}{3\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\right.$$
$$\left.-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-4\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

6) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1-1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, $\rho_1\neq 4$, *то*

$$\varphi(x) = -U(x) - \frac{\rho_1 - 4}{3\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\Bigg(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3} - \\ - \delta + o(1)\Bigg)\bigg(\frac{x}{T_1\rho_1}\bigg)^{\frac{4\rho_2-4\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

7) якщо $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$, $s = 5\rho_2 - 4\rho_1$, $\rho_1 = 4$, $\tau = \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2 - 2\rho_1 - 1 = 0$, *то*

$$\varphi(x) = -U(x) + \frac{1}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\bigg(\frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4} - \delta + o(1)\bigg)\bigg(\frac{x}{T_1\rho_1}\bigg)^{\frac{5\rho_2-5\rho_1-1}{\rho_1+1}}.$$

Зрозуміло, що кожному з перелічених в лемі 3.1 випадкові буде відповідати окрема теорема. Так, твердженню 1) леми відповідає теорема 3.2, яка є безпосереднім наслідком теореми 3.1 у випадку $m = 1$.

Випадкам 2) - 4) відповідають наступні три теореми.

Теорема 3.3. *Якщо* $\rho < 2\rho_2 - \rho_1$, *то для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \bigg(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} + o(1)\bigg)\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}},$$

необхідно, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$*:*

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$*, що для всіх* $n \ge n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \le T_1(\rho_1+1)\bigg(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\bigg)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\bigg(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\bigg)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \\ - \bigg(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} - \varepsilon\bigg)\bigg(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\bigg)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що для всіх* $k \ge k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \ge T_1(\rho_1+1)\bigg(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\bigg)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\bigg(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\bigg)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \\ - \bigg(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} + \varepsilon\bigg)\bigg(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\bigg)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\bigg(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2+1}{\rho_1+1}}\bigg), \quad k \to \infty.$$

Наступні теореми стосуються випадку, коли $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$.

Теорема 3.4. *Нехай $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$ і $\tau \neq \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$ тоді для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

необхідно і досить, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + \\ + \left(\tau + \varepsilon - \frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + \\ + \left(\tau - \varepsilon - \frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2+1}{\rho_1+1}}\right), \quad k \to \infty.$$

Теорема 3.5. *Для того, щоб при $\sigma \uparrow 0$*

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \left(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}},$$

необхідно і досить, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + \varepsilon\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \varepsilon\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\biggl(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2+1}{\rho_1+1}}\biggr), \quad k \to \infty.$$

Теореми 3.2 - 3.5 можна об'єднати в одну теорему. Для цього приймемо

$$\tau^* = \tau I_{\{\rho:\rho \geq 2\rho_2-\rho_1\}}(\rho) - \frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} I_{\{\rho:\rho \leq 2\rho_2-\rho_1\}}(\rho),$$

де $I_E(\rho)$ - характеристична функція множини E, тобто, $I_E(\rho) = 1$, для $\rho \in E$, $I_E(\rho) = 0$, для $\rho \notin E$. Основною теоремою підрозділу 3.2 є наступна теорема.

Теорема 3.6. *Для того, щоб при* $\sigma \uparrow 0$

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho}},$$

необхідно, а у випадку, коли $\rho \geq 2\rho_2 - \rho_1$, *і досить, щоб для кожного* $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, *що для всіх* $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\biggl(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\biggr)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\biggl(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\biggr)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + (\tau^* + \varepsilon)\biggl(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\biggr)^{\frac{\max\{\rho, 2\rho_2-\rho_1\}}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що для всіх* $k \geq k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\biggl(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\biggr)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\biggl(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\biggr)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + (\tau^* - \varepsilon)\biggl(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\biggr)^{\frac{\max\{\rho, 2\rho_2-\rho_1\}}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\biggl(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1+\max\{\rho, 2\rho_2-\rho_1\}+2}{2(\rho_1+1)}}\biggr), \quad k \to \infty.$$

У підрозділі 3.2 доведено також подібні теореми, які відповідають твердженням 5) - 7) леми 3.1.

