Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

Сокульська Наталія Богданівна

УДК 517.53

ВЛАСТИВОСТІ МЕРОМОРФНИХ У ПІВСМУЗІ ФУНКЦІЙ

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного і функціонального аналізу Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Кондратюк Андрій Андрійович,
завідувач кафедри
математичного і функціонального аналізу
Львівського національного університету імені Івана Франка.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Винницький Богдан Васильович,
завідувач кафедри математики Дрогобицького
педагогічного університету імені Івана Франка;

доктор фізико-математичних наук, професор
Малютін Костянтин Геннадійович,
професор кафедри вищої математики
Південно-Західного державного
університету (м. Курськ, Росія).

Захист відбудеться "10" червня 2016 р. о 16^{00} год.
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. ___

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою:
м. Львів, вул. Драгоманова, 5, та на сайті: www.lnu.edu/research/scintific-council-on-thesis-deference/phd-thesis

Автореферат розісланий "___" травня 2016 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради **І. Й. Гуран**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Метод рядів Фур'є, розроблений американськими математиками Л. А. Рубелом і Б. А. Тейлором, є одним з найбільш ефективних і потужних методів дослідження асимптотичних властивостей та розподілу значень голоморфних і мероморфних функцій.

В основі цього методу лежить тонкий аналіз формул для коефіцієнтів розвинення в ряд Фур'є функції $\log|f(re^{i\theta})|$, що узагальнюють класичну формулу Йенсена.

Вперше метод рядів Фур'є до цілих функцій застосував Н. І. Ахієзер, давши нове доведення класичної теореми Ліндельофа про тип цілої функції цілого порядку. Пізніше, окрім Л.А. Рубела і Б.А. Тейлора, його також використовували А. Едрей і Ф. Фукс, В.С. Азарін, Д. Майлз і Д. Шей, А.А. Гольдберг і М.Л. Содін, А.А. Кондратюк, Я.В. Васильків, В. Бергвайлер, К.Г. Малютін, Б.В. Винницький та інші.

За допомогою цього методу було розв'язано низку фундаментальних задач теорії цілих і мероморфних в комплексній площині функцій:

- Л. А. Рубел і Б. А. Тейлор, в термінах коефіцієнтів Фур'є цих функцій, дали вичерпний опис нулів і полюсів мероморфних функцій f з класів Λ, що визначаються довільними додатними, зростаючими, неперервними, необмеженими мажорантами зростання $\lambda(r)$ їх характеристик Неванлінни $T(r, f)$;

- Л. А. Рубел, Б. А. Тейлор і Д. Майлз розв'язали задачу про зображення мероморфних функцій з класу Λ часткою двох цілих функцій з класів цілих функцій $\Lambda_E \subset \Lambda$;

- Л. А. Рубел узагальнив класичне зображення Адамара для цілих функцій скінченного порядку;

- А. А. Кондратюк узагальнив теорію цілих функцій цілком регулярного зростання Левіна-Пфлюгера на цілі і мероморфні функції з класів Λ_E і Λ.

Незважаючи на ефективність та широкий спектр застосувань, метод рядів Фур'є для логарифма модуля мав природний недолік, а саме, він залишав поза увагою поведінку аргументів голоморфних та мероморфних функцій. Цей недолік було усунуто в роботах Дж. Літтлвуда, Д. Таунсенда, А.А. Гольдберга М.М. Строчика, А.А. Кондратюка, Я.В. Васильківа. Зокрема, ще у 1924 р. Дж. Літтлвуд узагальнив формулу Йенсена для логарифма модуля і аргумента мероморфної в прямокутнику функції та застосував її до вивчення нулів класичної ζ-функції Рімана.

В роботах Ф. Новераза, Я.В. Васильківа, К.Г. Малютіна результати Л.А. Рубела і Б.А. Тейлора були узагальнені на субгармонійні та $\delta-$субгармонійні функції скінченного $\lambda-$типу в комплексній площині. Згодом, для субгармонійних в евклідовому просторі функцій А.А. Кондратюком розроблено метод сферичних гармонік, який, фактично, є аналогом методу Рубела-Тейлора. За допомогою цього методу О.П. Гнатюк і А.А. Кондратюк досліджували субгармонійні в кульових прошарках функції та побудували в них функцію Гріна для оператора Лапласа.

Узагальнюючи класи функцій скінченного $\gamma-$типу в сенсі Рубела-Тейлора, Б. Н. Хабібуллін ввів класи скінченного $(\gamma, \varepsilon)-$типу, поширивши на них класичний результат Рубела-Тейлора. Згодом Ю.С. Процик та Я.В. Васильків модифікували метод сферичних гармонік для класів субгармонійних в $\mathbb{R}^m (m \geq 2)$ функцій скінченного $(\lambda, \varepsilon)-$типу та отримали ряд результатів щодо мажорант зростання субгармонійних функцій з певними обмеженнями на їх міри Ріса.

Важливим напрямком досліджень є розробка методу рядів Фур'є в областях, відмінних від круга, площини чи півплощини. Зокрема, розглядаючи композицію $f \circ \mathcal{R}$ трансцендентної мероморфної в $\mathbb{C}$ функції f і раціональної функції $\mathcal{R}$ з $n-1$ різними полюсами в $\mathbb{C}$, можна отримати мероморфну функцію в $n-$ зв'язній області з n істотно особливими точками.

Цікавим частковим випадком є випадок двозв'язної області, адже кожна така область конформно еквівалентна деякому кільцю, або проколеній площині, яку можна вважати узагальненим кільцем, а голоморфні в кільцях з центром в точці $z = 0$ функції допускають розвинення в ряд Лорана. Крім того, інтегральні середні модулів та логарифмів модулів таких функцій є опуклими відносно $\log |z|$. Тому, ряд авторів, зокрема А.А. Кондратюк, І. Лайне, Н. Огюзторелі, Р. Корхонен, А.Я. Христіянин та ін., присвятили свої роботи вивченню властивостей мероморфних функцій в неоднозв'язних областях і узагальненню теорії Неванлінни на класи таких функцій.

А. Бридун поширив деякі з результатів теорії Неванлінни на класи функцій, мероморфних у півсмузі $R = \{z = x + iy, x > x_0, 0 < y < \pi\}$, та довів критерій скінченності λ-типу для голоморфної в півсмузі функції.

Актуальною залишається задача розробки методу рядів Фур'є для функцій f, мероморфних у замиканні півсмуги $S = \{\sigma + it : \sigma > 0, 0 < t < 2\pi\}$, і таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, адже при виконанні умови $F(z) = f(\log z)$, де $z = e^s$, отримуємо мероморфну у зовнішності одиничного круга $\{z : |z| \geq 1\}$ функцію, яку, без втрати загальності, можна вважати околом точки ∞, а результати, пов'язані з властивостями мероморфних функцій в такій області, - певним узагальненням деяких результатів теорії Неванлінни на мероморфні в околі ∞ функції.

