Міністерство освіти і науки України

Львівський національний університет імені Івана Франка

На правах рукопису

Дільний Володимир Миколайович

УДК 517.5

АСИМПТОТИЧНІ ТА АПРОКСИМАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант:

Шеремета Мирослав Миколайович,

доктор фізико-математичних наук,
професор

ЛЬВІВ – 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ — права комплексна півплощина
- $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ — ліва комплексна півплощина
- $\mathbb{C}^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхня комплексна півплощина
- $\mathbb{C}^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ — нижня комплексна півплощина
- $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < +\infty$, — простір Гарді у правій півплощині, тобто простір аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких

$$||f|| := \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\}^{1/p} < +\infty$$

- $H^p(\mathbb{C}_-)$, $1 \leq p < +\infty$, — простір Гарді у лівій півплощині, тобто простір аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_-$ функцій f, для яких

$$||f|| := \sup_{x<0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\}^{1/p} < +\infty$$

- $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$
- $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < +\infty$, — простір Гарді в одиничному крузі, тобто простір аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$ функцій f, для

яких

$$\|f\|^p := \sup_{r\in(0;1)} \left\{ \int_0^{2\pi} |f\left(re^{i\varphi}\right)|^p d\varphi \right\} < +\infty$$

- $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ — простір аналітичних і обмежених у правій півплощині функцій

- $H^\infty(\mathbb{D})$ — простір аналітичних і обмежених в одиничному крузі функцій функцій

- $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $p \geq 1$, $\sigma \geq 0$, — простір аналітичних функцій у правій півплощині, для яких

$$||f|| := \sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty$$

- $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geq 0$, — простір аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$||f|| := \sup_{z\in\mathbb{C}_+} \left\{ |f(z)|e^{-\sigma|\operatorname{Im} z|} \right\} < +\infty$$

- W^p_σ, $p \geq 1$, $\sigma > 0$, — простір Пелі-Вінера, тобто простір цілих функцій експоненціального типу $\leq \sigma$, для яких $f \in L^p(\mathbb{R})$

- $\overline{n;m} = [n;m] \cap \mathbb{Z}$

- $\operatorname{span}_H\{G_\tau\}$ — замикання лінійної оболонки системи G_τ в банаховому просторі H

- h_f — інтегральна гранична функція функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, яка визначається з точністю до адитивної сталої в точках неперервності рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x \to 0+} \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln |f(x+iy)| dy - \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln |f(iy)| dy$$

- S_f — визначається для послідовності нулів (λ_n), $\lambda_n > 0$, функції f і числа $r > 0$ рівністю

$$S_f(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}$$

- P_f — визначається для функції $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і числа $r > 0$ рівністю

$$P_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) |dh(t)|$$

- K_f — визначається для функції $f : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ і числа $r > 0$ рівністю

$$K_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |f(it)| dt$$

- $T_\sigma^2(\mathbb{C}_-)$ множина всіх впорядкованих трійок вигляду $F = (F_1, F_2, F_3)$, де $F_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, $F_3(z)e^{i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, а F_2 є цілою функцією експоненціального типу $\le \sigma$, причому $F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) \equiv 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_-$

ВСТУП

Актуальність теми. Одним з базових підходів до дослідження об'єктів складної природи як у математиці загалом, так і в математичному аналізі зокрема є їх наближення простішими. Найвідомішим і найпродуктивнішим методом цього напрямку є зображення функцій рядами Тейлора, Фур'є, Діріхле та іншими. Проте при застосуваннях цих розкладів виникають труднощі, часто пов'язані з вузькістю класу функцій, які можна розвинути в той чи інший ряд. Одним з вдалих способів подолати ці труднощі є одержана в 1949 році теорема А. Бьорлінга про апроксимацію функцій з простору Гарді в одиничному крузі скінченними лінійними комбінаціями функцій системи $\{G(z)z^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Десятьма роками пізніше П. Лакс переніс цей результат на випадок просторів Гарді у півплощині. При цьому природним виявилося дослідження повноти системи $\{G(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\}$. Подальші дослідження показали, що результати, одержані для просторів Гарді, часто мають прямі аналоги для об'єктів складнішої природи, бо теорія цих просторів, розроблена Ф. і М. Ріссами, Н. Вінером, Р. Пелі, є досить прозорою і потужною. Елегантність результатів А. Бьорлінга та П. Лакса викликала потужний інтерес до цієї тематики, що розвинулася в дослідження циклічних, мультициклічних, гіперциклічних функцій та операторів, трансляційно інваріантних підпросторів. Цими питаннями активно займалися, зокрема, Х. Шапіро, який і ввів термін "циклічна функція", В. П. Хавін, Н. К. Нікольський, В. І. Васюнін, В. Рудін, Б. Юсефі, Н. Гогус, К. Массанеда, Н. Зорбоска, А. Бонілла, В. П. Гурарій, Х. Хеденмальм, Б. В. Винницький, В. В. Капустін, А. Д. Баранов, В. Е. Кім та багато інших.

З огляду на результати цих авторів природний інтерес викликали вагові узагальнення просторів Гарді. Багато результатів одержано для ваг степеневого типу, зокрема ваг Макенхаупта. Проте завершених результатів для вагових просторів Гарді з вагою експоненціального типу є порівняно небагато. Зокрема, відкритою залишалася **проблема** опису всіх циклічних функцій у просторах такого типу. Б. Винницький розглянув ваговий простір Гарді $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p \le \infty$, $0 \le \sigma < +\infty$, функцій, аналітичних у правій півплощині, що характеризуються експоненційним ростом. Цей простір є з одного боку, як показав А. Седлецький, узагальненням простору Гарді у правій півплощині $H^p(\mathbb{C}_+)$, а з іншого — аналогом для півплощини добре відомого простору Пелі-Вінера W^p_σ, що складається з цілих функцій експоненціального типу $\le \sigma$, що належать $L^p(\mathbb{R})$. Однак спроби одержати критерій циклічності в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ наштовхнулися на необхідність глибокої розробки теорії цих просторів. Зокрема, виявилися потрібними аналоги результатів типу теорем Пелі-Вінера про зображення та про аналітичне продовження, інтегральних формул Коші та Пуассона, теорем Фрагмена-Ліндельофа у різних областях комплексної площини. У процесі досліджень виявилося, що властивості просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 < \sigma < +\infty$, кардинально відрізняються від властивостей у неваговому випадку $H^p(\mathbb{C}_+)$. Зокрема, у ваговому випадку швидке спадання функції по дійсній півосі пов'язане зі швидким зростанням її по уявній осі. Для отримання критерію циклічності виникає **проблема** точного описання цього зв'язку.

Дослідження циклічності у просторах аналітичних функцій, як детально показано у монографіях Н. Нікольського (див. [52], [130], [131]), тісно пов'язані з деякими питаннями функціонального аналізу. Окремим потужним напрямком тут є дослідження операторів у просторах типу Гарді, чим крім згаданих вище математиків санкт-петербурзької школи, займалися Ж. Шапіро, П. Бурдон, Е. Стейн, Р. Койфман, Г. Вейсс, Є. М. Динькін, Б. П. Осіленкер , Г. Семпсон, Д. Фонг, Й. Пен, К. Жао, Ж. Кіма, В. Росс та інші вчені (див. [147], [139], [89], [35], [145], [139], [135], [86], [86], [87] та бібліографію, вказану у цих працях).

Певні труднощі для застосувань результатів, одержаних при вивченні просторів Гарді, виникають через різноманітність областей, на яких ці простори розглядаються. Крім класичних одиничного круга і півплощини, багато цікавих результатів одержано для смуги, півсмуги, кута і т. д. У зв'язку з цим природною є **проблема** узагальнення отриманих результатів на області загальнішого виду, однією з яких є необмежена багатокутна область.

Дослідження, об'єктом яких є простори Гарді аналітичних функцій, часто знаходять застосування у комплексному та функціональному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, а також у прикладних напрямах: геодинаміці, теорії інформації, квантовій фізиці (див. [130], [131], [154], [90], [110], [79], [137]). Тому можна очікувати практично важливих застосувань і для результатів з теорії вагових просторів Гарді.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі теорії функцій і теорії ймовірностей механіко–математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка. Напрямок до-

сліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Львівського національного університету імені Івана Франка. Дослідження виконані в рамках держбюджетних тем Мг–145 Ф "Нові комплексно-ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами" (номер держреєстрації 0113 U 003051) та Мг–159Ф "Методи комплексного та гармонійного аналізу в теорії аналітичних функцій у банахових просторах" (номер держреєстрації
0113 U 000184).

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертації* є отримання нових апроксимаційних та асимптотичних властивостей у просторах аналітичних функцій, що передбачає вирішення таких завдань:

- поширити теорію просторів Гарді на простори $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, зокрема довести аналоги класичних теорем про зображення;
- одержати критерій циклічності у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- встановити аналог принципу невизначеності в гармонічному аналізі для $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- встановити для функцій з простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \le p < +\infty$, точний зв'язок швидкого зростання по уявній осі та швидкого спадання по дійсній півосі;
- встановити умови розщеплення функцій із W^1_σ;
- одержати аналог теорем про зображення та про згортку для просторів типу Смірнова у багатокутній необмеженій області;

- отримати еквівалентне формулювання гіпотези Рімана у термінах циклічності для вагового простору Гарді;
- встановити критерій повноти та критерій мінімальності системи $\{\cos t\rho_k + t\rho_k \sin t\rho_k : k \in \mathbb{N}\}$ у просторі $L_2(0;1)$.

Об'єктами дослідження є класичні та вагові простори Гарді, простори Пелі-Вінера та рівняння типу згортки в областях комплексної площини.

Предметом дослідження є властивості функцій із просторів аналітичних функцій, зокрема умови повноти систем функцій для вагових просторів Гарді та деяких просторів цілих функцій, а також дослідження властивостей розв'язків рівнянь типу згортки.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовувались методи теорії функцій комплексної змінної, математичного аналізу, функціонального аналізу та деякі прийоми з робіт А. Бьорлінга, Б. Я. Левіна, Ю. І. Любарського, А. М. Сєдлєцкого, Б. В. Винницького, В. П. Гурарія.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі наукові результати, які отримані в дисертаційній роботі, є новими і полягають у наступному:

- знайдено критерій циклічності функцій у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- отримано опис трансляційно інваріантних підпросторів у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- знайдено нову реалізацію принципу невизначеності в гармонічному аналізі для пари функцій: функції та їх перетворення Фур'є не можуть бути одночасно дуже малими;

- встановлено для функцій із простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \le p < +\infty$, еквівалентність швидкого зростання у деякому сенсі по уявній осі та швидкого спадання по уявній осі;

- знайдено нові зображення для функцій з вагових просторів Гарді;

- встановлено критерій розщеплення функцій із W^1_σ;

- завершено встановлення аналогу теорії спектрального аналізу В.П. Гурарія для простору Гарді-Смірнова у півсмузі $E^2[D_\sigma]$;

- одержано аналог теореми про зображення та теореми про згортку для просторів типу Смірнова у багатокутній необмеженій області;

- знайдено новий еквівалент гіпотези Рімана, чим узагальнено один результат Ж.-Ф. Бурноля;

- встановлено критерій повноти та критерій мінімальності системи $\{\cos t\rho_k + t\rho_k \sin t\rho_k : k \in \mathbb{N}\}$ у просторі $L_2(0;1)$.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть знайти застосування як у подальших дослідженнях з теорії функцій, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, функціональному аналізі так і в теорії інформації, квантовій механіці, геодинаміці.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані її автором самостійно. У статті [187], написаній у співавторстві з І. Б. Шепарович, співавтору належить ідея прикладу. У статті, спільній з Т. Війчуком, співавтору належить ідея спрощення доведення теореми 2. У статтях, спільних з Б. В. Винницьким, результати належать співавторам в однаковій мірі.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях:

1) міжнародній науковій конференції "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь."(Дрогобич, 27 вересня – 1 жовтня 2004 р.)
2) міжнародній конференції "Математичний аналіз і суміжні питання."(Львів, 17 -20 листопада 2005 р.)
3) міжнародній зимовій математичній конференції для молодих вчених (Уфа, 2005 р.)
4) міжнародній конференції "Entire and subharmonic functions and related topics." (Харків, 14 – 17 серпня 2006)
5) міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24 – 28 вересня 2007 р.);
6) міжнародній конференції "Аналіз і топологія" (Львів, 26 травня – 07 червня 2008 р.);
7) міжнародній конференції з комплексного аналізу пам'яті А. А. Гольдберга (Львів, 31 травня – 5 червня 2010),
8) міжнародній конференції імені В.Е. Лянце (Львів, 17-21 листопада 2010 р.);
9) міжнародній конференції "Complex Analysis and its applications", присвяченій 70-річчю А. Ф. Грішина (Харків, 15–18 серпня 2011 р.);
10) міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 19–23 вересня 2011 р.);

11) XXI літній конференції з математичного аналізу (Санкт-Петербург, Росія, 25–30 червня 2012 р.);
12) міжнародній математичній конференції "Complex analysis and related topics" (Львів, 23-28 вересня 2013 р.);
13) IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 р);
14) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 р).
15) міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25–28 серпня 2015 р.);

Результати дисертації неодноразово доповідалися на Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники — проф. О. Б. Скасків та проф. А. А. Кондратюк), семінарі з теорії потенціалу та її застосувань у Львівському національному університеті імені Івана Франка (керівники — проф. О. Б. Скасків, доктор фіз.–мат. наук І. Е. Чижиков), семінарі з комплексного аналізу та теорії потенціалу ІМ НАН України (керівник — доктор фіз.–мат. наук, ст. наук. співробітник Ю. Б. Зелінський), семінарі з математичного аналізу у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка (керівник — проф. Б. В. Винницький), Харківському міському семінарі з комплексного аналізу (керівники — проф. А. Ф. Грішин, проф. С. Ю. Фаворов), семінарі з теорії функцій ІМ НАН України (керівник — доктор фіз.–мат. наук, ст. наук. співробітник А. С. Романюк).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 41 статті і науковому повідомленні [160]—[201], з яких 24 — у фахових виданнях. З них 6 — у списку Web of Science, ще 3 — у базі даних SCOPUS.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, 7 розділів, висновків та списку використаних джерел, який налічує 201 найменувань. Загальний обсяг дисертації — 303 сторінок, обсяг списку використаних джерел — 17 сторінок.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури і основних результатів

В цьому розділі наведемо огляд літератури та результатів дисертації.

1.1 Огляд літератури та вибір напрямків досліджень

1.1.1 Простори Гарді

Систематичний підхід до розитку теорії межових значень аналітичних функцій можна вважати започаткованим на межі 19-го і 20-го століть працями П. Пенлеве та П. Фату. На своєму першому етапі вона була розроблена Р. Неванлінною, Ф. і М. Ріссами [129] вже на 1916 рік. Одними з найцікавіших об'єктів цієї теорії стали простори Гарді. Сам термін "простір Гарді" введений Ф. Ріссом [141] на честь Г. Гарді, у статті якого [106] розглянуто характеристику, з допомогою якої визначається цей простір.

Класичними областями, у яких вивчаються простори Гарді, є круг та півплощина. Позначимо через $H^p(\mathbb{D})$, $1 \le p < +\infty$, простір Гарді функцій f, аналітичних в одиничному крузі

$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, для яких

$$\|f\|^p := \sup_{r\in(0;1)} \left\{ \int_0^{2\pi} |f\left(re^{i\varphi}\right)|^p d\varphi \right\} < +\infty.$$

Простором Гарді $H^\infty(\mathbb{D})$ називають простір всіх аналітичних і обмежених в $\mathbb{D}$ функцій з нормою $\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}$.

Через $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, позначимо простір Гарді аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ функцій, для яких

$$||f|| := \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\}^{1/p} < +\infty. \qquad (1.1)$$

Простором Гарді $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ називають простір всіх аналітичних і обмежених в $\mathbb{C}_+$ функцій з нормою $\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}_+\}$.

Теорії просторів Гарді в крузі та просторів Гарді у півплощині є, як зазначає Дж.Гарнетт [19], теоріями-близнюками. Більшість властивостей, одержаних для просторів Гарді в одній з областей, можуть бути відносно традиційними способами перенесені на випадок іншої області. У цій дисертації ми розглядаємо переважно випадок півплощини і доводимо твердження, що не мають аналогів у крузі.

Властивості просторів Гарді добре вивчені і детально описані в монографіях К. Гофмана, П. Дьюрена, П. Кусіса, Дж. Гарнетта, Дж. Машрегі [24], [92], [116], [19], [126]. Там показано, зокрема, що кожен простір $H^p(\mathbb{C}_+), 1 \le p \le +\infty$, є банаховим. Функції f з цих просторів мають кутові граничні значення $f(iy)$ майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ і $f(iy) \in L^p(\mathbb{R})$.

Визначальною для теорії просторів Гарді є наступна теорема Пелі-Вінера про зображення [134].

Теорема 1.1. *Рівність*

$$g(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial\mathbb{C}_+} G(w)e^{tw}dw, \quad t < 0, \quad g \in H^2(\mathbb{C}_+),$$

задає взаємно однозначне відображення $L^2(-\infty; 0)$ *на* $H^2(\mathbb{C}_+)$ *і справедлива двоїста формула*

$$G(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} g(x)e^{-xw}dx.$$

А. Сєдлєцкий показав [58], що простори $H^p(\mathbb{C}_+)$, $0 < p < +\infty$, можуть бути визначені як класи аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких

$$\|f\|_* := \sup_{\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty, \qquad (1.2)$$

причому остання норма еквівалентна до норми, визначеної формулою (1.1). М. Джрбашян довів [34, с. 413-414], еквівалентність цих просторів для випадку $p = 2$.

Теорія просторів Гарді має численні застосування як всередині математичного аналізу, так і в теорії диференціальних рівнянь, теорії керування, теорії розсіяння, гідродинаміці, сейсмології, теорії детермінованого хаосу, квантовій механіці та інших галузях (див. [143], [110], [154], [90], [5], [79], [130], [137]).

Функція $G \in H^p(\mathbb{C}_+)$ має (див. [99], [11]) інтегральну граничну функцію h, яка може бути визначена з точністю до адитивної сталої і значень в точках неперервності t_1, t_2 рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x \to 0+} \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln|G(x+iy)|dy - \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln|G(iy)|dy. \quad (1.3)$$

Функція h є неспадною і $h'(t) = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$. В деяких дослідженнях [21], [193] h називають сингулярною граничною функцією.

У багатьох дослідженнях істотно використовується наступна факторизаційна теорема.

Теорема 1.2. *Якщо $G \in H^p(\mathbb{C}_+)$, $p \in [1, +\infty)$, то справджується зображення*

$$G(z) = e^{i\alpha+\beta z} \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz+i}{(1+t^2)(t+iz)} \ln|G(it)|dt\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz+i}{(1+t^2)(t+iz)} dh(t)\right\} \prod_{|\lambda_n|\le 1} \frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n} \prod_{|\lambda_n|>1} \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n}, \tag{1.4}$$

де

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \le 0, \tag{1.5}$$

причому для кутових граничних значень G на уявній осі, її інтегральної граничної функції h та послідовності нулів (λ_n) виконуються відповідно умови

$$\begin{gathered} G \in L^p(i\mathbb{R}), \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|G(it)||}{1+t^2} dt < +\infty, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dh(t)}{1+t^2} dt > -\infty, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < +\infty. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Навпаки, якщо для функції $G : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, неспадної функції $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, похідна якої рівна нулеві майже скрізь, послідовності

(λ_n), $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, виконуються умови (1.5)-(1.6), *то функція G, визначена рівністю* (1.4), *належить до простору $H^p(\mathbb{C}_+)$.*

Це твердження встановлене в [19, с. 81-82], [92, с. 25], див. також [24, с. 189-190]. Т. Срінівасан і Дж. Ванг [150] перенесли цей результат на випадок довільного $p \in [1; +\infty)$.

Наступні означення сформульовані, наприклад, в [116].

Означення 1.1. *Функція G називається зовнішньою в $H^p(\mathbb{C}_+)$, якщо вона зображається у вигляді*

$$G(z) = e^{i\alpha} \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz + i}{(t + iz)(1 + t^2)} \ln |G(it)|\, dt \right\},$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$, $G \in L^p(\partial \mathbb{C}_+)$.

Означення 1.2. *Нехай $G \in H^p(\mathbb{C}_+)$. Тоді в позначеннях теореми 1.2 функція*

$$I_G(z) = e^{\beta z} \prod_{|\lambda_n| \le 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \overline{\lambda}_n} \prod_{|\lambda_n| > 1} \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\overline{\lambda}_n}$$

$$\times \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz + i}{(t + iz)(1 + t^2)} dh(t) \right\}.$$

називається внутрішньою функцією (внутрішнім множником) функції G.

Означення 1.3. *Якщо $G \in H^p(\mathbb{C}_+)$, то функція $O_G = \frac{G}{I_G}$ називається зовнішньою функцією (зовнішнім множником) функції G.*

З огляду на наведені означення, теорема 1.2 визначає так звану внутрішньо-зовнішню факторизацію просторів Гарді. Такого типу факторизація інтенсивно почала використовуватися в працях А. Бьорлінга та П. Лакса [117] і стала одним з основних прийомів вивчення просторів типу Гарді однієї змінної. Хоч розуміння важливості поняття зовнішньої функції можна бачити вже у працях В. Смірнова [65]. Для випадку просторів Гарді багатьох комплексних змінних доводиться шукати, як правило, інші підходи.

Практично паралельно з дослідженнями Г. Гарді, Дж. Літлвуда, Ф. і М. Ріссів вивчали простори Смірнова E^p для стандартних областей комплексної площини та їх узагальнень В. І. Смірнов, І. І. Привалов, М. А. Лаврентьєв, М. В. Келдиш [149], [112], [44], [53], [51]. Зазначимо, що для випадку одиничного круга простори E^p співпадають з відповідними просторами Гарді.

Багато результатів з теорії просторів Гарді природно розглядати (і простіше одержати) у загальніших класах функцій, зокрема класі Неванлінни N, який складається з функцій f, аналітичних в області D, для яких $\log^+|f(z)|$ має гармонічну мажоранту на D (див., наприклад, [53], [19]). Зазначимо, що множина функцій $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ співпадає [92, с. 28] з множиною аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких $|f(z)|^p$ має додатну гармонійну мажоранту в $\mathbb{C}_+$.

С. В. Шведенко [67, с. 8-9], зазначає, що перехід від класичного простору Гарді до вагового веде до втрати багатьох властивостей, що істотно ускладнює дослідження таких просторів. Зауважимо, що, наприклад, для просторів Бергмана [107] ситуація принципово інша: більшість досліджень проводяться відразу для вагового випадку. Ваговим узагальненням просторів Гарді присвячено багато праць, більшість яких розглядає випадок одиничного круга [1], [148], [39]. Вагові простори Гарді у півплощині розглядалися Ж. Стрьомбергом та А. Торчинським, М. Розенблюмом та Дж. Ровняком, П. Руні, Дж. Бенедетто та Х. Хейнігом, Дж. Гарсіа-Куервою, С. Кісляковим і К. Куанхуа та іншими математиками [152], [143], [142], [74], [102], [115]. А. Солдатов застосовує [148] техніку вагових просторів Гарді до дослідження диференціальних рівнянь в частинних похідних, а Й. Цудзі [153] – рівнянь Нав'є-Стокса. В багатьох з цих досліджень використовується техніка атомної декомпозиції вагових просторів Гарді при $p \leq 1$. При цьому розглядаються майже завжди ваги степеневого типу, зокрема ваги Макенхаупта. В. Власов та А. Рачков розглянули ваговий простір Харді з вагою, що є модулем аналітичної функції [17], [18]. У згаданих вище та інших дослідженнях часто розглядаються також невагові узагальнення та аналоги просторів Гарді: простори Гарді в областях, відмінних від класичних (круг, півплощина), а також на ріманових поверхнях [109]; для функцій, визначених в $\mathbb{C}^n$; для узагальнених функцій; дійсні простори Гарді; для однорідних груп (див. [100]) і т.д.

Б. В. Винницький розглянув [10] простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $p \geq 1$, $\sigma \geq 0$, аналітичних функцій в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$||G|| := \sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |G(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (1.7)$$

Зазначимо, що застосована в цьому означенні експоненціальна вага $h(z) = e^{-\sigma|\operatorname{Im} z|}$ не є степеневою вагою, вагою Макенхаупта чи модулем аналітичної в $\mathbb{C}_+$ функції, тому $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ істотно відрізняється від згаданих вище вагових узагальнень просторів Гарді. Зокрема, для $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ не виконується аналог теореми А. Сєдлєцкого [58], тобто множина функцій $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ не співпадає з множиною аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$\sup_{x>0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(x+iy)|^p e^{-p\sigma|\operatorname{Im} z|}dy\right\}^{1/p} < +\infty.$$

Справді, як вказав сам А. Сєдлєцкий, функція $G_0(z)\equiv 1$ задовольняє вказану умову, але $G_0\notin H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $p\geq 1$.

Б. В. Винницький та В. Л. Шаран вивчали [12], [155] простори $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+}\left\{|G(z)|e^{-\sigma|\operatorname{Im} z|}\right\} < +\infty.$$

В [10], [12] показано, що функції $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1\leq p\leq +\infty$ мають кутові граничні значення $G(iy)$ майже скрізь на $i\mathbb{R}$ і $G(iy)e^{-\sigma|y|}\in L^p(\mathbb{R})$, а також, що простори $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ є банаховими. Якщо $\sigma=0$, то, як випливає зі згаданого вище результату А. Сєдлєцкого [58], множина функцій $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ співпадає з множиною функцій, що належать простору Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$. Функція $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ має (див. [99], [11]) інтегральну граничну функцію h, яка може бути визначена з точністю до адитивної сталої і значень в точках неперервності рівністю (1.3). Вона є незростаючою і її похідна дорівнює нулю майже скрізь.

Б. В. Винницький, В. Л. Шаран та автор, спираючись на дослідження Н. Говорова [21] встановили наступну факторизаційну теорему.

Теорема 1.3. *Якщо $f\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1\leq p\leq +\infty$ і $f\not\equiv 0$, то*

$$f(z)=e^{ia_0+a_1 z}\cdot\Pi^*_f(z)\cdot S^*_f(z)\cdot T^*_f(z), \tag{1.8}$$

де a_0, a_1 – дійсні сталі,

$$\Pi^*_f(z)=\prod_{|\lambda_n|\leq 1}\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\prod_{|\lambda_n|>1}\frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n}\exp\left(\frac{z}{\lambda_n}+\frac{z}{\overline{\lambda}_n}\right), \tag{1.9}$$

$$S_f^*(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)dh(t)\right\}, \tag{1.10}$$

$$T_f^*(z) = \left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\ln|f(it)|dt\right\} \tag{1.11}$$

(λ_n) – *послідовність нулів в* $\mathbb{C}_+$ *функції* f,

$$Q(t,z) = \frac{(tz+i)^2}{(1+t^2)^2(t+iz)},$$

причому виконуються умови

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1} Re\lambda_n < \infty, \ \ln|f(iy)| \in L^1(-1;1), \ f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R}), \tag{1.12}$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} (S_f(r) + P_f(r) - K_f(r)) < +\infty, \tag{1.13}$$

де

$$S_f(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{Re\lambda_n}{|\lambda_n|}, \tag{1.14}$$

$$P_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|, \tag{1.15}$$

$$K_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)|dt, \tag{1.16}$$

а всі добутки та інтеграли в (1.8) *збігаються абсолютно і рівномірно на кожному компакті з* $\mathbb{C}_+$.

І навпаки, якщо послідовність (λ_n), $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, *неспадна функція* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *похідна якої майже скрізь дорівнює нулеві і функція* $f : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *задовольняють умови* (1.12) – (1.13), *то для функції* f, *визначеної рівністю* (1.8), *виконується*

$$(\exists c \in \mathbb{R}): \quad f(z)e^{-cz} \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), \tag{1.17}$$

причому послідовність нулів функції f співпадає з (λ_n), її інтегральна гранична функція співпадає з h, а кутові граничні значення майже скрізь співпадають зі значеннями функції $f : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Також у працях Б. Винницького та Б. Шарана встановлено ряд інших властивостей просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p \le \infty$, зокрема повний опис нулів, повний опис інтегральних граничних функцій, опис кутових граничних функцій.

1.1.2 Властивості простору Пелі-Вінера

Позначимо через W^p_σ, $1 \le p < \infty$, $\sigma > 0$, простір Пелі-Вінера, тобто простір цілих функцій f експоненціального типу $\le \sigma$, для яких $f \in L^p(\mathbb{R})$. Простір W^p_σ може бути визначений (див. [45, с. 663]) також як простір цілих функцій, що задовольняють умову

$$\|f\| := \sup_{\varphi \in (0;2\pi)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Простір W^p_σ, $1 \le p \le 2$, $\sigma > 0$, є банаховим. W^1_σ є ізоморфним [95] до дискретного простору Гарді. Інтерес до просторів W^p_σ зумовлений, зокрема, наступним результатом [134] Р. Пелі та Н. Вінера.

Теорема 1.4. *Простір W^2_σ співпадає з простором функцій, що зображаються в вигляді*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(t) e^{itz} dt, \quad \varphi \in L^2(-\sigma, \sigma). \tag{1.18}$$

Ця теорема має велику кількість узагальнень, уточнень, аналогів і застосувань у різних розділах математики.

Наступна теорема Планшереля-Пойя [122, с. 152], визначає зображення функцій в довільному просторі W^p_σ, $1 < p < \infty$, і часто є корисною для досліджень просторів Пелі-Вінера.

Теорема 1.5. *Для кожної послідовності* $(c_n) : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, *що належить до* l^p, $1 < p < \infty$, *ряд*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n c_n \frac{\sin \pi z}{\pi(z-n)}$$

збігається за нормою $L^p(\mathbb{R})$ *і рівномірно на кожному компакті в* $\mathbb{C}$ *до функції* $f \in W^p_\pi$, *яка є єдиним розв'язком інтерполяційної задачі* $f(n) = c_n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Навпаки, для кожної функції* $f \in W^p_\pi$, $1 < p < \infty$, *послідовність* $\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ *належить до* l^p.

Близьким за властивостями до просторів Пелі-Вінера є простір Бернштейна W^∞_σ, що складається з цілих функцій експоненціального типу $\le \sigma$, які є обмеженими на $\mathbb{R}$. Простори W^p_σ є дуже добре вивченими, проте деякі фундаментальні задачі для цих просторів були розв'язані зовсім нещодавно. Так, Ю. І. Любарський та К. Сейп у 1997 році отримали [123] повний опис інтерполяційних послідовностей в W^p_σ, $1 < p < +\infty$ в термінах умови Макенгаупта. С. Ю. Фаворов у 2008 році одержав [97] повний опис нулів функцій з W^∞_σ.

В теорії просторів аналітичних функцій цікавими і практично важливими є теореми про розщеплення простору на суму чи добуток двох просторів з потрібними властивостями. Класичним є результат про розвинення кожної функції з простору

$L^2(\mathbb{R})$ на суму двох функцій, одна з яких належить до класу Гарді H^2 у нижній півплощині, а інша належить до H^2 у верхній півплощині. У 1960 році Л. Еренпрайс [94] поставив задачу про розщеплення функцій з деякого підпростору простору W_σ^p на добуток двох функцій з цього ж підпростору, яку повністю розв'язав Р. Юлмухаметов [69], [70] в 1999 році. Іншим прикладом розвинення є досліджуване Ю. І. Любарським [48] розвинення цілих функцій експоненціального типу з трикутною індикаторною діаграмою на суму двох функцій з простору Пелі-Вінера. Ідейно схожу задачу в термінах субгармонійних функцій розглядає І. Е. Чижиков [85].

У зв'язку з дослідженнями кутових граничних значень у вагових просторах Гарді виникла проблема про зображення функцій з W_σ^p у вигляді суми двох функцій, одна з яких була б "великою" тільки у верхній півплощині, а інша – тільки в нижній. Строге її формулювання наступне.

Проблема 1. *Чи кожна функція $f \in W_\sigma^p$ допускає зображення $f = f_2 - f_3$ для цілих функцій f_2, яка задовольняє умову $B(0;\pi)$ і f_3, що задовольняє умову $B(\pi;2\pi)$, де*

$$B(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) : \sup_{\varphi \in (\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\} < +\infty\,?$$

Для ілюстрації проблеми 1 зазначимо, що функція $f(z) = \sin z$ у випадку $p = \infty$ має наступне зображення

$$f_2(z) = \frac{e^{i\sigma z}}{2i}, \quad f_3(z) = \frac{e^{-i\sigma z}}{2i}.$$

У випадку негативної відповіді на питання, сформульоване у Проблемі 1, актуальним стає наступний її послаблений варіант.

Проблема 2. *Чи кожна функція $f \in W_\sigma^p$ допускає зображення $f = f_4 - f_5$, де функції f_4 і f_5 аналітичні в $\mathbb{C}_+$, причому f_4 задовольняє умову $B\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а f_5 – умову $B\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$?*

Зазначимо, що для застосувань, зокрема задач про аналітичне продовження, про циклічність у просторах аналітичних функцій найцікавішими є випадки $p = 2$ і $p = 1$.

1.1.3 Циклічні функції

Означення 1.4. *Функція G називається циклічною в $H^p(\mathbb{D})$, якщо $G \in H^p(\mathbb{D})$ і система*

$$\{G(z)z^n : n \in \mathbb{Z}_+\} \tag{1.19}$$

повна в $H^p(\mathbb{D})$.

Сам термін "циклічна функція" вперше введений Х. Шапіро в [147]. Для випадку простору Гарді у півплощині означення циклічності введено П. Лаксом.

Означення 1.5. *Функція G називається циклічною в $H^p(\mathbb{C}_+)$, якщо $G \in H^p(\mathbb{C}_+)$ і система*

$$\{G(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\} \tag{1.20}$$

повна в $H^p(\mathbb{C}_+)$.

Повнота тут розуміється, як і в попередньому означенні, в тому сенсі, що кожну функцію f можна наблизити з довільною наперед заданою точністю за нормою простору $H^p(\mathbb{C}_+)$ скінченними лінійними комбінаціями функцій системи (1.20).

У 1949 році А. Бьорлінг [75] довів, що функція $G \in H^2(\mathbb{D})$ є циклічною в $H^2(\mathbb{D})$ тоді і тільки тоді, коли виконується кожна з умов:

1) G не має жодного нуля в $\mathbb{D}$;

2) $\lim\limits_{\rho\to 1-}\int\limits_0^{2\pi}\ln|G(\rho e^{i\varphi})|d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\ln|G(e^{i\varphi})|d\varphi,$

де $G(e^{i\varphi})$ є кутовими граничними значеннями функції G на одиничному колі.

Проте Н. К. Нікольський та В. П. Хавін вказують [65], що найістотніша (достатня) частина теореми Бьорлінга фактично одержана В. І. Смірновим ще в 1928 році. У 1959 році П. Лакс довів аналог результату А. Бьорлінга для випадку простору $H^2(\mathbb{C}_+)$.

Теорема 1.6. ([118]) *Якщо $G\in H^2(\mathbb{C}_+)$, то наступні твердження еквівалентні:*

1) G є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$;

2) G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$,

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{\ln|G(x)|}{x}=0$$

і інтегральна гранична функція функції G є сталою;

3) G є зовнішньою в $H^2(\mathbb{C}_+)$.

П. Халмош узагальнив їх результат на випадок гільбертового простору (див. [105], [117, с. 515]).

Н. К. Нікольський [130, с. 66] вказує на те, що наближення з вагою суттєво відрізняється від аналогічного наближення в неваговому випадку. Так, тригонометрична система $\{e^{itn}:n\in\mathbb{Z}\}$ є повною і мінімальною в $L^2(-\pi;\pi)$, тому система $\{e^{itn}:n\in\mathbb{Z}_+\}$ є "дуже далекою від того, щоб бути повною" в $L^2(-\pi;\pi)$. Інакше кажучи, система $\{z^n:n\in\mathbb{Z}_+\}$ є "дуже неповною" в $L^2(\partial\mathbb{D})$. Але домноження її на деяку функцію f

може призвести до того, що $span\ \{z^n f : n \in \mathbb{Z}_+\} = L^2(\partial\mathbb{D})$, тобто f є циклічною в $L^2(\partial\mathbb{D})$.