Нарешті, у розділі 4 "Абсолютно збіжні у півплощині ряди Діріхле скінченного R-порядку"досліджуються асимптотичні властивості рядів Діріхле (2.1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, які мають скінченний R-порядок за А. Гайсиним. Тут доведені такі теореми.

Теорема 4.1. *Нехай* $T > 0$ *і* $\varrho > 0$. *Для того, щоб для ряду Діріхле (2.1)*

$$\ln \mu(\sigma, F) = T(1 + o(1)) \exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}, \quad \sigma \uparrow 0$$

необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon \in (0, T)$*:*

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$*, що для всіх* $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leq \frac{\lambda_n \varrho}{\ln^2 \lambda_n} \ln \left(\frac{(T+\varepsilon)e}{\varrho} \lambda_n \ln^2 \lambda_n \right);$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що для всіх* $k \geq k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geq \frac{\lambda_n \varrho}{\ln^2 \lambda_{n_k}} \ln \left(\frac{(T-\varepsilon)e}{\varrho} \lambda_{n_k} \ln^2 \lambda_{n_k} \right)$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} = 1.$$

Теорема 4.2. *Нехай* $\ln n = o(\lambda_n \ln^{-2} \lambda_n)$ *при* $n \to \infty$*. Тоді*

$$T_R^0 = \frac{\varrho_R^0}{e} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_n \ln^2 \lambda_n} |a_n|^{\ln^2 \lambda_n / \varrho_R^0 \lambda_n}$$

і для того, щоб асимптотична рівність

$$\ln M(\sigma, F) = T_R^0 (1 + o(1)) \exp \left\{ \frac{\varrho_R}{|\sigma|} \right\}, \quad \sigma \uparrow 0.$$

була правильною, необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon \in (0, T)$ *виконувались умови 1) і 2) теореми 4.1 з* $T = T_R^0$ *і* $\varrho = \varrho_R^0$*.*

Теорема 4.3. *Нехай* $\varrho > 0$*. Для того, щоб*

$$\ln \ln \mu(\sigma, F) = \frac{(1 + o(1))\varrho}{|\sigma|}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon \in (0, \varrho)$*:*

1) існувало число $n_0(\varepsilon)$ *таке, що* $\ln |a_n| \leq \dfrac{(\varrho + \varepsilon)\lambda_n}{\ln \lambda_n}$ *для всіх* $n \geq n_0(\varepsilon)$*;*

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що* $\ln |a_{n_k}| \geq \dfrac{(\varrho - \varepsilon)\lambda_{n_k}}{\ln \lambda_{n_k}}$ *для всіх* $k \geq k_0$ *і* $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\ln \lambda_{n_{k+1}}}{\ln \lambda_{n_k}} = 1$.

Теорема 4.4. *Нехай виконується умова* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} < 1$*. Для того, щоб асимптотична рівність*

$$\ln \ln M(\sigma, F) = \frac{(1 + o(1))\varrho_R^0}{|\sigma|}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

була правильною, необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon \in (0, \varrho)$ *виконувались умови 1) і 2) теореми 4.3 з* $\varrho = \varrho_R^0$.

Нехай $\lambda_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ - нижній R-порядок, а $t_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{-\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\} \ln\ M(\sigma, F)$ - нижній R-тип. На зв'язок між λ_R^0 і ϱ_R^0, t_R^0 і T_R^0 вказують наступні аналоги класичної теореми Уіттекера.

Теорема 4.5. *Якщо* $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln \lambda_n}\right)$ *при* $n \to \infty$, *то* $\lambda_R^0 \le \varrho_R^0 \beta$, $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \lambda_n}{\ln \lambda_{n+1}}$.

Теорема 4.6. *Якщо* $T_R^0 < \infty$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\ln n}{\ln \lambda_n} < 1$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = \gamma$, *то*

$$t_R^0 \le T_R^0 g(\gamma), \quad g(\gamma) = \frac{\ln(1/\gamma)}{1-\gamma} \exp\left\{1 + \frac{\ln \gamma}{1-\gamma}\right\}$$

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано ряд актуальних задач з теорії рядів Діріхле з невід'ємними показниками, які стосуються асимптотичного поводження максимуму модуля суми ряду Діріхле та його максимального члена.