Відмінність наших підходів до вивчення мероморфних у півсмузі S функцій від підходів, запропонованих в роботах А. М. Бридуна, полягає в тому, що результати вказаних робіт спираються на доведену там теорему типу Карлемана, ми ж доводимо лему типу Йенсена-Літтлвуда, яка є ключовою в наших дослідженнях.

У 1926 році А. Картан довів, що для мероморфної в $|z| < R$ функції f виконується $T(r, f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}) d\theta + \log^+ |f(0)| \quad (0 < r < R)$. Звідси випливає, що характеристика Неванлінни $T(r, f)$ є зростаючою опуклою функцією від $\log r$ при $0 < r < R$.

А. Кондратюк та А. Христіянин встановили умови на мероморфну в проколеній площині $A = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$ функцію f для того, щоб характеристика Неванлінни такої функції задовольняла рівність $\overset{o}{T}(r, f) = O(\log r)$ при $r \to +\infty$. Крім того було проведено порівняння $\overset{o}{T}(r, f)$ з класичною характеристикою Неванлінни $T(r, f)$ таких функцій, що мероморфно продовжуються в $D_{R_0} = \{z : |z| < R_0\}, 1 < R_0 \leq +\infty$.

Тому цікавими залишаються задача про порівняння характеристики типу Неванлінни $T_0(r, F)$ мероморфної в зовнішності одиничного круга $\{z : \ |z| \ \geq \ 1\}$ функції F з $\log r$ при $0 < r < \infty$, а також питання про те, чи ця характеристика може служити характеристикою зростання мероморфної в $\{z : \ |z| \ \geq \ 1\}$ функції так само, як і класична характеристика Неванлінни $T(r, F)$, якщо F мероморфно продовжується в $\mathbb{C}$.

Теорія мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ була розроблена О. Раузенбергером. Ж. Валірон назвав такі функції локсодромними, адже у випадку недійсного q точки, у яких така функція приймає одне і те ж значення, лежать на логарифмічних спіралях. Образи цих спіралей на сфері Рімана перетинають кожен меридіан під одним і тим же кутом і називаються локсодромними кривими ($\lambda o\xi o\zeta$ - кривий, $\delta\rho o\mu o\zeta$ - шлях). В log-полярних координатах це прямі лінії. Теорія таких функцій тісно пов'язана з теорією еліптичних функцій: за допомогою локсодромних функцій спрощується побудова еліптичних. Зважаючи на можливість різноманітного застосування таких об'єктів, постало питання вивчення різних класів мультиплікативно періодичних відображень довільних однорідних просторів. В цьому напрямку А. А. Кондратюком розв'язано наступні задачі:

- описано міри Ріса локсодромних δ-субгармонійних функцій;

- доведено теорему про зображення кожної локсодромної δ-субгармонійної функції.

Попри те, цікавими залишаються задачі розподілу значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини та задачі, пов'язані з характеристиками зростання локсодромних функцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Напрямок досліджень, вибраний у дисертації, передбачений планом теми: МА-107Ф "Нові методи комплексного та функціонального аналізу в теорії мероморфних і субгармонійних функцій, теорії операторів та нелінійних динамічних систем"(номер держреєстрації 0112U001272).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертації є дослідження асимптотичних властивостей голоморфних і мероморфних у замиканні півсмуги $S = \{\sigma + it : \sigma > 0,\ 0 < t < 2\pi\}$ функцій f таких, що задовольняють умову $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq\ 0$, зокрема, мероморфних функцій скінченного $\lambda-$ типу, та мероморфних в зовнішності одиничного круга функцій, вивчення розподілу нулів та полюсів функцій з цих класів методом рядів Фур'є, а також вивчення розподілу значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини та характеристик зростання локсодромних функцій.

Об'єктам дослідження є мероморфні у замиканні півсмуги S функції f такі, що $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i), \sigma \geq\ 0$, функції, мероморфні в околі істотно особливої точки, локсодромні функції та мультиплікативно періодичні мероморфні функції у проколеному замиканні верхньої півплощини.

Предметом дослідження є асимптотичні властивості мероморфних у замиканні півсмуги S функцій f таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq\ 0$, скінченного $\lambda-$ типу, розподіл їх нулів та полюсів, зростання та розподіл нулів і полюсів мероморфних функцій скінченного $\lambda-$ типу в околі істотно особливої точки, характеристики зростання локсодромних функцій, розподіл значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини.

Задачі дослідження:

- довести аналог леми Йенсена-Літтлвуда для мероморфної у замиканні півсмуги S функції f такої, що $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i), \sigma \geq\ 0$, встановити співвідношення для коефіцієнтів Фур'є мероморфної в замиканні прямокутника R_σ функції f такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq\ 0$;

- описати множини нулів голоморфних, нулів і полюсів мероморфних у замиканні півсмуги функцій f таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq\ 0$.

- отримати ряд важливих наслідків для функцій мероморфних зовні одиничного круга: довести аналог теореми Йенсена та встановити співвідношення для коефіцієнтів Фур'є таких функції; описати розподіл нулів і полюсів мероморфної функції в околі істотно особливої точки.

Крім того, для функцій F, мероморфних в $\{z :\ |z|\ \geq\ 1\}$:

- встановити зв'язок між $T_0(r, F)$ та класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ для мероморфних функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$.

- встановити умови на зростання мероморфної функції в околі істотно особливої точки.

А також:

- дослідити зростання характеристик локсодромних функцій;

- встановити умови на розподіл значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини.

Методи дослідження. Основними методами досліджень є метод рядів Фур'є, а також різноманітні методи теорії функцій комплексної змінної, методи математичного аналізу та деякі прийоми з робіт Дж. Літтлвуда, Р. Неванлінни, Д. Майлза, А. А. Гольдберга, Й. В. Островського, К. Г. Малютіна, А. А. Кондратюка.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі одержані наукові результати є новими та оригінальними дослідженнями. У роботі вперше:

- доведено аналог леми Йенсена-Літтлвуда для мероморфної у замиканні півсмуги функції f такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq 0$. Отримано критерій скінченності λ-типу голоморфної в замиканні півсмуги функції f, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq 0$, в термінах коефіцієнтів Фур'є логарифма її модуля.

- описано множини нулів голоморфних та нулів і полюсів мероморфних у півсмузі функцій скінченного λ - типу таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$.