Означення 1.6. *Функція G називаєтьcя циклічною в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, якщо $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і система* (1.20) *повна в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$.*

Повноту тут розуміємо у тому сенсі, що кожна функція $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ може бути наближена скінченною лінійною комбінацією функцій системи (1.20) з довільною наперед заданою точністю за нормою простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Б. В. Винницький одержав [14] деякі необхідні умови циклічності в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та разом з автором дисертації [11] деякі достатні умови, що суттєво відрізнялися між собою.

Однією з перших монографій про циклічні функції у просторах Гарді була книга Н.К. Нікольського [52]. Як наслідок розвитку теорії була написана значно розширена і дещо ідейно змінена монографія [130], що містить досить повну бібліографію розглядуваних питань. Ряд авторів досліджували циклічність у вагових просторах Гарді [144] [157], [104], [127], [159], [78], [101]. Деякі з цих результатів поширено на загальніші випадки сильно неперервних напівгруп операторів та локально компактних абелевих груп [30], [28].

Ідейно близькими до теорії циклічності є теорія апроксимації системами степеневих та експоненціальних функцій, що має свою грандіозну історію та об'єм. У цьому зв'язку відзначимо монографію Б. Хабібулліна [64], яка містить основні класичні теореми та багато нових результатів завершеного характеру, а також працю [71] А. Бакана та С. Кайсера, у якій доведено щільність алгебраїчних поліномів у просторі Гарді у смузі. У роботах А. С. Романюка, С. Б. Вакарчука, М. Ш. Шабозова, В.

М. Савчука, С. О. Чайченка [55], [7], [66], [146] розглядаються найкращі наближення та поперечники у різних функціональних просторах, зокрема у просторах Гарді.

Проте відкритим залишалося наступне питання.

Проблема 3. *Знайти повний опис циклічних функцій у ваговому просторі Гарді з неаналітичною вагою експоненціального типу.*

Дзета-функція введена для дійсних змінних Л. Ейлером у 1737 році. Її використовували у своїх дослідженнях з теорії простих чисел П. Діріхле та П. Чебишев. Новий етап її досліджень започаткований у 1859 році Г. Ріманом публікацією [140].

Дзета-функція Рімана ζ визначається рядом Діріхле

$$\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s},$$

який збігається для $\mathrm{Re}(s) > 1$ і аналітично продовжується на всю комплексну площину крім точки $s = 1$, в якій має простий полюс з лишком 1. Гіпотеза, сформульова Б. Ріманом у 1859 році, полягає в тому, що всі недійсні нулі дзета-функції ζ лежать на прямій $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Важливість гіпотези Рімана є добре відомою.

В роботах Б. Німана [132], А. Бьорлінга [75], П. Лакса [118], Н.К. Нікольського [130], В. І. Васюніна [6], М. Балазарда та Е. Сайяша [73] та інших авторів одержано результати, які встановлюють еквівалентність гіпотези Рімана і деяких тверджень про повноту систем функцій. А. Кондратюк і А. Бридун застосували [83] метод рядів Фур'є для дослідження дзета-функції. К. Ероглу та Й. Островський [96] показали належність деякого перетворення функції Рімана до простору Гарді. В близькому напрямі працює Ж.-Ф. Бурноль, який одержав [84] еквівалентне формулювання гіпотези Рімана в термінах зовнішніх функцій для простору Гарді $H^2(\mathbb{C}_+)$. Його результат можна сформулювати наступним чином.

Теорема 1.7. *Гіпотеза Рімана справедлива тоді і тільки тоді, коли функція* $\frac{z-1/2}{(z+1/2)^2}\zeta\,(z+1/2)$ *є циклічною в* $H^2(\mathbb{C}_+)$.

Проте апроксимаційні властивості системи (1.20) суттєво відрізняються у просторах $H^2(\mathbb{C}_+)$ і $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, тому актуальною задачею є одержання аналогу теореми Бурноля для випадку $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

У випадку циклічності функції G в просторі $H^2(\mathbb{C}_+)$ система (1.20) є "дуже переповненою", у зв'язку з чим виникають задачі "прорідження" такого типу систем, знаходження фреймів [88], [108], абсолютно зображувальних систем [9], [42], базисів у системах експонент з вагою [56], [54], [57]. Тому вбачається можливим використання для дослідження властивостей циклічних функцій у вагових просторах Гарді грунтовно розробленої А. Ф. Лєонтьєвим, М. М. Шереметою, О. Б. Скасківим, П. В. Філевичем та їх учнями теорії рядів Діріхле [47], [60], [59], [68], [63].

1.1.4 Оператори у просторах типу Гарді

Теорія просторів Гарді має багато точок дотику з функціональним аналізом, зокрема теорією оператора зсуву, операторів згортки та інших інтегральних операторів, композиційних операторів.

Природним узагальненням поняття циклічної функції в $H^p\,(\mathbb{D})$ є поняття циклічного вектора у функціональному просторі.

Означення 1.7. *Елемент $x \in X$ банахового простору X називають циклічним вектором (елементом) оператора $T : X \to X$, якщо span $\{ T^n x : n \in \mathbb{Z}_+\} = X$, де span $\{L\}$ означає замикання лінійної оболонки функцій системи L.*

Детально властивості циклічних функцій відносно оператора зсуву описані в [130], існують цікаві результати завершеного характеру [27], [26] про циклічні елементи оператора диференціювання та оператора узагальненого диференціювання Гельфонда-Лєонтьєва.

М. Г. Крейн, М. Л. Горбачук, В. І. Горбачук та їх учні розробили теорію цілих операторів, що дозволило розглядати задачі теорії апроксимації та інші задачі комплексного аналізу як задачі теорії операторів [22], [23], [103].

Оператор T в банаховому просторі X називається *циклічним оператором*, якщо для нього існує циклічний вектор $x \in X$. Крім циклічності, активно вивчається також суперциклічність, гіперциклічність, мультициклічність, мультигіперциклічність [82], [113], [138].

Різні (найперше інтегральні) оператори у просторах аналітичних функцій вивчалися в [158], [143], [139], [145], [40], [135], [87], [128], а композиційні, наприклад, в [81]. Зокрема, глибоко розроблена і має численні застосування [122], [114] теорія оператора Гільберта

$$Hf(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{z-u}\, du,$$

де інтеграл розглядається, загалом, у розумінні головного значення. При дослідженнях у вагових просторах Гарді виникає близький в деякому сенсі до оператора Гільберта оператор

$$Tf(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{uK(x-u)}{(u-x)(u+x)} f(u)du,$$

де K зображається на проміжку $\left[-\frac{\pi}{\sigma}; \frac{\pi}{\sigma}\right]$ рядом Фур'є за синусами.

При його дослідженні виникає

Проблема 4. *Чи оператор T є обмеженим у просторах L^p та просторах типу Гарді?*

Найцікавішою для застосувань є відповідь на це питання у випадку $p = 1$.

Дослідження повноти у функціональних класах дуже часто використовує апарат операторів згортки. Рівняння та оператори типу згортки у просторах аналітичних функцій, як і оператори Ганкеля і Тьопліца, активно вивчаються останнім часом в просторах Гарді та інших просторах аналітичних функцій [130], [121], [151], [133], [86], [72]. Близькими до згаданих вище є дослідження модельних операторів та просторів [131], [41], [2].

Рівняння

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(u+\tau)g(u)dw = 0,\ \tau \le 0,\ g \in L^2(-\infty; 0), \tag{1.21}$$

і деякі його аналоги вивчали Ю. Домар, Б. Німан, П. Лакс, Б. Я. Левін, В. П. Гурарій, А. Боричев, Х. Хеденмальм [132], [118], [32], [30], [91], [80]. У цих працях, зокрема, показано, що рівняння (1.21) має нетривіальний розв'язок $f \in L^2(-\infty; 0)$ тоді і тільки тоді, коли функція

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} g(u)e^{uz}du,$$

не є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$, також проаналізовано розв'язки цього рівняння.

Б. В. Винницький розглянув аналог рівняння згортки (1.21) для випадку півсмуги, властивості якого тісно пов'язані з властивостями просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Сформулюємо означення відповідних просторів. Нехай $E^p[D_\sigma]$ та $E^p_*[D_\sigma], 1 \le p < +\infty, \sigma > 0$, є просторами аналітичних функцій відповідно в областях $D_\sigma = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma, \operatorname{Re} z < 0\}$ та $D^*_\sigma = \mathbb{C} \backslash \overline{D}_\sigma$, для яких

$$\sup \left\{ \int\limits_\gamma |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де супремум береться за всіма відрізками γ, що лежать відповідно в D_σ та D^*_σ. Функції f, що належать до цих просторів, мають майже скрізь на ∂D_σ кутові граничні значення [10], що позначаємо через $f(z)$ і $f \in L^p[\partial D_\sigma]$.

Розглянемо рівняння

$$\int\limits_{\partial D_\sigma} f(w+\tau) g(w) dw = 0, \quad \tau \le 0, \quad g \in E^2_*[D_\sigma], \tag{1.22}$$

де розв'язок f шукається у просторі $E^2[D_\sigma]$.

В [10], [14], [11] встановлено деякі умови існування розв'язків рівняння (1.22). Рівняння (1.21) можна розглядати як граничний випадок рівняння (1.22) при $\sigma = 0$, проте в деяких моментах властивості цих рівнянь суттєво відрізняються. Зокрема, існування розв'язків останнього рівняння може залежати від модулів кутових граничних значень функції G, хоч для (1.21) зміна тільки модулів кутових граничних значень функції G не змінює множини його розв'язків. У зв'язку з цим виникає

Проблема 5.

Дослідження розв'язків рівняння (1.22), *що залежать від модулів кутових граничних значень функції* G. *Опис трансляційно інваріантних підпросторів функції* G *відносно оператора зсуву.*

Деякі труднощі для застосувань результатів, одержаних при вивченні просторів Гарді, виникають через різноманітність областей, на яких ці простори розглядаються. Крім класичних одиничного круга і півплощини, багато цікавих результатів одержано для смуги, півсмуги, кута і т. д. Одним зі шляхів подолання вказаних труднощів є узагальнення результатів на області загальнішого вигляду. У зв'язку з цим природною є наступна

Проблема 6.

Перенесення базових результатів про рівняння (1.22) *на випадок довільної опуклої необмеженої багатокутної області.*

1.2 Основний зміст дисертації

Розділ 2 є вступним у дисертації. У перших двох підрозділах розглядаються задачі розщеплення у просторах W^p_σ та $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, які полягають в тому, щоб функції, які є "великими" одночасно у верхній та нижній півплощині, зобразити у вигляді суми двох функцій, одна з яких є "великою" тільки у верхній півплощині, а інша — тільки в нижній. Точне формулювання сформульовано вище як проблема 1.

Для ілюстрації проблеми 1 зазначимо, що у випадку $p = \infty$ прикладом шуканого зображення для функції $f(z) = \sin z$ є

$$f_2(z) = \frac{e^{i\sigma z}}{2i}, \quad f_3(z) = \frac{e^{-i\sigma z}}{2i}.$$

Для випадку $p = 2$ маємо елементарний розв'язок проблеми 1, що базується на теоремі Пелі-Вінера:

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\sigma \varphi(t) e^{itz} dt, \quad f_3(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^0 \varphi(t) e^{itz} dt. \quad (1.23)$$

Але для випадку $p = 1$, який є найцікавішим для застосувань, вищенаведене розвинення не є розв'язком проблеми 1 в загальному випадку. Зазначимо, що $W^1_\sigma \subset W^2_\sigma$ і функція f належить до простору W^2_σ, $\sigma > 0$, тоді і тільки тоді, коли вона подається у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k c_k \frac{\pi \sin \sigma z}{\sigma z - \pi k}, \quad (1.24)$$

де $(c_k) \in l^2$. У цьому підрозділі розглянуто наступну задачу.

Задача 1. *Нехай $f \in W^1_\sigma$. За яких умов на коефіцієнти c_k в зображенні (1.24) функція f допускає декомпозицію*

$f = f_2 - f_3$ для цілих функцій f_2, f_3 які задовольняють при $p = 1$ умови $B(0;\pi)$ і $B(\pi;2\pi)$ відповідно, де

$$B(\hat{\alpha},\hat{\beta}) : \sup_{\varphi\in(\hat{\alpha},\hat{\beta})} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty?$$

Ми одержали повний розв'язок задачі 1 у двох формах.

Теорема 2.1. *Якщо $f \in W_\sigma^1$, то шукана у задачі 1 декомпозиція існує тоді і тільки тоді, коли для коефіцієнтів c_k в зображенні (1.24) виконується нерівність*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \theta_{k,m,\delta} \right| < +\infty,$$

де

$$\theta_{k,m,\delta} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m+k} e^{i\pi\delta m} - 1}{m - \delta m - k}, & m - \delta m - k \neq 0, \\ \pi i, & m - \delta m - k = 0, \end{cases}$$

для деякого $\delta \in (0;1)$.

Теорема 2.2. *Якщо $f \in W_\sigma^1$, то шукана у задачі 1 декомпозиція існує тоді і тільки тоді, коли для коефіцієнтів c_k в зображенні (1.24) виконуються нерівності*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_s \eta_{m,k,s} \right| < +\infty,$$

де

$$\eta_{m,k,s} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^s - (-1)^{k+m}}{k + m - s}, & s \neq k + m, \\ \pi i, & s = k + m, \end{cases}$$

і

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \beta_{m,k} \right| < +\infty,$$

де

$$\beta_{m,k} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k+m}-1}{m-k}, m \neq k, \\ \pi i, \qquad\qquad m = k. \end{cases}$$

Отримані умови досить складно перевірити для конкретних функцій. Часто зручніше скористатися простішими необхідними чи достатніми умовами.

Наслідок 2.3. *Якщо для $f \in W^1_\sigma$, шукана у задачі 1 декомпозиція існує, то для коефіцієнтів її розвинення* (1.24)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k = 0.$$

З цього наслідку отримано наступне твердження.

Теорема 2.3. *Існують функції $f \in W^1_\sigma$, для яких задача 1 розв'язку не має.*

Теорема 2.4. *Якщо в зображенні* (1.24) *функції $f \in W^1_\sigma$ коефіцієнти c_k дорівнюють нулеві для всіх непарних $k \in \mathbb{Z}$, то шукана у задачі 1 декомпозиція існує.*

За теоремою 2.3 задача 1 позитивно розв'язується не для всіх функцій $f \in W^1_\sigma$. Проте важливі застосування може мати розв'язок цієї задачі з деякими послабленими вимогами до розщеплення, а саме вимогою вказаної у задачі 1 поведінки не у всій верхній (нижній) півплощині, а тільки у тих їх частинах, що перетинаються з правою півплощиною. У зв'язку з цим виникає

Задача 2. *За яких умов функція $f \in W^1_\sigma$, допускає зображення $f = f_4 - f_5$, де функції f_4 і f_5 аналітичні в $\mathbb{C}_+$, f_4 задовольняє умову $B\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ і f_5 задовольняє $B\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ при $p = 1$?*

Нами одержано наступні достатні умови розв'язності задачі 2.

Теорема 2.5. *Якщо в зображенні* (1.24) *функції* $f \in W_\sigma^1$ *є лише скінченна кількість ненульових коефіцієнтів* c_k*, то задача 2 для неї має позитивний розв'язок.*

Теорема 2.6. *Якщо в зображенні* (1.24) *функції* $f \in W_\sigma^1$ *коефіцієнти* c_k *дорівнює нулю для всіх непарних* $k \in \mathbb{N}$*, то задача 2 для неї має позитивний розв'язок.*

Наступний підрозділ присвячений отриманню теорем типу Фрагмена-Ліндельофа для півсмуги та півплощини, що використовуються у наступних розділах. Одержано такі твердження.

Теорема 2.7. *Якщо* f *належить до простору Смірнова* $E^p[M_k]$, $1 \le p < +\infty$, *для кожного прямокутника* $M_k = \{z : k < \operatorname{Re} z < 0, |\operatorname{Im} z| < \sigma\}$, $k < 0$, $f \in L^p[\partial D_\sigma]$, *виконується нерівність*

$$(\forall \varepsilon > 0) : \sup_{u \in (-\infty;0)} \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} |f(u+iv)|^p \exp\left(-\varepsilon e^{-\gamma u}\right) dv \right\} < +\infty,$$

для деякого $\gamma < \frac{\pi}{\sigma}$ *і* $f(x)\exp\{-\delta e^{-\frac{\pi}{2\sigma}x}\} \in L^p(-\infty;-1)$ *для деякого* $\delta > 0$, *то* $f \in E^p[D_\sigma]$.

Теорема 2.7 є L^p-аналогом теореми типу Фрагмена-Ліндельофа для півсмуги, встановленої незалежно різними математиками (див. [46, с. 72], [117, с. 284], [36, с. 217]).

Теорема 2.10. *Якщо функція* f *є аналітичною в* $\mathbb{C}_+$, *має майже скрізь на* $\partial\mathbb{C}_+$ *кутові граничні значення,* $f \in L^p[\partial\mathbb{C}_+]$, $1 \le p < +\infty$, *і*

$$(\forall \varepsilon > 0) : \sup_{|\varphi| < \pi/2} \left\{ \int_{0}^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \exp\left(-\varepsilon\left(r + \frac{1}{r}\right)\right) dr \right\} < +\infty,$$

то $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$.

Ця теорема є узагальненням однієї теореми В. Мартиросяна [125].

Останній підрозділ присвячений встановленню еквівалентного означення вагового простору Гарді $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Розглянемо простір $\widetilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma \geqslant 0, 1 \leqslant p < +\infty$, аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$||f||_{\widetilde{H}^p_\sigma} := \max\left\{\sup_{y\in\mathbb{R}}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|}dx\right\};\right.$$
$$\left.\sup_{x>0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|}dy\right\}\right\}^{1/p} < +\infty.$$

Теорема 2.11. *Простори* $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *та* $\widetilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geqslant 0$, $1 \leqslant p < +\infty$, *співпадають, причому норми* $||\cdot||_{H^p_\sigma}$ *та* $||\cdot||_{\widetilde{H}^p_\sigma}$ *є еквівалентними.*

Ця теорема узагальнює одну теорему А. Седлецького [58] про еквівалентне зображення просторів Гарді у півплощині.

У третьому розділі розглядаються теореми про зображення у просторах $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Починається він доведенням двох теорем типу Пелі-Вінера про зображення. Ці твердження також дозволяють глибше зрозуміти механізм одержання умов, що фігурують у розділі 4, зокрема у його першому та третьому підрозділах.

Теорема 3.1. *Функція* G, *визначена рівністю*

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\partial D_\sigma} g(w)e^{zw}dw, \tag{1.25}$$

належить до простору $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0$, *і виконується умова*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln|G(x)|}{x} = -\infty$$

тоді і тільки тоді, коли $g \in E^2_*[D_\sigma]$ *і* g *є цілою функцією.*

Теорема 3.2. *Функція* G, *визначена рівністю* (1.25), *належить до простору* $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0$, *і виконується умова*

$$(\exists c_1 \in \mathbb{R}) : G(z) \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z - c_1 z\right) \in H^2(\mathbb{C}_+)$$

тоді і тільки тоді, коли $g \in E^2_*[D_\sigma]$, g *є цілою функцією і*

$$(\exists c \in \mathbb{R}) : g(w) \exp\left(-ce^{-\frac{w\pi}{2\sigma}}\right) \in E^2[D_\sigma].$$

Для простору Гарді у півплощині відомі безпосередні узагальнення інтегральної формули Коші та формули Пуассона. Для просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, такими формулами скористатися неможливо, оскільки відповідні інтеграли можуть розбігатися. Наступні два короткі підрозділи присвячені одержанню аналогів формул Коші та Пуассона для вагового випадку. Ці результати використовуються в розділі 4. Отримано наступні твердження.

Теорема 3.3. *Якщо* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0$, *то*

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(iv)e^{-i\sigma(z-iv)}}{iv - z} dv - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{f(iv)e^{i\sigma(z-iv)}}{iv - z} dv - \\ -\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(u)\sin\sigma(z-u)}{u - z} du = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}_+, \\ 0, z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}}_+, \end{cases} \end{aligned} \qquad (1.26)$$

Теорема 3.4. *Якщо* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0,$ *то*

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{xe^{-i\sigma(z-iv)}f(iv)}{(y-v)^2+x^2}dv + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xe^{i\sigma(z-iv)}f(iv)}{(y-v)^2+x^2}dv$$
$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{xf(u)\sin\sigma(z-u)}{(u-z)(u+\overline{z})}du, z = x+iy \in \mathbb{C}_+, \tag{1.27}$$

$$f(z) = \frac{i}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{(v-y)e^{-i\sigma(z-iv)}f(iv)}{(y-v)^2+x^2}dv$$
$$+\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{(v-y)e^{i\sigma(z-iv)}f(iv)}{(y-v)^2+x^2}dv \tag{1.28}$$
$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{(u-iy)f(u)\sin\sigma(z-u)}{(u-z)(u+\overline{z})}du, z = x+iy \in \mathbb{C}_+.$$

Останній підрозділ третього розділу присвячений отриманню опису функцій, що визначені на уявній осі і є кутовими граничними функціями деяких аналітичних у правій півплощині функцій, що задовольняють певні стандартні умови. Отримано наступне твердження.

Теорема 3.7. *Якщо* $f_0 : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_0(it)e^{-\sigma|t|} \in L^1(\mathbb{R})$ *та існує функція* f_2, *така що*

1) $f_2 \in H^p_{2\sigma}(\mathbb{C}_+)$;

2) $f_3(iv) := f_1(iv) + f_2(iv) \in L^p(-\infty; 0)$, $f_1(iv) := f_0(iv)e^{-\sigma v}$;

3) *для майже всіх* $\tau < 0$

$$\int_0^{+\infty} f_1(iv)e^{i\tau v}dv + \frac{1}{i}\int_0^{+\infty} f_2(u)e^{\tau u}du + \int_{-\infty}^0 f_3(iv)e^{i\tau v}dv = 0,$$

то існує аналітична в $\mathbb{C}_+$ *функція* f*, для якої* f_0 *є кутовою граничною функцією і*

$$\sup\left\{\int_0^{+\infty}\left|f(re^{i\varphi})\right| e^{-\sigma r|\sin\varphi|}dr : \varphi\in(-\pi/2;\pi/2)\backslash(-\delta;\delta)\right\}<+\infty \tag{1.29}$$

для всіх $\delta\in(0;\pi/4)$.

Центральне місце у дисертаційній роботі займає розділ 4. Він складається з п'ятьох підрозділів та висновків. Головний результат сформульовано у третьому підрозділі, перші два є для нього підготовчими, але становлять певний самостійний інтерес. У першому підрозділі одержано одну з реалізацій принципу невизначеності в гармонічному аналізі. Твердження цього типу полягають у тому, що функція і її перетворення Фур'є не можуть бути одночасно "дуже малими". Однією з перших теорем у цьому напрямку є теорема С. Мандельбройта [50]. Позначимо $D_1=\{z:\operatorname{Re} z<0,-2\sigma<\operatorname{Im} z<0\}$, $D_1^*=\mathbb{C}\backslash\overline{D}_1$, $D_3=\{z:\operatorname{Re} z<0, 0<\operatorname{Im} z<2\sigma\}$, $D_3^*=\mathbb{C}\backslash\overline{D}_3$. Через $E_*^p[D_1]$, $E_*^p[D_3]$ позначимо простори Гарді-Смірнова аналітичних відповідно в областях D_1^* чи D_3^* функцій f, для яких

$$\sup\left\{\int_\gamma |f(z)|^p|dz|\right\}^{1/p}<+\infty,$$

де супремум береться за всіма відрізками γ, що лежать відповідно в D_1^* чи D_3^* і є паралельними до координатних осей.

Нами одержано наступне твердження.

Теорема 4.2. *Нехай для функцій* $\Omega_1:\mathbb{C}_+\to\mathbb{C}$, $\Omega_3:\mathbb{C}_+\to\mathbb{C}$

виконуються умови

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln|\Omega_j(x)|}{x}=-\infty,\quad j\in\{1;3\},$$

та

$$(\Omega_1(x)+\Omega_3(x))\,e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}\in L^2(0;+\infty),$$

і для функцій q_j, *визначених рівностями*

$$q_j(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\Omega_j(x)e^{-xw}dx, j\in\{1;3\},$$

виконуються умови $q_1\in E_*^2[D_1]$, $q_3\in E_*^2[D_3]$.

Тоді знайдеться таке $c\in\mathbb{R}$, *що*

$$\Omega_1(z)e^{-i\sigma z}e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-cz}\in H^2(\mathbb{C}_+),\ \Omega_3(z)e^{i\sigma z}e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-cz}\in H^2(\mathbb{C}_+),$$

де $\ln z$ *– головне значення логарифма в* $\mathbb{C}_+$.

Другий підрозділ четвертого розділу присвячений встановленню еквівалентності між деякими умовами у просторі $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, одні з яких визначаються поведінкою функції тільки на додатній півосі, а інші — тільки на уявній осі. Для формулювання наступного результату зауважимо, що інтегральна гранична функція h функції $G\in H^p(\mathbb{C}_+)$ визначається з точністю до адитивної сталої і значень в точках неперервності рівністю

$$h(t_2)-h(t_1)=\lim_{x\to0+}\int\limits_{t_1}^{t_2}\ln|G(x+iy)|dy-\int\limits_{t_1}^{t_2}\ln|G(iy)|dy.$$

Теорема 4.4. *Нехай* $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1\leqslant p<+\infty, \sigma>0$, *і* $G(z)\neq0$ *для всіх* $z\in\mathbb{C}_+$, *а* $h(t)\equiv const$. *Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) $$\varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt-2\sigma\ln r\right)=-\infty;$$

2)$G_1 \notin H^p(\mathbb{C}_+)$ *для кожного* $c \in \mathbb{R}$,

де $G_1(z) = G(z) \exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z - cz\right\}$;

3) $\lim\limits_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)|dt - 2\sigma \ln r \right) = -\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right) = +\infty$;

5) $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \left(\frac{\ln|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right) = +\infty$.

Зауважимо, що теорема для випадку $\sigma = 0$ кожна з умов 1)–5) визначає порожню множину у просторі $H^p_0(\mathbb{C}_+) \equiv H^p(\mathbb{C}_+)$. Нам невідомі подібні результати для інших вагових просторів Гарді. Щодо випадку $\sigma = 0$, тобто класу $H^p(\mathbb{C}_+)$, то одержати умови, які пов'язували б "малість" модуля функції на $\partial\mathbb{C}_+$ з "великістю" її модуля на $\mathbb{R}_+$, неможливо. Справді, коли $G \in H^p(\mathbb{C}_+)$, не має нулів у $\mathbb{C}_+$ і її інтегральна гранична функція є сталою, то

$$|G(x)| = \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{t^2+x^2} \ln|G(it)|dt + cx \right\},$$

тобто, коли $|G_1(it)| \leq |G_2(it)|$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$ і $c = 0$, то $|G_1(x)| \leq |G_2(x)|$ для всіх $x > 0$.

Також показано, що у попередній теоремі позбутися умов тривіальності інтегральної граничної функції та відсутності нулів у правій півплощині не можна. Проте, дещо модифікувавши умови теореми, можна одержати наступне твердження.

Теорема 4.6. *Нехай* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < +\infty$, $\sigma > 0$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1) $$(\forall\, c \in \mathbb{R}) : G\,(z) \exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z - cz\right\} \notin H^p\,(\mathbb{C}_+);$$

2) $$\underline{\lim}_{r\to+\infty}\left(K(r) - \frac{\sigma}{\pi}\log r\right) = -\infty,$$

де

$$K(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\log|G\,(it)|\,dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)|dh\,(t)| - \sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|};$$

3) $$\lim_{r\to+\infty}\left(K(r) - \frac{\sigma}{\pi}\log r\right) = -\infty;$$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} = +\infty$ *або* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}{}^{*}\left(\frac{\log|G\,(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x\right) = +\infty,$

де границя $\lim^*$ *розглядається поза деякою множиною* E *скінченної логарифмічної міри;*

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} = +\infty,$ *або* $\displaystyle\overline{\lim_{x\to+\infty}}{}^{*}\left(\frac{\log|G\,(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x\right) = +\infty,$

де верхня границя $\overline{\lim}^*$ *розглядається поза деякою множиною* E *скінченної логарифмічної міри.*

Зауважимо, що для випадку $\sigma = 0$ кожна з умов 1) - 5) визначає порожню множину.

У третьому підрозділі одержано критерій циклічності у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Теорема 4.8. *Нехай* $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0, G \not\equiv 0$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1) *G є циклічною у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;*
2) *рівняння*

$$\int\limits_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)dw = 0, \tau \le 0, g \in E^2_*[D_\sigma],$$

де g визначена рівністю

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(x)e^{-xw}dx, \qquad Rew > 0,$$

має тільки тривіальний розв'язок $f \equiv 0$ в $E^2[D_\sigma]$;
3) *система $\{g(w-\tau) : \tau \le 0\}$ є повною в $E^2_*[D_\sigma]$;*
4) *G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$, інтегральна гранична функція h функції G є сталою і виконується одна з умов 1)–5) теореми 4.4.*

Четвертий підрозділ четвертого розділу присвячений опису трансляційно інваріантних підпросторів, породжених нециклічними функціями у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0$. Позначивши через $\mathrm{span}_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ замикання лінійної оболонки системи $\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$, отримали наступне твердження.

Теорема 4.13. *Нехай $\sigma > 0$ і*

$$G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+),$$

для деякого $c \in \mathbb{R}$. Тоді $\mathrm{span}_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ співпадає з множиною всіх таких функцій вигляду

$$Q(z) = \varkappa(z)e^{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{\widetilde{c}z},$$

що $\varkappa \in H^2(\mathbb{C}_+)$, причому послідовність нулів функції G є підпослідовністю послідовності нулів функції $\varkappa$, $h_\varkappa - h_G$ є незростаючою і

$$\widetilde{c} = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left(\frac{\ln |G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right).$$

На основі попередніх теорем можемо сформулювати твердження, яке показує, що за певних умов трансляційно інваріантний підпростір, породжений функцією $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, або співпадає зі всім простором $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, або з простором Гарді, домноженим на деяку фіксовану функцію.

Наслідок 4.4. *Якщо $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $G(z) \neq 0$ для кожного $z \in \mathbb{C}_+$ і h_G є сталою, то*

$$span_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \{G(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\}$$

$$= \begin{cases} H^2(\mathbb{C}_+)I^*_G(z), \; G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+) \text{ для деякого } c \in \mathbb{R}, \\ H^2_\sigma(\mathbb{C}_+) \qquad \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Останній підрозділ цього розділу присвячений інтерпретації критерію циклічності для випадку одиничного круга. При цьому розглядається простір Гарді в крузі з вагою, зосередженою поблизу точки на одиничному колі. На нашу думку, перспективною є задача одержання аналогів тверджень цієї дисертації для просторів, розглядуваних С. Ю. Фаворовим і Л. Б. Голинським [98], вага у яких зосереджена поблизу множини міри нуль на одиничному колі.

Розділ 5 присвячений дослідженню деяких інтегральних операторів у просторах аналітичних функцій. Він складається з трьох підрозділів та висновків. У першому підрозділі розглядається оператор

$$Tf(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{uK(x-u)}{(u-x)(u+x)} f(u)du.$$

в просторі $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, інтерес до якого зумовлений, зокрема, деякими питаннями розділів 3 і 4.

Теорема 5.1. *Нехай* $K : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *є непарною,* $\frac{2\pi}{\sigma}$ *– періодичною функцією,* K *зображається на проміжку* $\left[-\frac{\pi}{\sigma}; \frac{\pi}{\sigma}\right]$ *рядом Фур'є за синусами*

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\sigma t,$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k| < +\infty.$$

Тоді T *є обмеженим оператором з* $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *в* $L^1(0; +\infty)$ *з нормою*

$$\|T\| \leqslant \frac{\pi\alpha}{2},$$

де

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

Для порівняння з цим результатом нами показано, що T не є обмеженим оператором з $L^1(0; +\infty)$ в $L^1(0; +\infty)$ для випадку $K(t) = \sin \sigma t$.

Наступні два підрозділи присвячені аналізу у термінах перетворення Фур'є-Лапласа функції $f \in E^2[D_\sigma]$ розв'язків рівняння типу згортки у півсмузі

$$\int\limits_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)dw = 0, \quad \tau \leq 0, \quad g \in E^2_*[D_\sigma]. \tag{1.30}$$

Отримано наступні необхідні умови нетривіальності розв'язку.

Теорема 5.2. *Нехай функція* $f \in E_2[D_\sigma]$, $f \not\equiv 0$, *є розв'язком рівняння* (1.30). *Тоді функція* $F_1(iy)G(iy)e^{\sigma y}$, *де*

$$F_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{l_1} f(w)e^{-zw}dw,$$

є кутовою граничною функцією на $i\mathbb{R}$ *деякої аналітичної в* $\mathbb{C}_+$ *функції* P_1*, такої що для кожного* $\delta \in (0;\pi/4)$

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|P_1(re^{i\varphi})\right|e^{-\sigma r|\sin\varphi|}dr : \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\setminus(-\delta;\delta)\right\} < +\infty.$$

В останньому підрозділі розглядаємо розв'язки рівняння (1.30), породжені "глибоким нулем" (у термінології В. П. Хавіна [37]), функції G. В цьому підрозділі ми розглядаємо конструктивний опис розв'язків у випадку 3). Зазначимо, що цей випадок не має аналогу для $\sigma = 0$. Два інші випадки, за яких можливі нетривіальні розв'язки рівняння (1.30), а саме наявність хоч одного нуля в $\mathbb{C}_+$ чи нетривіальність інтегральної граничної функції функції G, вивчалися раніше в [10], [177].

Теорема 5.3. *Нехай функція* $f \in E^2[D_\sigma]$, $f \not\equiv 0$, *є розв'язком рівняння* (1.30), *функція* G *не має нулів в* $\mathbb{C}_+$ *і інтегральна гранична функція* h *функції* G *є сталою. Тоді визначені рівностями*

$$F_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{l_j} f(w)e^{-zw}dw, \quad j \in \{1;2;3\},$$

функції F_1 *та* F_3 *є цілими і мають в* $\mathbb{C}_+$ *вигляд*

$$F_1(z) = e^{i\sigma z}e^{a_1 z}\varkappa_1(z)\prod_{|\lambda_n|\le 1}\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\prod_{|\lambda_n|>1}\frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n}\exp\left(\frac{z}{\lambda_n}+\frac{z}{\overline{\lambda}_n}\right),$$

$$F_3(z) = e^{-i\sigma z}e^{a_3 z}\varkappa_3(z)\prod_{|\mu_n|\le 1}\frac{z-\mu_n}{z+\overline{\mu}_n}\prod_{|\mu_n|>1}\frac{1-z/\mu_n}{1+z/\overline{\mu}_n}\exp\left(\frac{z}{\mu_n}+\frac{z}{\overline{\mu}_n}\right),$$

де $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_3 \in \mathbb{R}$, $\varkappa_1 \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $\varkappa_3 \in H^2(\mathbb{C}_+)$, *функції* $\varkappa_1$ *та* $\varkappa_3$ *не мають жодного нуля в* $\mathbb{C}_+$ *і їх інтегральні граничні функції* *є сталими. Послідовності нулів* (λ_n) *та* (μ_n) *відповідно функцій* F_1 *та* F_3 *містяться обидві в* $\mathbb{C}_+$ *і задовольняють умови*

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1} \operatorname{Re}\lambda_n < +\infty,$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}-\frac{\sigma}{\pi}\log r\right)=\beta_1,$$

$$\sum_{|\mu_n|\le 1} \operatorname{Re}\mu_n < +\infty,$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(\sum_{1<|\mu_n|\le r}\left(\frac{1}{|\mu_n|}-\frac{|\mu_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\mu_n}{|\mu_n|}-\frac{\sigma}{\pi}\log r\right)=\beta_3,$$

причому $\beta_1\in\mathbb{R}$, $\beta_3\in\mathbb{R}$. *Також* $F_1(z)e^{-i\sigma z}\in H^2(\mathbb{C}_-)$, $F_3(z)e^{i\sigma z}\in H^2(\mathbb{C}_-)$.

Ця теорема завершує побудову аналогу теорії спектрального аналізу В. П. Гурарія (див. [31]) в $E^2[D_\sigma]$.