Для ряду Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності і додатними коефіцієнтами знайдено нові оцінки як знизу, так і зверху його суми. Отримані оцінки застосовано до досліджень зв'язку між зростанням логарифмів максимуму модуля і зростанням максимального члена у термінах функції порівняння та багаточленних показникових та степеневих асимптотик.

У термінах багаточленної (зокрема тричленної) степеневої асимптотики встановлено зв'язок між зростанням логарифма максимального члена і поводженням коефіцієнтів ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності.

Для абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле скінченного R-порядку за А.Гайсиним досліджено умови на показники та коефіцієнти, за яких його сума має регулярне зростання, тобто отримано аналог класичної теореми Е.Лідельофа. Встановлено аналог нерівності Дж. Уіттекера для нижнього R-порядку і R-порядку ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності.

Основні результати дисертації мають критеріальний характер і доповнюють відповідні результати М.М. Шеремети, М.В. Заболоцького, О.М. Сумик і Л.Л. Лугової. При доведенні використовуються сучасні методи теорії рядів Діріхле.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Шеремета М.М. *Про регулярне зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле* / М.М. Шеремета, Ю.В. Стець // Укр. матем. журн. – 2011. – Т.63, N 5. – С. 686–698.

2. Sheremeta M.M. *Estimates of a sum of Dirichlet series* / M.M. Sheremeta, Yu.V. Stets, O.M. Sumyk // Ukrainian Matem. visnyk. – 2013.– V.10.– P. 234–253.

3. Sheremeta M.M. *Estimates of a sum of Dirichlet series* / M.M. Sheremeta, Yu.V. Stets, O.M. Sumyk // Journal of Math. Science. – 2013. – V.194, №5. – P.557–572.

4. Stets Yu.V. *On logarithm of maximal term of Dirichlet series converging in a half-plane: three- term power asymptotics* / Yu.V. Stets, M.M. Sheremeta // Mat. Stud. – 2014. – V.41, №1. – P.28–44.

5. Стець Ю. В. *Про R-порядок і нижній R-порядок рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності* / Ю. В. Стець // Вісник Львівс. ун-ту, серія мех.-мат. – 2014. – Т.79. – С.206–210.

6. Стець Ю. В. *Багаточленна степенева асимптотика логарифма максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле* / Ю. В. Стець, М.М. Шеремета // Вісник Львівс. ун-ту, серія мех.-мат. – 2015. – Т.80. – С.145–160.

7. Stets Yu. V. *On regular growth of Dirichlet series absolute convergent in the halfplane.* /Yu. V. Stets, M. M. Sheremeta // International V. Skorobohatko mathematical conference : Abstracts.-International conf.(September 19-23, 2011, Drogobych, Ukraine) - P.195.

8. Stets Yu.V. *Three-term power asymptotic for a Dirichlet series absolute convergent in the halfplane.* / Yu. V. Stets, M. M. Sheremeta // International conference dedicated to the anniversary of Stefan Banach: Abstracts.- International conf. (Lviv, September 17-21, 2012). – Lviv, 2012. - P.161.

9. Sheremeta M.M. *Estimates of a sum of Dirichlet series* / M.M. Sheremeta, Yu.V. Stets, O.M. Sumyk // International conference "Complex Analysis and Related Topics": Abstracts.- International conf. (Lviv, September 23-28, 2013). – Lviv, 2013. - P.74.

10. Stets Yu.V. *Multi-term power asymptotic for the logarithm of maximal term of a Dirichlet series with null abscissa of absolute convergence* / Yu. V. Stets, M. M. Sheremeta // International conference "Complex Analysis and Related Topics": Abstracts.- International conf. (Lviv, September 23-28, 2013). – Lviv, 2013. - P.82.

11. Kulyavets' L.V. *Many-term power asymptotics of entire Dirichlet series and characteristic functions of probability laws.* / L.V. Kulyavets', Yu. V. Stets, M. M. Sheremeta // Наукова конференція присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці 1-4 липня, 2015): Тези доповідей. - Чернівці, 2015.- С.139-140.