Крім того, новими є твердження, отримані як наслідки наведених вище результатів:

- доведено аналог теореми Йенсена для мероморфної в зовнішності одиничного круга функції та встановлено співвідношення для коефіцієнтів Фур'є такої функції;

- отримано критерій скінченності λ - типу голоморфних в зовнішності одиничного круга функцій F в термінах коефіцієнтів Фур'є функції $\log |F|$.

- описано послідовності нулів голоморфних і нулів та полюсів мероморфних функцій скінченного λ - типу в зовнішності одиничного круга.

А також:

- встановлено зв'язок між $T_0(r, F)$ та класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ для функцій, які мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$;

- досліджено зростання характеристик локсодромних функцій;

- доведено теорему про розподіл значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, подані у дисертації, мають теоретичний характер і можуть знайти застосування у подальших дослідженнях із загальної теорії мероморфних функцій, теорії розподілу значень мероморфних у півсмузі та в околі істотно особливої точки функцій, а також при вивченні властивостей функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$, теоріях локсодромних та мультиплікативно періодичних функцій.

Особистий внесок здобувача. Усі основні наведені у роботі результати отримані здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником публікаціях [1], [8], А. А. Кондратюку належить постановка задач та загальне керівництво роботою. У роботі [1] співавтору А.Я. Христіянину належить формулювання та доведення Теореми 2 пункту 3, а у роботах [5], [11] співавтору В.С. Хорощак належить доведення перших теорем, що не внесені до даної дисертації.

Апробація результатів дисертації. Усі основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

1) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 20-26 лютого 2012 року);

2) міжнародній конференції "Functional Analysis and its Applications, Dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach"(Львів, 17–21 вересня 2012 року);

3) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013 року);

4) міжнародній конференції "Complex Analysis and Related Topics"(Львів, 23–28 вересня 2013 року);

5) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 24 лютого - 2 березня 2014 року);

6) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 25 лютого - 1 березня 2015 року);

7) міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій у м. Львові (керівники – проф. А. А. Кондратюк і проф. О. Б. Скасків).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 11 роботах (7 без співавторів), з яких: 5 (3 без співавторів) опубліковано у виданнях, включених до переліку наукових фахових видань України, затверджених наказом МОН України від 13.07.2015 року № 747, в тому числі 1 (1 без співавторів) - в зарубіжному виданні, 2 (2 без співавторів) - в тезах міжнародних конференцій, 4 (2 без співавторів) - в тезах всеукраїнських конференцій.

Структура і об'єм дисертації. Дисертація складається з вступу, п'яти розділів, поділених на підрозділи, висновків і списку використаних джерел. Загальний об'єм дисертації 128 сторінок. Список використаних джерел об'ємом 14 сторінок включає 99 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, вказано мету, теоретичне значення та апробацію отриманих результатів, особистий внесок здобувача та кількість публікацій. Подано загальну характеристику дисертаційної роботи.

У **першому розділі** наведено огляд літератури за темою дисертації та огляд основних отриманих результатів.

Розділ 2 дисертації присвячений вивченню мероморфних у замиканні півсмуги $S = \{\sigma + it : \sigma > 0,\ 0 < t < 2\pi\}$ функцій f таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i),\ \sigma \geq 0$. Він складається з чотирьох підрозділів і висновків.

Підрозділ 2.1 присвячено доведенню аналогу леми Йенсена-Літтлвуда для мероморфної у $\overline{S}$ функції f такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i),\ \sigma \geq 0$.

Нехай функція f мероморфна в $\overline{S}$, не має ні нулів, ні полюсів на ∂S, $f \not\equiv 0$ і, крім того, $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i), \quad \sigma\geq\ 0.$

Через $\{s_j\}$ позначимо послідовність нулів функції f в S, $s_j=\sigma_j+it_j$, через $\{p_j\}$ - послідовність її полюсів в S.

Функцію $\log f(s)$ визначимо співвідношенням

$$\log f(s)=\int\limits_{s_0}^{s}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta+\log f(s_0), \tag{1}$$

вибравши деяке значення $\log f(s_0)$, де $s_0\in S^*$ і інтеграл береться по деякому шляху в $S^*\cup\partial S$, а

$$S^*=S\setminus\bigcup_j(\{\tau\sigma_j+it_j:\tau\geq1\}\cup\{\tau\mathrm{Re}p_j+i\mathrm{Im}p_j:\tau\geq1\}).$$

Нехай $n(\eta,f)$ лічильна функція полюсів функції f у прямокутнику

$$R_\eta=\{\sigma+it:0<\sigma\ \leq\ \eta,\quad 0\leq\ t<2\pi\},$$

та $N(\sigma,f)=\int\limits_0^{\sigma}n(\eta,f)d\eta$ і $c_0(\sigma,f)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(\sigma+it)|dt.$

Аналог леми Йенсена - Літтлвуда формулюється наступним чином.

Лема 2.1. *Нехай функція f мероморфна в $\overline{S}$, не має в ньому ні уявних нулів, ні уявних полюсів і $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$, $\sigma\geq\ 0$. Тоді*

$$N(\sigma,\frac{1}{f})-N(\sigma,f)=c_0(\sigma,f)-\frac{\sigma}{\sigma_0}c_0(\sigma_0,f)+(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1)c_0(0,f),\quad \sigma\geq\sigma_0>0.$$

У даному підрозділі також як наслідок отримано, що інтегральні середні аргумента мероморфної у $\overline{S}$ функції, яка задовольняє умови Леми 2.1, є сталими.

Нехай функція f мероморфна в $\overline{S}$, $\mathrm{arg}f=\mathrm{Im}\log f$, $\log f(s)$ визначений рівністю (**??**), де інтеграл береться по деякому шляху в $S^*\cup\partial S$. Розглянемо інтегральні середні

$$\mathrm{A}(\sigma,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{arg}f(\sigma+it)dt.$$

Твердження 2.1. *За умов Леми 2.1 виконується*

$$A(\sigma,f)=A(0,f),\quad \sigma>0.$$

У підрозділі 2.2 доведені властивості характеристики Неванлінни мероморфної в $\overline{S}$ функції f такої, що $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$, $\sigma\geq\ 0$.

Позначимо $m_0(\sigma, f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+|f(\sigma+it)|dt$, де $x^+ = \max\{0, x\}$.

Означення 2.1 *Нехай f мероморфна в $\overline{S}$, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Характеристикою Неванлінни функції f називається*

$$T(\sigma, f) = m_0(\sigma, f) - \frac{\sigma}{\sigma_0}m_0(\sigma_0, f) + (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1)m_0(0, f) + N(\sigma, f), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0.$$

Властивості $T(\sigma, f)$ описано наступною теоремою.