Розділ 6 присвячений дослідженню просторів Гарді-Смірнова у необмеженій багатокутній області D комплексної площини. У першому його підрозділі розглядається перетворення Фур'є-Лапласа функції $f\in E^2[D]$. Одержано такий його опис (внаслідок громіздкості означення просторів наводимо тільки у розділі 6).

Теорема 6.1. *Рівності*

$$F_j(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{l_j} f(w)e^{-zw}dw,\ f\in E^2[D], \tag{1.31}$$

де $j\in\overline{1,n+1}$, *задають взаємно однозначне відображення* *простору* $E^2[D]$ *на* $T^2(D_\times^-)$ *і справедлива двоїста формула*

$$f(w) = \frac{-1}{i\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{n+1} e^{-i\varphi_j} \int\limits_0^{+\infty} F_j(re^{-i\varphi_j}) e^{re^{-i\varphi_j} w} dr,$$

де $w \in D$, $\varphi_j = \alpha_j - \pi/2$.

Основним результатом розділу є наступний аналог теореми про згортку.

Теорема 6.3. *Якщо* $f \in E^2[D]$ *і* $g \in E_*^2[D]$, *то для кожного* $\tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1}; \pi + \alpha_1)}$ *справджується рівність*

$$\int\limits_{\partial D} f(w+\tau) g(w) dw = \sum_{j=1}^{n+1} \int\limits_0^{+\infty e^{-i\varphi_j}} \Phi_j(z) e^{\tau z} dz,$$

де $\Phi_j = F_j G, j \in \overline{1; n+1}$, *функції* F_j *визначені рівностями* (1.31), *а та* G *– рівністю*

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D} g(w) e^{zw} dw. \tag{1.32}$$

Також одержано критерій існування нетривіальних роз'язків рівняння типу згортки в області D.

Теорема 6.5. *Нехай функція* G *визначена рівністю* (1.32). *Тоді рівняння*

$$\int\limits_{\partial D} f(w+\tau) g(w) dw = 0,$$

в якому $\tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1}; \pi + \alpha_1)}$, *має ненульовий розв'язок* $f \in E^2[D]$, $f \not\equiv 0$, *тоді і тільки тоді, коли система* $\left\{ G(z) e^{\tau z} : \tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1}; \pi + \alpha_1)} \right\}$ *не є повною в* $H^2(D_\times, h)$.

Останній, сьомий розділ, починається зі встановлення еквівалентного формулювання гіпотези Рімана про нулі дзета-функції.

Теорема 7.2. *Нехай G_1 – аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція, інтегральна гранична функція якої є сталою, G_1 має єдиний простий нуль в точці $z = 1/2$, $G_1(z)\zeta(z+1/2) \in H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$, $\widehat{\sigma} > 0$ і*

$$\liminf_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leq r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G_1(it)|\,dt-\frac{\widehat{\sigma}}{\pi}\ln r\right)=-\infty.$$

Тоді наступні твердження є еквівалентними:

1) справджується гіпотеза Рімана;

2) $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ – циклічна функція в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\sigma \geq \widehat{\sigma}$.

Розглянувши конкретні функції G_1, можна одержати прозоріші твердження.

Наслідок 7.2. *Гіпотеза Рімана справедлива тоді і тільки тоді, коли функція $\frac{z-1/2}{(z+1/2)^2}\zeta(z+1/2)$ є циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для деякого $\sigma \geq 0$.*

Для випадку $\sigma = 0$ цей результат співпадає з однією теоремою Ж.-Ф. Бурноля. Також на конкретному прикладі розглянуто труднощі, з якими можна зіткнутися при спробі довести гіпотезу Рімана за допомогою теореми 7.2.

Другий підрозділ присвячено отриманню теореми про зображення для простору $\mathcal{E}$, який визначаємо як простір функцій G, що зображаються у вигляді

$$G(z)=\int\limits_0^1(\cos(tz)+tz\sin(tz))g(t)dt,\ g\in L_2(0;1).$$

Теорема 7.5. *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) $G \in \mathcal{E}$;

2) *G є парною цілою функцією експоненційного типу $\sigma \le 1$, для якої функція*

$$\frac{G(w)-G(0)}{w^2}$$

належить до $L_1(\mathbb{R})$, функція

$$z\int\limits_z^{+\infty}\frac{G(w)}{w^2}dw$$

належить до $L_2(0;+\infty)$ і виконується умова

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(w)-G(0)}{w^2}dw=0;$$

3) *рівняння $f(z)-zf'(z)=G(z)$ має на $(0;+\infty)$ розв'язок $f=F$, що належить $PW^2_{1,+}$;*

4) *G — парна ціла функція, і функція*

$$\widetilde{G}(z):=G(z)-z\int\limits_0^z\frac{G'(w)}{w}dw$$

належить до простору $PW^2_{1,+}$;

5) *G — парна ціла функція експоненційного типу $\sigma \le 1$, функція*

$$\frac{G(w)-G(0)}{w^2}$$

належить до $L_1(\mathbb{R})$, функція

$$z\int\limits_z^{+\infty}\frac{G(w)}{w^2}dw$$

належить до $L_2(0;+\infty)$ і $G(z)=G_1(z)+G_1(-z)$, де G_1 — ціла функція, для якої

$$|G_1(z)|\le c_1\left(1+|z|\right)/\sqrt{1+\operatorname{Im} z},\quad Imz\ge 0.$$

Цю теорему в останньому підрозділі застосовуємо для встановлення критерію повноти та критерію повноти і мінімальності системи $\{\cos t\rho_k + t\rho_k \sin t\rho_k : k \in \mathbb{N}\}$ у просторі $L_2(0;1)$. Подібні дослідження доповнюють деякі результати Б. В. Винницького та О. В. Шавали [16].

Теорема 7.6. *Нехай $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ — довільна послідовність таких різних комплексних чисел, що $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$, якщо $k \neq m$. Система $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$, $v_k(t) = \cos t\rho_k + t\rho_k \sin t\rho_k$ є неповною в просторі $L_2(0;1)$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, є підпослідовністю нулів деякої ненульової цілої функції $G \in \mathcal{E}$.*

Теорема 7.10. *Нехай $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ — довільна послідовність різних комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$ при $k \neq m$. Система $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ є повною і мінімальною в $L_2(0;1)$ тоді і тільки тоді, коді послідовність $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є послідовністю нулів такої парної цілої функції $D \notin \mathcal{E}$, що для деяких $\alpha_k \in \mathbb{C}$ і $s \in \mathbb{C}$, $s^2 \neq \rho_\nu^2$ для всіх $\nu \in \mathbb{N}$, функція*

$$T_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2}\big((z^2 - s^2) - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\big)$$

або функція

$$\widetilde{T}_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2}\big(1 - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\big)$$

належить до простору $\mathcal{E}$.

РОЗДІЛ 2

Структура деяких просторів функцій експоненціального типу

2.1 Зображення спеціального вигляду у просторі Пелі-Вінера

Через W^p_σ, $1 \le p \le \infty$, $\sigma > 0$, позначимо простір Пелі-Вінера, тобто простір цілих функцій f експоненціального типу $\le \sigma$, для яких $f \in L^p(\mathbb{R})$. Простір W^p_σ може бути визначений (див. [45, с. 663]) також як простір цілих функцій, що задовольняють умову $A(0; 2\pi)$, де

$$A(\alpha, \beta) := \sup_{\varphi \in (\alpha, \beta)} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Зазначимо, що простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma \ge 0$, можна визначити як простір аналітичних в $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ функцій, для яких виконується умова $A(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) < +\infty$.

Розглянемо дві задачі про розвинення функцій у просторах Пелі-Вінера та Гарді, що випливають з Проблем 1 і 2, наведених у огляді літератури, і мотивованих, зокрема, дослідженнями розділів 3 і 5.

Задача 1. *Нехай $f \in W^1_\sigma$. За яких умов на коефіцієнти c_k в зображенні (1.24) функція f допускає декомпозицію*

$f = f_2 - f_3$ для цілих функцій f_2, f_3 які задовольняють при $p=1$ умови $B(0;\pi)$ і $B(\pi;2\pi)$ відповідно, де

$$B(\hat{\alpha},\hat{\beta}):\ \sup_{\varphi\in(\hat{\alpha},\hat{\beta})}\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p dr\right\}^{1/p} < +\infty?$$

Для застосувань найцікавішими є випадки $p=2$ і $p=1$.

Позитивний розв'язок задачі 1 для $p=1$ мав би наслідком позитивний розв'язок відповідної задачі про зсуви в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Однак, як показано нижче в теоремі 2.3, існують функції $f \in W^1_\sigma$, для яких потрібне зображення неможливе. Тому доводиться розглядати задачу з меншими обмеженнями, а саме

Задача 2. *За яких умов функція $f \in W^1_\sigma$, допускає розвинення $f = f_4 - f_5$, де функції f_4 і f_5 аналітичні в $\mathbb{C}_+$, f_4 задовольняє умову $B\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ і f_5 задовольняє $B\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ при $p=1$?*

Наступне твердження відіграє фундаментальну роль в теорії просторів Пелі-Вінера (див. [134]).

Теорема А1 (Теорема Пелі-Вінера 1)**.** *Простір W^2_σ співпадає з простором функцій, що зображаються в вигляді*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\varphi(t)e^{itz}dt, \quad \varphi \in L^2(-\sigma,\sigma). \tag{2.1}$$

Аналогічні твердження відомі також для випадків $1<p<2$ і $p=1$ (див. [77, с. 106], [124], [49], [122], [4]).

Теорема А2 (Теорема Боаса)**.** *Простір W^1_σ співпадає з простором функцій, що зображаються в вигляді* (2.1)*, де функція*

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} \varphi(t), |t| \le \sigma, \\ 0, \quad |t| > \sigma, \end{cases}$$

має абсолютно збіжний ряд Фур'є на $(-\sigma-\delta;\sigma+\delta)$ *за системою* $\left\{e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma+\delta}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *для деякого* $\delta>0$.

Наведемо потрібне нам в подальшому твердження, яке уточнює попередню теорему, але доведення якого нам не вдалося знайти в літературі.

Лема 2.1. *Якщо ряд Фур'є функції* φ^* *за системою* $\left\{e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma+\delta}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *збігається абсолютно на* $(-\sigma-\delta;\sigma+\delta)$ *для деяких додатних* σ *і* δ, *то для кожного* $\delta_1\in[0;\delta)$ *ряд Фур'є функції* φ^* *збігається абсолютно на* $(-\sigma-\delta_1;\sigma+\delta_1)$ *за системою* $\left\{e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma+\delta_1}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Доведення. За умовою леми ряд

$$\varphi^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_ke^{-\frac{ik\pi t}{\sigma+\delta}}$$

є абсолютно збіжним для $t\in[-\sigma-\delta;\sigma+\delta]$, тому за теоремою Боаса функція f, визначена рівністю 2.1, належить до простору $W^1_{\sigma+\delta}$.

Оскільки φ^* належить до простору $L^2(-\sigma-\delta_1;\sigma+\delta_1)$, то допускає зображення

$$\varphi^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{b}_ke^{-\frac{ik\pi t}{\sigma+\delta_1}}, \tag{2.2}$$

$t\in[-\sigma-\delta_1;\sigma+\delta_1]$, де $(\widetilde{b}_k)\in l^2$ і

$$\widetilde{b}_k=\frac{1}{2(\sigma+\delta_1)}\int\limits_{-\sigma-\delta_1}^{\sigma+\delta_1}\varphi^*(t)e^{\frac{ik\pi}{\sigma+\delta_1}t}dt=\frac{1}{2(\sigma+\delta_1)}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\varphi(t)e^{\frac{ik\pi}{\sigma+\delta_1}t}dt. \tag{2.3}$$

Порівнявши рівність (2.3) з (2.1), одержимо

$$\widetilde{b}_k=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sigma+\delta_1}f\left(\frac{k\pi}{\sigma+\delta_1}\right)$$

Як показано вище, $f \in W^1_{\sigma+\delta}$. Оскільки $W^1_{\sigma+\delta_1} \subset W^1_{\sigma+\delta}$, то $f(z+i) \in W^1_{\sigma+\delta_1}$. Тоді $f(z)e^{i(\sigma+\delta_1)z}$ належить до простору Гарді H^p у півплощині $\{z : \operatorname{Re} z > -1\}$. А з властивості 6 в [122, с. 138] випливає, що

$$\left(f\left(\frac{k\pi}{\sigma+\delta_1}\right) e^{i(\sigma+\delta_1)\frac{k\pi}{\sigma+\delta_1}} \right) \in l^1,$$

з чого отримаємо $(\widetilde{b}_k) \in l^1$, тобто ряд (2.2) збігається абсолютно.

□

В іншій формі критерій належності простору W^1_σ одержав Г.З. Бер.

Теорема А3 (Теорема Бера). *Простір W^1_σ співпадає з простором функцій, що зображаються у вигляді* (2.1), *де*

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}},$$

причому $(c_k) \in l^1$ і

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+m} c_{k+m} \frac{k}{k^2+1} \right| < +\infty.$$

Сформулюємо результат Р. Боаса в зручнішій для нас формі, скориставшись теоремою Пелі-Вінера.

Лема 2.2. *Функція f належить до простору W^1_σ, $\sigma > 0$, тоді і тільки тоді, коли вона подається у вигляді*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k c_k \frac{\pi \sin \sigma z}{\sigma z - \pi k}, \tag{2.4}$$

де $(c_k) \in l^2$ і

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| f\left(\frac{k\pi}{\sigma}(1-\delta)\right)\right| < +\infty. \tag{2.5}$$

для деякого $\delta \in (0;1)$.

Доведення. Необхідність. Нехай $f \in W_\sigma^1$. Оскільки $W_\sigma^1 \subset W_\sigma^2$ (див. [43, с. 84]), то потрібне доведено в [122, с. 150].

Достатність. Без обмеження загальності вважатимемо, що $\sigma = \pi$, бо $f(z) \in W_\pi^p$ тоді і тільки тоді, коли $f(\sigma z/\pi) \in W_\sigma^p$. Покажемо, що функція f, визначена рівністю (2.4) при $(c_k) \in l^2$, за умови виконання нерівності (2.5) належить до простору W_π^1. Справді, позначивши

$$m_k = \frac{(-1)^k f\left(k(1-\delta)\right)}{\sqrt{2\pi}},$$

з умови (2.5) отримаємо, що

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} m_k e^{-ikt} =: \widetilde{\varphi}(t)$$

є абсолютно збіжним рядом Фур'є на відрізку $[-\pi;\pi]$. Отже, $\widetilde{\varphi}$ є неперервною функцією на цьому відрізку. Тому можемо застосувати до неї обернене перетворення Фур'є та теорему Фубіні

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{\varphi}(t)e^{itz}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} m_k e^{-it(k-z)}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k f(k(1-\delta))\int_{-\pi}^{\pi} e^{-it(k-z)}dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k f(k(1-\delta))\frac{\sin\pi(k-z)}{k-z} =: \widetilde{f}(z).$$

Але функція $f(z(1-\delta)$ у точках $k \in \mathbb{Z}$ співпадає з $\widetilde{f}(z)$. Оскільки також обидві функції є функціями експоненціального типу, що не перевищує π, то за теоремою Планшереля-Пойя [122, с. 161] $f(z(1-\delta)\in L^2(\mathbb{R})$ і за теоремою єдиності [122, с. 151] співпадає з $\widetilde{f}(z)$ у всіх точках комплексної площини.

Порівнявши останню формулу з (2.4), маємо $\varphi(t)=\widetilde{\varphi}(t)$ майже скрізь на $[-\pi;\pi]$, тому далі вважатимемо, що $\varphi(t)=\widetilde{\varphi}(t)$, $t\in[-\pi;\pi]$. Послідовність (c_k) належить l_2, тому $f\in W_\sigma^2$ і за теоремою Пелі-Вінера $\widetilde{\varphi}(t)=0$, $|t|>\pi$. Тому за теоремою Боаса $f\in W_\pi^1$. $\square$

Загальний опис інтерполяційних послідовностей в W_σ^p одержано А. Берлінгом, Ю. Любарським, К. Сейпом [123], [76, с. 341-365]. Для наших досліджень достатньо сформульованих результатів. Зауважимо, що з леми 2.1 при $\delta_1=0$ випливає імплікація $\big((c_k)\in l^1\big)\Rightarrow(2.5)$.

Наслідок 2.1. *Якщо* $f\in W_\sigma^1$, $\sigma>0$, *то виконується зображення* (2.4) *і*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k c_k=0.$$

Справді, за теоремою А2 $\varphi(\sigma)=0$, але

$$\varphi(\sigma)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{-ik\pi}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k c_k.$$

Наслідок 2.2. *Умова* (2.5) *еквівалентна умові*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{s=-\infty}^{+\infty}(-1)^s c_s\frac{\sin\left(k\pi\left(1-\delta\right)\right)}{k(1-\delta)-s}\right|<+\infty.$$

Для випадку $p=2$ маємо елементарний розв'язок проблеми 1, що базується на теоремі Пелі-Вінера:

$$f_2(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\sigma\varphi(t)e^{itz}dt,\quad f_3(z)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^0\varphi(t)e^{itz}dt.\quad(2.6)$$

Але для $p = 1$ вищенаведений розклад не є розв'язком задачі 1 в загальному випадку. Наприклад, якщо $\varphi(t) = \sigma - |t|$, то

$$f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \sigma z}{z^2} \in W_\sigma^1,$$

але

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-e^{i\sigma z} + 1 + i\sigma z}{z^2} \notin W_\sigma^1,$$

$$f_3(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\sigma z} - 1 + i\sigma z}{z^2} \notin W_\sigma^1.$$

Лема 2.3. *Якщо для функції $f \in W_\sigma^1$ задача 1 має позитивний розв'язок, то в позначеннях теореми А3.16 справедливі зображення* (2.6)*.*

Доведення. Для функції f_2 виконуються при $p = 1$ умови $A(0;\pi)$ і $B(-\pi;0)$, з чого випливає, що $f_2(z)e^{-i\sigma z/2} \in W_{\sigma/2}^1$. Тому за теоремою Пелі-Вінера А3.16

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\sigma \varphi_2(t) e^{itz} dt,$$

для деякої функції $\varphi_2 \in L^2[0;\sigma]$. Аналогічно одержимо для деякої функції $\varphi_3 \in L^2[-\sigma;0]$ рівність

$$f_3(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^0 \varphi_3(t) e^{itz} dt.$$

Функція $f - f_2 + f_3$ належить до простору W_σ^2, тому для неї справедливе зображення

$$f(z) - f_2(z) + f_3(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^\sigma \widetilde{\varphi}(t) e^{itz} dt$$

для деякої функції $\widetilde{\varphi} \in L^2[-\sigma;\sigma]$. Але $f - f_2 + f_3$ – тотожній нуль, тому $\widetilde{\varphi} \equiv 0$, з чого випливає твердження леми. $\square$

Ми наведемо два критерії розв'язності задачі 1, базуючись на теоремах Боаса і Бера.

Теорема 2.1. *Якщо $f \in W_\sigma^1$, то шукана у задачі 1 декомпозиція існує тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти c_k в зображенні* (2.4) *задовольняють умову*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \theta_{k,m,\delta} \right| < +\infty, \tag{2.7}$$

для деякого $\delta \in (0;1)$, де

$$\theta_{k,m,\delta} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m+k} e^{i\pi\delta m} - 1}{m - \delta m - k}, m - \delta m - k \neq 0, \\ \pi i, \qquad\qquad\qquad\qquad m - \delta m - k = 0. \end{cases}$$

Доведення. Якщо $f \in W_\sigma^1$, то для неї справджується зображення (2.1). За лемою 2.3 позитивний розв'язок задачі 1 існує тоді і тільки тоді, коли функція f_2, визначена першою рівністю (2.6), належить W_σ^1. Для f_2 справджується зображення

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\sigma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}} e^{itz} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int\limits_0^\sigma e^{it\left(z - \frac{k\pi}{\sigma}\right)} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\sigma(z - k\pi/\sigma)} - 1}{i(z - k\pi/\sigma)}.$$

Зауважимо, що

$$f_2\left(\frac{m\pi}{\sigma}(1-\delta)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\sigma\left(\frac{m\pi}{\sigma}(1-\delta) - \frac{k\pi}{\sigma}\right)} - 1}{i\left(\frac{m\pi}{\sigma}(1-\delta) - \frac{k\pi}{\sigma}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sigma e^{i\pi(m-\delta m-k)} - 1}{i\pi(m-\delta m-k)}$$

з чого отримуємо умову (2.7). Також за теоремою Пелі-Вінера $f_2 \in W_\sigma^2$, тому послідовність коефіцієнтів її розкладу (2.4) належить l^2. Залишилось скористатися лемою 2.3 для f_2. $\square$

Теорема 2.2. *Якщо* $f \in W_\sigma^1$, *то шукана у задачі 1 декомпозиція існує тоді і тільки тоді, коли для коефіцієнтів* c_k *в зображенні* (2.4) *виконуються нерівності*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_s \eta_{m,k,s} \right| < +\infty, \tag{2.8}$$

де

$$\eta_{m,k,s} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^s - (-1)^{k+m}}{k+m-s}, & s \neq k+m, \\ \pi i, & s = k+m, \end{cases}$$

і

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \beta_{m,k} \right| < +\infty, \tag{2.9}$$

де

$$\beta_{m,k} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k+m} - 1}{m-k}, & m \neq k, \\ \pi i, & m = k. \end{cases}$$

Доведення. При доведенні попередньої теореми показано, що

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k e^{i\sigma z} - 1}{i(z - k\pi/\sigma)}.$$

Скористаємось для f_2 теоремою А3, записавши її умову у вигляді

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+m} f\left(\frac{k+m}{\sigma}\right) \frac{k}{k^2+1} \right| < +\infty.$$

Тоді

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+m}k}{k^2+1}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}c_s\frac{(-1)^s e^{i\sigma\frac{k+m}{\sigma}\pi}-1}{i\left(\frac{k+m}{\sigma}\pi-\frac{s\pi}{\sigma}\right)}\right|<+\infty,$$

з чого випливає умова (2.8). Оскільки

$$f\left(\frac{\pi m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{(-1)^k e^{i\pi m}-1}{i(\pi m/\sigma-k\pi/\sigma)},$$

то з умови належності l^1 послідовності коефіцієнтів розкладу (2.4) функції f_2 одержимо умову (2.9). □

Як випливає з вищенаведених теорем, умови (2.7) (2.8) є еквівалентними в сукупності умові (2.9). Однак ми не знаємо простішого способу довести цей факт.

Отримані умови є досить складними для перевірки конкретних функцій. Часто зручніше скористатися простішими необхідними чи достатніми умовами.

Наслідок 2.3. *Якщо для $f\in W^1_\sigma$, шукана у задачі 1 декомпозиція існує, то для коефіцієнтів її розвинення* (2.4)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k=0. \tag{2.10}$$

Справді, якщо f_2 розв'язує задачу 1, то справедливі зображення (2.6), причому за теоремою Боаса А2 $\varphi(0)=\varphi(\sigma)=0$. Але $\varphi(0)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^0=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_k$.

Теорема 2.3. *Існують функції $f\in W^1_\sigma$, для яких задача 1 розв'язку не має.*

Доведення. З наслідку 2.3 випливає, що для функції

$$f(z) = \frac{1 - \cos \sigma z}{z^2} \in W_\sigma^1$$

розв'язку задачі 1 не існує, оскільки

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) > 0,$$

тобто умова (2.10) не виконується. □

Теорема 2.4. *Якщо в представленні* (2.4) *функції* $f \in W_\sigma^1$ *коефіцієнти* c_k *рівні нулеві для всіх непарних* $k \in \mathbb{Z}$, *то задача 1 розв'язується для неї позитивно.*

Доведення. Покажемо, що шуканий розклад має вигляд

$$f_2(z) = \frac{1}{2i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_{2k}(e^{i\sigma z} - 1)}{z - 2k\pi/\sigma}, \qquad f_3(z) = \frac{1}{2i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_{2k}(e^{-i\sigma z} - 1)}{z - 2k\pi/\sigma}.$$

Справді, f_2 і f_3 – цілі функції експоненціального типу $\leq \sigma$. Зауважимо, що

$$f_2(z) = \frac{f(z)\left(e^{i\sigma z} - 1\right)}{2i \sin \sigma z} = \frac{f(z) e^{i\sigma z/2}}{2\cos(\sigma z/2)},$$

тому функція $f_2^*(z) = f_2(z + i)$ належить $L^1(\mathbb{R})$. Значить, за означенням простору $f_2^*(z)e^{-i\sigma z} \in W_\sigma^1$, з чого маємо $f_2(z)e^{-i\sigma z} \in W_\sigma^1$. Аналогічно можна показати, що $f_3(z)e^{i\sigma z} \in W_\sigma^1$.

□

2.2 Зображення спеціального вигляду у ваговому просторі Гарді

Сформлюємо наслідок з одного результату Б. Винницького [10].

Теорема А4. *Простір $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ співпадає з простором функцій, що зображаються у вигляді*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma} \varphi(t) e^{tz} dt,$$

де $\varphi \in L^2[\partial D_\sigma]$, $D_\sigma = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma, \operatorname{Re} z < 0\}$.

З цього твердження випливає наступний розв'язок задачі 2 для випадку $p = 2$:

$$f_4(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma \cap \mathbb{C}^+} \varphi(t) e^{tz} dt, \quad f_5(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma \cap \mathbb{C}^-} \varphi(t) e^{tz} dt,$$

де $\mathbb{C}^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Справді,

$$f_4(z) = -\frac{e^{i\sigma z}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(t + i\sigma) e^{tz} dt + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\sigma} \varphi(it) e^{itz} dt$$

і потрібне випливає з теорем Пелі-Вінера.

У зв'язку з теоремою 2.3 зазначимо наступне.

Зауваження 2.1. *Для функції*

$$f(z) = \frac{1 - \cos \sigma z}{z^2} \in W^1_\sigma$$

розв'язок задачі 2 існує.

Доведення.

$$f_4(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\sigma z} - 1 - i\sigma z + \frac{i\sigma}{z+\pi} z^2}{z^2},$$

$$f_5(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\sigma z} - 1 + i\sigma z - \frac{i\sigma}{z+\pi} z^2}{z^2}.$$

$\square$

Позначатимемо через $\widehat{H}^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ простір, що складається зі всіх добутків $f_1 f_2$, де $f_1 \in H^2_{\sigma/2}(\mathbb{C}_+)$ і $f_2 \in H^2_{\sigma/2}(\mathbb{C}_+)$. Очевидно, $\widehat{H}^1_\sigma(\mathbb{C}_+) \subset H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Зазначимо, що нам невідомо, чи співпадає простір $\widehat{H}^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ з $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. З позитивного розв'язку задачі 2 випливає загальніший результат.

Лема 2.4. *Якщо задача 2 розв'язується позитивно для W^1_σ, то вона має позитивний розв'язок і для кожної функції з простору $\widehat{H}^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$.*

Доведення. За теоремою A4, якщо $f_1 \in H^2_{\sigma/2}(\mathbb{C}_+)$, то $f_1(z) = e^{\frac{i\sigma z}{z}} h_1(z) + h_2(z) + e^{-\frac{i\sigma z}{z}} h_3(z)$, де

$$h_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} f\left(t + i\frac{\sigma}{2}\right) e^{tz} dt, \quad h_2(z) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}} f(it) e^{itz} dt,$$

$$h_3(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{-\infty} f\left(t - i\frac{\sigma}{2}\right) e^{tz} dt.$$

За теоремами Пелі-Вінера маємо $h_1 \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $h_2 \in W^2_{\frac{\sigma}{2}}$, $h_3 \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Аналогічно, якщо $f_1^* \in H^2_{\frac{\sigma}{2}}$, то $f_1^*(z) = e^{\frac{i\sigma z}{2}} h_1^*(z) + h_2(z) + e^{-\frac{i\sigma z}{2}} h_3^*(z)$, де $h_1^* \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $h_2^* \in W^2_{\frac{\sigma}{2}}$, $h_3^* \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Умови $A\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ і $B\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконуються для функцій $e^{\frac{i\sigma z}{2}} h_1(z) f_1^*(z) + h_2(z) e^{\frac{i\sigma z}{2}} h_1^*(z)$, а умови $A\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ і $B\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ — для функції $e^{-\frac{i\sigma z}{2}} h_3(z) f_1^*(z) + h_2(z) e^{-\frac{i\sigma z}{2}} h_3^*(z)$ з $p = 1$. Звідси одержимо, що задача 2 розв'язується позитивно для функції $f_1 f_1^*$ тоді і тільки тоді, коли вона розв'язується позитивно для функції $h_1 h_1^*$. $\square$

Теорема 2.5. *Якщо в зображенні* (2.4) *функції* $f \in W_\sigma^1$ *є лише скінченна кількість ненульових коефіцієнтів* c_k*, то задача 2 для неї має позитивний розв'язок.*

Доведення. Для спрощення викладок будемо вважати $\sigma = \pi$. З умов теореми маємо

$$f(z) = \sin \pi z \left(\frac{(-1)^{k_1} c_{k_1}}{z - k_1} + \frac{(-1)^{k_2} c_{k_2}}{z - k_2} + ... + \frac{(-1)^{k_n} c_{k_n}}{z - k_n} \right), \quad k_n \in Z.$$

За наслідком 2.3 функція в дужках є раціональною і після зведення до спільного знаменника степінь знаменника буде перевищувати степінь чисельника не менш ніж на 2. Покладемо

$$f_4(z) = \frac{e^{i\pi z} - \frac{a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}{(z+1)^{n-1}}}{2i}$$
$$\times \left(\frac{(-1)^{k_1} c_{k_1}}{z - k_1} + \frac{(-1)^{k_2} c_{k_2}}{z - k_2} + ... + \frac{(-1)^{k_n} c_{k_n}}{z - k_n} \right),$$
$$f_5(z) = \frac{e^{-i\pi z} - \frac{a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}{(z+1)^{n-1}}}{2i}$$
$$\times \left(\frac{(-1)^{k_1} c_{k_1}}{z - k_1} + \frac{(-1)^{k_2} c_{k_2}}{z - k_2} + ... + \frac{(-1)^{k_n} c_{k_n}}{z - k_n} \right),$$

де $a_0, ..., a_{n-1}$ – невідомі коефіцієнти. Виберемо їх як розв'язки системи рівнянь

$$e^{\pm i\pi z} - \frac{a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}{(z+1)^{n-1}} \Bigg|_{z = k_1, ..., k_n} = 0.$$

Оскільки $e^{\pm i\pi z} = \cos \pi z \pm i \sin \pi z$ і $\sin \pi k_j = 0$, $j \in \overline{1; n}$, то остання система є еквівалентною наступній

$$\cos \pi z (z+1)^{n-1} - a_{n-1} z^{n-1} - ... - a_1 z - a_0 \big|_{z = k_1, ..., k_n} = 0.$$

Запишемо її у вигляді

$$\begin{cases} a_0 + a_1 k_1 + a_2 k_1^2 + ... + a_{n-1} k_1^{n-1} = (-1)^{k_1}(k_1+1)^{n-1} \\ a_0 + a_1 k_2 + a_2 k_2^2 + ... + a_{n-1} k_2^{n-1} = (-1)^{k_2}(k_2+1)^{n-1} \\ \dotfill \\ a_0 + a_1 k_n + a_2 k_n^2 + ... + a_{n-1} k_n^{n-1} = (-1)^{k_n}(k_n+1)^{n-1}. \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} 1 & k_1 & \cdots & k_1^{n-1} \\ 1 & k_2 & \cdots & k_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k_n & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le m < s \le n} (k_m - k_s) \ne 0$$

є визначником Вандермонда, тому існує єдиний розв'язок вищенаведеної системи. Отже, функція f_4 є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і вона задовільняє умову $B\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Аналогічно можна показати, що f_5 є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і вона задовільняє умову $B\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Тому функції f_4 і f_5 розв'язують задачу 2. □

У зв'язку з доведенням останньої теореми виникає питання про можливість застосування цього методу для випадку, коли f має нескінченно багато ненульових коефіцієнтів. Тобто проблема полягає в знаходженні замість

$$\frac{a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}{(z+1)^{n-1}}$$

такої функції $h \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, $p \ge 1$, що $e^{i\pi z} - h(z)\Big|_{z \in N \bigcup \{0\}} = 0$. Але така функція не існує.

Справді, якщо $f_1(z) = e^{-\frac{i\pi z}{2}}\left(e^{i\pi z} - h(z)\right)$ то $f_1 \in H^\infty_{\pi/2}$ і множини нулів функцій $e^{i\pi z} - h(z)$ і f_1 співпадають. В [10] показано, що для послідовності нулів (λ_n) в $\mathbb{C}_+$ функції $H^\infty_{\pi/2}$ умова

$$\limsup_{r\to+\infty}\left(\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}-\frac{1}{2}\ln r\right)<+\infty.$$

є необхідною і достатньою. Але послідовність $\lambda_n = n$ не задовільняє цій умові, бо

$$\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}=\sum_{n=2}^{[r]}\left(\frac{1}{n}-\frac{n}{r^2}\right)\frac{n}{n}=$$

$$=\ln[r]-\frac{[r]([r]+1)}{2}\frac{1}{r^2}+O(1)=\ln r+O(1),\ r\to+\infty.$$

Теорема 2.6. *Якщо в зображенні* (2.4) *функції* $f\in W^1_\sigma$ *коефіцієнти* c_k *дорівнює нулю для всіх непарних* $k\in\mathbb{N}$, *то задача 2 для неї має позитивний розв'язок.*

Доведення. Покажемо, що шуканий розклад має вигляд

$$f_4(z)=\frac{1}{2i}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_{2k}(e^{i\sigma z}-1)}{z-2k\pi/\sigma},\qquad f_5(z)=\frac{1}{2i}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_{2k}(e^{-i\sigma z}-1)}{z-2k\pi/\sigma}.$$

Як і при доведенні теореми 2.4, можна показати, що

$$f_4(z)=\frac{f(z)e^{i\sigma z/2}}{2\cos(\sigma z/2)},$$

Твердження теореми для f_4 буде наслідком нерівностей [195]

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left\{\int_0^{+\infty}|f_4^*(x+iy)|e^{-\sigma|y|}dx\right\}<+\infty,$$

$$\sup_{x>0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f_4^*(x+iy)|e^{-\sigma|y|}dy\right\}<+\infty,$$

де $f_4^*(z) = f_4(z)e^{-i\sigma z/2}$. Друга з них і нерівність

$$\sup_{y\in\mathbb{R}\setminus[-1;1]} \left\{ \int_0^{+\infty} |f_4^*(x+iy)|e^{-\sigma|y|}dx \right\} < +\infty$$

очевидні. Для доведення умови

$$\sup_{y\in[-1;1]} \left\{ \int_0^{+\infty} |f_4^*(x+iy)|e^{-\sigma|y|}dx \right\} < +\infty$$

зауважимо, що з факторизаційної теореми 1.3 для просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ випливає існування такого $c \in \mathbb{R}$, що $f_4^*(z)e^{-cz} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тому для завершення доведення залишилось скористатися теоремою типу Фрагмена-Ліндельофа для півсмуги. Твердження для f_5 перевіряється аналогічно.

$\square$

Очевидно, аналогічний результат справджується, якщо замість обнулення коефіцієнтів c_k з непарними номерами вимагати, щоб нульовими були всі коефіцієнти з парними номерами. Врахувавши теорему 2.5, умови розв'язності задачі 2, вказані в теоремі 2.6, можна ще ослабитити: вимагати, щоб відмінною від нуля була тільки скінченна кількість коефіцієнтів c_k з парними чи непарними номерами.

2.3 Теореми типу Фрагмена-Ліндельофа

В цьому підрозділі доведемо деякі твердження типу теореми Фрагмена-Ліндельофа для півсмуги та півплощини.

Наведемо спочатку деякі допоміжні твердження.

Лема 2.5. *Якщо* $h \in L^p[\partial D_\sigma]$, $1 \le p < +\infty$, *і*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_\sigma}\frac{h(t)}{t-w}dt = \begin{cases} f(w), w \in D_\sigma, \\ 0, w \in \mathbb{C}\setminus \overline{D}_\sigma, \end{cases} \tag{2.11}$$

то $f \in E^p[D_\sigma]$.