12. Stets Yu. V. *On R-order and lower R-order of Dirichlet series absolutely convergent in the halfplane* /Yu. V. Stets, M. M. Sheremeta // International V. Skorobohatko mathematical conference : Abstracts.-International conf.(August 25-28, 2015, Drogobych, Ukraine) - P.158.

АНОТАЦІЯ

Стець Ю.В. Асимптотичне поводження абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз. - Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2016.

У дисертаційній роботі отримано оцінки зверху та знизу суми ряду Діріхле з додатними коефіцієнтами та довільною абсцисою абсолютної збіжності. Отримані оцінки застосовано для встановлення зв'язку між зростанням логарифмів максимуму модуля і максимального члена у термінах функцій порівняння.

В термінах багаточленної (зокрема тричленної) степеневої асимптотики вдалося встановити зв'язок між зростанням максимуму модуля та максимального члена і поводженням коефіцієнтів рядів Діріхле абсолютно збіжних у півплощині. Отримано аналоги теореми Ліндельофа і нерівності Уіттекера для

рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності скінченного R-порядку за Гайсиним.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимум модуля, максимальний член, багаточленна асимптотика, R-порядок, абсциса абсолютної збіжності.

ABSTRACT

Yu.V. Stets Asymptotic behaviour of Dirichlet series absolutely convergent in the halfplane. - Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree in the speciality 01.01.01 - Mathematical Analysis. - Ivan Franko Lviv National University, Lviv, 2016.

In the thesis the lower and the upper estimates of the sum of Dirichlet series with arbitrary abscissa of absolute convergence and positive coefficients are obtained. These estimates are applied to establishing the connecting between the growth logarithm of maximum modulus and maximal term in the terms of comparison functions.

It was possible to establish the connection between the growth of maximum modulus and maximum term and the behaviour of the coefficients of the Dirichlet series with null abscissa of absolute convergence in the terms of many-termed power asymptotics. The analogues of Lindelöf's theorem and Whittaker's inequality for the Dirichlet series absolutely convergent in the halfplane of the finite R-order by Gaisin are obtained.

Key words: Dirichlet series, maximum modulus, maximal term, many-termed power asymptotics, R-order, abscissa of absolute convergence.

АННОТАЦИЯ

Стец Ю.В. Асимптотическое поведение абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - математический анализ. - Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2016.

Диссертация состоит из списка условных обозначений, введения, 4 разделов, разбитых на подразделы, выводов и списка использованных источников. Общий объем диссертации составляет 160 страниц, список использованных источников из 89 наименований - 10 страниц.

Во введение дано обоснование актуальности темы, указываются цель и задачи исследования, научная новизна, практическое значение и апробация полученных результатов, количество публикаций.

В первом разделе приводится обзор результатов, имеющих непосредственное отношение к теме диссертационной работы и основных результатов диссертации.

Во втором разделе для рядов Дирихле с произвольной абсциссой абсолютной сходимости и положительными коэффициентами получены оценки сверху и снизу их сумм. Используя эти результаты, получены новые соотношение между ростом максимума модуля функции на вертикальной прямой и максимального члена ряда Дирихле, в частности, в терминах многочленных асимптотик.

Третий раздел посвящен изучению связи между ростом и поведением коэффициентов рядов Дирихле с нулевой абсциссой абсолютной сходимости в терминах многочленной и в частности трехчленной степенной асимптотики.

В разделе 4 для абсолютно сходящегося в полуплоскости ряда Дирихле конечного R-порядка по А.Гайсину исследованы условия на показатели и коэффициенты, при которых его сумма имеет регулярный рост, то есть получено аналог классической теоремы Е.Линделёфа. Установлен аналог неравенства Дж. Уиттэкера для нижнего R-порядка и R-порядка ряда Дирихле с нулевой абсциссой абсолютной сходимости.

Ключевые слова: ряд Дирихле, максимум модуля, максимальный член, многочленная асимптотика, R -порядок, абсцисса абсолютной сходимости.