Теорема 2.1. *Нехай f - мероморфна в $\overline{S}$ функція, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Тоді її характеристика Неванлінни $T(\sigma, f)$ має наступні властивості:*

(i) $T(\sigma, f)$ - опукла відносно σ при $\sigma \geq \sigma_0 > 0$;

(ii) $T(\sigma, f)$ - невід'ємна при $\sigma \geq \sigma_0 > 0$;

(iii) $T(\sigma_0, f)$ =0, $\sigma_0 > 0$;

(iv) $T(\sigma, f)$ - неспадна при $\sigma \geq \sigma_0 > 0$;

(v) $T(\sigma, f) = T(\sigma, \dfrac{1}{f})$ при $\sigma \geq \sigma_0 > 0$.

В підрозділі 2.3 встановлено співвідношення для коефіцієнтів Фур'є функції, мероморфної в замиканні прямокутника R_σ.

Покладемо $c_k(\sigma, f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|f(\sigma+it)|dt, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Лема 2.3. *Нехай функція f - мероморфна в замиканні прямокутника $R_\sigma = \{\eta + it : \quad 0 < \eta < \sigma, \quad 0 < t < 2\pi\}$, відмінна від тотожного нуля і $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Нехай $\{s_j\}$ - множина її нулів в R_σ, а $\{p_j\}$− множина полюсів f в R_σ ($s_j = \sigma_j + it_j, \quad p_j = Rep_j + iImp_j$) і, крім того, f не має ні нулів, ні полюсів на ∂R_σ. Нехай $R^*_\sigma = R_\sigma \setminus \bigcup\limits_j (\{\tau\sigma_j + it_j : \tau \geq 1\} \cup \{\tau Rep_j + iImp_j : \tau \geq 1\})$, та $\log f(s)$ визначений рівністю (**??**), де інтеграл береться по деякому шляху в $R^*_\sigma \bigcup \partial R_\sigma$.*

Тоді справедливі наступні співвідношення:

$$c_k(\sigma, f) = \frac{e^{k\sigma}}{2k}\alpha_k(f) - \frac{e^{-k\sigma}}{2k}\overline{\alpha_{-k}}(f) +$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{s_j \in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right] - \frac{1}{2k}\sum_{p_j \in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{p_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{p_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right],$$

$$c_{-k}(\sigma, f) = \overline{c_k(\sigma, f)} \quad k \in \mathbb{N},\ \textit{де}\ \alpha_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отримані в розділі 2 результати дають можливість описати множини нулів голоморфних і мероморфних та полюсів мероморфних у замиканні півсмуги функцій.

У підрозділі 3.1 для мероморфної у $\overline{S}$ функції скінченного λ-типу доведено критерій скінченності λ-типу такої функції.

Означення 3.1. *Додатна, неспадна, неперервна і необмежена функція* $\lambda(\sigma)$ *при* $\sigma > \sigma_0$ *називається функцією зростання.*

Означення 3.2. *Нехай* $\lambda(\sigma)$ *функція зростання,* f *мероморфна функція в* $\overline{S}$ *така, що* $f(\sigma+2\pi i) = f(\sigma), \sigma \geq 0$. *Функція* f *називається функцією скінченного* λ *- типу, якщо* $\exists A, B > 0$ *такі, що*

$$T(\sigma, f) \leq A\lambda(\sigma + B),$$

для всіх $\sigma \geq \sigma_0 > 0$.

Клас мероморфних в $\overline{S}$ функцій таких, що $f(\sigma + 2\pi i) = f(\sigma), \sigma \geq 0$, скінченного λ - типу позначимо через Λ, а клас голоморфних в $\overline{S}$ функцій таких, що $f(\sigma + 2\pi i) = f(\sigma), \sigma \geq 0$, скінченного λ - типу позначимо через Λ_H.

Теорема 3.1. *Нехай функція* f *голоморфна в* $\overline{S}$ *і така, що* $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$, *а* $\lambda(\sigma)$ *- функція зростання така, що* $\sigma = O(\lambda(\sigma))$. *Тоді наступні твердження еквівалентні.*

(i) $f \in \Lambda_H$;

(ii) $|c_k(\sigma, f)| \leq A\lambda(\sigma + B)$ *для всіх* $\sigma > \sigma_0$ *при деяких* $A, B > 0$, $k \in \mathbb{Z}$;

(iii) $|c_k(\sigma, f)| \leq \dfrac{A\lambda(\sigma + B)}{|k| + 1}$ *для всіх* $\sigma > \sigma_0$ *при деяких* $A, B > 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

В підрозділі 3.2 описано множини нулів голоморфних і мероморфних у замиканні півсмуги функцій.

Означення 3.3. *Нехай* λ *- функція зростання. Послідовність комплексних чисел* $Q = \{s_j\}$ *з* $\overline{S}$ *має скінченну* λ*-щільність, якщо існують додатні сталі* A, B *такі, що*

$$N(\sigma, Q) \leq A\lambda(\sigma + B), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0,$$

де $N(\sigma, Q) = \int\limits_0^{\sigma} n(\eta, Q)d\eta$, $n(\eta, Q)$ *- кількість членів послідовності* Q *в прямокутнику* R_η.

Означення 3.4. *Послідовність комплексних чисел* $Q = \{s_j\}$ *з* $\overline{S}$ *називається* λ*-допустимою, якщо вона має скінченну* λ*-щільність та існують додатні сталі* A, B *такі, що*

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{\sigma_1 < Re s_j \le \sigma_2}\left(\frac{1}{e^{s_j}}\right)^k\right| \le \frac{A\lambda(\sigma_1 + B)}{e^{k\sigma_1}} + \frac{A\lambda(\sigma_2 + B)}{e^{k\sigma_2}},$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ *і* $\quad (\forall \sigma_1, \sigma_2 : \sigma_0 \le \sigma_1 < \sigma_2)$.

Доведено наступні теореми.

Теорема 3.2. *Послідовність* Q *з* $\overline{S}$ *є послідовністю нулів голоморфної функції з* Λ_H *тоді і лише тоді, коли* Q *-* λ*-допустима.*

Теорема 3.3. *Послідовність* Q *з* $\overline{S}$ *є послідовністю нулів мероморфної функції з* Λ *тоді і лише тоді, коли вона має скінченну* λ*-щільність.*

Розглянувши функцію $F(z) = f(s)$, де $z = e^s$, отримуємо мероморфну в області $|z| \ge 1$ функцію. А дослідження мероморфних функцій у зовнішності одиничного круга має значний інтерес, бо йдеться про їхню поведінку в околі істотно особливої точки. Отож, природно, що **розділ 4** присвячений питанням розподілу значень таких функцій. Зокрема:

- у підрозділі 4.1, як наслідок з тверджень попереднього розділу, отримано аналог теореми Йенсена, доведені властивості характеристики Неванлінни функції F, мероморфної в зовнішності одиничного круга $\{z : \ |z| \ \ge \ 1\}$, та отримані співвідношення для коефіцієнтів Фур'є логарифма модуля такої функції.