Доведення. Це твердження для випадку $p > 1$ встановлено в [10] (див. лему 10). Доведемо його для $p = 1$. Замінимо область D_σ у формулюванні леми на $\widetilde{D}_\sigma = D_\sigma + 2i\sigma$, одержане твердження буде еквівалентним розглядуваній лемі. Тоді

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial \widetilde{D}_\sigma}\frac{h(t)}{t-w}dt = \begin{cases} f(w), w \in \widetilde{D}_\sigma, \\ 0, w \in \mathbb{C}\setminus \overline{\widetilde{D}}_\sigma, \end{cases} \tag{2.12}$$

отже, $f(\overline{w}) = 0$, $w \in \widetilde{D}_\sigma$. Тому для $w \in \widetilde{D}_\sigma$ маємо

$$f(w) = f(w) - f(\overline{w}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial \widetilde{D}_\sigma}\frac{h(t)}{t-w}dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial \widetilde{D}_\sigma}\frac{h(t)}{t-\overline{w}}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial \widetilde{D}_\sigma}\frac{h(t)}{t-u-iv}dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial \widetilde{D}_\sigma}\frac{h(t)}{t-u+iv}dt$$

$$= \frac{v}{\pi}\int\limits_{\partial \widetilde{D}_\sigma}\frac{h(t)}{(t-u)^2+v^2}dt.$$

Тому

$$\int\limits_{-\infty}^{0} |f(u+iv)|du \leq \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{v}{\pi} \int\limits_{\partial\widetilde{D}_\sigma} \left|\frac{h(t)}{(t-u)^2+v^2}\right| |dt|du.$$

Розглянувши внутрішній інтеграл по кожній з трьох сторін ∂D_σ (горизонтальних променях та вертикальному відрізку), одержимо

$$\int\limits_{-\infty}^{0} |f(u+iv)|du \leq \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{v}{\pi} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} \left|\frac{h(s+i\sigma)}{(s+i\sigma-u)^2+v^2}\right| ds \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{0} \left|\frac{h(s+3i\sigma)}{(s+3i\sigma-u)^2+v^2}\right| ds + \int\limits_{\sigma}^{3\sigma} \left|\frac{h(il)}{(il-u)^2+v^2}\right| dl \right) du.$$

Врахувавши, що $|s+i\sigma-u| \geq |s-u|$, $|s+3i\sigma-u| \geq |s-u|$, $|il-u| \geq |u|$, і застосувавши теорему Фубіні, отримаємо

$$\frac{\pi}{2} \int\limits_{-\infty}^{0} |f(u+iv)|du \leq \int\limits_{-\infty}^{0} |h(s+i\sigma)| \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{v}{(s-u)^2+v^2} duds$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{0} |h(s+3i\sigma)| \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{v}{(s-u)^2+v^2} duds$$

$$+ \int\limits_{\sigma}^{3\sigma} |h(il)| \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{v}{u^2+v^2} dudl \leq \pi \int\limits_{-\infty}^{0} |h(s+i\sigma)|ds$$

$$+\pi \int\limits_{-\infty}^{0} |h(s+3i\sigma)|ds + \pi \int\limits_{\sigma}^{3\sigma} |h(il)|dl < c < +\infty,$$

де стала c від $v \in (\sigma; 3\sigma)$ не залежить.

З рівності (2.12) також маємо $f(-\overline{w}) = 0$, $w \in \widetilde{D}_\sigma$. Тому для $w \in \widetilde{D}_\sigma$ отримаємо

$$f(w) = f(w) - f(-\overline{w}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}_\sigma} \frac{h(t)}{t-w}dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}_\sigma} \frac{h(t)}{t+\overline{w}}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}_\sigma} \frac{h(t)}{t-u-iv}dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}_\sigma} \frac{h(t)}{t+u-iv}dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{D}_\sigma} \frac{2uh(t)}{u^2+(it+v)^2}dt.$$

Тому

$$\int\limits_{\sigma}^{3\sigma} |f(u+iv)|dv \le \frac{u}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{3\sigma}\int\limits_{\partial\widetilde{D}_\sigma} \left|\frac{h(t)}{u^2+(it+v)^2}\right| |dt|dv$$

Знову розглянувши внутрішній інтеграл по кожній з трьох сторін ∂D_σ, одержимо

$$\int\limits_{\sigma}^{3\sigma} |f(u+iv)|dv \le \frac{u}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{3\sigma}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\left|\frac{h(s+i\sigma)}{u^2+(is-\sigma+v)^2}\right|ds\right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{0}\left|\frac{h(s+3i\sigma)}{u^2+(is-3\sigma+v)^2}\right|ds + \int\limits_{\sigma}^{3\sigma}\left|\frac{h(il)}{u^2+(-l+v)^2}dl\right|\right)dv.$$

Врахувавши, що $|is-\sigma+v| \ge |v-\sigma|$, $|is-3\sigma+v| \ge |v-3\sigma|$, і застосувавши теорему Фубіні, отримаємо

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_{\sigma}^{3\sigma} |f(u+iv)|dv \le \int\limits_{-\infty}^{0} |h(s+i\sigma)|\int\limits_{\sigma}^{3\sigma}\frac{u}{u^2+(v-\sigma)^2}dvds$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}|h(s+3i\sigma)|\int\limits_{\sigma}^{3\sigma}\frac{u}{u^2+(v-3\sigma)^2}dvds$$

$$+\int\limits_{\sigma}^{3\sigma}|h(il)|\int\limits_{\sigma}^{3\sigma}\frac{u}{u^2+(v-l)^2}dl\leq\pi\int\limits_{-\infty}^{0}|h(s+i\sigma)|ds+$$

$$\pi\int\limits_{-\infty}^{0}|h(s+3i\sigma)|ds+\pi\int\limits_{\sigma}^{3\sigma}|h(il)|dl\leq c_2<+\infty,$$

де стала c_2 від $u\in(-\infty;0)$ не залежить. Отже,

$$\sup_{u\in(-\infty;0)}\left\{\int\limits_{\sigma}^{3\sigma}|f(u+iv)|dv\right\}<+\infty,$$

$$\sup_{v\in(\sigma;3\sigma)}\left\{\int\limits_{-\infty}^{0}|f(u+iv)|du\right\}<+\infty,$$

з чого випливає, що $f\in E^1[D_\sigma]$. $\square$

Лема 2.6. *Якщо f належить до простору Смірнова $E^p[M_k]$, $1\leq p<+\infty$, для кожного прямокутника $M_k=\{z: k<\operatorname{Re}z<0, |\operatorname{Im}z|<\sigma\}$, $k<0$, також $f\in L^p[\partial D_\sigma]$ і*

$$\sup_{u\in(-\infty;0)}\left\{\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|f(u+iv)|dv\right\}<+\infty, \tag{2.13}$$

то $f\in E^p[D_\sigma]$.

Доведення. Спочатку зазначимо, що з належності функції f простору Смірнова $E^p[M_k]$ умова $f\in L^p[\partial D_\sigma]$ є коректною у сенсі кутових граничних значень на ∂D_σ. Оскільки $f\in E^p[M_k]$, то також (див. [53], §7.1 та §6.4) справедлива інтегральна формула Коші

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial M_k} \frac{f(t)}{t-w} dt, w \in M_k.$$

Тоді справджується оцінка

$$\left| \int\limits_{[k-i\sigma;k+i\sigma]} \frac{f(t)}{t-w} dt \right| = \left| \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \frac{f(k+is)}{k+is-w} ds \right|$$

$$\leq \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \frac{|f(k+is)|}{\sqrt{(k-u)^2+(v-s)^2}} ds \leq \frac{1}{|k-u|} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |f(k+is)| ds.$$

Тому при $p=1$

$$\left| \int\limits_{[k-i\sigma;k+i\sigma]} \frac{f(t)}{t-w} dt \right| \leq \frac{c_1}{|k-u|}.$$

Якщо ж $p>1$, то застосувавши нерівність Гьольдера, маємо

$$\left| \int\limits_{[k-i\sigma;k+i\sigma]} \frac{f(t)}{t-w} dt \right| \leq \frac{c_2}{|k-u|} \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |f(k+is)|^p ds \right)^{1/p} \leq \frac{c_3}{|k-u|}$$

Спрямувавши k до $-\infty$, для кожного фіксованого $w \in D_\sigma$ отримаємо

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_\sigma} \frac{f(t)}{t-w} dt, w \in D_\sigma.$$

Розглянемо тепер довільне $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_\sigma$. Тоді оскільки $f \in E^p[M_k]$, то для кожного $k<0$ маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial M_k} \frac{f(t)}{t-w} dt = 0, \ w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_\sigma.$$

Спрямувавши, як і в попередніх міркуваннях, k до $-\infty$, одержимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_\sigma}\frac{f(t)}{t-w}dt = 0,\ w \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}_\sigma.$$

Скориставшись лемою 2.5, маємо що $f \in E^p[D_\sigma]$. □

Нам не відомо, чи можна в попередній лемі опустити умову (2.13).

Лема 2.7. *Якщо f належить до простору Смірнова $E^p[M_k]$, $1 \le p < +\infty$, для кожного прямокутника M_k, $k < 0$, також $f \in L^p[\partial D_\sigma]$ і виконується умова*

$$(\forall\varepsilon > 0):\ \sup_{u\in(-\infty;0)}\left\{\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|f(u+iv)|^p\exp\left(-\varepsilon e^{-\gamma u}\right)dv\right\} < +\infty, \tag{2.14}$$

для деякого $\gamma < \frac{\pi}{2\sigma}$, то $f \in E^p[D_\sigma]$.

Доведення. Розглянемо функцію $f_\varepsilon(w) = f(w)\exp\left(-\varepsilon e^{-\gamma w}\right)$. Тоді $|f_\varepsilon(u+iv)| = |f(u+iv)|\exp\left(-\varepsilon e^{-\gamma u}\cos\gamma v\right)$. Оскільки $\cos\gamma v \le \lambda_0 > 0$ для всіх $v \in (-\sigma;\sigma)$, то

$$|f_\varepsilon(u+iv)| \le |f(u+iv)|\exp\left(-\varepsilon_1 e^{-\gamma u}\right)$$

тобто внаслідок довільності ε виконується умова (2.14). Тому за лемою 2.6 маємо $f_\varepsilon \in E^p[D_\sigma]$, з чого випливає [10]

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}|f_\varepsilon(u+iv)|^p dv \le c\int\limits_{\partial D_\sigma}|f_\varepsilon(w)|^p|dw|$$

$$\le c_1\int\limits_{\partial D_\sigma}|f(w)|^p|dw| < c_3 < +\infty,$$

де сталі c_j від u не залежать. За лемою Фату

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |f(u+iv)|^p dv \le \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int_{-\sigma}^{\sigma} |f_\varepsilon(u+iv)|^p dv < c_3,$$

тому маємо виконання умов леми 2.6, тобто $f \in E^p[D_\sigma]$. $\square$

Попереднє твердження можна посилити наступним чином.

Теорема 2.7. *Якщо f належить до простору Смірнова $E^p[M_k]$, $1 \le p < +\infty$, для кожного прямокутника M_k, $k < 0$, також $f \in L^p[\partial D_\sigma]$, виконується нерівність (2.14) для деякого $\gamma < \frac{\pi}{\sigma}$ і $f(x)\exp\{-\delta e^{-\frac{\pi}{2\sigma}x}\} \in L^p(-\infty; 1)$ для деякого $\delta > 0$, то $f \in E^p[D_\sigma]$.*

Доведення. Розглянемо функцію $F_\delta(w) = f(w)\exp\left(-\delta e^{-\frac{\pi}{2\sigma}w}\right)$. Тоді F_δ належить до простору $E^p[M_k]$ для кожного $k < 0$, має майже скрізь на ∂D_σ кутові граничні значення і $|F_\delta(w)| \le c_4|f(w)|$, $w \in \partial D_\sigma$ для деякого $c_4 > 0$. Оскільки також $F_\delta \in L^p(-\infty; 0)$, то застосувавши теорему 2.7 до функції F_δ у півсмугах $\widetilde{D}_1 = \{z : \mathrm{Re}\, z < 0,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < \sigma\}$, $\widetilde{D}_2 = \{z : \mathrm{Re}\, z < 0,\ -\sigma < \mathrm{Im}\, z < 0\}$ отримаємо, що F_δ належить до просторам Смірнова $E^p[\widetilde{D}_1]$ та $E^p[\widetilde{D}_2]$. Тому $F_\delta \in E^p[D_\sigma]$ і

$$\sup_{u\in(-\infty;0)} \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} |F_\delta(u+iv)|^p dv \right\} \le c_5 \int_{\partial D_\sigma} |f(w)|^p |dw|.$$

Застосувавши лему Фату, з леми 2.6 отримаємо, що $f \in E^p[D_\sigma]$. $\square$

Для випадку $\gamma = \frac{\pi}{2\sigma}$ з попередньої теореми випливає наступне твердження.

Теорема 2.8. *Якщо f належить до простору Смірнова $E^p[M_k]$, $1 \le p < +\infty$, для кожного прямокутника M_k, $k < 0$, також $f \in L^p[\partial D_\sigma]$ і виконується умова*

$$(\forall \varepsilon > 0): \sup_{u\in(-\infty;0)} \left\{ \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |f(u+iv)|^p \exp\left(-\varepsilon e^{-\frac{\pi}{2\sigma}u}\right) dv \right\} < +\infty,$$

то $f \in E^p[D_\sigma]$.

М. Євграфов [36, с. 217] встановив наступне твердження, яке можна вважати, в деякому сенсі, аналогом теореми 2.8 для випадку $p = \infty$.

Теорема А5. *Нехай функція f є аналітичною в півсмузі D_σ і неперервною в її замиканні. Якщо*

$$f(x - i\sigma) = O(1),\ x \to -\infty, \quad f(x + i\sigma) = O(1),\ x \to -\infty,$$

і

$$\ln|f(x+iy)| = o\left(e^{\frac{\pi x}{2\sigma}}\right),\ x \to -\infty, -\sigma \le y \le \sigma,$$

то

$$f(x+iy) = O\left(1\right),\ x \to -\infty, -\sigma \le y \le \sigma.$$

Розглянемо деякі функціональні простори та їх властивості, потрібні при формулюванні теореми типу Фрагмена- Ліндельофа для півплощини. Нехай $E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi, 1 \leqslant p < \infty$, функцій, аналітичних у куті $\mathbb{C}(\alpha,\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$, для яких

$$||f|| := \sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Ці простори вивчалися в [34], [25]. Там, зокрема, показано, що функції з цих просторів мають м. с. на $\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)$ кутові граничні значення, які теж позначатимемо через f і $f \in L^p[\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$. Цей простір є банаховим відносно вказаної норми, яка рівна наступній

$$||f||^{\times} := \max_{\varphi\in\{\alpha;\beta\}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p}.$$

Лема 2.8. *Якщо функція f є аналітичною в куті $\mathbb{C}(\alpha;\beta)$, має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}(\alpha;\beta)$ кутові граничні значення, $f \in L^p[\partial\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$ і для деякого $\gamma \in (0;\pi/(\beta-\alpha))$*

$$(\forall\varepsilon > 0) : \sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \exp\left(-\varepsilon\left(r^\gamma + \frac{1}{r^\gamma}\right)\right) dr \right\} < +\infty, \tag{2.15}$$

то $f \in E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$.

Доведення. Розглянемо функцію

$$f_\varepsilon(z) = f(z)e^{-\varepsilon\left(z^\gamma + \frac{1}{z^\gamma}\right)}.$$

З умови (2.15) випливає, що $f_\varepsilon \in E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$ і для кожного $\varphi \in (\alpha;\beta)$

$$\left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f_\varepsilon(re^{i\varphi})|^p dr \right\} \le \int\limits_{\partial\mathbb{C}(\alpha;\beta)} |f(z)|^p |dz|.$$

Застосувавши лему Фату, одержимо

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\} < +\infty,$$

тобто f належить до простору $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$. $\square$

Теорема 2.9. *Якщо функція f є аналітичною в $\mathbb{C}_+$, має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, $f \in L^p[\mathbb{C}_+]$, для деякого $\delta > 0$ $f(x)e^{-\delta\left(x+\frac{1}{x}\right)} \in L^p(1;+\infty)$ і для деякого $\gamma \in (0;2)$)*

$$(\forall\varepsilon > 0) : \sup_{|\varphi|<\pi/2} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \exp\left(-\varepsilon\left(r^\gamma + \frac{1}{r^\gamma}\right)\right) dr \right\} < +\infty, \tag{2.16}$$

то $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$.

Доведення. Нехай для деякого фіксованого $\gamma \in (0;2)$ виконується умова (2.16). Розглянемо функцію

$$F_\delta(z) = f(z)e^{-\delta\left(z+\frac{1}{z}\right)}.$$

Тоді $|F_\delta(iy)| = |f(iy)|$, $F_\delta \in L^p(0;+\infty)$. Застосувавши лему 2.8 до функції F_δ у куті $E^p[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2};0)]$, одержимо, що

$$\sup_{\varphi\in(-\pi/2;0)} \left\{ \int_0^{+\infty} |F_\delta(re^{i\varphi})|^p dr \right\} \le \int_{-\infty}^{0} |f(iy)|^p dy$$

$$+ \int_0^{+\infty} |f(x)|^p e^{-\delta\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx \le c_6,$$

де c_6 від δ не залежить. Спрямувавши δ до нуля, за лемою Фату одержимо

$$\sup_{\varphi\in(-\pi/2;0)} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\} \le c_6.$$

Аналогічно, застосувавши леми 2.8 та Фату до функції F_δ у куті $E^p[\mathbb{C}(0;\frac{\pi}{2})]$, одержимо також

$$\sup_{\varphi\in(0;\pi/2)} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\} \le c_7,$$

тобто $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$. $\square$

Для випадку $\gamma = 1$ з попередньої теореми випливає наступне твердження.

Теорема 2.10. *Якщо функція f є аналітичною в $\mathbb{C}_+$, має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, $f \in L^p[\mathbb{C}_+]$, $1 \le p < +\infty$, і*

$$(\forall\varepsilon > 0) : \sup_{|\varphi|<\pi/2} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \exp\left(-\varepsilon\left(r + \frac{1}{r}\right)\right) dr \right\} < +\infty,$$

то $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$.

Цю теорему можна розглядати як узагальнення одного результату В. Мартиросяна [125].

2.4 Еквівалентне означення вагових просторів Гарді

Нехай $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0,$ – клас функцій, аналітичних у правій півплощині $\mathbb{C}_+$, для яких

$$||G|| := \sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

При дослідженні повноти деяких систем функцій у $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ з'являється потреба розглядати простори, що визначаються, як і класичні простори Гарді, через інтегрування по прямих, які паралельні координатним осям. Розглянемо простір $\widetilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma \geqslant 0, 1 \leqslant p < +\infty$, аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$||f||_{\widetilde{H}^p_\sigma} := \max \left\{ \sup_{y\in\mathbb{R}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|} dx \right\}; \sup_{x>0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|} dy \right\} \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{2.17}$$

Величина $||\cdot||_{\widetilde{H}^p_\sigma}$ задовільняє всі ознаки норми, зокрема нерівність трикутника у випадку $p = 1$ випливає з нерівності $\max\{a+b; c+d\} \leqslant \max\{a; c\} + \max\{b; d\}$, а для випадку $p > 1$ також із нерівності Мінковського. Основною метою цього розділу є доведення наступного твердження.

Теорема 2.11. *Простори $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та $\widetilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma \geqslant 0, 1 \leqslant p < +\infty$, співпадають, причому норми $||\cdot||_{H^p_\sigma}$ та $||\cdot||_{\widetilde{H}^p_\sigma}$ є еквівалентними.*

Зазначимо, що твердження теореми перестає бути вірним, якщо в (2.17) під знаком максимуму опустити перший елемент (що видно на прикладі функції $f(z) \equiv 1$) чи другий (це маємо з прикладу $f(z) = e^{-z}\sin\sigma z$). Проте, із одного результату А. Сєдлєцкого випливає, що у випадку $\sigma = 0$ твердження теореми залишається справедливим, якщо в (2.17) опустити перший елемент під знаком максимуму. Для доведення теореми розглянемо простори $E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)], 0 < \beta-\alpha < 2\pi, 1 \leqslant p < \infty$, функцій, аналітичних у куті $\mathbb{C}(\alpha,\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$, для яких

$$||f||_{E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]} := \sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Ці простори вивчалися в [25], [34]. Там, зокрема, показано, що функції з цих просторів мають м. с. на $\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)$ кутові граничні значення, які теж позначатимемо через f і $f \in L^p[\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$. Цей простір є банаховим відносно вказаної норми, яка рівна наступній

$$||f||^{\times}_{E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]} := \max_{\varphi\in\{\alpha;\beta\}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p}.$$

Розглянемо також простір $\widetilde{E}^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)], 1 \leqslant p < \infty$, функцій, аналітичних у $\mathbb{C}(0,\pi/2)$, для яких

$$||f||_{\widetilde{E}^p} := \max\left\{ \sup_{y>0} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(x+iy)|^p dx \right\}; \sup_{x>0} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\} \right\}^{1/p} < +\infty. \tag{2.18}$$

Остання величина задовільняє всі ознаки норми.

Лема 2.9. *Якщо $f \in \widetilde{E}^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)], 1 \leqslant p < \infty$, то $f \in E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]$ і $||f||_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]} \leqslant c_1||f||_{\widetilde{E}^p}$, де стала c_1 від f не залежить.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $p=1$. З умови (2.18) маємо, що функція f належить [53] простору Смірнова E^1 у кожному квадраті $\square_a=\{z: 0<\mathrm{Re} z<a, \quad 0<\mathrm{Im} z<a\}$, $0<a<+\infty$. Тому [53], с.205 вона має м. с. на $\partial\square_a$ кутові граничні значення, які теж позначаємо через f і

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\square_a}\frac{f(t)}{t-z}dt=\begin{cases} f(z), z\in\square_a,\\ 0, \quad \frac{\pi}{2}<\arg z<2\pi.\end{cases} \tag{2.19}$$

Зафіксуємо довільне $z\in\mathbb{C}(0;\frac{\pi}{2})$. Оскільки

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_k}\frac{f(t)}{t-z}dt\right|\leqslant\frac{1}{2\pi d_a}\int\limits_{l_k}|f(t)||dt|\to 0, \quad a\to+\infty, \quad k=1,2,$$

де $l_1=\{a+iy: 0<y<a\}$, $l_2=\{x+ia: 0<x<a\}$, а d_a – відстань від точки z до відповідної сторони $\partial\square_a$, то перейшовши в (2.19) до границі при $a\to+\infty$, маємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}(0;\frac{\pi}{2})}\frac{f(t)}{t-z}dt=\begin{cases} f(z), z\in\mathbb{C}(0;\frac{\pi}{2}),\\ 0, \quad z\notin\overline{\mathbb{C}}(0;\frac{\pi}{2}).\end{cases} \tag{2.20}$$

Тому, позначивши ліву частину останньої рівності через $\psi(z)$, для $z=x+iy\in\mathbb{C}(0;\frac{\pi}{2})$ маємо

$$\begin{aligned} f(z)&=\psi(z)+\psi(-z)-\psi(\overline{z})-\psi(-\overline{z})\\ &=-\frac{4}{\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{C}(0;\frac{\pi}{2})}\frac{xytf(t)}{(t^2-x^2+y^2)^2+4x^2y^2}dt.\end{aligned}$$

З цього отримуємо

$$f(z)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{vr^2\sin 2\varphi f(iv)dv}{(v^2+r^2\cos 2\varphi)^2+r^4\sin^2 2\varphi}-$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{ur^2\sin 2\varphi f(u)du}{\left(u^2-r^2\cos 2\varphi\right)^2+r^4\sin^2 2\varphi},$$

$z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})$. Проінтегрувавши $|f(z)|$ по $r \in (0; +\infty)$ і скориставшись теоремою Фубіні, одержимо

$$\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|dr \leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{vr^2\sin 2\varphi|f(iv)|dr}{\left(v^2+r^2\cos 2\varphi\right)^2+r^4\sin^2 2\varphi}dv+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}|f(u)|\int\limits_0^{+\infty}\frac{ur^2\sin 2\varphi dr}{\left(u^2-r^2\cos 2\varphi\right)^2+r^4\sin^2 2\varphi}du.$$

Врахувавши, що

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{vr^2\sin 2\varphi dr}{\left(v^2+r^2\cos 2\varphi\right)^2+r^4\sin^2 2\varphi}=\frac{\pi}{2}\sin\varphi,$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{ur^2\sin 2\varphi dr}{\left(u^2-r^2\cos 2\varphi\right)^2+r^4\sin^2 2\varphi}=\frac{\pi}{2}\cos\varphi,$$

отримуємо

$$||f||_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]} \leqslant \max_{\varphi\in(0;\pi/2)}\{\sin\varphi+\cos\varphi\}||f||_{\widetilde{E}^p} = \sqrt{2}||f||_{\widetilde{E}^p}.$$

Нехай тепер $1 < p < +\infty$. Оскільки за умовою (2.18) функція f належить до простору Смірнова $E^p \subset E^1$ у кожному квадраті $\square_a$, то залишається справедливою рівність (2.19). З того, що за нерівністю Гьольдера

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_k}\frac{f(t)}{t-z}dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{l_k}|f(t)|^p|dt|\right)^{1/p}\left(\int\limits_{l_k}\left|\frac{1}{t-z}\right|^q|dt|\right)^{1/q}$$

$$\leqslant \frac{a^{1/q}}{2\pi d_a}\left(\int\limits_{l_k}|f(t)|^p|dt|\right)^{1/p} \to 0,$$

коли $a \to +\infty$, де $k = 1, 2$, а $1/p+1/q = 1$, маємо справедливість рівності (2.20). Але [33]

$$\varphi_1(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt \in E^p[\mathbb{C}(0;\pi)],$$

$$\varphi_2(z) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(it)}{it-z}dt \in E^p\left[\mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

тому $f = \varphi_1 - \varphi_2 \in E^p[\mathbb{C}(0;\frac{\pi}{2})]$. Оскільки з [125] маємо $||f||_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]} \leqslant ||f||^{\times}_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]}$ і за лемою Фату $||f||^{\times}_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]} \leqslant 2||f||_{\widetilde{E}^p}$, то лему доведено. □

Зазначимо, що з доведення леми 2.9 маємо оцінки $c_1 \leqslant \sqrt{2}$ при $p = 1$ і $c_1 \leqslant 2$ при $1 < p < +\infty$.

Лема 2.10. *Якщо $f \in E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]$, $1 \leqslant p < \infty$, то $f \in \widetilde{E}^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]$ і $||f||_{\widetilde{E}^p} \leqslant c_2||f||_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]}$, де стала c_2 від f не залежить.*

Доведення. Доведення проведемо подібно до доведення аналогічних тверджень у [58] та [12]. Покажемо, що

$$\sup_{x>0}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(x+iy)|^p dy\right\}^{1/p} < c_3||f||_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]}, \tag{2.21}$$

де c_3 від f не залежить. При відображенні $w = z^2$ півпряма $\{z : \operatorname{Re} z = x, y > 0\}$, $x > 0$ перейде у вітку параболи $l_x =$

$\{w = u + iv : u = x^2 - v^2/4x^2, v > 0\}$. При цьому

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy = \int\limits_{l_x} |f(\sqrt{w})|^p \frac{|dw|}{2\sqrt{|w|}} = \frac{1}{2}\int\limits_{l_x} |f_1(w)|^p |dw|,$$

де $f_1(w) = f(w^{1/2})/w^{1/2p}$. Довжина частини l_x, яка лежить у кожному квадраті
$\triangle(u_0, h) = \{w = u + iv : u_0 < u < u_0 + h, 0 < v < h\}$, $h > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}$, не перевищує $2h$. Тому міра

$$\mu_x(D) = \int\limits_{l_x \cap D} |dw|,$$

де D – довільний компакт із $\mathbb{C}^+ := \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, є мірою Карлесона в $\mathbb{C}^+$, тобто $\mu_x(\triangle(u_0, h)) \leqslant c_4 h$ де c_4 від u_0, h та x не залежить. Тоді [19], с. 70, [58], с. 78 для кожної функції $f_1 \in E^p[\mathbb{C}^+]$ (тобто функції з класу Гарді у $\mathbb{C}^+$) маємо

$$\int\limits_{\mathbb{C}^+} |f_1|^p d\mu_x \leqslant c_5 \cdot ||f_1||^p_{E^p[\mathbb{C}^+]} = c_5 ||f||_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]} < +\infty,$$

чим нерівність (2.21) доведено. Нерівність

$$\sup_{y>0} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(x+iy)|^p dx \right\}^{1/p} < c_6 ||f||_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]}$$

доводиться аналогічно, а позначивши $c_2 = \max\{c_3, c_6\}$, отримуємо твердження леми. □

Доведення теореми. Якщо $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, то $f(z)e^{i\sigma z} \in E^p[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$. Тому за лемою 2.10 $f(z)e^{i\sigma z} \in \widetilde{E}^p[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$. Також
$f(z)e^{-i\sigma z} \in E^p[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$. Тому, застосувавши лему 2.10 до функції $f(-iz)e^{-\sigma z} \in E^p[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$, маємо $f(-iz)e^{-\sigma z} \in \widetilde{E}^p[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$.

Тоді, врахувавши аналітичність функції f у $\mathbb{C}_+$, маємо $f \in \widetilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і $||f||_{\widetilde{H}^p_\sigma} \leqslant c_7 ||f||_{H^p_\sigma}$, де c_7 від f не залежить. Нехай тепер $f \in \widetilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Застосувавши до функцій $f(z)e^{i\sigma z}$ та $f(-iz)e^{-\sigma z}$ аналогічним чином лему 2.9, отримуємо твердження теореми. $\square$

2.5 Висновки до розділу 2

У цьому розділі розглядається ряд задач, присвячених дослідженню структури вагових просторів Гарді $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та близьких о них у деякому сенсі просторів Пелі-Вінера W^p_σ. Ці задачі або зумовлені дослідженнями наступних розділів, або використовуються в них. При дослідженні просторів аналітичних функцій ефективним прийомом іноді є їх розщеплення на суму чи добуток просторів, властивості яких дослідити простіше. Зокрема, відомими є результати Ф. Рісса, Ю. Любарського, Р. Юлмухаметова. Нами розглядається питання розщеплення простору цілих функцій Пелі-Вінера та його аналогу для півплощини. Одержано такі результати:

- отримано розщеплення просторів Пелі-Вінера W^2_σ на суму двох цілих функцій з просторів W^2_σ, одна з яких є великою у певному сенсі тільки у верхній півплощині, а інша — тільки у нижній. Показано, що для просторів W^1_σ аналогічне розщеплення одержати, взагалі кажучи, неможливо;

- встановлено критерій розщеплення функцій із W^1_σ;

- отримано деякі необхідні та деякі достатні умови розщеплення у просторах $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$;

- одержано теорему типу Фрагмена-Ліндельофа для просторів Гарді-Смірнова в півсмузі, цей результат може розглядатися як аналог однієї теореми М. Євграфова;

- отримано теорему типу Фрагмена-Ліндельофа для просторів Гарді-Смірнова у півплощині, чим узагальнено одну теорему В. Мартиросяна;

- одержано еквівалентне означення просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, а саме показано, що в означенні можна замінити інтегрування по променях, що виходять з початку координат, на інтегрування по сукупності вертикальних та горизонтальних півпрямих. Цим узагальнено теорему А. Седлецького. Показано, що жодна з умов не може бути опущеною.

РОЗДІЛ 3

Теореми типу Пелі-Вінера

3.1 Теореми типу Пелі-Вінера про представлення

Теорема Пелі-Вінера про представлення [134] відіграє фундаментальну роль в теорії просторів Гарді.

Теорема A6. *Функція*

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} g(w) e^{zw} dw$$

належить до простору $H^2(\mathbb{C}_+)$ *тоді і тільки тоді, коли* $g \in L^2(-\infty; 0)$.

Б. Винницький [10] встановив наступне твердження, яке можна розглядати як узагальнення попередньої теореми.

Теорема A7. *Функція*

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma} g(w) e^{zw} dw \tag{3.1}$$

належить до простору $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *тоді і тільки тоді, коли* $g \in E^2_*[D_\sigma]$ *і справджується двоїста формула*

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(x) e^{-xw} dx, \qquad \operatorname{Re} w > 0. \tag{3.2}$$

У цьому підрозділі ми доводимо дві теореми про представлення у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та деяких просторах цілих функцій.

Теорема 3.1. *Функція G, визначена рівністю* (3.1), *належить до простору $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0$, і виконується умова*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|G(x)|}{x} = -\infty \tag{3.3}$$

тоді і тільки тоді, коли $g \in E^2_*[D_\sigma]$ і g є цілою функцією.

Доведення. Достатність. Нехай $g \in E^2_*[D_\sigma]$ є цілою функцією. Тоді g є аналітичною функцією в кожному замкненому прямокутнику $\overline{M}_k, k < 0$, де $M_k = \{z : z \in D_\sigma, \operatorname{Re} z > k\}$. За інтегральною формулою Коші маємо

$$\int\limits_{\partial M_k} g(w)e^{zw}dw = 0, k < 0,$$

За теоремою А7 справедливе зображення (3.1). Деформуємо контур інтегрування в ньому наступним чином

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma \setminus \overline{M}_k} g(w)e^{zw}dw. \tag{3.4}$$

З останньої формули одержимо, розглянувши інтеграли по відповідних півпрямих і відрізку,

$$|G(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma \setminus \overline{M}_k} |g(w)|e^{xu}|dw|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(I_1 + I_2 + I_3), z = x + iy, w = u + iv,$$

для $x > 0$. Застосувавши нерівність Шварца, отримаємо

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{k} |g(u-i\sigma)|e^{xu}du \le \left(\int\limits_{-\infty}^{k} |g(u-i\sigma)|^2du \cdot \int\limits_{-\infty}^{k} e^{2xu}\right)^{1/2} du \le$$

$$\leq \left(\int\limits_{-\infty}^{0} |g(u-i\sigma)|^2 du \cdot \frac{e^{2xk}}{2x} \right)^{1/2} \leq c_2 \frac{e^{xk}}{\sqrt{x}}.$$

Аналогічно можна показати, що

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{k} |g(u+i\sigma)| e^{xu} du \leq c_3 \frac{e^{xk}}{\sqrt{x}}.$$

Також

$$I_2 = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |g(k+iv)| e^{xk} dv \leq \max_{v\in[-\sigma;\sigma]} \left\{ |g(k+iv)| \right\} e^{xk} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} dv \leq J(k) e^{kx}, \tag{3.5}$$

де $J(k) = 2\sigma \max \left\{ |g(t+iv)| : v \in [-\sigma;\sigma], t \in [k;0] \right\}, k < 0$. Якщо $\sup\limits_{k<0} \left\{ J(k) \right\} < +\infty$, то функція g належить до простору $E^{\infty}[D_\sigma]$. Але також $g \in E_*^2[D_\sigma]$. Покажемо, що з цього випливає $g \equiv 0$. Справді, оскільки $g \in E_*^2[D_\sigma]$, то $g \in L^{\infty}(-\infty + i\sigma; i\sigma)$. З того, що g є цілою і $g \in E_*^2[D_\sigma]$, випливає її належність до простору Гарді H^2 у півплощині $\{z : \operatorname{Re} z > -1\}$. З останнього маємо оцінку $|g(z)| \leq c/\sqrt{\operatorname{Re} z}$ при $\operatorname{Re} z > -1$. З неї отримаємо $g \in L^{\infty}(i\sigma; i\sigma + \infty)$, отже $g \in L^{\infty}(-\infty + i\sigma; i\sigma + \infty)$. З того, що $g \in E_*^2[D_\sigma]$, випливає її належність до простору Гарді H^2 у півплощині $\{z : \operatorname{Im} z > \sigma\}$. З двох останніх тверджень на основі теореми 1.2 та її аналогу для $p = \infty$ випливає належність g простору H^{∞} у півплощині $\{z : \operatorname{Im} z > \sigma\}$. Аналогічно можна показати обмеженість функції g у півплощині $\{z : \operatorname{Im} z < -\sigma\}$. З цього випливає, що g є обмеженою цілою функцією, тому за теоремою Ліувілля $g \equiv const$. Проте $g \in L^2(-\infty + i\sigma; i\sigma)$, тому $g \equiv 0$. З формули 3.1 тоді випливає $G \equiv 0$ і в цьому випадку теорему доведено.