Нехай відмінна від тотожного нуля функція F - мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z : \ |z| \ \ge \ 1\}$. Нехай $n_0(t, F)$ – лічильна функція її полюсів у кільці $\{z : \ 1 < \ |z| \ \le \ t\}$. Позначимо $N_0(r, F) = \int\limits_1^r \frac{n_0(t, F)}{t} dt$, і $c_0(r, F) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|F(re^{it})|dt, \ r \ge 1.$

Наступна лема є аналогом теореми Йенсена.

Лема 4.1. *Нехай функція* F *мероморфна в зовнішності одиничного круга* $\{z : |z| \ge 1\}$. *Тоді*

$$N_0(r, \frac{1}{F}) - N_0(r, F) =$$

$$= c_0(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0} c_0(r_0, F) + (\frac{\log r}{\log r_0} - 1) c_0(1, F), \quad r \ge r_0 > 1.$$

Означення 4.1. *Функція*

$$T_0(r,F)=m_0(r,F)-\frac{\log r}{\log r_0}m_0(r_0,F)+\left(\frac{\log r}{\log r_0}-1\right)m_0(1,F)+N_0(r,F)$$

$r\geq r_0>1$, *називається характеристикою Неванлінни функції* F.

Властивості $T_0(r,F)$ описані в наступній теоремі.

Теорема 4.1. *Нехай функція* F, $F\not\equiv 0$, *мероморфна в зовнішності одиничного круга* $\{z:|z|\geq 1\}$. *Тоді*

(i) $T_0(r_0,F)=0, \quad r_0>1;$

(ii) $T_0(r,F)$ *невід'ємна, неспадна і опукла відносно* $\log r$ *при* $r\geq r_0$;

(iii) $T_0(r,F)=T_0(r,\frac{1}{F})$ *при* $r\geq r_0$;

(iv) $T_0(r,F_1F_2)\leq T_0(r,F_1)+T_0(r,F_2)+O(\log r), \quad r\geq r_0,$

$T_0(r,F_1+F_2)\leq T_0(r,F_1)+T_0(r,F_2)+O(\log r), \quad r\geq r_0.$

Нехай функція F, $F\not\equiv 0$, мероморфна в $\{z:|z|\geq 1\}$. Припустимо, що F не має ні нулів, ні полюсів на $|z|=1$.

Позначимо $c_k(r,F)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{-ikt}\log|F(re^{it})|dt, \quad r\geq 1, \quad k\in\mathbb{Z}.$

Лема 4.2. *Нехай функція* F, $F\not\equiv 0$, *мероморфна в* $\{z:1\leq|z|<t,t>1\}$. *Нехай* $\{a_j\}-$ *послідовність нулів* F *в* $\{z:1\leq|z|<t,t>1\}$ *і* $\{b_j\}-$ *послідовність її полюсів. Нехай* F *не має ні нулів, ні полюсів на колі* $\{z:|z|=1\}$. *Тоді виконуються наступні співвідношення*

$$c_k(r,F)=\frac{r^k}{2k}\alpha_k(F)-\frac{r^{-k}}{2k}\overline{\alpha_{-k}}(F)+$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{|a_j|\geq 1}\left[\left(\frac{r}{a_j}\right)^k-\left(\frac{\overline{a_j}}{r}\right)^k\right]-\frac{1}{2k}\sum_{|b_j|\geq 1}\left[\left(\frac{r}{b_j}\right)^k-\left(\frac{\overline{b_j}}{r}\right)^k\right],$$

$c_{-k}(r,F)=\overline{c_k(r,F)},\ k\in\mathbb{N},$ *де* $\alpha_k(F)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{-ikt}\frac{F'(e^{it})}{F(e^{it})}dt,\ k\in\mathbb{N}.$

- Випадок $T_0(r,F)=O(\log r)$ та зв'язок між $T_0(r,F)$ і класичною характеристикою Неванлінни $T(r,F)$ мероморфних функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$, встановлено в підрозділі 4.2.

Теорема 4.2. *Нехай F мероморфна в $\{z : |z| \geq 1\}$ функція. Властивість $T_0(r, F) = O(\log r)$, $r \geq r_0$, виконується тоді і лише тоді, коли $F(z) = \mathcal{R}(z)e^{h(z)}$, де $\mathcal{R}(z)$ – раціональна та $h(z)$ – голоморфна і обмежена при $|z| \geq 1$ функція.*

Твердження 4.1. *Нехай мероморфна в $\{z : |z| \geq 1\}$ функція F має мероморфне продовження в $\mathbb{C}$. Тоді*

$$T_0(r, F) = T(r, F) - T(1, F) +$$

$$+\log r \left[\frac{m_0(1, F) - m_0(r_0, F)}{\log r_0} - n(1, F)\right], \quad r \geq r_0 > 1.$$

- Твердження підрозділу 4.3 є наслідками результатів 3-го розділу. Тут встановлено критерій належності функції F, голоморфної в $\{z : |z| \geq 1\}$, до класу функцій скінченного λ - типу, описано послідовності нулів функцій з класів $\Lambda_H(\infty)$ і $\Lambda(\infty)$ голоморфних та мероморфних в $\{z : |z| \geq 1\}$ скінченного λ - типу відповідно.

Нехай λ - функція зростання.

Лема 4.3. *Голоморфна функція F в $\{z : |z| \geq 1\}$ є функцією скінченного λ-типу тоді і лише тоді, коли функція $f(s) = F(e^s)$ є функцією скінченного λ_1-типу в $\overline{S}$, де $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma)$, $\sigma > 0$.*

Нехай $Z = \{z_j\}$ – послідовність комплексних чисел з $\{z : |z| \geq 1\}$. Через $n_0(t, Z)$ позначимо лічильну функцію послідовності Z в кільці $\{z : 1 \leq |z| \leq t\}$.

Означення 4.4. *Послідовність $Z = \{z_j\}$ з $\{z : |z| \geq 1\}$ має скінченну λ-щільність, якщо*

$$N_0(r, Z) \leq A\lambda(Br),$$

при деяких додатних сталих A, B для всіх r, $r \geq 1$, де $N_0(r, Z) = \int\limits_1^r \frac{n_0(t, Z)}{t} dt$.

Означення 4.5. *Послідовність $Z = \{z_j\}$ з $\{z : |z| \geq 1\}$ називається λ-допустимою, якщо вона має скінченну λ - щільність, і існують додатні сталі A, B такі, що*

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{r_1 < r \leq r_2} \left(\frac{1}{z_j}\right)^k\right| \leq \frac{A\lambda(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\lambda(Br_2)}{r_2^k},$$

для всіх r_1, r_2, $r_0 \leq r_1 < r_2$ і кожного $k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема описує послідовності нулів функцій з класу $\Lambda_H(\infty)$.