В протилежному випадку з того, що J є незростаючою функцією, маємо $\lim\limits_{k\to-\infty} J(k) = +\infty$. Визначимо J_2 на інтервалах спадання функції J як $J_2 = J$. Тоді обернена функція J_1 до функції $-J_2$ зростає на $(-\infty;0)$ і $\lim\limits_{s\to-\infty} J_1(s) = -\infty$. Оскільки число k в (3.5) може бути довільним від'ємним, вибереремо його як $k = J_1(-x)$, тоді $I_2 \leq J(J_1(-x))e^{xJ_1(-x)} = xe^{xJ_1(-x)}$. Звідси маємо $|G(x)| \leq c_4xe^{xJ_1(-x)}$, $x > 1$, і тому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|G(x)|}{x} = \lim_{x\to+\infty} J_1(-x) = -\infty.$$

Достатність. Нехай $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тоді з теореми A7 отримаємо, що функція g, визначена рівністю (3.2), належить до простору $E^2_*[D_\sigma]$. З формули (3.3) отримаємо, що інтеграл в правій частині (3.2) збігається рівномірно на кожному компакті з $\mathbb{C}_+$, тому g є цілою функцією. $\square$

Теорема 3.2. *Функція G, визначена рівністю* (3.1), *належить до простору $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0$, і виконується умова*

$$(\exists c_1 \in \mathbb{R}) : G(z)\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z - c_1z\right) \in H^2(\mathbb{C}_+) \tag{3.6}$$

тоді і тільки тоді, коли $g \in E^2_*[D_\sigma]$, g є цілою функцією і

$$(\exists c \in \mathbb{R}) : g(w)\exp\left(-ce^{-\frac{w\pi}{2\sigma}}\right) \in E^2[D_\sigma]. \tag{3.7}$$

Доведення. Нехай функція g є цілою і $g \in E^2_*[D_\sigma]$. Тоді справджується зображення (3.1). Вважатимемо, що $c > 0$ в формулі (3.7) (в протилежному випадку можна показати, як і при доведенні попередньої теореми, що $g \equiv 0$). Тоді розглянемо функцію $g_1(w) := g(w)\exp\left(-ce^{-\frac{w\sigma}{2\sigma}}\right) \in E^2[D_\sigma]$. Використавши зображення (3.4), для всіх $k<0$ одержимо

$$|G(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int\limits_{\partial\left(D_\sigma \setminus \overline{M}_k\right)} g_1(w) \exp\left(ce^{-\frac{w\pi}{2\sigma}}\right) e^{wx} dw \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial\left(D_\sigma \setminus \overline{M}_k\right)} |g_1(w)| \exp\left(ce^{-\frac{u\pi}{2\sigma}} \cos\frac{\upsilon\pi}{2\sigma}\right) e^{ux} |dw| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{k} |g_1(u - i\sigma)|\, e^{ux} du \right.$$

$$+ \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |g_1(k + iv)| \exp\left(ce^{-\frac{k\pi}{2\sigma}} \cos\frac{\upsilon\pi}{2\sigma}\right) e^{kx} dv +$$

$$\left. + \int\limits_{-\infty}^{k} |g_1(u + i\sigma)|\, e^{ux} du \right).$$

Скориставшись нерівністю Шварца, отримаємо

$$|G(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{kx}}{\sqrt{2x}} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} |g_1(u - i\sigma)|^2 du \right)^{1/2} \right.$$

$$+ \exp\left(ce^{-\frac{k\pi}{2\sigma}}\right) e^{kx} \sqrt{2\sigma} \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |g_1(k + iv)|^2 dv \right)^{1/2}$$

$$\left. + \frac{e^{kx}}{\sqrt{2x}} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} |g_1(u + i\sigma)|^2 du \right)^{1/2} \right).$$

Поклавши $k = -\frac{2\sigma}{\pi}\ln x$, маємо

$$|G(x)| \le \frac{c_7}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right) + c_8 e^{cx} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right) \le$$

$$\le c_9 e^{cx} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right), x > 1.$$

Нехай $\psi(z) := G(z) e^{-cz} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right)$. Легко бачити, що $\psi \in L^2(\partial\mathbb{C}_+)$ і для всіх $\varepsilon > 0$ маємо $\psi(x) e^{-\varepsilon x} \in L^2(0; +\infty)$. За теоремою A7 маємо $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, тому для всіх $\gamma \in (1; 2]$

$$(\forall \varepsilon > 0) : \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left|\psi\left(re^{i\varphi}\right)\right|^2 \exp\left(-\varepsilon e^{\gamma r}\right) dr \right\} < +\infty.$$

Тому за теоремою 2.7 типу Фрагмена-Ліндельофа одержимо $\psi \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Це означає, що

$$G(z) e^{cz} \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right) \in H^2(\mathbb{C}_+),$$

тобто справджується формула (3.6).

Нехай тепер навпаки, $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ справджується формула (3.6). Тоді за теоремою A7 рівність (3.2) виконується для всіх $w \in \mathbb{C}_+$. Розглянемо функцію $G_1(z) := G(z) \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z - cz\right)$ таку, що $G_1 \in H^2(\mathbb{C}_+)$ для деякого $c > 0$. Тоді формула (3.2) набуде вигляду

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G_1(x) \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x + cx\right) e^{-xw} dx,$$

причому останній інтеграл збігається для кожного $w \in \mathbb{C}$. Після зміни контуру інтегрування в останній рівності з $\{x : x > 0\}$ на $\left\{t \exp\left(-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}\right) : t > 0\right\}$, де w – довільне фіксоване число з

D_σ, одержимо

$$|g(w)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int\limits_0^{+\infty} G_1\left(te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right) \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} t \ln te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right) e^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left| G_1\left(te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right) e^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}} \right|^2 dt \right.$$

$$\left. \times \int\limits_0^{+\infty} \left| \exp\left(-\frac{4\sigma}{\pi} t \ln te^{-\frac{(w-c)\pi}{2\sigma}}\right) \right|^2 dt \right)^{1/2}$$

Використавши оцінку з [62], с. 326, одержимо

$$|g(w)| \leq c_{10} \left(e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \exp\left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{4\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos\frac{v\pi}{2\sigma}\right)\right) \right.$$

$$\left. \times \exp\left(\exp\left(\ln\left(\frac{4\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos\frac{v\pi}{2\sigma}\right) - 1\right)\right)\right)^{1/2}.$$

Тоді

$$|g(w)| \leq c_{11} e^{-\frac{2u\pi}{\sigma}} \exp\left(\frac{1}{e} \frac{2\sigma}{\pi} e^{-\frac{(u-c)\pi}{2\sigma}} \cos\frac{v\pi}{2\sigma}\right).$$

Законність зміни контура інтегрування випливає з того, що

$$\int\limits_0^{-\frac{\pi}{2\sigma}\operatorname{Im} w} \left| G_1\left(re^{i\varphi}\right) \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} re^{i\varphi} (\ln r + i\varphi)\right) \exp\left(-re^{i\varphi} w\right) \right| d\varphi$$

$$\leq \int\limits_0^{-\frac{\pi}{2\sigma}\operatorname{Im} w} \exp\left(-c_{12} r \ln r\right) d\varphi \to 0,\ r \to +\infty.$$

для деякої сталої $c_{12} > 0$, залежної, взагалі кажучи, від w.

Функція $g_2(w) := g(w) \exp\left(-c_{13} e^{-\frac{w\pi}{2\sigma}}\right)$, де $c_{13} = \frac{2\sigma}{\pi e} e^{\frac{c\pi}{2\sigma}}$, оскільки також $g_2 \in L^2\left(\partial D_\sigma\right)$, задовільняє умови теореми 2.7 типу

Фрагмена-Ліндельофа. Тому $g_2 \in E^2[D_\sigma]$, отже умова (3.7) виконується для $c = c_{13}$. $\square$

3.2 Теорема типу Коші

Добре відомим є для $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ аналог формули Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}_+}\frac{f(t)}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}_+, \\ 0, z \in \ \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}_+}, \end{cases} \tag{3.8}$$

Скористатись цією формулою для зображення функцій із простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, взагалі кажучи, не можна, бо відповідний інтеграл може бути розбіжним. Метою цього підрозділу є встановлення аналогу формули (3.8) для просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Ми одержали наступне твердження.

Теорема 3.3. *Якщо* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0,$ *то*

$$\begin{gathered} -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(iv)e^{-i\sigma(z-iv)}}{iv-z}dv - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f(iv)e^{i\sigma(z-iv)}}{iv-z}dv- \\ -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(u)\sin\sigma(z-u)}{u-z}du = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}_+, \\ 0, z \in \ \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}_+}, \end{cases} \end{gathered} \tag{3.9}$$

Доведення. Нехай $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тоді $f(z)e^{i\sigma z} \in E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]$. В [34] показано, що для функцій $f \in E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$, $0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, $1 \leqslant p < +\infty$, справджується формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)}\frac{f(t)}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}(\alpha,\beta), \\ 0, z \in \ \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}(\alpha,\beta)}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Застосувавши її у нашому випадку, маємо

$$\frac{e^{-i\sigma z}}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}(0,\pi/2)}\frac{f(t)e^{i\sigma t}}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}(0,\pi/2), \\ 0, z \in \ \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}(0,\pi/2)}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Оскільки також $f(z)e^{-i\sigma z} \in E^p[\mathbb{C}(-\pi/2,0)]$, то аналогічно отримуємо

$$\frac{e^{i\sigma z}}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{C}(-\pi/2,0)} \frac{f(t)e^{-i\sigma t}}{t-z} dt = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}(-\pi/2,0), \\ 0, z \in \ \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}(-\pi/2,0)}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Додавши формули (3.11) та (3.12), маємо справедливість формули (3.9) для всіх вказаних у ній чисел z за винятком множини $\{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0\}$. Але кожен з інтегралів у лівій частині рівності (3.9) збігається абсолютно і рівномірно на кожному компакті із $\mathbb{C}_+$, тому сума цих інтегралів є аналітичною у $\mathbb{C}_+$ функцією, а отже за теоремою єдиності для аналітичних функцій [53] с. 292 співпадає з функцією f для всіх $z \in \mathbb{C}_+$. $\square$

3.3 Теорема типу Пуассона

Добре відомим є для $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ аналог формули Пуассона

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv, z \in \mathbb{C}_+. \tag{3.13}$$

Скористатись цією формулою для зображення функцій із простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, взагалі кажучи, не можна, бо відповідний інтеграл може бути розбіжним. Метою цього підрозділу є встановлення аналогу формули (3.13) для просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Ми одержали наступне твердження.

Теорема 3.4. *Якщо* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0$, *то*

$$\begin{gathered} f(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x e^{-i\sigma(z-iv)} f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x e^{i\sigma(z-iv)} f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv \\ -\frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x f(u) \sin \sigma(z-u)}{(u-z)(u+\overline{z})} du, z = x + iy \in \mathbb{C}_+, \end{gathered} \tag{3.14}$$

$$\begin{gathered} f(z) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(v-y) e^{-i\sigma(z-iv)} f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv \\ +\frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{(v-y) e^{i\sigma(z-iv)} f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv \\ -\frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(u-iy) f(u) \sin \sigma(z-u)}{(u-z)(u+\overline{z})} du, z = x + iy \in \mathbb{C}_+. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Зауважимо, що оскільки $H^p_{\sigma_1}(\mathbb{C}_+) \subset H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \leqslant \sigma_1 < \sigma$, то формули (3.9), (3.14) і (3.15) залишаються справедливими і коли

$f \in H^p_{\sigma_1}(\mathbb{C}_+)$. Наскільки нам відомо, і у випадку $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ вони є новими.

Доведення. Нехай $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тоді справедливими є рівності (3.11) та (3.12). Позначимо через ψ_1 і ψ_2 ліві частини формул (3.11) та (3.12) відповідно. Тоді

$$\psi_1(z) - \psi_1(-\overline{z})e^{-2i\sigma \operatorname{Re} z}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(it)e^{-i\sigma x}e^{-\sigma t}e^{\sigma y}\left(\frac{1}{it-x-iy} - \frac{1}{it+x-iy}\right)dt$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-i\sigma x}e^{i\sigma t}e^{\sigma y}\left(\frac{1}{t-x-iy} - \frac{1}{t+x-iy}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{xe^{-i\sigma(z-it)}f(it)}{x^2+(t-y)^2}dt + \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{xe^{-i\sigma(z-t)}f(t)}{(t-iy)^2-x^2}dt.$$

Аналогічно

$$\psi_2(z) - \psi_2(-\overline{z})e^{2i\sigma \operatorname{Re} z}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{-\infty} f(it)e^{i\sigma x}e^{\sigma t}e^{-\sigma y}\left(\frac{1}{it-x-iy} - \frac{1}{it+x-iy}\right)dt$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{i\sigma z}e^{i\sigma t}\left(\frac{1}{t-x-iy} - \frac{1}{t+x-iy}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xe^{i\sigma(z-it)}f(it)}{x^2+(t-y)^2}dt - \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{xe^{i\sigma(z-t)}f(t)}{(t-iy)^2-x^2}dt.$$

З іншого боку, з рівностей (3.11) та (3.12) маємо відповідно

$$\psi_1(z) - \psi_1(-\overline{z})e^{-2i\sigma \operatorname{Re} z} = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}(0,\pi/2), \\ 0, z \in \ \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}(0,\pi/2)}, \end{cases}$$

та

$$\psi_2(z) - \psi_2(-\overline{z})e^{2i\sigma \operatorname{Re} z} = \begin{cases} f(z), z \in \mathbb{C}(-\pi/2, 0), \\ 0, z \in \ \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}(-\pi/2, 0)}. \end{cases}$$

Тому для $z \in \mathbb{C}(-\pi/2, 0) \cup \mathbb{C}(0, \pi/2)$ отримуємо

$$f(z) = \psi_1(z) - \psi_1(-\overline{z})e^{-2i\sigma \operatorname{Re} z} + \psi_2(z) - \psi_2(-\overline{z})e^{2i\sigma \operatorname{Re} z}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{xe^{-i\sigma(z-it)} f(it)}{x^2 + (t-y)^2} dt$$

$$+\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xe^{i\sigma(z-it)} f(it)}{x^2 + (t-y)^2} dt - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{xf(t) \sin \sigma(z-t)}{(t-z)(t+\overline{z})}.$$

Для завершення доведення рівності (3.14) зауважимо, що кожен інтеграл у правій її частині є неперервною на кожному компакті із $\mathbb{C}_+$ функцією, тому права частина (3.14) співпадає з f для кожного $z \in \mathbb{C}_+$.

До доведення формули (3.15) можна прийти цілком аналогічно, розглядаючи рівність

$$f(z) = \psi_1(z) + \psi_1(-\overline{z})e^{-2i\sigma \operatorname{Re} z} + \psi_2(z) + \psi_2(-\overline{z})e^{2i\sigma \operatorname{Re} z}$$

і врахувавши для $z \in \mathbb{C}(-\pi/2, 0) \cup \mathbb{C}(0, \pi/2)$ справедливість формул

$$\psi_1(z) + \psi_1(-\overline{z})e^{-2i\sigma \operatorname{Re} z} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{(it - iy)e^{-i\sigma(z-it)} f(it)}{x^2 + (t-y)^2} dt$$

$$+\frac{1}{\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{(t - iy)e^{-i\sigma(z-t)} f(t)}{(t-iy)^2 - x^2} dt$$

та

$$\psi_2(z) + \psi_2(-\overline{z})e^{2i\sigma \operatorname{Re} z} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{(it - iy)e^{i\sigma(z-it)} f(it)}{x^2 + (t-y)^2} dt$$

$$-\frac{1}{\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{(t - iy)e^{i\sigma(z-t)} f(t)}{(t-iy)^2 - x^2} dt.$$

$\square$

3.4 Теорема типу Пелі-Вінера про аналітичне продовження

Добре відомою [19], с. 94 є наступна теорема, встановлена Р.Пелі та Н. Вінером.

Теорема 3.5. *Функція* $f_0 \in L^p(i\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$, *є кутовою граничною функцією деякої функції* $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(it)e^{i\tau t}dt = 0,$$

для майже всіх від'ємних чисел τ.

В [15] одержано наступне узагальнення цієї теореми Пелі-Вінера.

Теорема 3.6. *Функція* $f_0 : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *така що* $f_0(it)e^{-\sigma|t|} \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, *є кутовою граничною функцією деякої функції* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *тоді і тільки тоді, коли існує функція* f_2, *така що*

1) $f_2 \in H^p_{2\sigma}(\mathbb{C}_+)$;

2) $f_3(iv) := f_1(iv)+f_2(iv) \in L^p(-\infty; 0)$, $f_1(iv) := f_0(iv)e^{-\sigma v}$;

3) *для майже всіх* $\tau < 0$

$$\int_0^{+\infty} f_1(iv)e^{i\tau v}dv + \frac{1}{i}\int_0^{+\infty} f_2(u)e^{\tau u}du + \int_{-\infty}^0 f_3(iv)e^{i\tau v}dv = 0.$$

Теорема (3.5) є частковим випадком теореми (3.6) для випадку $\sigma = 0$. При дослідженні циклічності в деяких функціональних просторах і властивостей рівнянь типу згортки виникає питання про справедливість теореми (3.6) для випадку $p = 1$. В [13] показано, що необхідна частина цієї теореми справджується і для випадку $p = 1$, але питання про достатність умов залишається відкритим. Метою цього підрозділу є отримання опису функцій, кутові граничні функції яких задовільняють умовам 1)-3) попередньої теореми.

Теорема 3.7. *Якщо* $f_0 : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_0(it)e^{-\sigma|t|} \in L^1(\mathbb{R})$ *і виконуються умови 1)-3) теореми* 3.6, *то існує аналітична в* $\mathbb{C}_+$ *функція* f, *для якої* f_0 *є кутовою граничною функцією і*

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|f(re^{i\varphi})\right|e^{-\sigma r|\sin\varphi|}dr : \varphi \in (-\pi/2;\pi/2)\backslash(-\delta;\delta)\right\} < +\infty \tag{3.16}$$

для всіх $\delta \in (0;\pi/4)$.

Доведення в істотному базується на наступних допоміжних твердженнях.

Лема 3.1. *Якщо виконуються умови теореми 3.7 і*

$$\Xi(z) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f_1(iv)}{iv-z}dv + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f_3(iv)}{iv-z}dv + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u-z}du,$$

то $\Xi(z) = 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_- := \{z : \mathrm{Re} z < 0\}$.

Доведення. Позначимо

$$\eta_1(\tau) = \int_0^{+\infty} f_1(iv)e^{i\tau v}dv,\ \eta_2(\tau) = \frac{1}{i}\int_0^{+\infty} f_2(u)e^{\tau u}du,$$

$$\eta_3(\tau) = \int_{-\infty}^{0} f_3(iv)e^{i\tau v}dv.$$

Тоді з умови 3) випливає, що

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\left(\eta_1(\tau)+\eta_2(\tau)+\eta_3(\tau)\right)d\tau = 0, \quad \mathrm{Re}\, z < 0. \tag{3.17}$$

Але за теоремою Фубіні маємо для $\operatorname{Re} z < 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\eta_1(\tau)d\tau = \int\limits_{0}^{+\infty} f_1(iv)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau(iv-z)}d\tau dv = \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_1(iv)}{iv-z}dv.$$

Аналогічно

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\eta_3(\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f_3(iv)}{iv-z}dv, \quad \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\eta_2(\tau)d\tau = \frac{1}{i}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u-z}du.$$

Тому з (3.17) отримаємо твердження леми. □

Введемо позначення $\mathbb{C}(\alpha;\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$.

Лема 3.2. *Якщо виконуються умови теореми 3.7, то кутові граничні значення функції*

$$f(z) = \begin{cases} -e^{-i\sigma z}\Xi(z), z \in \mathbb{C}(0;\pi/2), \\ -e^{-i\sigma z}\left(\Xi(z) - f_2(z)\right), z \in \mathbb{C}(-\pi/2;0), \end{cases}$$

співпадають майже скрізь на $i\mathbb{R}$ з функцією f_0.

Доведення. За лемою 3.1 маємо $\Xi(-\bar{z}) = 0$ при $z \in \mathbb{C}_+$. Тому

$$\Xi(z) = \Xi(z) - \Xi(-\bar{z}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f_1(iv)\left(\frac{1}{iv-z} - \frac{1}{iv+\bar{z}}\right)dv$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv)\left(\frac{1}{iv-z} - \frac{1}{iv+\bar{z}}\right)dv$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty} f_2(u)\left(\frac{1}{u-z} - \frac{1}{u+\bar{z}}\right)du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f_1(iv)\frac{2x}{(iv-z)(iv+\bar{z})}dv$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv)\frac{2x}{(iv-z)\,(iv+\bar{z})}dv+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty} f_2(u)\frac{2x}{(u-z)\,(u+\bar{z})}du.$$

Останній інтеграл рівний нулеві [116] на уявній осі за винятком, можливо, точки $z=0$. Легко бачити, що

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f_1(iv)\frac{2x}{(iv-z)\,(iv+\bar{z})}dv=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f_1(iv)\frac{x}{(v-y)^2+x^2}dv$$

є інтегралом Пуассона, тому для нього існують кутові граничні значення майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ з $\mathbb{C}_+$ і ці значення равні $-f_1(iv)$ для $v>0$ і 0 для $v<0$. Аналогічно можна показати, що кутові граничні значення на $\partial\mathbb{C}_+$ з $\mathbb{C}_+$ функції

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv)\frac{2x}{(iv-z)\,(iv+\bar{z})}dv$$

рівні майже скрізь $-f_3(iv)$ для $v<0$ і нулеві для $v>0$. □

Лема 3.3. *Якщо виконуються умови теореми 3.7, то для функції f, визначеної в лемі 3.2, виконується умова (3.16).*

Доведення. З леми 3.2 випливає, що для $\operatorname{Re} z>0$ виконуються рівності

$$0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_1(iv)}{iv+z}dv+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f_3(iv)}{iv+z}dv+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u+z}du,$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_1(iv)}{iv+\overline{z}}dv+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f_3(iv)}{iv+\overline{z}}dv+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u+\overline{z}}du.$$

З вищенаведених рівностей для $z = x + iy \in \mathbb{C}_+$, $y \neq 0$, одержимо

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} f_1(iv) \left(-\frac{1}{iv + \bar{z}} + \frac{x}{iy} \left(\frac{1}{iv + \bar{z}} - \frac{1}{iv + z} \right) \right) dv$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv) \left(-\frac{1}{iv + \bar{z}} + \frac{x}{iy} \left(\frac{1}{iv + \bar{z}} - \frac{1}{iv + z} \right) \right) dv$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} f_2(u) \left(-\frac{1}{u + \bar{z}} + \frac{x}{iy} \left(\frac{1}{u + \bar{z}} - \frac{1}{u + z} \right) \right) du.$$

Тому, позначивши

$$\chi(w; z) := \frac{2}{\pi i} \frac{wx}{(w + \bar{z})(w - z)(w + z)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w + \bar{z}} + \frac{x}{iy} \left(\frac{1}{w + \bar{z}} - \frac{1}{w + z} \right) \right),$$

одержимо

$$\Xi(z) = i \int\limits_0^{+\infty} f_1(iv) \chi(iv; z) dv + i \int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv) \chi(iv; z) dv$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} f_2(u) \chi(u; z) du.$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $0 < \varphi < \pi/2$. Тоді

$$\int\limits_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right| e^{-\sigma r |\sin\varphi|} dr = \int\limits_0^{+\infty} \left| \Xi(re^{i\varphi}) \right| dr$$

$$\leq \int\limits_0^{+\infty} \left| \int\limits_0^{+\infty} f_1(iv) \chi(iv; re^{i\varphi}) dv \right| dr +$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}\left|\int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})dv\right|dr+\int\limits_0^{+\infty}\left|\int\limits_0^{+\infty} f_2(u)\chi(u;re^{i\varphi})du\right|dr\le$$

$$\le\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left|f_1(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})\right|drdv+\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_0^{+\infty}\left|f_3(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})\right|drdv+$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left|f_2(u)\chi(u;re^{i\varphi})\right|drdu.$$

Очевидно,

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left|\chi(iv;re^{i\varphi})\right|dr$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{|v|\,r\cos\varphi dr}{(v^2-2vr\sin\varphi+r^2)\sqrt{v^2+2vr\sin\varphi+r^2}}dr.$$

Якщо $v>0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{|v|\,r\cos\varphi dr}{(v^2-2vr\sin\varphi+r^2)\sqrt{v^2+2vr\sin\varphi+r^2}}$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi ds}{(1-2s\sin\varphi+s^2)\sqrt{1+2s\sin\varphi+s^2}}.$$

Оскільки $\varphi\in(0;\pi/2)$, то скориставшись нерівністю $s<\sqrt{s^2+1}$, маємо

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi ds}{(1-2s\sin\varphi+s^2)\sqrt{1+2s\sin\varphi+s^2}}$$

$$\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\varphi ds}{1-2s\sin\varphi+s^2}=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\varphi\le\pi.$$

Якщо ж $v<0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{|v|\,r\cos\varphi dr}{(v^2-2vr\sin\varphi+r^2)\sqrt{v^2+2vr\sin\varphi+r^2}}$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi ds}{(1+2s\sin\varphi+s^2)\sqrt{1-2s\sin\varphi+s^2}}\le$$

$$\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi ds}{(1+s^2)\sqrt{2s(1-\sin\varphi)}}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{s2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)ds}{(1+s^2)\sqrt{4s\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}}\le$$

$$\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{s}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)ds}{1+s^2}\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{s}ds}{1+s^2}=\pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тому за теоремою Фубіні при $\varphi\in(0;\pi/2)$ маємо

$$\int\limits_0^{+\infty}dr\int\limits_0^{+\infty}\left|f_1(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})\right|dv\le c<+\infty$$

$$\int\limits_0^{+\infty}dr\int\limits_0^{+\infty}\left|f_3(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})\right|dv\le c<+\infty,$$

Також для $u>0$ одержимо

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left|\chi(u;re^{i\varphi})\right|dr=\int\limits_0^{+\infty}\frac{ux}{|(u+\bar z)(u-z)(u+z)|}dr$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{ur\cos\varphi}{(u^2+2ur\cos\varphi+r^2)\sqrt{u^2-2ur\cos\varphi+r^2}}dr$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi}{(s^2+2s\cos\varphi+1)\sqrt{s^2-2s\cos\varphi+1}}dr$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{2}{\sqrt{s^2 - 2s\cos\varphi + 1}} dr +$$

$$+ \int\limits_2^{+\infty} \frac{s}{(s^2+1)\sqrt{(s-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}} dr$$

$$\le 2\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{(s-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}} dr + \int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{s\sqrt{2(s-\cos\varphi)\sin\varphi}} dr$$

$$\le 2\int\limits_0^2 \frac{1}{|\sin\varphi|} dr + \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}} \int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{(s-\cos\varphi)^{3/2}} dr < c_2.$$

Тому також

$$\int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_0^{+\infty} \left| f_2(u)\chi(u; re^{i\varphi}) \right| du \le c_3 < +\infty, \tag{3.18}$$

де стала c_3 від $\varphi \in (-\pi/2 + \delta; \pi/2 - \delta)$ не залежить.

Розглянемо тепер випадок $-\pi/2 < \varphi < 0$. Тоді

$$\int\limits_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right| e^{-\sigma r|\sin\varphi|} dr$$

$$\le \int\limits_0^{+\infty} \left| \Xi(re^{i\varphi}) \right| dr + \int\limits_0^{+\infty} \left| f_2(re^{i\varphi}) \right| e^{-2\sigma r|\sin\varphi|} dr$$

$$\le \int\limits_0^{+\infty} |f_1(iv)| \int\limits_0^{+\infty} \left| \chi(iv; re^{i\varphi}) \right| dr dv$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}|f_3(iv)|\int\limits_{0}^{+\infty}\left|\chi(iv;re^{i\varphi})\right|drdv$$

$$+\int\limits_{0}^{+\infty}|f_2(u)|\int\limits_{0}^{+\infty}\left|\chi(u;re^{i\varphi})\right|drdu+c.$$

Аналогічно до випадку $0<\varphi<\pi/2$, можна показати, что коли $v>0$, то

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{|v|\,r\cos\varphi dr}{(v^2-2vr\sin\varphi+r^2)\sqrt{v^2+2vr\sin\varphi+r^2}}\leq\pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

а якщо $v>0$, то

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{|v|\,r\cos\varphi dr}{(v^2+2vr\sin\varphi+r^2)\sqrt{v^2-2vr\sin\varphi+r^2}}\leq\pi.$$

Врахувавши також нерівність (3.18), отримаємо виконання (3.16) і для $\varphi\in(-\pi/2;-\delta)$. $\square$

Доведення теореми 3.7 випливає з лем 3.1-3.3, якщо врахувати, що функція f, визначена в лемі 3.2, є аналітичною в $\mathbb{C}_+$. Справді, функція

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_1(iv)}{iv-z}dv+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f_3(iv)}{iv-z}dv,$$

очевидно, є аналітичною в $\mathbb{C}_+$. Функція

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u-z}du-f_2(z)$$

аналітична в кутах $\mathbb{C}(0;\pi/2)$ і $\mathbb{C}(-\pi/2;0)$. На додатній дійсній півосі за теоремою Сохоцького граничні значення з верхнього та нижнього кутів співпадають. Тому, як при доведенні леми 4.22, легко одержимо, що f – аналітична в $\mathbb{C}_+$.

3.5 Висновки до розділу 3

Цей розділ присвячений теоремам про представлення, які є аналогами теорем Пелі-Вінера, Коші та Пуассона для просторів Гарді у півплощині. Також розглянуто питання аналітичного продовження до функцій із $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Одержано такі результати:

- отримано теорему про представлення типу Пелі-Вінера для класу цілих функцій, що належать $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Одержано повний опис одного важливого для дослідження циклічності в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ підкласу цього класу;
- встановлено теорему представлення, яка є узагальненням інтегральної формули Коші для простору Гарді;
- встановлено теорему представлення, яка є узагальненням формули Пуассона для простору Гарді;
- отримано опис функцій, що аналітично продовжуються з уявної осі і є близькими, у деякому сенсі, до простору $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

РОЗДІЛ 4

Циклічні функції у ваговому просторі Гарді

4.1 Теореми типу Мандельбройта

С. Мандельбройтом (див. [50], [46], [37]) було одержано теорему, яка стверджує, що коли функція f належить простору L^1 на одиничному колі, показник збіжності її спектру λ менший за одиницю і для кожного $\varepsilon > 0$ виконується

$$\int_0^{\rho} |f(re^{it})|dt = O(\exp(-\varepsilon^{-\rho})),\ \rho \to 0,$$

де $\rho > \sigma(1-\sigma)^{-1}$, то $f \equiv 0$. Інакше кажучи, якщо функція з простору L^1 має досить "негустий" спектр, то вона є тотожним нулем. Це можна інтерпретувати також як твердження про те, що функція та її перетворення Фур'є не можуть одночасно бути дуже малими. Такого типу твердження відомі як "принцип невизначеності в гармонійному аналізі" і одержали досить повний виклад в [37]). Метою нашого дослідження є отримання твердження про поведінку двох функцій при обмеженнях на суму цих функцій та перетворення Лапласа (чи Фур'є) кожної з них.

Нехай $D_{\alpha,\beta} = \{z : \mathrm{Re}z < 0, \alpha < \mathrm{Im}z < \beta\}$, $D^*_{\alpha,\beta} = \mathbb{C}\backslash\overline{D}_{\alpha,\beta}$, $\alpha < \beta$. Через $E^p[D_{\alpha,\beta}]$ та $E^p_*[D_{\alpha,\beta}], 1 \le p < +\infty$, позначимо простори функцій f, аналітичних відповідно в $D_{\alpha,\beta}$ та $D^*_{\alpha,\beta}$ для яких

$$\sup\left\{\int\limits_\gamma |f(z)|^p|dz|\right\}^{1/p} < +\infty,$$

де супремум береться за всіма відрізками γ, що лежать відповідно в $D_{\alpha,\beta}$ та $D^*_{\alpha,\beta}$ і є паралельними до координатних осей. Функції f з цих просторів мають майже скрізь на [4] ∂D_σ кутові граничні значення, які ми теж позначаємо через $f(z)$ і $f \in L^p[\partial D_{\alpha,\beta}]$. Також для фіксованого $\sigma > 0$ позначаємо $D_1 = D_{-2\sigma,0}$, $D_1^* = D^*_{-2\sigma,0}$, $D_3 = D_{0,2\sigma}$, $D_3^* = D^*_{0,2\sigma}$.

Цей підрозділ присвячений доведенню наступного твердження.

Теорема 4.1. *Нехай* $q_1 \in E^2_*[D_1]$, $q_3 \in E^2_*[D_3]$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|\Omega_j(x)|}{x} = -\infty, \quad j \in \{1;3\}, \tag{4.1}$$

де q_j *та* Ω_j *пов'язані співідношенням*

$$q_j(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \Omega_j(x) e^{-xw} dx, j \in \{1;3\}, \tag{4.2}$$

і для деякого $a > 0$

$$(\Omega_1(x) + \Omega_3(x))\, e^{ax\ln x} \in L^2(0;+\infty), \tag{4.3}$$

Тоді для кожної незростаючої функції $\varkappa : (0;+\infty) \to (-\infty;0)$, *такої що* $\varkappa(x) = O(x)$, $x \to +\infty$, *знайдеться таке* $c \in \mathbb{R}$, *що*

$$\begin{aligned} \Omega_1(x) &\in L^2(0;+\infty) e^{cz} e^{x\varkappa(x)} \exp\left\{\frac{a}{e} e^{-\frac{\varkappa(x)}{a}}\right\}, \\ \Omega_3(x) &\in L^2(0;+\infty) e^{cz} e^{x\varkappa(x)} \exp\left\{\frac{a}{e} e^{-\frac{\varkappa(x)}{a}}\right\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Доведення. В [10] показано, що для функцій, визначених рівністю (4.2), при виконанні умов $q_1 \in E^2_*[D_1]$, $q_3 \in E^2_*[D_3]$ справджуються рівності

$$\Omega_j(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_j} q_j(w) e^{zw} dw, j \in \{1; 3\}.$$

Покажемо, що функція q_1 є цілою. Справді, з умови (4.1) маємо, що $|\Omega_1(x)| = e^{x\eta(x)}$, причому $\eta(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$. Тому інтеграл в правій частині рівності (4.2) при $j = 1$ збігається абсолютно і рівномірно на кожному компакті з $\mathbb{C}$. Аналогічно з умови (4.1) маємо, що q_3 – ціла. Розглянемо функцію $\Omega_2 = -\Omega_1 - \Omega_3$. Тоді визначимо q_2 рівністю (4.2), поклавши в ній $j = 2$. Легко бачити, що на множині визначення функцій q_1, q_3 (тобто всій комплексній площині) справедлива рівність $q_2 = -q_1 - q_3$ і тому q_2 – теж ціла. Звідси одержимо зображення

$$\Omega_1(z) = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_1} (q_2(w) + q_3(w)) e^{zw} dw.$$

Але за означенням просторів маємо $E^2_*[D_3] \subset E^2[D_1]$, тому $q_3 \in E^2[D_1]$. З цього випливає, що $q_3(w)e^{wz} \in E^1[D_1]$ для кожного $z \in \mathbb{C}_+$, тому з [10] одержимо

$$\int\limits_{\partial D_1} q_3(w) e^{zw} dw = 0, z \in \mathbb{C}_+.$$

Звідси маємо

$$\Omega_1(z) = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_1} q_2(w) e^{zw} dw.$$

Оскільки, як відмічено вище, q_2 є цілою функцією, то і функція $q_2(w)e^{zw}$ – ціла для кожного $z \in \mathbb{C}_+$. Тому вона, зокрема, аналітична в замиканнні кожного прямокутника $M_{\varkappa(x)} := \{w : w \in D_1,\ \mathrm{Re} z > \varkappa(x)\}$. Скориставшись інтегральною теоремою Коші для $M_{\varkappa(x)}$, маємо

$$\int\limits_{\partial M_{\varkappa(x)}} q_2(w) e^{zw} dw = 0.$$

Тому для кожного $z \in \mathbb{C}_+$ справджується формула

$$\Omega_1(z) = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial(D_1 \setminus M_{\varkappa(x)})} q_2(w) e^{zw} dw, z \in \mathbb{C}_+.$$

Звідси для $x > 0$ маємо, розглянувши окремо інтеграли по сторонах $\partial(D_1 \setminus M_{\varkappa(x)})$,

$$|\Omega_1(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial(D_1 \setminus M_{\varkappa(x)})} |q_2(w)| e^{xu} |dw| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (I_1 + I_2 + I_3),$$

де $w = u + iv$, $k < 0$. З властивостей просторів $E^2_*[D_{\alpha,\beta}]$ випливає [10], що $q_1(u - 2i\sigma) \in L^2(-\infty; 0)$ і $q_3(u - 2i\sigma) \in L^2(-\infty; 0)$. Тому також $q_2(u - 2i\sigma) \in L^2(-\infty; 0)$. Тоді з нерівності Шварца, врахувавши, що $q_2(u - 2i\sigma) \in L^2(-\infty; 0)$, для $x > 0$ одержимо оцінку

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\varkappa(x)} |q_2(u - 2i\sigma)| e^{xu} du \le \left(\int\limits_{-\infty}^{\varkappa(x)} |q_2(u - 2i\sigma)|^2 du \cdot \int\limits_{-\infty}^{\varkappa(x)} e^{2xu} du \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left(\int\limits_{-\infty}^{0} |q_2(u - 2i\sigma)|^2 du \cdot \frac{\exp(2x\varkappa(x))}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c_1}{\sqrt{x}} \exp(x\varkappa(x)).$$

Аналогічно одержимо нерівність

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{\varkappa(x)} |q_2(u)| e^{xu} du \le \frac{c_2}{\sqrt{x}} \exp(x\varkappa(x)),\ x > 0.$$

Далі, скориставшись зображенням (4.2) та теоремою Фубіні, маємо

$$I_2 = \int\limits_{-2\sigma}^{0} |q_2(\varkappa(x)+iv)| e^{x\varkappa(x)} dv$$

$$= \exp\left(x\varkappa(x)\right) \int\limits_{-2\sigma}^{0} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \Omega_2(t) e^{-t(\varkappa(x)+iv)} dt \right| dv$$

$$\leq \frac{\exp\left(x\varkappa(x)\right)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-2\sigma}^{0} \int\limits_{0}^{+\infty} \left| \Omega_2(t) e^{-t\varkappa(x)} \right| dt dv.$$

Застосувавши нерівність Шварца і (4.3), отримаємо

$$I_2 \leq \frac{\exp\left(x\varkappa(x)\right)}{\sqrt{2\pi}} 2\sigma \left(\int\limits_{0}^{+\infty} \left| \Omega_2(t) e^{at\ln t} \right|^2 dt \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2at\ln t - 2t\varkappa(x)} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c_3 \exp\left(x\varkappa(x)\right) \left(\exp\left\{ -\frac{\varkappa(x)}{2a} \right\} \exp\left\{ \frac{2a}{e} e^{-\frac{\varkappa(x)}{a}} \right\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= c_3 \exp\left\{ x\varkappa(x) - c_4\varkappa(x) + \frac{a}{e} e^{-\frac{\varkappa(x)}{2a}} \right\}.$$

Передостанній перехід випливає (див. [62], с. 323) з асимптотичної рівності

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2at\ln t - 2t\varkappa(x)} dt$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{ae}} \exp\left\{ -\frac{\varkappa(x)}{2a} \right\} \exp\left\{ \frac{2a}{e} e^{-\frac{\varkappa(x)}{a}} \right\} (1+o(1)),\ x \to +\infty.$$

Тому для деяких невід'ємних сталих c_5, c_6 маємо

$$|\Omega_1(x)| \leq c_5 e^{x\varkappa(x) - c_6\varkappa(x)} \exp\left\{ \frac{a}{e} e^{-\frac{\varkappa(x)}{a}} \right\},\ x > 0, \tag{4.5}$$

з чого випливає перша з доводжуваних формул, а друга доводиться аналогічно. $\square$

Цікавим для застосувань є випадок, коли останній множник в (4.4) дає незначний вклад в оцінку. Зокрема, коли $\varkappa(x) = \frac{2\sigma}{\pi}\ln x$ і $a = \frac{2\sigma}{\pi}$, можна одержати точніше твердження.