Теорема 4.3. *Для того, щоб послідовність Z з $\{z : |z| \geq 1\}$ була послідовністю нулів функції з $\Lambda_H(\infty)$ необхідно і досить, щоб вона була λ-допустимою.*

Нехай $W = \{w_j\}$ - послідовність комплексних чисел з $\{z : |z| \geq 1\}$.

Теорема 4.4. *Послідовність* $W = \{w_j\}$ *з* $\{z : |z| \geq 1\}$ *є послідовністю полюсів функції* F *з класу* $\Lambda(\infty)$ *тоді і лише тоді, коли вона має скінченну* λ*-щільність.*

Твердження 4.2. *Послідовність* $Z = \{z_j\}$ *з* $\{z : |z| \geq 1\}$ *є послідовністю нулів функції* F *з класу* $\Lambda(\infty)$ *тоді і лише тоді, коли вона має скінченну* λ*-щільність.*

Розділ 5 присвячено вивченню деяких властивостей мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини та характеристик зростання локсодромних функцій.

Означення 5.1. *Мероморфна в проколеній площині* $\mathbb{C}^*$ *функція* f *називаєтьcя локсодромною з мультиплікатором* q, $\quad 0 < |q| < 1$, *якщо вона задовольняє умову*

$$f(qz) = f(z), \quad 0 < |q| < 1, \quad z \in \mathbb{C}^*. \tag{2}$$

Нехай $\mathcal{L}_q$ - клас таких функцій.

Позначимо $A_r = \{z : |q|r < |z| \leq r\}$. Кожна відмінна від сталої локсодромна мероморфна функція з мультиплікатором q має принаймні два полюси в A_r. Кількість полюсів функції f є однаковою для кожного кільця A_r. Позначимо її через m. Число m називають *порядком функції* f.

З (**??**) отримуємо, що $f(q^n z) = f(z)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 5.1. *Нехай* $f-$ *функція з класу* $\mathcal{L}_q$ *і її порядок –* m. *Тоді*

$$\overset{o}{T}(r, f) = \frac{m}{\log \dfrac{1}{|q|}} \log^2 r + O(\log r), \quad r > 1,$$

де $|O(\log r)| \leq 2m \log r + C$, $C = \max\left\{\overset{o}{T}\left(\dfrac{1}{|q|}, f\right), 2m(1, f)\right\}$.

Нехай $\mathcal{H} = \{z : Im\ z > 0\}$ і $\mathcal{H}^* = \overline{\mathcal{H}} \backslash \{0\}$.

Означення 5.3. *Мероморфна в* $\mathcal{H}^*$ *функція* f *називається мультиплікативно періодичною з мультиплікатором* q, $0 < q < 1$, *якщо для кожного* $z \in \mathcal{H}^*$ *виконується рівність*

$$f(qz) = f(z).$$

Множину таких функцій позначено через $\mathcal{M}_q$.

Нехай f мультиплікативно періодична функція у проколеному замиканні верхньої півплощини $\mathcal{H}^*$. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Нехай $z_0 \in \mathcal{H}^*, f(z_0) \neq 0, \infty$. Виберемо деяке значення $\log f(z_0)$ і визначимо $\log f(z)$ наступним співвідношенням

$$\log f(z) = \log f(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

де інтеграл береться вздовж шляху, що з'єднує точки z_0 і z, у $\mathcal{H}^*$ з радіальними розрізами від нулів та полюсів функції f до ∞. Крім того, нехай

$$\arg f(z) = \arg f(z_0) + \operatorname{Im} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi.$$

Тоді виконується наступна теорема.

Теорема 5.2. *Нехай* $f \in \mathcal{M}_q$, $f \neq const$ *і* $f(z) \neq 0, \infty$ *на* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. *Тоді*

1) *сума приростів* $\arg f$ *вздовж відрізків* $[qt, t]$ *та* $[-t, -qt]$ *не залежить від* t *і дорівнює* $2\pi\big(n_0(f) - n_\infty(f)\big)$, *де* $n_0(f)$, $n_\infty(f)-$ *кількості нулів та полюсів функції* f *в* $\mathcal{A}_1 = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : q < |z| \leq 1\}$ *відповідно;*

2) *нехай* $z_n = r_n e^{i\alpha_n}-$ $a-$*точки функції* f, $a \in \mathbb{C}$, *та* $w_n = \rho_n e^{i\beta_n}$ *полюси* f *в* $\mathcal{A}_t = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : qt < |z| \leq t\}$. *Тоді*

$$\int\limits_{qr}^{r} \sum_{qt<r_n\leq t} \left(\frac{q}{r_n} - \frac{r_n}{t^2}\right) \sin\alpha_n dt = \int\limits_{qr}^{r} \sum_{qt<\rho_n\leq t} \left(\frac{q}{\rho_n} - \frac{\rho_n}{t^2}\right) \sin\beta_n dt$$

для всіх $r > 0$.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розв'язано низку актуальних задач теорії голоморфних і мероморфних в півсмугах та в зовнішності одиничного круга функцій, які стосуються зростання та розподілу значень таких функцій, а також задач, повязаних з характеристиками зростання локсодромних функцій та розподілом значень мультиплікативно періодичних мероморфних в замиканні верхньої півплощини функцій. Зміст отриманих результатів полягає в наступному:

- доведено лему типу Йенсена-Літтлвуда для мероморфної у замиканні півсмуги функції;

- отримано співвідношення для коефіцієнтів Фур'є логарифма модуля функції мероморфної у замиканні прямокутника $R_\eta = \{\sigma + it : 0 < \sigma < \eta, \quad 0 < t < 2\pi\}$;

- доведені основні властивості характеристики Неванлінни $T(\sigma, f)$ мероморфної у замиканні півсмуги функції;

- отримано критерій належності логарифма модуля функції голоморфної у $\overline{S}$ такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, до класу функцій скінченного λ-типу, який визначається деякою функцією зростання λ (додатна, неперервна, необмежена, неспадна);

- описано послідовності нулів голоморфних у $\overline{S}$ функцій з класу Λ_H;

- описано послідовності нулів і полюсів мероморфних у $\overline{S}$ функцій з класу Λ.

Як наслідки отримано:

- аналог теореми Йенсена для мероморфних зовні одиничного круга функцій;

- основні властивості характеристики Неванлінни $T_0(r, F)$ мероморфних зовні одиничного круга функцій;

- рівності для коефіцієнтів Фур'є мероморфної в зовнішності одиничного круга функції;

- критерій скінченності λ-типу для функцій, голоморфних у зовнішності одиничного круга;

- опис послідовностей нулів голоморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга;

- опис послідовностей нулів і полюсів мероморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга.

Крім того, для функцій мероморфних зовні одиничного круга:

- встановлено зв'язок між $T_0(r, F)$ та класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ мероморфних функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$;

- розглянуто випадок $T_0(r, F) = O(\log r)$.

Для функцій з класів $\mathcal{L}_q$, $\mathcal{M}_q$:

- досліджено зростання характеристик локсодромних функцій;

- введені та вивчені класи $\mathcal{M}_q$ мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини;

- сформульовано та доведено одне твердження типу Карлемана для функцій з $\mathcal{M}_q$;

- вивчений розподіл значень функцій з $\mathcal{M}_q$.

В дисертації отримала розв'язок задача розробки методу рядів Фур'є для голоморфних та мероморфних функцій у півсмузі та в околі істотно особливої точки, а також повністю описано послідовності нулів і полюсів функцій скінченного λ-типу в таких областях, введено та вивчено класи $\mathcal{M}_q$ мультиплікативно періодичних мероморфних функцій, досліджені характеристики зростання функцій з класу $\mathcal{L}_q$. Результати дисертаційної роботи є теоретичними. Вони можуть знайти застосування у подальших дослідженнях із загальної теорії мероморфних функцій, теорії Неванлінни розподілу значень мероморфних у півсмузі функцій, а також при вивченні властивостей функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$, теорії розподілу нулів аналітичних функцій, при вивченні властивостей функцій з класів $\mathcal{L}_q$, $\mathcal{M}_q$. Крім того, ці результати можуть бути включені в спеціальні курси з теорії голоморфних і мероморфних функцій в областях відмінних від круга, площини чи півплощини. Результати роботи також можна застосовувати в наукових дослідженнях, які проводяться у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Національному університеті «Львівська політехніка», Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника, Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка, Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна, Сумському державному університеті, Інституті математики НАН України, Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України. Більшість результатів дисертації є завершеними і носять критеріальний характер. Вони доповнюють відомі раніше результати. При їх доведенні використовувались: метод рядів Фур'є, а також різноманітні методи теорії функцій комплексної змінної, методи математичного аналізу і деякі прийоми з робіт Дж. Літтлвуда, Р. Неванлінни, А.А. Гольдберга, Й.В. Островського, А. А. Кондратюка, І. Лайне, К.Г. Малютіна.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Sokul's'ka N. B.* Growth characteristics of loxodromic and elliptic functions/ Khrystiyanyn A. Ya., Kondratyuk A. A., Sokul's'ka N. B.//Mat. Stud. – 2012. – Vol. 37, No 1. – P. 52–57.

2. *Сокульська Н.Б.* Мероморфні функції скінченного λ-типу у півсмузі/ Сокульська Н.Б. // Карпатські математичні публікації.–2012.–Т.4, № 2.– 328-339.

3. *Sokulska N.B.* Description of zero sequences for holomorphic and meromorphic functions of finite λ-type in a closed half-strip / Sokulska N. B.// Ufa Math. Journ. – 2012. – Vol. 6, No 2. – P. 123-127.

4. *Сокульська Н.* Зростання і розподіл нулів і полюсів мероморфної функції в околі істотно особливої точки/ Н. Сокульська // Вісник Львівського Університету. Серія мех.-мат. – 2014. – Вип. 79. – С. 134-147.

5. *Sokulska N. B.* Multiplicatively periodic meromorphic functions in the upper halfplane / V. S. Khoroshchak, N. B. Sokulska // Mat. Stud.– 2014. – Vol. 42. – P. 143–148.

6. *Сокульська Н. Б.* Мероморфні у півсмузі функції скінченного λ-типу / Сокульська Н. Б. // Тези доповідей/ Всеукраїнська наукова конференція, Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Ворохта 20-26 лютого 2012 року, Івано-Франківськ, 2012, С. 57.

7. *Сокульська Н. Б.* Опис множин нулів голоморфних та мероморфних у півсмузі функцій скінченного λ-типу / Н. Б. Сокульська // Abstracts of Reports/ International Conference on Functional Analysis and its Applications, Dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, Lviv, September 17–21, 2012, P. 173-174.

8. *Сокульська Н. Б.* Зростання та розподіл нулів і полюсів мероморфної функції в околі істотно особливої точки / Кондратюк А. А., Сокульська Н. Б. // Тези доповідей/ Всеукраїнська наукова конференція, Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Ворохта 25 лютого - 3 березня 2013 року, Івано-Франківськ, 2013, С. 57

9. *Sokulska N.* Description of zero and pole sequences of holomorphic and meromorphic function of finite λ-type near an essential singularity / N. Sokulska // Abstracts of Reports/ International Conference Complex Analysis and Related Topics, Lviv, September 23–28, 2013, P. 81-82.

10. *Sokulska N. B.* The value distribution of multiplicatively periodic meromorphic function in the upper halfplane / Sokulska N. B. // Тези доповідей/ Всеукраїнська наукова конференція, Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Ворохта 24 лютого - 2 березня 2014 року, Івано-Франківськ, 2014, С. 90-91.

11. *Сокульська Н. Б.* Розподіл значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у верхній півплощині / Сокульська Н. Б., Хорощак В. С. // Тези доповідей/ Всеукраїнська наукова конференція, Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Ворохта 25 лютого - 1 березня 2015 року, Івано-Франківськ, 2015, С. 73-74.

АНОТАЦІЯ

Сокульська Н.Б. Властивості мероморфних у півсмузі функцій. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2015.

У дисертації доведено лему типу Йенсена-Літтлвуда для мероморфних у замиканні півсмуги $S = \{\sigma + it : \sigma > 0,\ 0 < t < 2\pi\}$ функцій f таких, що

$f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, введено характеристику Неванлінни таких функцій, доведено її основні властивості. Отримано співвідношення для коефіцієнтів Фур'є логарифма модуля функції, мероморфної у замиканні прямокутника $R_\eta = \{\sigma + it : 0 < \sigma < \eta, \quad 0 < t < 2\pi\}$, що дало змогу сформулювати та довести критерій скінченності λ-типу функцій f, голоморфних у замиканні півсмуги S таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, в термінах коефіцієнтів Фур'є логарифмів їх модулів, а також описати послідовності нулів голоморфних, нулів і полюсів мероморфних у замиканні півсмуги S функцій f з довільними обмеженнями на зростання їх характеристик.

Крім того, для мероморфних зовні одиничного круга функцій F, доведено аналог теореми Йенсена та основні властивості характеристики Неванлінни $T_0(r, F)$ таких функцій. Отримано критерій скінченності λ-типу голоморфних у зовнішності одиничного круга функцій в термінах коефіцієнтів Фур'є логарифмів їх модулів. Встановлено зв'язок між $T_0(r, F)$ та класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ для мероморфних функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$. Описані послідовності нулів і полюсів мероморфних функцій скінченного λ-типу у зовнішності одиничного круга.