Теорема 4.2. *Нехай $q_1 \in E^2_*[D_1]$, $q_3 \in E^2_*[D_3]$, виконується умова (4.1) та*

$$(\Omega_1(x) + \Omega_3(x))\, e^{\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x} \in L^2(0; +\infty), \tag{4.6}$$

Тоді знайдеться таке $c \in \mathbb{R}$, що

$$\Omega_1(z) e^{-i\sigma z} e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+),\ \Omega_3(z) e^{i\sigma z} e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+), \tag{4.7}$$

де $\ln z$ – це головне значення логарифма в $\mathbb{C}_+$.

Доведення. Скористаємось теоремою типу Фрагмена-Ліндельофа 2.9 для функції

$$\varphi_1(z) = \Omega_1(z) \exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right\} e^{-i\sigma z} e^{-c_5 z}.$$

Справді, з (4.5) одержимо $\varphi_1(x) e^{-\varepsilon x} \in L^2(0; +\infty)$, $\varepsilon > 0$. Оскільки також за умовами теореми і лемою 1 $\Omega_1(z) e^{-i\sigma z} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, то для кожного $\gamma \in (1; 2]$

$$(\forall \varepsilon > 0) : \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left|\varphi_1(re^{i\varphi})\right|^2 \exp\{-\varepsilon r^\gamma\}\, dr \right\} < +\infty.$$

Легко бачити також, що $\varphi_1 \in L^2[i\mathbb{R}]$. З цього випливає, що $\varphi_1 \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Цим доведено виконання першої з умов (4.7), а друга доводиться аналогічно. $\square$

Наведемо також "чисто дійсний" варіант попередньої теореми.

Теорема 4.3. *Нехай виконується умова* (4.6), *причому* q_1, q_3 *є такими цілими функціями, що* $q_1 \in E^2_*[D_1]$, $q_3 \in E^2_*[D_3]$. *Тоді знайдеться таке* $c \in \mathbb{R}$, *що*

$$\Omega_1(x) \in L^2(0;+\infty)e^{-\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{cx}, \quad \Omega_3(x) \in L^2(0;+\infty)e^{-\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{cx}.$$

Зазначимо, що, як показано при доведенні теореми 4.1, цілість функцій q_1, q_3 є наслідком умови (4.1).

Остання теорема показує, що коли для суми $\Omega_1 + \Omega_3$ виконується умова (4.6), то при певних обмеженнях на їх перетворення Лапласа q_1, q_3 виконується умова, близька до (4.6), для кожного з доданків Ω_1, Ω_3.

4.2 Еквівалентність деяких умов у вагових просторах Гарді

4.2.1 Випадок без нулів та з тривіальною інтегральною граничною функцією

Цей підрозділ присвячений опису одного важливого для застосувань підпростору простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, який повністю визначається поведінкою функцій тільки на додатній півосі або тільки на уявній осі. Також наведено деякі узагальнення одержаного результату.

Теорема 4.4. *Нехай $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma > 0$, і $G(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, а $h(t) \equiv const$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

$$1)\ \varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt - 2\sigma\ln r\right) = -\infty;$$

$$2)G_1 \notin H^p(\mathbb{C}_+)\ \textit{для кожного}\quad c \in \mathbb{R},$$

$$\textit{де}\ G_1(z) = G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z - cz\right\};$$

$$3)\ \lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt - 2\sigma\ln r\right) = -\infty;$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) = +\infty;$$

$$5)\ \varlimsup_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) = +\infty.$$

Зауважимо, що для випадку $\sigma = 0$ кожна з умов 1)-5) визначає порожню множину у просторі $H^p_0(\mathbb{C}_+) \equiv H^p(\mathbb{C}_+)$. Нам невідомі подібні результати для інших вагових просторів Гарді. Щодо класу $H^p(\mathbb{C}_+)$, то одержати умови, які пов'язували б "малість" модуля функції на $\partial\mathbb{C}_+$ з "великістю" її модуля на $\mathbb{R}_+$, неможливо. Справді, коли $G \in H^p(\mathbb{C}_+)$, не має нулів у $\mathbb{C}_+$ і її інтегральна гранична функція є тотожною сталою, то

$$|G(x)| = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{t^2+x^2}\ln|G(it)|dt + cx\right\},$$

тобто коли $|G_1(it)| \le |G_2(it)|$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+$ і $c = 0$, то $|G_1(x)| \le |G_2(x)|$ для всіх $x > 0$.

Доведення теореми випливає з лем 4.2-4.5.

Лема 4.1. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma > 0, \quad h(t) \equiv$ *const і* $f(z) \neq 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$, *то*

$$G(z) = \exp\left(ia_0 + a_1 z + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\ln|G(it)|\,dt\right), a_0 \in \mathbb{R}, a_1 \in \mathbb{R},$$

де

$$Q(t,z) = \frac{(tz+i)^2}{i(t^2+1)^2(t+iz)},$$

і виконуються умови

$$\varliminf_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt > -\infty, \qquad \ln|G(it)| \in L^1[-1;1].$$

Ця лема є простим наслідком теореми 1.3.

Лема 4.2. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і виконується умова 1) теореми, то виконується умова 3).*

Доведення. Оскільки $G(it)e^{-\sigma|t|} \in L^p(\mathbb{R})$, то розглянувши функцію

$$\varphi_1(r) = \int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln^+\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|dt,$$

маємо

$$\varphi_1(r) \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \frac{1}{t^2} |G(it)e^{-\sigma|t|}|^p dt$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|^p dt < c_1 < +\infty.$$

Функція

$$\varphi_2(r) := \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^+ \frac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|} dt,$$

очевидно, є неспадною. Оскільки

$$\ln|G(it)e^{-\sigma|t|}| = \ln^+|G(it)e^{-\sigma|t|}| - \ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|},$$

то якби функція φ_2 була обмеженою зверху, то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)e^{-\sigma|t|}| dt > -\infty,$$

що суперечить умові. Отже,

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \varphi_2(r) = \lim_{r\to+\infty} \varphi_2(r) = +\infty.$$

Тому

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)e^{-\sigma|t|}| dt = \varlimsup_{r\to+\infty} (\varphi_1(r) - \varphi_2(r))$$

$$\leqslant \varlimsup_{r\to+\infty} (c_1 - \varphi_2(r)) = -\infty,$$

а отже виконується умова 3). □

Лема 4.3. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $h(t) \equiv const$ *і* $G(z) \neq 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$, *а також виконується умова 3) теореми, то виконується і умова 4).*

Доведення. Застосувавши лему 4.1 до функцій G та $e^{-\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}$, одержимо

$$G(z) = \exp\left(ia_0 + \sigma z + a_1 z + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\ln|G(it)|dt\right),$$

$$e^{-\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z} = \exp\left(ia_2 + a_3 z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\ln|e^{-\frac{2\sigma}{\pi}it\ln(it)}|dt\right).$$

Поклавши в цих рівностях $z = x > 0$, отримаємо

$$\ln\left|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}\right| = cx + \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,x)\ln\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|dt\right\}.$$

Оскільки

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi}Q(t;x)\right\} = \frac{-t^2x^3 + x + 2t^2x}{\pi(1+t^2)^2(t^2+x^2)},$$

то

$$\frac{\ln\left|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}\right|}{x} = c + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2+1+2t^2}{\pi(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt =$$

$$= c - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2x^2}{\pi(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln^+|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\pi(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln^+|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2x^2}{\pi(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln^+\frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}dt$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\pi(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln^+\frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}dt$$

$$= c - I_1 + I_2 + I_3 - I_4.$$

Оцінимо відповідні інтеграли:

$$I_1 = \frac{1}{p} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 x^2}{\pi(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \ln^+ \left(\left| G(it) e^{-\sigma|t|} \right|^p \right) dt$$

$$\leqslant \frac{1}{p\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 x^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \left| G(it) e^{-\sigma|t|} \right|^p dt$$

$$\leqslant \frac{1}{p\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| G(it) e^{-\sigma|t|} \right|^p dt < +\infty.$$

Вважаючи, що $x > 1$, маємо

$$I_4 \leqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it) e^{-\sigma|t|}|} dt$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \left(\ln^+ \frac{1}{|G(it)|} + \sigma|t| \right) dt$$

$$= c_2 + \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt$$

$$= c_3 + \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt.$$

Останнє отримуємо з того, що за лемою 4.1 $\ln |G(it)| \in L^1[-1; 1]$. Далі,

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|G(it)|} dt \leqslant \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} d \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|G(is)|} ds$$

$$= \frac{1}{t^2}\int\limits_1^t \frac{1}{s^2}\ln^+\frac{1}{|G(is)|}ds\Bigg|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty}\int\limits_1^t \frac{1}{s^2}\ln^+\frac{1}{|G(is)|}ds\cdot\frac{2}{t^3}dt$$

$$\leqslant c_4 + c_5\frac{\ln t}{t^2}\Bigg|_1^{+\infty} + c_5\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^3}dt < c_6.$$

Це маємо з того, що

$$\int\limits_1^t \frac{1}{s^2}\ln^+\frac{1}{|G(is)|}ds \leqslant \frac{4}{3}\int\limits_1^{2t}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{(2t)^2}\right)\ln^+\frac{1}{|G(is)|}ds \leqslant c_7\ln t + c_7,$$

бо за лемою 4.1

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln^+\frac{1}{|G(it)|}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln^+|G(it)|dt + c_8 \leqslant c_9 + c_{10}\ln t.$$

Аналогічно

$$\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{1}{(1+t^2)^2}\ln^+\frac{1}{|G(it)|}dt \leqslant c_{11},$$

тому $I_4 \leqslant c_{12}$. Також

$$I_3 \geqslant \int\limits_{1<|t|\leq x}\frac{t^2x^2}{\pi(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln^+\frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}dt$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leq x}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\ln^+\frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}dt$$

$$\geqslant \frac{1}{8\pi}\int\limits_{1<|t|\leq x}\frac{1}{t^2}\ln^+\frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}dt$$

$$\geqslant \frac{-1}{8\pi} \int\limits_{1<|t|\leq x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{x^2}\right) \ln |G(it)e^{-\sigma|t|}|dt.$$

Тому за умовою леми $\lim\limits_{x\to+\infty} I_3 = +\infty$. Оскільки $I_2 > 0$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \left|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}\right|}{x} = +\infty.$$

□

Лема 4.4. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і виконується умова 5) теореми, то виконується і умова 2).*

Доведення. Припустимо, що умова 2) не виконується, тобто

$$(\exists c \in \mathbb{R}) : G(z) \exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z - cz\right\} \in H^p(\mathbb{C}_+). \tag{4.8}$$

Тоді [116], с.139

$$\left|G(z) \exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right\}\right| \leqslant \frac{e^{cx}}{\sqrt[p]{x}}.$$

Тому $\ln|G(x)| + \frac{2\sigma}{\pi} x \ln x \leqslant cx$, якщо $x \geq 1$, що суперечить умові 4). □

Лема 4.5. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $h(t) \equiv const$ *і* $G(z) \neq 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$, *виконується умова 2) теореми, то виконується і умова 1).*

Доведення. Нехай умова 1) не виконується. Тоді

$$(\exists c \in \mathbb{R})\, (\forall r > 1) : \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln |G(it)e^{-\sigma|t|}|dt > c. \tag{4.9}$$

Оскільки $G(it)e^{-\sigma|t|} \in L^p(\mathbb{R})$, то

$$\int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^+ |G(it)e^{-\sigma|t|}|dt$$

$$= \frac{1}{p} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^+ |G(it)e^{-\sigma|t|}|^p dt$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} |G(it)e^{-\sigma|t|}|^p dt < +\infty, \tag{4.10}$$

а тому з (4.9) маємо

$$\int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \frac{1}{\ln^+ |G(it)e^{-\sigma|t|}|} dt < c_1. \tag{4.11}$$

Враховуючи, що за лемою 4.1 $\ln |G(it)| \in L^1[-1;1]$, бо $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}}{1+t^2} dt = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}}{1+t^2} dt$$

$$+ \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \frac{\ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}}{1+t^2} dt = c + \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \frac{\ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}}{1+t^2} dt$$

$$\leqslant c + \frac{4}{3} \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(2r)^2}\right) \ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|} dt \leqslant$$

$$\leqslant c + \frac{4}{3} \varlimsup_{2r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant 2r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(2r)^2}\right) \ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|} dt < +\infty.$$

Аналогічно з (4.10) отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |G(it)e^{-\sigma|t|}|}{1+t^2} dt < +\infty,$$

тому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\ln |G(it)e^{-\sigma|t|}|\right|}{1+t^2} dt < +\infty.$$

Тоді з [24] с. 189-190, оскільки функція $G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}$ не має нулів у $\mathbb{C}_+$ і її інтегральна гранична функція є тотожною сталою, отримуємо, що виконується (4.8), а це суперечить умові 2). $\square$

Теорема 4.4 перестає справджуватися, якщо просто опустити у ній умову тривіальності інтегральної граничної функції. На це вказує наступний приклад.

Приклад 4.1. *При кожних $\alpha \in (0; 2\sigma)$, $\beta \in (0; \alpha]$ функція*

$$G_0(z) = \frac{1}{(1+z)^2} \exp\left\{-\frac{\alpha}{\pi} z \log z\right\} \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{k\beta}{\pi(z-ik)}\right\} e^{-cz},$$

де $c \in \mathbb{R}$ визначено нижче, належить простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ при кожному $p \geq \infty$, для неї виконується умова 2) теореми 4.4, але не виконується 1).

Доведення. Зауважимо спочатку, що інтегральна гранична функція функції $\exp\left\{-\frac{\beta}{\pi} z \log z\right\}$ є сталою, тому інтегральні граничні функції функцій G_0 та

$$G_{0,1}(z) := \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{k\beta}{\pi(z-ik)}\right\}$$

співпадають. Оскільки

$$\log\left|e^{-\frac{k\beta}{\pi(z-ik)}}\right| = -\frac{k\beta}{\pi(x^2+(y-k)^2)},$$

то

$$h(k+1/2) - h(k-1/2) = \lim_{x\to 0+} \int\limits_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{-k\beta}{\pi(x^2+(y-k)^2)} dy - \int\limits_{k-1/2}^{k+1/2} 0 dy$$

$$= -\lim_{x\to 0+} \frac{k\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-k}{x}\Bigg|_{k-1/2}^{k+1/2} = -k\beta.$$

Тому для $r \notin \mathbb{Z}$ маємо

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh\,(t)| = \int\limits_1^r \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh\,(t)|$$

$$= -\int\limits_1^r \frac{dh(t)}{t^2} + \frac{1}{r^2}\int\limits_1^r dh(t) = -\sum_{k=1}^{[r]} \frac{h(k+1/2)-h(k-1/2)}{k^2}$$

$$+\frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{[r]} (h(k+1/2)-h(k-1/2)) = \sum_{k=1}^{[r]} \frac{k\beta}{k^2} - \frac{1}{r^2}\sum_{k=1}^{[r]} k\beta,$$

з чого маємо

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh\,(t)| = \beta\log r + O(1),\ r\to+\infty. \qquad (4.12)$$

Оскільки $G_{0,1}(it) = 0$ для майже всіх $t \in \mathbb{R}$, то

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G_0\,(it)|\,dt$$

$$= \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log\left|\exp\left\{-\frac{\alpha}{\pi}it\log(it)\right\}\right|dt$$

$$= \frac{\alpha}{2}\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|t|\,dt = \alpha\log r + O(1),\ r\to+\infty.$$

З останньої рівності та (4.12) випливає виконання умови (1.13) теореми 1.3. Всі інші умови цієї теореми виконуються очевидним чином, тому

$$(\exists\widetilde{c}\in\mathbb{R}):\quad G_0(z)e^{-\widetilde{c}z}\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+),$$

Отже, $G_0(z)e^{cz} \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ при деякому $c \in \mathbb{R}$. Проте, як показано вище,

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log|G_0\,(it)|\,dt - 2\sigma \log r$$

$$= -(2\sigma - \alpha)\log r + O(1) \to -\infty,\ r \to +\infty,$$

тобто виконується умова 2). Для інтегральної граничної функції h функції G_0 маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh(t)|}{1+t^2} = +\infty,$$

що суперечить умові 1). $\square$

4.2.2 Випадок без нулів та з нетривіальною інтегральною граничною функцією

Теорема 4.5. *Нехай $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, $G\,(z) \neq 0$ для кожного $z \in \mathbb{C}_+$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

$$1) \qquad (\forall\, c \in \mathbb{R}) : G\,(z) \exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z - cz\right\} \notin H^p\,(\mathbb{C}_+);$$

$$2) \qquad \lim_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log|G\,(it)|\,dt - \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh\,(t)| - 2\sigma \log r \right) = -\infty;$$

$$3)\quad \varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt\right.$$

$$\left.-\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|-2\sigma\log r\right)=-\infty;$$

$$4)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\log x\right)=+\infty;$$

$$5)\quad \varlimsup_{x\to+\infty}\left(\frac{\log|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\log x\right)=+\infty.$$

У цій теоремі не можна опустити умову відсутності нулів, оскільки в такому випадку границі, що фігурують в умовах 4) і 5) можуть, взагалі кажучи, не існувати.

Зауважимо, що твердження теореми справджується і для випадку $\sigma = 0$ у тому сенсі, що кожна з умов 1)-5) описує порожню множину.

Твердження теореми випливає з лем 4.6, 4.8, 4.9, 4.4, якщо врахувати, що імплікація 4) $\Rightarrow$ 5) є тривіальною.

Лема 4.6. *Якщо $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, $G(z) \ne 0$, $z \in \mathbb{C}_+$, і умова 3) виконується, то виконується також умова 4).*

Доведення. Зауважимо спочатку, що можливі лиш два випадки:

$$(\exists c>0):\quad \int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|\le c, \tag{4.13}$$

або (внаслідок монотонності)

$$\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|=+\infty. \tag{4.14}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли виконується умова (4.13). Тоді

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt - 2\sigma\log r$$

$$= \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{p}\log\left|G(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p + \sigma|t|\right)dt - 2\sigma\log r$$

$$\le \frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log^+\left|G(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p dt$$

$$+ \int\limits_{1<|t|\le r} \frac{\sigma}{|t|}dt - 2\sigma\log r \le$$

$$\le \frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\le r} \frac{1}{t^2}\left|G(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p dt < \frac{1}{p}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|G(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p dt < c < \infty,$$

де стала c від r не залежить. Якщо припустити, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt - 2\sigma\log r\right) > -\infty,$$

то на деякій послідовності (r_k) додатних чисел, такій що $r_k \to +\infty$ при $k\to\infty$, маємо

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r_k} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r_k^2}\right)\log|G(it)|\,dt - 2\sigma\log r_k\right) > -\infty.$$

Врахувавши нерівність (4.13), одержимо

$$\varlimsup_{k\to\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r_k} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r_k^2}\right)\log|G(it)|\,dt\right.$$

$$-\int\limits_{1<|t|\le r_k}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r_k^2}\right)|dh\,(t)|-2\sigma\log r_k\right)>-\infty,$$

що суперечить умові 3). Тому припущення невірне, тобто

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G\,(it)|\,dt-2\sigma\log r\right)=-\infty. \tag{4.15}$$

За теоремою 1.3 справедливе зображення $G\,(z)=G_1\,(z)\,G_2\,(z)$, де

$$G_1\,(z)=e^{ia_0+a_1z}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q\,(t,z)\log|G\,(it)|\,dt\right\},$$

$$G_2\,(z)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q\,(t,z)\,dh\,(t)\right\}.$$

В лемі 4.3 показано, що тоді

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log|G_1\,(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\log x\right)=+\infty. \tag{4.16}$$

Для доведення потрібного залишилось показати, що

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\log|G_2\,(x)|}{x}>-\infty. \tag{4.17}$$

Справді,

$$\frac{\log|G_2\,(x)|}{x}=\frac{\log\left|\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q\,(t,z)\,dh\,(t)\right\}\right|}{x}.$$

Але оскільки

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi}Q\,(t,x)\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{(tx+i)^2}{\pi i\,(t^2+1)^2\,(t+ix)}\right\}$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{t^2x^2+2txi-1}{\pi\left(t^2+1\right)^2(ti-x)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{t^2x^2+2txi-1}{\pi\left(t^2+1\right)^2(-x+it)}\cdot\frac{-x-it}{-x-it}\right\}$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{-t^2x^3+x+2t^2x}{\pi\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)}+i\frac{t-t^3x^2-2x^2t}{\pi\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)}\right\}$$

$$= \frac{-t^2x^3+x+2t^2x}{\pi\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)},$$

то

$$\frac{\log|G_2(x)|}{x} = \frac{\log\left|\exp\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^3+x+2t^2x}{\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)}dh(t)\right\}\right|}{x}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2+1+2t^2}{\pi\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)}dh(t) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2}{\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)}dh(t)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)}dh(t) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{\pi\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)}dh(t)$$

Як відомо у теорії інтеграла Стілтьєса, якщо s є неспадною, f є невід'ємною на інтервалі $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(t)\,ds(t) \geq 0.$$

Тому

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2}{\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)}dh(t) \geq 0.$$

Вважатимемо, що $x \geq 1$. Тоді

$$\frac{\log |G_2(x)|}{x} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{\left(t^2+1\right)^2 (x^2+t^2)} dh(t).$$

Але $\frac{1+2t^2}{\left(1+t^2\right)^2} \leq \frac{2+2t^2}{\left(1+t^2\right)^2} = \frac{2}{1+t^2}$, тому

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{\left(1+t^2\right)^2 (x^2+t^2)} dh(t) \geq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dh(t)}{\left(1+t^2\right)^2} \geq \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dh(t)}{1+|t|^3},$$

бо $\left(1+t^2\right)^2 \geq 1+|t|^3$. Але в [155, с. 44] показано, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh(t)|}{1+|t|^3} < +\infty.$$

Тому $\frac{\log|G_2(x)|}{x} \geq -\infty$ при $x \geq 1$. Отже, нерівність (4.17) виконується. Додавши (4.16) та (4.17) одержимо

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\log |G_1(x)\, G_2(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \log x \right) = +\infty,$$

тобто виконання умови 4).

Нехай тепер виконується умова (4.14). Тоді

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \frac{|dh(t)|}{1+t^2} = c + \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \frac{|dh(t)|}{1+t^2}$$

$$\geqslant c + \varliminf_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)| =$$

$$= c + \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)| = +\infty.$$

Т. Гіщак показала [20], що

$$\varliminf_{x\to\infty}\left(\frac{\log|G_1(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\log x\right)>-\infty.$$

Тому для завершення доведення нам досить показати, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log|G_2(x)|}{x}=+\infty. \tag{4.18}$$

Як показано вище при доведенні цієї леми,

$$\frac{\log|G_2(x)|}{x}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2}{(t^2+1)^2(x^2+t^2)}dh(t)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{(t^2+1)^2(x^2+t^2)}dh(t)$$

і

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{(t^2+1)^2(x^2+t^2)}dh(t)\ge c>-\infty,$$

де c від $x\ge 1$ не залежить. Оцінимо інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2}{(t^2+1)^2(x^2+t^2)}dh(t)\ge\int\limits_{|t|\ge 1}\frac{-t^2x^2}{(t^2+1)^2(x^2+t^2)}dh(t)$$

$$\ge\int\limits_{|t|\ge 1}\frac{-t^2x^2}{2t^2(t^2+1)(x^2+t^2)}dh(t)\ge\frac{1}{2}\int\limits_{1\le|t|\le x}\frac{-x^2}{(t^2+1)(x^2+t^2)}dh(t)$$

$$\ge\frac{1}{2}\int\limits_{1\le|t|\le x}\frac{-x^2}{(t^2+1)2x^2}dh(t)=\frac{1}{4}\int\limits_{1\le|t|\le x}\frac{-1}{(t^2+1)}dh(t)$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{1\le|t|\le x}\frac{|dh(t)|}{(1+t^2)}\to+\infty,\ x\to+\infty.$$

Отже, виконується рівність (4.18), а тому і в цьому випадку виконується умова 4). $\square$

Лема 4.7. *Якщо* $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$, $p \in [1, +\infty)$ *то справедливе зображення*

$$f(z) = e^{i\alpha+\beta z} \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{t+iz} \ln|f(it)|dt\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{t+iz} dh(t)\right\} \prod_{|\lambda_n|\le 1} \frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n} \prod_{|\lambda_n|>1} \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n}, \quad (4.19)$$

де

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \le 0, \quad (4.20)$$

причому для кутових граничних значень f *на* $i\mathbb{R}$, *її інтегральної граничної функції* h *(яка є неспадною і* $h'(t) = 0$ *майже скрізь на* $\mathbb{R}$*) та послідовності нулів* (λ_n) *виконуються відповідно умови*

$$\begin{gathered} f \in L^p(i\mathbb{R}), \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|f(it)||}{1+t^2} dt < +\infty, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh(t)|}{1+t^2} dt < +\infty, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < +\infty. \end{gathered} \quad (4.21)$$

Навпаки, якщо для функції $f : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *неспадної функції* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *похідна якої рівна нулеві майже скрізь, послідовності* (λ_n), $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, *виконуються умови* (4.20)-(4.21), *то функція* f, *визначена рівністю* (4.19), *належить простору* $H^p(\mathbb{C}_+)$.

Це твердження встановлене в [19], с.81-82, [92], с.25, див. також [24], с. 189-190.

Лема 4.8. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, $G(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}_+$, *і виконується умова 1), то виконується умова 2).*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt - \int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)| - 2\sigma\log r\right) > -\infty. \tag{4.22}$$

Оскільки, як показано при доведенні леми 4.7,

$$\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt - 2\sigma\log r < c < \infty, \tag{4.23}$$

то умова (4.22) еквівалентна одночасному виконанню умов

$$\varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,dt - 2\sigma\log r\right) > -\infty$$

та

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|\right) < +\infty. \tag{4.24}$$

Врахувавши також (4.23), маємо

$$\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)|\,e^{-\sigma|t|}dt = O(1),\ r\to+\infty,$$

з чого (див. лему 4.5) випливає

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\log\left|G_1(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|\right|}{1+t^2}dt < +\infty,$$

де G_1 таке ж, як і в доведенні леми 4.7. Аналогічно, врахувавши, що функція $|h|$ є неспадною, з умови (4.24) маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh\,(t)|}{1+t^2} dt < +\infty.$$

Позначимо

$$\varphi(it) := G\,(it)\, e^{\frac{2\sigma}{\pi} it \log(it)}.$$

Тоді, оскільки виконуються умови (4.21), за лемою 4.9 маємо $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$, де

$$f(z) = e^{i\alpha+\beta z} \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{t+iz} \ln|\varphi(it)| dt \right\}$$

$$\times \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{t+iz} dh(t) \right\},$$

$\beta \leq 0$, h – інтегральна гранична функція функції G. Врахувавши, що G не має нулів у $\mathbb{C}_+$, інтегральна гранична функція функції f співпадає з інтегральною граничною функцією функції G, а також рівності

$$Q\,(t,z) = \frac{i}{t+iz} - \frac{it\left(2+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} - \frac{zt^2}{\left(1+t^2\right)^2},$$

і

$$G\,(it)\, e^{\frac{2\sigma}{\pi} it \log(it)} = G\,(it)\, e^{-\sigma|t|}$$

при $t \in \mathbb{R}$, за лемою 4.6 одержимо зображення (інтеграли збігаються принаймні в розумінні головного значення)

$$G\,(z)\, e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z} = f(z) e^{ia_0 + a_1 z}$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{it\left(2+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}-\frac{zt^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right)\log\left|G\left(it\right)e^{-\sigma|t|}\right|dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{it\left(2+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}-\frac{zt^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right)dh\left(t\right)\right\}=f(z)e^{i\widetilde{a}_0+\widetilde{a}_1z}$$

для деяких сталих $\widetilde{a}_0\in\mathbb{R}$, $\widetilde{a}_1\in\mathbb{R}$. Тому приходимо до висновку, що $G\left(z\right)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z-cz\right\}\in H^p\left(\mathbb{C}_+\right)$ для деякої сталої $c\in\mathbb{R}$, тобто умова 1) не виконується. Ця суперечність доводить твердження леми. □

Лема 4.9. *Якщо $G\in H^p_\sigma\left(\mathbb{C}_+\right)$, $1\le p<+\infty$, $\sigma>0$, $G\left(z\right)\neq 0$, $z\in\mathbb{C}_+$, і виконується умова 2), то виконується умова 3).*

Доведення. Оскільки $G(it)e^{-\sigma|t|}\in L^p(\mathbb{R})$, то

$$\varphi_1(r):=\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log^+\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|dt$$

$$\leqslant\frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\frac{1}{t^2}|G(it)e^{-\sigma|t|}|^p dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|^p dt<c_1<+\infty.$$

Функція

$$\varphi_2(r):=\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log^+\frac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|}dt$$

$$+\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|,$$

очевидно, є неспадною. Оскільки

$$\log |G(it)e^{-\sigma|t|}| = \log^+ |G(it)e^{-\sigma|t|}| - \log^+ \frac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|},$$

то якби функція φ_2 була обмеженою зверху, то справедливою була б нерівність

$$\underline{\lim}_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log |G(it)e^{-\sigma|t|}| dt - \right.$$

$$\left. \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)| \right) > -\infty,$$

що суперечить умові. Отже,

$$\overline{\lim}_{r\to+\infty} \varphi_2(r) = \lim_{r\to+\infty} \varphi_2(r) = +\infty.$$

Тому

$$\overline{\lim}_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log |G(it)e^{-\sigma|t|}| dt \right.$$

$$\left. - \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)| \right) =$$

$$= \overline{\lim}_{r\to+\infty} (\varphi_1(r) - \varphi_2(r)) \leqslant \overline{\lim}_{r\to+\infty} (c_1 - \varphi_2(r)) = -\infty,$$

а, отже, виконується умова 3) □

4.2.3 Загальний випадок

Теорема 4.6. *Нехай $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < +\infty$, $\sigma > 0$. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1) $$(\forall\, c \in \mathbb{R}) : G\,(z) \exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z - cz\right\} \notin H^p\,(\mathbb{C}_+);$$

2) $$\varliminf_{r\to+\infty} \left(K(r) - \frac{\sigma}{\pi}\log r\right) = -\infty,$$

де

$$K(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log|G\,(it)|\, dt$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh\,(t)| - \sum_{1<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right) \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|};$$

3) $$\lim_{r\to+\infty} \left(K(r) - \frac{\sigma}{\pi}\log r\right) = -\infty;$$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} = +\infty$ *або* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}{}^{*} \left(\frac{\log|G\,(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x\right) = +\infty,$

де границя $\lim^*$ *розглядається поза деякою множиною* E *скінченної логарифмічної міри;*

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} = +\infty,$ *або* $\displaystyle\varlimsup_{x\to+\infty}{}^{*} \left(\frac{\log|G\,(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x\right) = +\infty,$

де верхня границя $\overline{\lim}^*$ *розглядається поза деякою множиною* E *скінченної логарифмічної міри.*

Зауважимо, що твердження теореми справджується і для випадку $\sigma = 0$ у тому сенсі, що кожна з умов 1) - 5) описує порожню множину.

Твердження теореми випливає з лем 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, якщо врахувати, що імплікація 4) $\Rightarrow$ 5) є тривіальною.

Лема 4.10. *Якщо $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, і умова 3) виконується, то виконується також умова 4).*

Доведення. Зауважимо, що функція

$$K_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh\,(t)| + \sum_{1<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right) \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}$$

є неспадною на $(1;+\infty)$. Тому можливі два випадки:

$$(\exists c > 0) : K_1(r) \le c, \tag{4.25}$$

і

$$\lim_{r\to+\infty} K_1(r) = +\infty. \tag{4.26}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли виконується (4.25). Зауважимо, що

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log|G\,(it)|\,dt - 2\sigma\log r$$

$$= \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{p}\log\left|G\,(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p + \sigma\,|t|\right) dt - 2\sigma\log r$$

$$\le \frac{1}{p} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log^+\left|G\,(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p dt + \int\limits_{1<|t|\le r} \frac{\sigma}{|t|} dt - 2\sigma\log r \le$$

$$\le \frac{1}{p} \int\limits_{1<|t|\le r} \frac{1}{t^2}\left|G\,(it)\,e^{-\sigma|t|}\right|^p dt \le c_1 < \infty,$$

де за сталу можна взяти

$$c_1 = \frac{\|G\,(it)\,e^{-\sigma|t|}\|_p^p}{p}.$$

Припустимо, що

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G\,(it)|\,dt-2\sigma\log r\right)>-\infty.$$

Тоді на деякій послідовності (r_k) додатних чисел, таких що $r_k\to+\infty$ при $k\to\infty$, маємо

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r_k}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r_k^2}\right)\log|G\,(it)|\,dt-2\sigma\log r_k\right)>-\infty.$$

Врахувавши нерівність (4.25), одержимо оцінку

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,(K(r)-\sigma/\pi\log r_k)>-\infty,$$

що суперечить умові 3). Тому припущення невірне, тобто

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G\,(it)|\,dt-\frac{\sigma}{\pi}\log r\right)=-\infty. \tag{4.27}$$

За теоремою 1.3 правильне зображення $G\,(z)=G_1\,(z)\,G_2\,(z)\,G_3\,(z)$, де

$$G_1\,(z)=e^{ia_0+a_1z}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q\,(t,z)\log|G\,(it)|\,dt\right\},$$

$$G_2\,(z)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q\,(t,z)\,dh\,(t)\right\},$$

$$G_3(z)=\prod_{|\lambda_n|\le1}\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\prod_{|\lambda_n|>1}\frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n}\exp\left(\frac{z}{\lambda_n}+\frac{z}{\overline{\lambda}_n}\right).$$

При доведенні леми 4.3 показано, що при виконанні умови (4.27) правильна рівність

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log|G_1(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\log x\right)=+\infty. \tag{4.28}$$

Покажемо також, що

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{\log|G_2(x)|}{x}>-\infty. \tag{4.29}$$

Справді,

$$\frac{\log|G_2(x)|}{x}=\frac{\log\left|\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t,z)\,dh(t)\right\}\right|}{x}.$$

Але оскільки

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi}Q(t,x)\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{(tx+i)^2}{\pi i\left(t^2+1\right)^2(t+ix)}\right\}$$

$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{t^2x^2+2txi-1}{\pi\left(t^2+1\right)^2(ti-x)}\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{t^2x^2+2txi-1}{\pi\left(t^2+1\right)^2(-x+it)}\cdot\frac{-x-it}{-x-it}\right\}$$

$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{-t^2x^3+x+2t^2x}{\pi\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)}+i\frac{t-t^3x^2-2x^2t}{\pi\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)}\right\}=$$

$$\frac{-t^2x^3+x+2t^2x}{\pi\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)},$$

то

$$\frac{\log|G_2(x)|}{x}=\frac{\log\left|\exp\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^3+x+2t^2x}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh(t)\right\}\right|}{x}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2+1+2t^2}{\pi\left(t^2+1\right)^2(x^2+t^2)}dh(t)=$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{-t^2x^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{\pi\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right).$$

З властивостей інтеграла Стілтьєса відомо, що коли s є неспадною, f є невід'ємною на інтервалі $[a, b]$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f\left(t\right) ds\left(t\right) \geq 0.$$

Тому

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{-t^2x^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) \geq 0.$$

Вважатимемо, що $x \geq 1$. Тоді

$$\frac{\log\left|G_2\left(x\right)\right|}{x} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{\left(t^2+1\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right).$$

Але $\frac{1+2t^2}{\left(1+t^2\right)^2} \leq \frac{2+2t^2}{\left(1+t^2\right)^2} = \frac{2}{1+t^2}$, тому

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{\left(1+t^2\right)^2\left(x^2+t^2\right)}dh\left(t\right) \geq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dh\left(t\right)}{\left(1+t^2\right)^2} \geq \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dh\left(t\right)}{1+\left|t\right|^3},$$

бо $\left(1+t^2\right)^2 \geq 1+\left|t\right|^3$. Б. Винницький та В. Шаран показали в [155], с.44, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|dh\left(t\right)\right|}{1+\left|t\right|^3} < +\infty.$$

Тому

$$\frac{\log|G_2(x)|}{x} \geq c > -\infty$$

при $x \geq 1$. Отже, нерівність (4.29) виконується.

З нерівності (4.25) випливає також, що

$$\sum_{1<|\lambda_n|} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right) \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|} < +\infty,$$

з чого маємо

$$\sum_{1<|\lambda_n|} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2} < +\infty.$$

З теореми 1.3 випливає, що

$$\sum_{|\lambda_n|<1} \operatorname{Re}\lambda_n < +\infty.$$

Тому

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < +\infty.$$

В [29], с.48, [46], с. 308 доведено, що тоді

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log|G_3(x)|}{x} = 0 \tag{4.30}$$

за умови, що x прямує до $+\infty$, не приймаючи значень з деякої множини скінченної логарифмічної міри на півосі. Врахувавши останню рівність, умови (4.28) та (4.29), одержимо

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log|G_1(x)\,G_2(x)\,G_3(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x\right) = +\infty,$$

тобто виконання умови 4).

Нехай тепер виконується умова (4.26). Тоді справджується принаймні одна з рівностей

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)| = +\infty, \tag{4.31}$$

$$\lim_{r\to+\infty}\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}=+\infty. \tag{4.32}$$

Якщо виконується (4.31), але не виконується (4.32), то, як показано при доведенні леми 4.6,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log|G_1(x)\,G_2(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\log x\right)=+\infty.$$

Врахувавши також (4.30), маємо виконання другої з умов 4).

Якщо ж виконується (4.32), то

$$\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|},$$

звідки випливає, що

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2}=+\infty.$$

Отже, і в цьому випадку справджується умова 4). $\square$

Лема 4.11. *Якщо $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1\le p<+\infty$, $\sigma>0$, і виконується умова 5) теореми, то виконується умова 1).*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто

$$(\exists c\in\mathbb{R}):G\,(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z-cz\right\}\in H^p\,(\mathbb{C}_+)\,.$$

Покажемо, що не виконується жодна з умов 5). Справді в [116] с.139 доведено, що

$$\left|G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z\right\}\right|\leqslant\frac{e^{cx}}{\sqrt[p]{x}}.$$

Тому $\log|G(x)|+\frac{2\sigma}{\pi}x\log x\leqslant cx$, якщо $x\ge1$, що суперечить першій умові 5). Далі, з припущення на початку доведення отримуємо, що послідовність нулів (μ_n) функції $G\,(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z-cz\right\}$

задовільняє умову (див. [24, с. 189], [116, с. 149])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \mu_n}{1 + |\mu_n|^2} < +\infty.$$

Проте $(\mu_n) \equiv (\lambda_n)$ що призводить до суперечності з першою з умов 5). $\square$

Лема 4.12. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, *і виконується умова 1), то виконується умова 2).*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто

$$\varliminf_{r\to+\infty} \left(K(r) - \frac{\sigma}{\pi} \log r \right) > -\infty. \tag{4.33}$$

Оскільки, як показано у доведенні леми 4.11,

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \log |G(it)| \, dt - 2\sigma \log r < c < \infty, \tag{4.34}$$

то умова (4.33) еквівалентна одночасному виконанню умов

$$\varliminf_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \log |G(it)| \, dt - 2\sigma \log r \right) > -\infty$$

та

$$\varlimsup_{r\to+\infty} K_1(r) < +\infty. \tag{4.35}$$

Врахувавши також (4.34), маємо

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \log \left| G(it)\, e^{-\sigma|t|} \right| dt = O(1), \ r \to +\infty,$$

звідки (див. лему 4.5) випливає

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\log \left| G_1(it)\, e^{-\sigma|t|} \right|\right|}{1+t^2} dt < +\infty,$$

де G_1 таке ж, як і в доведенні леми 4.11. Оскільки обидва доданки, що визначають функцію K_1, є невід'ємними неспадними функціями, то умова (4.35) еквівалентна одночасному виконанню умов

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh\,(t)|<+\infty,$$

$$\lim_{r\to+\infty}\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}<+\infty.$$

Врахувавши, що функція h є незростаючою, з останнього маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|dh\,(t)|}{1+t^2}dt<+\infty.$$

Оскільки $G\in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, то за лемою 4.10 $\sum\limits_{|\lambda_n|\le 1}\operatorname{Re}\lambda_n<\infty$. Тому також

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2}<+\infty.$$

Розглянемо функцію

$$f(z)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{t+iz}\log|\varphi(it)|dt\right\}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{i}{t+iz}dh(t)\right\}$$

$$\times\prod_{|\lambda_n|\le 1}\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\prod_{|\lambda_n|>1}\frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n},$$

де

$$\varphi(it):=G\,(it)\,e^{\frac{2\sigma}{\pi}it\log(it)},$$

h – інтегральна гранична функція функції G, а (λ_n) – послідовність нулів функції G. Оскільки виконуються умови

$$f \in L^p(i\mathbb{R}),\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|f(it)||}{1+t^2}dt < +\infty,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh(t)|}{1+t^2}dt < +\infty,\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < +\infty,$$

за теоремою 1.2 маємо $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$. Врахувавши рівність

$$G(it)\, e^{\frac{2\sigma}{\pi} it \log(it)} = G(it)\, e^{-\sigma|t|}$$

при $t \in \mathbb{R}$, за лемою 4.10 одержимо зображення

$$G(z)\, e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z} = f(z) e^{ia_0 + a_1 z}$$

$$\times \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{it\left(2+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} - \frac{zt^2}{\left(1+t^2\right)^2} \right) \log\left| G(it)\, e^{-\sigma|t|} \right| dt \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{it\left(2+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} - \frac{zt^2}{\left(1+t^2\right)^2} \right) dh(t) \right\} = f(z) e^{i\widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 z}$$

для деяких сталих $\widetilde{a}_0 \in \mathbb{R}$, $\widetilde{a}_1 \in \mathbb{R}$. Інтеграли у вищенаведеному зображенні збігаються принаймні у розумінні головного значення. Справді, інтеграли в лемі 4.10 збігаються абсолютно. Інтеграли в зображенні функції f є інтегралами типу Коші і тому збігаються у розумінні головного значення. Тому обґрунтовувана збіжність є наслідком рівності

$$Q(t,z) = \frac{i}{t+iz} - \frac{it\left(2+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2} - \frac{zt^2}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

Отже, $G(z) \exp\left\{ \frac{2\sigma}{\pi} z \log z - c_2 z \right\} \in H^p(\mathbb{C}_+)$ для деякої сталої $c_2 \in \mathbb{R}$, тобто умова 1) не виконується. Ця суперечність доводить твердження леми. $\square$

Лема 4.13. *Якщо $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$, і виконується умова 2), то виконується умова 3).*

Доведення. Оскільки $G(it)e^{-\sigma|t|} \in L^p(\mathbb{R})$, то

$$\varphi_1(r) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log^+ \left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \frac{1}{2\pi p t^2} |G(it)e^{-\sigma|t|}|^p dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi p} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|^p dt < c < +\infty.$$

Функція

$$\varphi_2(r) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log^+ \frac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|} dt$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)| + \sum_{1<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right) \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|},$$

очевидно, є неспадною. Оскільки

$$\log |G(it)e^{-\sigma|t|}| = \log^+ |G(it)e^{-\sigma|t|}| - \log^+ \frac{1}{\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|},$$

то якби функція φ_2 була обмеженою зверху, то виконувалась би нерівність

$$\varliminf_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log |G(it)e^{-\sigma|t|}| dt - \right.$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)|$$

$$-\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}\Bigg) > -\infty,$$

що суперечить умові. Отже, $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\varphi_2(r) = \lim\limits_{r\to+\infty}\varphi_2(r) = +\infty$. Тому

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\Bigg(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt$$

$$-\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)| - \sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}\Bigg)$$

$$= \overline{\lim_{r\to+\infty}}(\varphi_1(r)-\varphi_2(r)) \leqslant \overline{\lim_{r\to+\infty}}(c_3-\varphi_2(r)) = -\infty,$$

а, отже, виконується умова 3). $\square$

4.3 Критерій циклічності у вагових просторах Гарді

4.3.1 Формулювання основного результату

Функцію $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ назвемо ***циклічною*** в $H^2(\mathbb{C}_+)$, якщо система

$$\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}, \tag{4.36}$$

є повною в $H^2(\mathbb{C}_+)$. Задача знаходження всіх циклічних функцій в $H^2(\mathbb{C}_+)$ розглядалася П. Лаксом [118] для випадку півплощини та А. Бьорлінгом [75] для випадку одиничного круга. Сформулюємо це твердження у наступній формі (див. [52], с.284).

Теорема А8 (Бьорлінга-Лакса). *Нехай $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $G \not\equiv 0$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) *G є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$;*

2) *рівняння*

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(u+\tau)g(u)dw = 0, \tau \le 0, g \in L^2(-\infty; 0),$$

де

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} g(u)e^{uz}du,$$

має тільки тривіальний розв'язок в $L^2(-\infty; 0)$;

3) *система $\{g(u-\tau) : \tau \le 0\}$, де $g(u) = 0, u > 0$, є повною в $L^2(-\infty; 0)$;*

4) *G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$,*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln|G(x)|}{x} = 0$$

і інтегральна гранична функція функції G є сталою;

5) *G є зовнішньою для $H^2(\mathbb{C}_+)$.*

Функція G називається зовнішньою для простору $H^p(\mathbb{C}_+)$ якщо вона зображається у вигляді

$$G(z) = e^{i\alpha} \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz+i}{(t+iz)(1+t^2)} \ln|G(it)|dt \right\},$$

$\alpha \in \mathbb{R}, G \in L^p(\partial\mathbb{C}_+)$.

Нам невідомий повний опис циклічних функцій у жодному ваговому просторі Гарді. Правда, для випадку, коли ваговою є аналітична функція з деякими природними обмеженнями, відповідне узагальнення є досить простим. Справді, позначимо через $H^p_\omega(\mathbb{C}_+)$ простір аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких

$$||f||_\omega = \sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p |\omega(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де ω є аналітичною в $\overline{\mathbb{C}}_+$ функцією, що не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$.

Досить просто одержати наступне твердження про аналог циклічності у вагових просторах Гарді з аналітичною вагою.

Теорема 4.7. *Система* (4.36) *є повною в $H^p_\omega(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли функція $G(z)/\omega(z)$ є циклічною в $H^p(\mathbb{C}_+)$.*

Ми одержимо цю теорему як наслідок загальнішого твердження - теореми 4.11.

Для формулювання основного результату розглянемо деякі простори. Позначимо $D_{\alpha,\beta} = \{z : |\mathrm{Re} z| < 0, \alpha < \mathrm{Im} z < \beta\}$, $D^*_{\alpha,\beta} = \mathbb{C} \backslash \overline{D}_{\alpha,\beta}, \quad \alpha < \beta$. Нехай $E^p[D_{\alpha,\beta}]$ і $E^p_*[D_{\alpha,\beta}], 1 \le p <$

$+\infty$, позначимо простори функцій f, аналітичних відповідно в $D_{\alpha,\beta}$ і $D^*_{\alpha,\beta}$, для яких

$$\sup\left\{\int\limits_{\gamma}|f(z)|^p|dz|\right\}^{1/p}<+\infty,$$

де супремум розглядається над всіма відрізками γ, що лежать відповідно в $D_{\alpha,\beta}$ і $D^*_{\alpha,\beta}$, які є паралельними одній зі сторін $\partial D_{\alpha,\beta}$. Функції f, що належать цим просторам, мають [10] майже скрізь на ∂D_σ кутові граничні значення, які позначаємо також через $f(z)$ і $f\in L^p[\partial D_\sigma]$. Позначатимемо $D_\sigma=D_{-\sigma,\sigma}$, $D^*_\sigma=D^*_{-\sigma,\sigma}$, $E^p[D_\sigma]=E^p[D_{-\sigma,\sigma}]$ і $E^p_*[D_\sigma]=E^p_*[D_{-\sigma,\sigma}]$.

Між просторами $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і $E^2_*[D_\sigma]$ існує бієкція [10] що задається кожною з формул

$$G(z)=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\partial D_\sigma}g(w)e^{zw}dw \tag{4.37}$$

і

$$g(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}G(x)e^{-xw}dx,\qquad \mathrm{Re}w>0. \tag{4.38}$$

Функцію $G\in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ назвемо ***циклічною*** у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, якщо система (4.36) є повною у цьому просторі.

Функція $G\in H^p(\mathbb{C}_+)$ має (див. [99], [11]) інтегральну граничну функцію h, яка може бути визначена з точністю до адитивної сталої в точках неперервності рівністю

$$h(t_2)-h(t_1)=\lim_{x\to0+}\int\limits_{t_1}^{t_2}\ln|G(x+iy)|dy-\int\limits_{t_1}^{t_2}\ln|G(iy)|dy.$$

Функція h є неспадною і $h'(t)=0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$.

Основним результатом цього розділу є наступне твердження.

Теорема 4.8. *Нехай $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0, G \not\equiv 0$. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*
1) *G є циклічною у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;*
2) *рівняння*

$$\int\limits_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)dw = 0, \tau \leq 0, g \in E^2_*[D_\sigma], \tag{4.39}$$

де g визначена рівністю (4.38), має тільки тривіальний розв'язок $f \equiv 0$ в $E^2[D_\sigma]$;
3) *система $\{g(w-\tau) : \tau \leq 0\}$ є повною в $E^2_*[D_\sigma]$;*
4) *G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$, гранична функція h функції G є сталою і виконується одна з наступних еквівалентних умов:*

а) $\underline{\lim}_{r\to+\infty} \left(K_G(r) - \dfrac{\sigma}{\pi}\ln r\right) = -\infty,$

б) $\lim_{r\to+\infty} \left(K_G(r) - \dfrac{\sigma}{\pi}\ln r\right) = -\infty;$

в) $G(z)\exp\left(\dfrac{2\sigma}{\pi}z\ln z - cz\right) \notin H^p(\mathbb{C}_+)$ *для кожного* $c \in \mathbb{R}$;

г) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln|G(x)|}{x} + \dfrac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) = +\infty;$

д) $\overline{\lim}_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln|G(x)|}{x} + \dfrac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) = +\infty,$

де

$$K_G(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)|dt. \tag{4.40}$$

Теорема Бьорлінга-Лакса не є частинним випадком попередньої теореми, бо для випадку $\sigma = 0$ ця теорема не є справедливою. Зокрема, не існує жодної функції $G \not\equiv 0$, для якої б виконувались умови а)-д) при $\sigma = 0$.

Еквівалентність умов 1), 2) та 3) показана в [10], [14]. Тому для доведення теореми досить показати, що 4) $\Leftrightarrow$ 1).

4.3.2 Доведення частини 1) $\Rightarrow$ 4) теореми 4.8

Лема 4.14. *Якщо* $0 < \sigma < +\infty$, $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і* $c \in \mathbb{R}$ *є такими, що* $G_1(z) = G(z)e^{-cz} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, *то рівняння (4.39) і*

$$\int\limits_{\partial D\sigma} f(w+\tau)g_1(w)dw = 0, \tau \leqslant 0, g_1(w) \in E^2_*[D_\sigma], \tag{4.41}$$

де g *визначаєтьcя рівністю (4.38), а* g_1 *– рівністю*

$$g_1(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G_1(x)e^{-xw}dx, \quad \operatorname{Re} w > 0, \tag{4.42}$$

одночасно мають чи не мають ненульові розв'язки в просторі $E^2[D_\sigma]$.

Лема 4.15. *Якщо* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$ *і* $f \not\equiv 0$, *то*

$$f(z) = e^{ia_0 + a_1 z} \cdot \Pi^*_f(z) \cdot S^*_f(z) \cdot \exp\left\{ \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z) \log|f(it)| dt \right\}, \tag{4.43}$$

де a_0, a_1 *є дійсними сталими,*

$$\begin{gathered} \Pi^*_f(z) = \prod_{|\lambda_n| \le 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \overline{\lambda}_n} \prod_{|\lambda_n| > 1} \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\overline{\lambda}_n} \exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\overline{\lambda}_n}\right), \\ S^*_f(z) = \exp\left\{ \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z) dh(t) \right\}, \end{gathered} \tag{4.44}$$

(λ_n) є послідовністю нулів в $\mathbb{C}_+$ функції f,

$$Q(t,z)=\frac{(tz+i)^2}{(1+t^2)^2(t+iz)},$$

і виконуються умови

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1} Re\lambda_n<\infty, \log|f(iy)|\in L^1(-1;1), f(iy)e^{-\sigma|y|}\in L^p(\mathbb{R}), \tag{4.45}$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(S_f(r)+\Xi_f(r)-K_f(r)\right)<+\infty, \tag{4.46}$$

де

$$S_f(r)=\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{Re\lambda_n}{|\lambda_n|},$$

$$\Xi_f(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|,$$

$$K_f(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|f(it)|dt,$$

причому всі добутки та інтеграли в (4.43) *збігаються абсолютно і рівномірно на кожному компакті з $\mathbb{C}_+$.*

Леми 4.14, 4.15 доведені в [11].

Доведення частини 1) $\Rightarrow$ 4) *теореми 4.8.* Справді, якщо функція G є циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, то рівняння (4.39) має тільки тривіальний розв'язок. Крім того, оскільки $G\in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, за лемою 4.15 для неї виконується зображення (4.43). Але в [14] показано, що коли $G\in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ є циклічною, то G не може мати жодного нуля в $\mathbb{C}_+$. А з [177] одержимо, що і інтегральна гранична функція функції G є сталою. Тому маємо зображення

$$G(z)=e^{ia_0+a_1z}\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t,z)\log|G(it)|dt\right\}. \tag{4.47}$$

Покажемо, що виконується умова а). Доведення її проведемо від супротивного. Нехай

$$\varliminf_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right) \ln |G(it)e^{-\sigma|t|}|dt > -\infty. \tag{4.48}$$

Оскільки

$$\ln^+ |G(it)e^{-\sigma|t|}| \leqslant \frac{|G(it)e^{-\sigma|t|}|^2}{2}$$

і $G(it)e^{-\sigma|t|} \in L^2(\mathbb{R})$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |G(it)e^{-\sigma|t|}|}{1+t^2} < +\infty, \tag{4.49}$$

з чого випливає нерівність

$$\varlimsup_{r\ \to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right) \ln^+ |G(it)e^{-\sigma|t|}|dt < +\infty.$$

З останньої нерівності та (4.48) одержимо

$$\varlimsup_{r\ \to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right) \ln^+ \left|\frac{1}{G(it)e^{-\sigma|t|}}\right| dt < +\infty.$$

Але оскільки $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, то з (4.45) маємо $\ln|G(it)| \in L^1[-1;1]$ і тому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}}{1+t^2} dt = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}}{1+t^2} dt$$

$$+ \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \frac{\ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|}}{1+t^2} dt \leqslant$$

$$\leqslant c + \frac{4}{3} \varlimsup_{2r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leqslant 2r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right) \ln^+ \frac{1}{|G(it)e^{-\sigma|t|}|} dt < +\infty.$$

З останньої нерівності та (4.49) одержимо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\ln\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|\right|}{1+t^2}dt < +\infty. \tag{4.50}$$

Оскільки для G виконується зображення (4.47), то

$$G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z\right\}$$

$$= e^{i\widehat{a}_0+\widehat{a}_1 z}\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\log|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt\right\}.$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{i}Q(t,z) = \frac{i}{t+iz} - \frac{it(2+t^2)}{(1+t^2)^2} - \frac{zt^2}{(1+t^2)^2}, \tag{4.51}$$

і

$$\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{it}{1+t^2} - \frac{it(2+t^2)}{(1+t^2)^2}\right)\log|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt\right\}$$

$$= \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-it}{(1+t^2)^2}\log|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt\right\} = e^{ic_1},$$

$$\exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-zt^2}{(1+t^2)^2}\log|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt\right\} = e^{c_2 z}.$$

Врахувавши також, що за лемою 4.15 $G(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^2(\mathbb{R})$ і нерівність (4.50), на основі теореми 1.2 одержимо, що

$$\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{i}{t+iz} - \frac{it}{1+t^2}\right)\log|G(it)e^{-\sigma|t|}|dt\right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i + tz}{(t + iz)(1 + t^2)} \log |G(it)e^{-\sigma|t|} dt \right\} \in H^2(\mathbb{C}_+),$$

з чого випливає

$$(\exists c > 0) : G(z)e^{-cz} \exp \left\{ \frac{2\sigma}{\pi} z \ln z \right\} \in H^2(\mathbb{C}_+).$$

Тоді рівняння (4.41) має ненульовий розв'язок. Але з леми 4.14 випливає, що і рівняння (4.39) має ненульовий розв'язок, що суперечить припущенню.

Отже, виконується умова а). А за теоремою 4.4 вона еквівалентна умовам б)-д). □

4.3.3 Доведення частини 4) ⇒ 1) теореми 4.8

Наведемо спочатку деякі допоміжні означення та твердження.

Через $T^2_\sigma(\mathbb{C}_-)$ позначимо множину впорядкованих трійок $F = (F_1, F_2, F_3)$, де $F_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, $F_3(z)e^{i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, а F_2 є цілою функцією експоненціального типу $\leq \sigma$, причому $F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) \equiv 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_- := \{z : \text{Re} z < 0\}$.

Лема 4.16. *Рівності*

$$F_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_j} f(w)e^{-zw} dw, \quad f \in E^2[D_\sigma], \quad j \in \{1, 2, 3\}, \tag{4.52}$$

задають біекцію між просторами $T^2_\sigma(\mathbb{C}_-)$ і $E^2[D_\sigma]$, де l_1, l_3 та l_2 є сторонами ∂D_σ (відповідно променів, що лежать під і над дійсною віссю, та відрізка $[-i\sigma; i\sigma]$), орієнтація яких співпадає з додатньою орієнтацією ∂D_σ.

Лема 4.17. *Якщо* $f \in E^2[D_\sigma]$, $g \in E^2_*[D_\sigma]$, *то*

$$(\forall \tau \leqslant 0): \int\limits_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)dw = i\int\limits_0^{+\infty} \Phi_1(iy)e^{i\tau y}dy -$$

$$-i\int\limits_{-\infty}^{0} \Phi_3(iy)e^{i\tau y}dy + \int\limits_0^{+\infty} \Phi_2(x)e^{\tau x}dx,$$

де

$$\Phi_j = F_j G, \quad j = \overline{1,3}, \tag{4.53}$$

G *визначена рівністю (4.37), а* F_j *– рівностями (4.52).*

Лема 4.18. *Нехай* $g \in E^2_*[D_\sigma]$ *і* $G(x)\ln(2+x) \in L^2(0;+\infty)$ *для функції* G *визначеної рівністю (4.37). Тоді функція* $f \in E^2[D_\sigma]$ *є розв'язком рівняння (4.39) тоді і тільки тоді, коли виконується кожна з умов:*
1) значення функції Φ_1*, визначеної рівністю (4.53) співпадають майже скрізь на* $\partial\mathbb{C}_+$ *з кутовими граничними значеннями такої функції* P_1*, що* $P_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$*;*
2) значення функції Φ_3 *співпадають майже скрізь на* $\partial\mathbb{C}_+$ *з кутовими граничними значеннями такої функції* P_3*, що* $P_3(z)e^{i\sigma z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Лема 4.19. *Нехай* (λ_n) *є послідовністю чисел з* $\mathbb{C}_+$*, для яких виконується перша умова (4.45) і*

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(S_f(r) - \frac{\sigma}{\pi}\ln r\right) < +\infty. \tag{4.54}$$

Тоді функція Π^*_f *є аналітичною в* $\mathbb{C}_+$ *і*

$$\left|\Pi^*_f(z)\right| \le \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}x\ln r + c_4 x\right), z = x+iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+. \tag{4.55}$$

Лема 4.20. *Нехай h є незростаючою на $\mathbb{R}$ функцією і $h'(t) = 0$ для майже всіх $t \in \mathbb{R}$. Тоді якщо*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \Big(P_f(r) - \frac{\sigma}{\pi} \ln r \Big) < +\infty, \tag{4.56}$$

то функція S_f^* є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і

$$\big|S_f^*(z)\big| \le \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} x \ln r + c_5 x \right), z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+. \tag{4.57}$$

Лема 4.16 міститься в [176], лема 4.17 – в [14], лема 4.18 – в [11], лема 4.19 – в [10], а лема 4.20 – в [155].

Переформулюємо також теорему типу Мандельбройта 4.2 у потрібній нам формі.

Лема 4.21. *Нехай $\widetilde{F}_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\widetilde{F}_3(z)e^{i\sigma z} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$,*

$$\Big(\widetilde{F}_1(x) + \widetilde{F}_3(x)\Big) e^{\frac{2\sigma}{\pi} x \log x} \in L^2(0; +\infty),$$

і

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log|\widetilde{F}_j(x)|}{x} = -\infty, \quad j \in \{1; 3\}. \tag{4.58}$$

Тоді існує така стала $c \in \mathbb{R}$, що

$$\begin{aligned} &\widetilde{F}_1(z)e^{-i\sigma z} e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+), \\ &\widetilde{F}_3(z)e^{i\sigma z} e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+), \end{aligned} \tag{4.59}$$

де $\log z$ є стандарткою віткою логарифма в $\mathbb{C}_+$.

Лема 4.22. *Нехай функція G, визначена рівністю (4.37), не має нулів в $\mathbb{C}_+$ і її інтегральна гранична функція є сталою та існує нетривіальний розв'язок рівняння (4.39). Тоді існує таке $(F_1, F_2, F_3) \in T^2_\sigma(\mathbb{C}_-)$, що функції Φ_1 та Φ_3, визначені рівностями (4.53), є кутовими граничними функціями на $\partial\mathbb{C}_+$ таких функцій P_1 та P_3, що $P_1(z)e^{-i\sigma z}e^{-cz} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і*

$P_3(z)e^{i\sigma z}e^{-cz} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для деякого $c \in \mathbb{R}$ та, крім того, функції F_1 та F_3 аналітично продовжуються до цілих функцій і

$$\begin{aligned} F_1(z)e^{-i\sigma z} \exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z - c_7 z\right\} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \\ F_3(z)e^{i\sigma z} \exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z - c_8 z\right\} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+). \end{aligned} \tag{4.60}$$

Доведення. Якщо рівняння (4.39) має нетривіальний розв'язок, то можемо вважати, що $G(x)\ln(2+x) \in L^2(0;+\infty)$ (інакше за лемою 4.14 можемо розглянути функцію $G(z)e^{-c_9 z}, c_9 > 0$). Тоді за лемою 4.18 функції Φ_1 та Φ_3, визначені рівністю (4.53), є кутовими граничними функціями на $\partial\mathbb{C}_+$ таких функцій P_1 та P_3, що $P_1(z)e^{-i\sigma z}e^{-c_{10}z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $P_3(z)e^{i\sigma z}e^{-c_{10}z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Нехай

$$\Psi_j(z) = \begin{cases} F_j(z), z \in \mathbb{C}_-, \\ \dfrac{P_j(z)}{G(z)}, z \in \mathbb{C}_+, \end{cases} j \in \{1;3\}.$$

За умовою розглядуваної леми $G(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$ і інтегральна гранична функція функції G є сталою. Застосувавши лему 4.15 до функцій Ψ_1 та Ψ_3, одержимо

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) = e^{i\sigma z}e^{ia_0 + a_1 z}\Pi^*_{P_1}(z)S^*_{P_1}(z) \\ \times \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\ln\left|\Phi_1(it)e^{\sigma t}/G(it)\right| dt\right\}, z \in \mathbb{C}_+. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Але кутові граничні значення на $\partial\mathbb{C}_+$ функції Ψ_1 з $\mathbb{C}_+$ та $\mathbb{C}_-$ співпадають майже скрізь і $F_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$. Тому $\Phi_1(it)e^{\sigma t}/G(it) = F_1(it)e^{\sigma t} \in L^2(-\infty;+\infty)$ і за теоремою 1.2

маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln|F_1(it)e^{\sigma t}||}{1+t^2} dt < +\infty. \tag{4.62}$$

Врахувавши рівність (4.51) і викладки після неї, за теоремою 1.2, для деякої сталої $c_{11} \in \mathbb{R}$ отримаємо

$$\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\ln\left|\Phi_1(it)e^{\sigma t}/G(it)\right| dt - c_{11}z\right\} \in H^2(\mathbb{C}_+). \tag{4.63}$$

З умови (4.46) також отримаємо

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\,(S_{P_1}(r) + P_{P_1}(r) - K_{P_1}(r)) < +\infty.$$

Легко бачити, що $K_{P_1}(r) = K_{P_1(z)e^{-i\sigma z}}(r) = K_{\Psi_1(z)e^{-i\sigma z}}(r) + K_G(r)$. Скориставшись позначенням $\ln^+ t = \max\{\ln t; 0\}$ одержимо з допомогою (4.62)

$$K_{\Psi_1(z)e^{-i\sigma z}}(r) \geq \frac{-1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leq r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln^+\frac{1}{|\Psi_1(it)e^{\sigma t}|}dt$$

$$\geq \frac{-1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leq r}\frac{1}{t^2}\ln^+\frac{1}{|\Psi_1(it)e^{\sigma t}|}dt \geq \frac{-1}{\pi}\int\limits_{1<|t|\leq r}\frac{|\ln|\Psi_1(it)e^{\sigma t}||}{t^2+1}dt > -\infty.$$

І оскільки

$$K_G(r) \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leq r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln^+|G(it)|dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leq r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln^+\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right| dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leq r}\frac{1}{t^2}\sigma|t|dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leq r}\frac{1}{t^2}\left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|^2 dt + \frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leq r}\frac{1}{|t|}dt \leq c_{12} + \frac{\sigma}{\pi}\ln r,$$

то
$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\left(S_{P_1}(r)+P_{P_1}(r)-\frac{\sigma}{\pi}\ln r\right)<+\infty.$$
Оскільки G є аналітичною в $\mathbb{C}_+$, то не має там полюсів, тому множини нулів функцій Ψ_1 та P_1 співпадають. Очевидно, $S_{\Psi_1}(r)=S_{P_1}(r)$, $P_{\Psi_1}(r)=P_{P_1}(r)$, а функції S_{Ψ_1} та P_{Ψ_1} є невід'ємними. Тоді виконується перша умова (4.45), умови (4.54) та (4.56) для функції Ψ_1. Тому з лем 4.19 та 4.20 одержимо оцінки (4.55) та (4.57). З формул (4.55), (4.57) та (4.63) випливає, що функція Ψ_1 належить до просторів Смірнова $E^2\subset E^1$ в $\triangle_c(0;1)$ для кожного $c\in\mathbb{R}$, де $\triangle_c(a;b)=\{z: a<\mathrm{Re}z<b, c<\mathrm{Im}z<c+1\}$. Оскільки $\Psi_1(z)e^{-i\sigma z}\in H^2(\mathbb{C}_-)$, то ця функція належить також до класу $E^2\subset E^1$ в $\triangle_c(-1;0)$ для кожного $c\in\mathbb{R}$. Тому [53], с. 208 для $z\in\triangle_c(-1;0)\cup\triangle_c(0;1)$ виконується зображення
$$\Psi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\triangle_c(-1;0)}\frac{\Psi_1(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\triangle_c(0;1)}\frac{\Psi_1(t)}{t-z}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\triangle_c(-1;1)}\frac{\Psi_1(t)}{t-z}dt.$$
Оскільки $\Psi_1\in L^2[\partial\triangle_c(-1;1)]$, то [53], с. 202, функція Ψ_1 є аналітичною в $\triangle_c(-1;1)$ для кожного $c\in\mathbb{R}$. За лемами 4.19 та 4.20 функції $\Pi^*_{\Psi_1}$ та $S^*_{\Psi_1}$ є аналітичними в $\mathbb{C}_+$. Тому маємо, що Ψ_1 є цілою функцією, зокрема аналітичною в $\overline{\mathbb{C}}_+$. Але тоді інтегральна гранична функція функції Ψ_1 є сталою і тому $S^*_{\Psi_1}(z)\equiv 1$, $P_{\Psi_1}(r)\equiv 0$. Врахувавши це в (4.61), з огляду на (4.55) та (4.63) одержимо першу з формул (4.60), а друга доводиться аналогічно. $\square$

Лема 4.23. *Якщо* $(F_1,F_2,F_3)\in T^2_\sigma(\mathbb{C}_-)$, $\sigma>0$, *функції* F_1, F_3

є цілими і

$$(\exists c_{13} \in \mathbb{R}) : F_1(z)e^{-i\sigma z}e^{-c_{13}z} \in H^2(\mathbb{C}_+),$$

$$(\exists c_{14} \in \mathbb{R}) : F_3(z)e^{i\sigma z}e^{-c_{14}z} \in H^2(\mathbb{C}_+),$$

то $(F_1, F_2, F_3) \equiv (0, 0, 0)$.