Отримано асимптотику характеристики Неванлінни локсодромної функції.

Введено клас $\mathcal{M}_q$ мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини та доведено теорему про розподіл значень функцій з цього класу.

Ключові слова: голоморфна функція, мероморфна функція, функція скінченного λ-типу, мультиплікативно періодична функція, локсодромна функція, лема Йенсена-Літтлвуда, характеристика Неванлінни, послідовність з скінченною $\lambda-$щільністю, $\lambda-$допустима послідовність.

АННОТАЦИЯ

Сокульска Н.Б. Свойства мероморфных в полуполосе функций. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2015.

Первый раздел диссертации содержит обзор литературы по теме работы, а также обзор основных результатов.

Во втором разделе доказан аналог леммы Йенсена-Литтлвуда для мероморфных в полуполосе $S = \{\sigma + it : \sigma > 0, 0 < t < 2\pi\}$ функций f таких, что $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, введена характеристика Неванлинны $T(\sigma, f) = T(\sigma, f) = m_0(\sigma, f) - \dfrac{\sigma}{\sigma_0} m_0(\sigma_0, f) + (\dfrac{\sigma}{\sigma_0} - 1) m_0(0, f) + N(\sigma, f), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0$, таких функций, а также установлены ее основные свойства. Кроме того, установлены соотношения для коэффициентов Фурье $c_k(r, f)$ таких функций, что способствовало доказательству в третьем разделе критерия принадлежности функции, голомор-

фной в замыкании полуполосы S такой, что $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, к классу функций конечного λ-типа в терминах коэффициентов Фурье логарифма модуля, где функция $\lambda-$ произвольная положительная, непрерывная, неограниченная и неубывающая. К доказательству этого критерия был применен метод Д. Майлза, по которому оценку $|c_k(\sigma, f)| \leq \dfrac{A\lambda(\sigma + B)}{|k| + 1}$ для всех $\sigma > \sigma_0$ при некоторых $A, B > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, можно получить, если рассмотреть разность $e^{-k}c_k(\sigma + 1, f) - c_k(\sigma, f)$.

В этом разделе также описано последовательности нулей и полюсов мероморфных в замыкании полуполосы S функций с класса Λ (мероморфных в S конченого λ - типа).

В классической теории Неванлинны распределения значений мероморфных функций изучаются мероморфные функции во всей комплексной плоскости. Хотя интерес вызывает их поведение в окрестности единственной существенно особой точки на бесконечности. Но, при исследовании в этой окрестности нет необходимости требовать мероморфность функции во всей плоскости. Поэтому в четвертом разделе получены некоторые результаты, как следствия из теорем предыдущих разделов, для функций мероморфных во внешности единичного круга, которую без утраты общности можно рассматривать, как окрестность существенно особой точки на бесконечности. Здесь доказаны аналог теоремы Йенсена и свойства характеристики Неванлинны $T_0(r, F) = m_0(r, F) - \dfrac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0, F) + \left(\dfrac{\log r}{\log r_0} - 1\right) m_0(1, F) + N_0(r, F), \quad r \geq r_0 > 1$, функций мероморфных во внешности единичного круга. В терминах коэффициентов Фурье логарифма модуля функции доказан критерий конечности λ-типа для функций голоморфных во внешности единичного круга. Описаны последовательности нулей и полюсов мероморфных функций конечного λ-типа во внешности единичного круга. Кроме того, для таких функций установлена связь между $T_0(r, F)$ и классической характеристикой Неванлинны $T(r, F)$ для мероморфных функций, которые мероморфно продолжаются в $\mathbb{C}$, и рассмотрен случай $T_0(r, F) = O(\log r)$.

В пятом разделе введены и изучены классы $\mathcal{L}_q-$ локсодромных функций и $\mathcal{M}_q-$ мультипликативно периодических мероморфных функций в проколотом замыкании верхней полуплоскости, сформулировано и доказано одно утверждение типа Карлемана для функций с $\mathcal{M}_q$, изучено распределение значений функций с класса $\mathcal{M}_q$, исследован рост характеристик локсодромных функций.

Ключевые слова: голоморфная функция, мероморфная функция, функция конечного λ-типа, мультипликативно периодическая функция, локсодромная функция, лема Йенсена-Литтлвуда, характеристика Неванлинны, последовательность с конечной $\lambda-$плотностью, $\lambda-$допустимая последовательность.

ABSTRACT

Sokulska N.B. The properties of meromorphic functions in a half-strip. – On

the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 – mathematical analysis. – Ivan Franko Lviv National University, Lviv, 2015.

In this thesis a counterpart of Jensen- Littlewood lemma for meromorphic functions f in a closure of the half-strip $S = \{\sigma + it : \sigma > 0, 0 < t < 2\pi\}$, such that $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, is proved. The Nevanlinna characteristic for such functions is introduced, and its main properties are investigated. The relations for the Fourier coefficients of the logarithm modulus of meromorphic function in the closure of the rectangle $R_\eta = \{\sigma + it : 0 < \sigma < \eta, \quad 0 < t < 2\pi\}$ are investigated, which helped to formulate and prove a criterion of λ - type finiteness of holomorphic in the half-strip functions in terms of Fourier coefficient of $\log |f|$ and describe the zero sets of holomorphic and zero and pole sets of meromorphic functions f of finite λ - type with arbitrary restrictions on their growth characteristics.

A counterpart of the Jensen formula and the main properties of Nevanlinna characteristic $T_0(r, F)$ of meromorphic function in the exterior of the unit disk are proved. A criterion of λ - type finiteness of holomorphic in the exterior of the unit disk functions F in terms of Fourier coefficients of $\log |F|$ is obtained. The comparison between $T_0(r, F)$ and the classical Nevanlinna characteristic $T(r, F)$ for functions which allow the meromorphic continuation into $\mathbb{C}$ is done. Zero sets of holomorphic and pole sets of meromorphic functions of finite λ - type in the exterior of the unit disk are described.

The asymptotic for Nevanlinna characteristic of loxodromic functions is obtained.

The classes $\mathcal{M}_q$ of multiplicatively periodic meromorphic functions in the punctured closure of the upper half-plane is introduced. A value distribution theorem for functions from $\mathcal{M}_q$ is proved.

Key words: holomorphic function, meromorphic function, function of finite $\lambda-$type, multiplicatively periodic meromorphic function, loxodromic function, Jensen-Littlewood lemma, Nevanlinna characteristic, sequence of finite λ-density, λ-admissible sequence.