Доведення. З умов леми випливає, що F_1 та F_3 є цілими функціями експоненціального типу. Нехай

$$d_j = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln|F_1(x)|}{x}, j \in \{1; 3\}.$$

Тоді за теоремою 1.2 $F_1(z)e^{-i\sigma z}e^{-d_1 z} \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $F_3(z)e^{i\sigma z}e^{-d_3 z} \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Якщо $d_1 \le 0$, $d_3 \le 0$, то $F_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_+)$ і тому є обмеженою в $\mathbb{C}$, з чого випливає за теоремою Ліувілля, що $F_1 \equiv 0$, аналогічно можна показати, що $F_3 \equiv 0$. Оскільки $F_2 = -F_1 - F_3$, то і $F_2 \equiv 0$. Тому $(F_1, F_2, F_3) \equiv (0, 0, 0.)$ Якщо $d_1 > 0$ чи $d_3 > 0$, (див. [14], с. 47-49) то функції F_1 та F_3 є функціями цілком регулярного зростання. Їх індикатори для $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ мають вигляд

$$h_{F_1}(\theta) = d_1 \cos\theta - \sigma \sin\theta,$$

$$h_{F_3}(\theta) = d_3 \cos\theta + \sigma \sin\theta,$$

$$h_{F_2}(\theta) \le \sigma|\sin\theta|.$$

Якщо $d_1 \ne d_3$ (приймемо для визначеності, що $d_1 > d_3$), то $h_{F_1}(0) = d_1$, $h_{F_2}(0) + h_{F_3}(0) = d_3 < h_{F_1}(0)$. Якщо ж $d_1 = d_3$, то

$$h_{F_3}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (d_3 + \sigma)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$h_{F_1}\left(\frac{\pi}{4}\right) + h_{F_2}\left(\frac{\pi}{4}\right) \le d_1\frac{\sqrt{2}}{2} = d_3\frac{\sqrt{2}}{2} < h_{F_3}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Ця суперечність завершує доведення леми. □

Доведення частини 4) $\Rightarrow$ 1) *теореми 4.8.* Внаслідок еквівалентності 4) $\Leftrightarrow$ 2) для доведення імплікації 4) $\Rightarrow$ 1) досить показати відсутність нетривіальних розв'язків рівняння (4.39) у випадку, коли функція $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ не має нулів в $\mathbb{C}_+$, її інтегральна гранична функція є сталою і виконуються умови а)–д). Проте за теоремою 4.4 умови а)–д) є еквівалентними. Нехай виконується умова б). Припустимо від супротивного, що ненульовий розв'язок $f \in E^2[D_\sigma]$ рівняння (4.39) існує. Тоді за лемою 4.22 існує $(F_1, F_2, F_3) \in T^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, для якої значення функцій Φ_1 та Φ_3, визначені рівністю (4.53), співпадають майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ з кутовими граничними значеннями таких функцій P_1 та P_3, що $P_1(z)e^{-i\sigma z}e^{-c_{15}z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $P_3(z)e^{i\sigma z}e^{-c_{16}z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Нехай

$$\widetilde{F}_j(z) = F_j(z)\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z\right)e^{-c_{17}z}, j \in \{1;2;3\},$$

де $c_{17} = \max\{c_{15}, c_{16}, 0\}$. Тоді з формул (4.60) та визначення простору $T^2_\sigma(\mathbb{C}_-)$ одержимо $\widetilde{F}_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\widetilde{F}_3(z)e^{i\sigma z} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\widetilde{F}_2(x)\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z\right) \in L^2(0;+\infty)$, а також $\widetilde{F}_1(z)+\widetilde{F}_2(z)+\widetilde{F}_3(z) \equiv 0, z \in \mathbb{C}_+$. За теоремою 4.4 виконується також умова г). Врахувавши нерівність (див. [12])

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln|P_j(x)|}{x} < +\infty, j \in \{1;3\},$$

одержимо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln|\widetilde{F}_j(x)|}{x} = -\infty, \quad j \in \{1;3\},$$

тобто виконуються умови леми 4.21. Тоді

$$\widetilde{F}_1(z)e^{-i\sigma z}e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+), \quad \widetilde{F}_3(z)e^{i\sigma z}e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+),$$

отже за лемою 4.23 отримаємо, що $(F_1, F_2, F_3) \equiv (0,0,0)$. $\square$

4.3.4 Порівняння циклічних функцій у вагових та невагових просторах Гарді

Теорема 4.9. *Якщо функція* $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ *є циклічною в* $H^2(\mathbb{C}_+)$, *то вона циклічна в* $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *для кожного* $\sigma > 0$.

Доведення. Оскільки G – циклічна в $H^2(\mathbb{C}_+)$, то за теоремою Бьорлінга-Лакса вона є зовнішньою в цьому просторі. Тому G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$, інтегральна гранична функція функції G є сталою і

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\ln|G(x)|}{x} = 0. \tag{4.64}$$

Очевидно, $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для всіх $\sigma > 0$. За теоремою 4.8 нам залишилось показати, що

$$\liminf_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)|\, dt - \frac{\sigma}{\pi} \ln r \right) = -\infty.$$

для всіх $\sigma > 0$. Цю рівність ми одержимо як наслідок нерівності

$$\liminf_{r\to\infty} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)|\, dt < +\infty.$$

Справді,

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)|\, dt \le \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^+|G(it)| dt \le$$

$$\le \int\limits_{1<|t|\le r} \frac{1}{t^2} \ln^+|G(it)| dt < c < +\infty,$$

де $\ln^+ t = \max\{0; \ln t\}$ і стала c не залежить від r. Очевидно,

$$\frac{1}{t^2} \le \frac{2}{t^2+1},$$

$t \geq 1$, і залишилось зауважити, що

$$\int\limits_{1<|t|\leq r} \frac{\ln^+ |G(it)|}{1+t^2} dt < c_1 < +\infty,$$

де стала c_1 не залежить від r. Але це випливає (див. теорему 1.2) з того, що $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$. □

Обернене твердження невірне, як показує приклад функції $G(z) = e^{-z}/(z+1)$.

Теорема 4.10. *Якщо $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ – циклічна в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для деякого $\sigma > 0$ і виконується умова (4.64), то G є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$.*

Доведення. Оскільки G є циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, за теоремою 4.8 маємо, що G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$ і інтегральна гранична функція функції G є сталою. Тому з умов цієї теореми за теоремою Бьорлінга-Лакса одержимо, що G – циклічна в $H^2(\mathbb{C}_+)$. □

Наслідок 4.1. *Якщо $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ і виконується умова (4.64), то G є циклічною або не циклічною одночасно в просторах $H^2(\mathbb{C}_+)$ і $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для всіх $\sigma > 0$.*

Теорему 4.8 можна дещо узагальнити, застосувавши додатково до простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ аналітичну вагу. Позначимо через $H^p_{\sigma,\psi}(\mathbb{C}_+)$ простір аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких

$$||f||_\psi = \sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p |e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} \psi(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де ψ є аналітичною в $\overline{\mathbb{C}}_+$ функцією, що не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$ і $|\psi(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}_+$.

Функцію $G \in H^p_{\sigma,\psi}(\mathbb{C}_+)$ назвемо циклічною в $H^p_{\sigma,\psi}(\mathbb{C}_+)$, якщо система (4.36) є повною в $H^p_{\sigma,\psi}(\mathbb{C}_+)$ за нормою цього простору.

Теорема 4.11. *Функція $G \in H^p_{\sigma,\psi}(\mathbb{C}_+)$, $p \geq 1$, $\sigma \geq 0$, є циклічною в $H^p_{\sigma,\psi}(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли функція $G\psi$ є циклічною в $H^p_{\sigma}(\mathbb{C}_+)$.*

Доведення. Нехай функція $G \in H^p_{\sigma,\psi}(\mathbb{C}_+)$ є циклічною в просторі $H^p_{\sigma,\psi}(\mathbb{C}_+)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ і для довільної функції $f \in H^p_{\sigma,\psi}(\mathbb{C}_+)$ знайдеться скінченна лінійна комбінація

$$\Lambda(z) = G(z) \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_k e^{\tau_k z}$$

функції системи (4.36), така що

$$\|f - \Lambda\|_\psi < \varepsilon, \tag{4.65}$$

де коефіцієнти θ_k, τ_k для кожного $\varepsilon > 0$ можуть відрізнятися. Нерівність (4.65) означає, що

$$\sup_{|\varphi|<\pi/2} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) - G(re^{i\varphi}) \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_k e^{\tau_k r e^{i\varphi}} \right|^p \right.$$
$$\left. \times e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} \left|\psi(re^{i\varphi})\right|^p dr \right\} < \varepsilon,$$

тому

$$\sup_{|\varphi|<\pi/2} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi})\psi(re^{i\varphi}) - G(re^{i\varphi}) \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_k e^{\tau_k r e^{i\varphi}} \psi(re^{i\varphi}) \right|^p \right.$$
$$\left. \times e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\} < \varepsilon,$$

Позначимо $G_1 = G \cdot \psi$ і $f_1 = f \cdot \psi$, тоді

$$\sup_{|\varphi|<\pi/2} \left\{ \left| f_1(re^{i\varphi}) - G_1(re^{i\varphi}) \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_k \tau_k r e^{i\varphi} \right|^p \cdot e^{-p\,\sigma\, r\,|\sin\varphi|} dr \right\} < \varepsilon.$$

Функція f_1 може бути довільною функцією з простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, якщо функція f є довільною з $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, тобто лінійна комбінація

$$\Lambda_1(z) = G_1(z)\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_k e^{\tau_k z}$$

наближає кожну функцію $f_1 \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ з довільною наперед заданою точністю ε за нормою цього простору. Тому функція $G_1 = G\cdot\psi$ є циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Нехай тепер навпаки $G\cdot\psi$ є циклічною в просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ і для довільної функції $\widetilde{f} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ знайдеться скінченна лінійна комбінація γ функцій системи (4.36), така що

$$\left\|\widetilde{f} - \gamma\right\| < \varepsilon, \tag{4.66}$$

де

$$\gamma(z) = G(z)\cdot\psi(z)\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_k e^{\tau_k z}.$$

Нерівність (4.66) означає, що

$$\sup_{|\varphi|<\pi/2}\left\{\left|\widetilde{f}(re^{i\varphi}) - G(re^{i\varphi})\psi(re^{i\varphi})\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_k e^{\tau_k re^{i\varphi}}\right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}dr\right\} < \varepsilon,$$

з чого випливає

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}}\left\{\left|\frac{\widetilde{f}(re^{i\varphi})}{\psi(re^{i\varphi})} - G(re^{i\varphi})\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_k e^{\tau_k re^{i\varphi}}\right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}|\psi(re^{i\varphi})|^p dr\right\} < \varepsilon,$$

Позначимо $\widetilde{f}/\psi$ через f^*. Тоді

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}}\left\{\left|f^*(re^{i\varphi}) - G(re^{i\varphi})\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_k e^{\tau_k re^{i\varphi}}\right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}|\psi(re^{i\varphi})|^p dr\right\} < \varepsilon,$$

Функція $\widetilde{f}/\psi = f^*$ може бути довільною функцією з простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, якщо функція $\widetilde{f}$ є довільною з $H^p_{\sigma,\psi}(\mathbb{C}_+)$, тобто лінійна комбінація

$$\gamma_1(z) = G(z) \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_k e^{\tau_k z}$$

наближає кожну функцію $\widetilde{f} \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ з довільною наперед заданою точністю ε за нормою цього простору. Отже, функція G є циклічною в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. $\square$

4.4 Внутрішні функції та трансляційно інваріантні підпростори у ваговому просторі Гарді

Відомим є наступне факторизаційне твердження для просторів Гарді [116].

Лема 4.24. *Для кожної функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, справедливе зображення*

$$f(z) = e^{ia_0 + a_1 z} \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz+i}{(1+t^2)(t+iz)} \ln|f(it)|dt\right\} \cdot B_f(z) \cdot S_f^*(z), \tag{4.67}$$

де

$$a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_1 = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln|f(x)|}{x} \le 0, \tag{4.68}$$

B_f – добуток Бляшке для півплощини, побудований за послідовністю нулів функції f,

$$S_f^*(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz+i}{(1+t^2)(t+iz)} dh(t)\right\},$$

причому для кутових граничних значень f на $i\mathbb{R}$, її інтегральної граничної функції h та послідовності нулів (λ_n) виконуються відповідно умови

$$\begin{gathered} f \in L^p(i\mathbb{R}), \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|f(it)||}{1+t^2} dt < +\infty, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh(t)|}{1+t^2} dt < +\infty, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < +\infty. \end{gathered} \tag{4.69}$$

Навпаки, якщо для функції $f : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *неспадної функції* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *похідна якої рівна нулеві майже скрізь, послідовності* (λ_n), $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, *виконуються умови* (4.68)-(4.69), *то функція* f, *визначена рівністю* (4.67), *належить простору* $H^p(\mathbb{C}_+)$.

Функцію $I_f(z) := e^{a_1 z} B_f(z) S_f^*(z)$ називають внутрішнім множником функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ у просторі $H^p(\mathbb{C}_+)$.

Через $\mathrm{span}_H\{G_\tau\}$ позначатимемо замикання лінійної оболонки системи G_τ в банаховому просторі H.

П. Лакс, модифікуючи результати А. Бьорлінга, встановив, що функція $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли I_G є константою. Множення функції на $e^{\tau z}$ можна також розглядати як оператор $T_\lambda G = G(z)e^{\tau z}$. Підпростори, інваріантні відносно оператора T_λ, називають трансляційно інваріантними. П. Лакс одержав [118] наступний опис трансляційно інваріантних підпросторів.

Теорема 4.12 (Теорема Бьорлінга-Лакса 2)**.** *Нехай* $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$. *Тоді*

$$\mathit{span}_{H^2(\mathbb{C}_+)}\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\} = I_G \cdot H^2(\mathbb{C}_+).$$

Інакше кажучи, $\mathrm{span}_{H^2(\mathbb{C}_+)}\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ містить ті і тільки ті функції $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$, для послідовності нулів яких послідовність нулів функції G є підпослідовністю, $h_f - h_G$ є незростаючою і

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln|f(x)|}{x} \le \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln|G(x)|}{x}.$$

Ми одержали наступний опис трансляційно інваріантних підпросторів у $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Він є узагальненням Теореми Бьорлінга-Лакса 2.

Теорема 4.13. *Нехай* $\sigma > 0$ *і*

$$G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+),$$

для деякого $c \in \mathbb{R}$. *Тоді* $span_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)}\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ *співпадає з множиною всіх таких функцій виду*

$$Q(z) = \varkappa(z)e^{-\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{\widetilde{c}z}, \qquad (4.70)$$

що $\varkappa \in H^2(\mathbb{C}_+)$, *причому послідовність нулів функції* G *є підпослідовністю послідовності нулів функції* $\varkappa$, $h_\varkappa - h_G$ *є незростаючою і*

$$\widetilde{c} = \overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right). \qquad (4.71)$$

При доведенні використовуватимемо наступне твердження, одержане в [14].

Лема 4.25. *В просторі* $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *стандартна норма еквівалентна (і рівна) нормі*

$$||f||^*_{H^p_\sigma} := \max_{\varphi\in\left\{-\frac{\pi}{2};0;\frac{\pi}{2}\right\}}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|}dr\right\}^{1/p}.$$

Через $\|\cdot\|_{H^2}$ та $\|\cdot\|_{H^2_\sigma}$ позначатимемо норму у просторах $H^2(\mathbb{C}_+)$ та $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ відповідно.

Доведення теореми 4.13. За умовами теореми $G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+)$, тому $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Нехай $Q \in \operatorname{span}_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)}\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$. Покажемо тоді, що Q подається у вигляді (4.70). Справді, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться скінченна лінійна комбінація η функцій системи $\{e^{\tau z} : \tau \le 0\}$, що

$$\|G(z)\eta(z) - Q(z)\|_{H^2_\sigma} < \varepsilon. \qquad (4.72)$$

Покладемо $\varepsilon = 1/n$, а відповідну цьому ε лінійну комбінацію через η_n. Тоді

$$\|G\eta_n - G\eta_m\|_{H^2_\sigma} \le \|G\eta_n - Q\|_{H^2_\sigma} + \|G\eta_m - Q\|_{H^2_\sigma} \le 2\varepsilon,\ m \le n,$$

тобто послідовність $(G\eta_n)$ є фундаментальною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Але за лемою 4.25

$$\|G(z)\eta_n(z) - G(z)\eta_m(z)\|^2_{H^2_\sigma}$$

$$\geq \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(iy)\eta_n(iy) - G(iy)\eta_m(iy)|^2 e^{-2\sigma|y|}dy.$$

Оскільки $\left|e^{\frac{2\sigma}{\pi}iy\ln(iy)}\right| = e^{-\sigma|y|}$, то

$$\|G(z)\eta_n(z) - G(z)\eta_m(z)\|^2_{H^2_\sigma}$$

$$\geq \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|G(iy)e^{\frac{2\sigma}{\pi}iy\ln(iy)}\eta_n(iy) - G(iy)e^{\frac{2\sigma}{\pi}iy\ln(iy)}\eta_m(iy)\right|^2 dy.$$

Позначимо $\varkappa_1(z) = G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z}$. За умовою $\varkappa_1(z)e^{(\widetilde{c}-c)z} \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Проте з рівності (4.71) маємо

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln|\varkappa_1(x)|}{x} = 0,$$

тому за теоремою 4.24 $\varkappa_1 \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Оскільки функція $|I_{\varkappa_1}|$ рівна одиниці майже скрізь на уявній осі, то

$$\|G(z)\eta_n(z) - G(z)\eta_m(z)\|^2_{H^2_\sigma}$$

$$\geq \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varkappa_1(iy)\eta_n(iy) - \varkappa_1(iy)\eta_m(iy)|^2\, dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varkappa_1(iy)/I_{\varkappa_1}(iy)\eta_n(iy) - \varkappa_1(iy)/I_{\varkappa_1}(iy)\eta_m(iy)|^2\, dy$$

$$= \frac{1}{4}\|\varkappa_1/I_{\varkappa_1}\eta_n - \varkappa_1/I_{\varkappa_1}\eta_m\|_{H^2}.$$

Отже, послідовність $(\varkappa_1/I_{\varkappa_1}\eta_n)$ є фундаментальною у просторі $H^2(\mathbb{C}_+)$. Оскільки $H^2(\mathbb{C}_+)$ – повний, то існує границя цієї послідовності, яку позначимо через $\varkappa_2$ і $\varkappa_2 \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Тоді

$$\|Q(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z}/I_{\varkappa_1}(z)-\varkappa_2(z)\|_{H^2}$$
$$\leq \|Q(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z}/I_{\varkappa_1}(z)-G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}/I_{\varkappa_1}(z)\eta_n(z)e^{-\widetilde{c}z}\|_{H^2}$$
$$+\|G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}/I_{\varkappa_1}(z)\eta_n(z)e^{-\widetilde{c}z}-\varkappa_2(z)\|_{H^2}.$$

Проте

$$\|Q(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z}/I_{\varkappa_1}(z)-G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}/I_{\varkappa_1}(z)\eta_n(z)e^{-\widetilde{c}z}\|_{H^2(\mathbb{C}_+)}$$
$$=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big|Q(iy)e^{-\sigma|y|}e^{-\widetilde{c}iy}/I_{\varkappa_1}(iy)\right.$$
$$\left.-G(iy)e^{-\sigma|y|}e^{-\widetilde{c}iy}/I_{\varkappa_1}(iy)\eta_n(iy)\Big|^2dy\right)^{1/2}$$
$$=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|Q(iy)-G(iy)\eta_n(iy)|^2e^{-2\sigma|y|}dy\right)^{1/2}\leq\|Q-G\eta_n\|_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)}<\varepsilon,$$

а

$$\|G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}/I_{\varkappa_1}(z)\eta_n(z)e^{-\widetilde{c}z}-\varkappa_2(z)\|_{H^2}=$$
$$\|\varkappa_1(z)\eta_n(z)/I_{\varkappa_1}(z)-\varkappa_2(z)\|_{H^2}<\varepsilon_1.$$

Тому

$$\|Q(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z}/I_{\varkappa_1}(z)-\varkappa_2(z)\|_{H^2}$$

можна зробити меншою як завгодно малого числа $\varepsilon+\varepsilon_1$. Але функція $Q(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z}/I_{\varkappa_1}(z)-\varkappa_2(z)$ від ε, ε_1 не залежить, отже

$$\left\|Q(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z}/I_{\varkappa_1}(z)-\varkappa_2(z)\right\|_{H^2}=0,$$

тобто
$$\varkappa_2(z) = Q(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z}/I_{\varkappa_1}(z),$$
тому $Q(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}/I_{\varkappa_1}(z)e^{-\widetilde{c}z} \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Позначивши $\varkappa(z) = Q(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z}$, маємо, що $\varkappa/I_{\varkappa_1} \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Тому послідовність нулів функції $\varkappa_1$ (вона співпадає з послідовністю нулів функції G) є підпослідовністю послідовності нулів функції $\varkappa$, $h_\varkappa - h_G = h_\varkappa - h_{\varkappa_1} = h_{\varkappa/I_{\varkappa_1}}$ є незростаючою. З цього маємо, що $\varkappa \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Отже, для Q виконуються умови теореми.

Нехай тепер $\varkappa$ – довільна функція з простору $H^2(\mathbb{C}_+)$, для послідовності нулів якої послідовність нулів функції G є підпослідовністю, $h_\varkappa - h_G$ є незростаючою і
$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln\varkappa(x)}{x} \le \widetilde{c}.$$
Як показано вище, якщо $G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+)$, для деякого $c \in \mathbb{R}$, то і $G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z} \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Тому за теоремою Берлінга-Лакса 2 для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться скінченна лінійна комбінація η функцій системи $\{e^{\tau z} : \tau \le 0\}$, що
$$\|G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z}\eta(z) - \varkappa(z)\|_{H^2} < \varepsilon.$$
Але за лемою 4.25
$$\|G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z}\eta(z) - \varkappa(z)\|^2_{H^2}$$
$$= \max_{\varphi\in\left\{-\frac{\pi}{2};0;\frac{\pi}{2}\right\}}\left\{\int_0^{+\infty}\left|G(re^{i\varphi})e^{\frac{2\sigma}{\pi}re^{i\varphi}\ln\left(re^{i\varphi}\right)}e^{-\widetilde{c}re^{i\varphi}}\eta(re^{i\varphi})\right.\right.$$
$$\left.\left.-\varkappa(re^{i\varphi})\right|^2 e^{-pr\sigma|\sin\varphi|}dr\right\}$$
$$= \max\left\{\int_0^{+\infty}\left|G(iy)e^{-\sigma|y|}e^{-\widetilde{c}iy}\eta(iy) - \varkappa(iy)\right|^2 dy;\right.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \left|G(iy)e^{-\sigma|y|}e^{-\widetilde{c}iy}\eta(iy) - \varkappa(iy)\right|^2 dy;$$
$$\left.\int\limits_{0}^{+\infty} \left|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{-\widetilde{c}x}\eta(x) - \varkappa(x)\right|^2 dx\right\}.$$

Використавши рівність (4.70), одержимо

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \left|G(iy)e^{-\sigma|y|}e^{-\widetilde{c}iy}\eta(iy) - \varkappa(iy)\right|^2 dy$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \left|G(iy)\eta(iy) - \varkappa(iy)e^{\sigma|y|}e^{\widetilde{c}iy}\right|^2 e^{-2\sigma|y|}dy$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} |G(iy)\eta(iy) - Q(iy)|^2 e^{-2\sigma|y|}dy,$$

аналогічно

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \left|G(iy)e^{-\sigma|y|}e^{-\widetilde{c}iy}\eta(iy) - \varkappa(iy)\right|^2 dy$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} |G(iy)\eta(iy) - Q(iy)|^2 e^{-2\sigma|y|}dy.$$

Також справедливою є оцінка

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \left|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{-\widetilde{c}x}\eta(x) - \varkappa(x)\right|^2 dx$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \left|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{-\widetilde{c}x}\eta(x) - Q(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{-\widetilde{c}x}\right|^2 dx$$

$$\geq \int_0^{+\infty} |G(x)\eta(x) - Q(x)|^2\, dx \cdot e^{\min\left\{\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x - \widetilde{c}x : x \geqslant 0\right\}}$$

$$= \int_0^{+\infty} |G(x)\eta(x) - Q(x)|^2\, dx \cdot \exp\left\{-\frac{4\sigma}{\pi} e^{\frac{\widetilde{c}\pi}{2\sigma} - 1}\right\}.$$

Отже, за лемою 4.25 маємо

$$\min\left\{\exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi} e^{\frac{\widetilde{c}\pi}{2\sigma} - 1}\right\}; 1\right\} \|G\eta - Q\|_{H^2_\sigma} < \varepsilon,$$

тому виконується (4.72). Внаслідок довільності ε маємо, що $Q \in \operatorname{span}_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \{G(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\}$. □

Зауважимо, що коли теорему розглядати тільки для функцій $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, то твердження залишається вірним і у випадку $\sigma = 0$ (тоді $\widetilde{c} \leq 0$) і в цьому випадку співпадає з теоремою Бьорлінга-Лакса (умова "$G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geq 0$, для деякого $c \in \mathbb{R}$" є наслідком умови $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ при $\sigma = 0$). Тобто, справедливим є наступне твердження.

Теорема 4.14. *Нехай $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geq 0$, для деякого $c \in \mathbb{R}$. Тоді $span_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \{G(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\}$ співпадає з множиною всіх функцій виду (4.70), де $\varkappa \in H^2(\mathbb{C}_+)$, причому послідовність нулів функції G є підпослідовністю послідовності нулів функції $\varkappa$, $h_\varkappa - h_G$ є незростаючою і $\widetilde{c}$ визначена рівністю 4.71.*

Теорему 4.13 також можна сформулювати наступним чином.

Теорема 4.15. *Нехай $\sigma > 0$, $\mu(z) = e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \log z} e^{-cz}$ і функція $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ є такою, що*

$$\chi(z) := G(z)\mu(z) \in H^2(\mathbb{C}_+)$$

для деякого $c \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$span_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}) = \frac{1}{\mu} I_\chi H^2(\mathbb{C}_+).$$

Наслідок 4.2. *Якщо виконуються умови теореми 4.13, то*

$$span_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\} = H^2(\mathbb{C}_+)\widetilde{I}_G(z)e^{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{\widetilde{c}z},$$

де $\widetilde{I}_G$ *– внутрішній множник у просторі* $H^2(\mathbb{C}_+)$ *функції*

$$G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-\widetilde{c}z}.$$

Позначимо $I^*_G(z) = \widetilde{I}_G(z)e^{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z}$.

Наслідок 4.3. *Якщо виконуються умови теореми 4.14, то*

$$span_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\} = H^2(\mathbb{C}_+)I^*_G(z).$$

З огляду на наслідок 4.3 природним є називати функцію I^*_G внутрішнім множником функції G у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, якщо виконуються умови теореми 4.14.

Наслідок 4.4. *Якщо* $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $G(z) \ne 0$ *для кожного* $z \in \mathbb{C}_+$ *і* h_G *є сталою, то*

$$span_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$$

$$= \begin{cases} H^2(\mathbb{C}_+)I^*_G(z), & \text{якщо } G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+) \text{ для } c \in \mathbb{R}, \\ H^2_\sigma(\mathbb{C}_+) & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Останній наслідок випливає з наслідку 4.3 та теореми 4.8. Він показує, що у просторах $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, на відміну від невагового випадку, трансляційно інваріантні підпростори можуть бути двох типів.

4.5 Циклічність у ваговому просторі Гарді в крузі

В теоремі 4.8 отримано повний опис циклічних функцій для вагового простору Гарді у півплощині. Однак для застосувань, особливо в функціональному аналізі, зручніше працювати з просторами Гарді в крузі. У цьому підрозділі ми отримуємо аналог вказаного твердження для випадку одиничного круга.

Нехай $\widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D})$, $1 < p < +\infty$, $\sigma \geq 0$, – простір таких аналітичних в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функцій, що

$$\|f\| := \sup_{b\in\mathbb{R}} \left\{ \int\limits_{\partial U\left(ib;\sqrt{1+b^2}\right)\cap\mathbb{D}} |f(w)|^p \left\{ e^{-p\sigma\frac{2|Imw|}{1-2Rew+|w|^2}} \right\} |dw| \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty \tag{4.73}$$

Як випливає з теореми А. Сєдлєцкого [58], для випадку $\sigma = 0$ цей простір співпадає зі звичайним простором Гарді в крузі.

Означення 4.1. *Функція $G \in \widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D})$ називається циклічною в $\widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D})$, якщо система*

$$\{G(z)z^n : n \in \mathbb{N}\} \tag{4.74}$$

в цьому просторі є повною.

Очевидно, для випадку $\sigma = 0$ це означення циклічності співпадає [130] з означенням А. Бьорлінга циклічності у просторі $H^p(\mathbb{D})$. Нами одержано наступний опис циклічних функцій в $\widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D})$.

Теорема 4.16. *Нехай $G_1 \in \widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. *функція $G_1 \in \widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ є циклічною в $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$;*

2. *функція* G_1 *не має жодного нуля в* $\mathbb{D}$, *для кожного* $y > 0$ *виконується рівність*

$$\lim_{s\to 0+} \int\limits_{\Gamma_{y,s}} \ln|G_1(w)|dw = \int\limits_{\Gamma_y} \ln|G_1(w)|dw \tag{4.75}$$

де

$$\Gamma_{y,s} = \{w \in \partial U(s; 1-s) : 2\operatorname{arctg}(y(1-s)) < \arg(w-s) < 2\pi - 2\operatorname{arctg}(y(1-s))\},$$

$$\Gamma_y = \{|w| = 1 : 2\operatorname{arctg} y < \arg w < 2\pi - 2\operatorname{arctg} y\}$$

і справедлива одна з наступних умов:

а$_1$) $\lim\limits_{u\to 1-} \left((1-u)\ln|G_1(u)| - \frac{4\sigma}{\pi}\ln|1-u|\right) = +\infty$;

б$_1$) $\overline{\lim\limits_{u\to 1-}} \left((1-u)\ln|G_1(u)| - \frac{4\sigma}{\pi}\ln|1-u|\right) = +\infty$;

в$_1$) $\lim\limits_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{2\operatorname{arcctg} r<|\beta|<\pi/2} \left(\frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}} - \frac{1}{r^2\sin^2\frac{\beta}{2}}\right)\ln\left|G_1\left(e^{i\beta}\right)\right| d\beta \right.$
$\left. -4\sigma\log r\right) = -\infty$;

г$_1$) $\underline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \left(\int\limits_{2\operatorname{arcctg} r<|\beta|<\pi/2} \left(\frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}} - \frac{1}{r^2\sin^2\frac{\beta}{2}}\right)\ln\left|G_1\left(e^{i\beta}\right)\right| d\beta \right.$
$\left. -4\sigma\log r\right) = -\infty$;

д$_1$) $G_1(w)\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}\frac{1+w}{1-w}\ln\frac{1+w}{1-w} - c\frac{1+w}{1-w}\right) \notin H^p(\mathbb{C}_+)$ *для кожного* $c \in \mathbb{R}$.

Для доведення цієї теореми нам знадобляться деякі допоміжні твердження.

Лема 4.26. *Функція* f *належить простору* $\widehat{H}^p_\sigma(\mathbb{D})$, $\sigma \geq 0$, $1 \leq p < +\infty$, *тоді і тільки тоді, коли* $f_3 \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, *де*

$$f_3(z) = f\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \cdot (z+1)^{2/p}.$$

Доведення. Нехай $f \in H_\sigma^p(\mathbb{D})$. Тоді за означенням виконується нерівність (4.73). Зробимо у її лівій частині під знаком інтеграла заміну

$$w = \frac{re^{i\varphi} - 1}{re^{i\varphi} + 1}.$$

Тоді якщо $w = u + iv$, отримаємо

$$\begin{cases} u = \frac{r^2-1}{r^2+2r\cos\varphi_0+1} \\ v = \frac{2r\sin\varphi_0}{r^2+2r\cos\varphi_0+1} \end{cases}$$

і

$$|w|^2 = u^2 + v^2 = \frac{r^4 + 2r^2 + 1 + 4r^2\sin^2\varphi}{(r^2 + 2r\cos\varphi + 1)^2},$$

$$|dw| = \frac{2}{r^2 + 2r\cos\varphi + 1}.$$

Підставивши значення $|w|^2$ у (4.73), врахувавши, що

$$\frac{2\,|Imw|}{1 - 2Rew + |w|^2} =$$

$$= \frac{2\frac{2r|\sin\varphi|}{r^2+2r\cos\varphi+1}}{1 - \frac{2r^2-2}{r^2+2r\cos\varphi+1} + \frac{r^4-2r^2+1+4r^2\sin^2\varphi}{\left(r^2+2r\cos\varphi+1\right)^2}}$$

$$= \frac{4r\sin\varphi\left(r^2 + 2r\cos\varphi + 1\right)}{4\,(r^2 + 2r\cos\varphi + 1)} = r|\sin\varphi|,$$

і позначивши $\gamma_b = \partial U\left(ib; \sqrt{1+b^2}\right) \cap \mathbb{D}$, одержимо

$$\int\limits_{\gamma_b} |f_3\,(w)|^p\, e^{-p\sigma\frac{2|Imw|}{1-2Rew+|w|^2}}|dw|$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left|f\left(\frac{re^{i\varphi}-1}{re^{i\varphi}+1}\right)(re^{i\varphi}+1)^{2/p}\right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}\frac{2}{|re^{i\varphi}+1|^2}dr$$

$$= 2 \int_{0}^{+\infty} \left| f\left(\frac{re^{i\varphi}-1}{re^{i\varphi}+1}\right)\right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr < c,$$

де стала c від $\varphi \in (-\pi/2; \pi/2)$ не залежить. Звідси маємо, що $f_3 \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geq 0$, $1 \leq p < +\infty$.

В протилежну сторону теорема доводиться дослівним повторенням вищенаведених міркувань в зворотньому порядку. □

Лема 4.27. *Нехай $G_1 \in \widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$. Тоді система*

$$\left\{ G_1(w)(1-w) e^{\tau \frac{1+w}{1-w}} : \tau \leq 0 \right\} \tag{4.76}$$

є повною в просторі $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ тоді і тільки тоді, коли функція G_1 є циклічною в просторі $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$.

Доведення. Очевидно, за умовами теореми $G_1 \not\equiv 0$. Нехай система (4.76) є повною в $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$. Це означає, що для кожної фіксованої функції $G_1 \in \widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$, для довільних $f \in \widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ і $\varepsilon > 0$ знайдеться скінченна лінійна комбінація

$$\Lambda(z) = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon} G_1(z)(1-z) e^{\tau_{k,\varepsilon} \frac{1+z}{1-z}}$$

така, що $\|f - \Lambda\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})} < \varepsilon$. Т. Срінівасан та Дж. Ванг показали [150], [116], с. 104 справедливість теореми Бьорлінга для довільного $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p \leq \infty$. Функція

$$(1-z) e^{\tau_{k,\varepsilon} \frac{1+z}{1-z}},$$

очевидно, для кожного недодатного $\tau_{k,\varepsilon}$ належить простору $H^\infty(\mathbb{D})$. Тому застосувавши цю теорему при $G \equiv 1 \in H^\infty(\mathbb{D})$,

$p=\infty$, для довільного $\delta>0$ маємо існування скінченної лінійної комбінації степеневих функцій

$$\Lambda_1(z)=\sum_{n=0}^{m_\delta} b_{n,\delta} z^n,$$

що

$$\|(1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}}-\Lambda_1(z)\|_{H^\infty(\mathbb{D})}<\delta.$$

Тому скориставшись нерівністю трикутника, одержимо

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon} G_1(z)\Lambda_1(z)\right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$$

$$+\left\|\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon} G_1(z)(1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}}-\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon} G_1(z)\Lambda_1(z)\right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$$

$$\le \varepsilon+\left\|G_1(z)\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon}\left((1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}}-\Lambda_1(z)\right)\right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$$

$$\le \varepsilon+\left\|G_1(z)\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon}\left\|(1-z)e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}}-\Lambda_1(z)\right\|_{H^\infty(\mathbb{D})}\right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$$

$$\le \varepsilon+\delta\left\|G_1(z)\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} a_{k,\varepsilon}\right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}\le \varepsilon+\delta\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}|a_{k,\varepsilon}|\,\|G_1(z)\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}.$$

Вибравши δ тепер досить малим, одержимо, що довільну функцію $f\in\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ можна з довільною наперед заданою точністю наблизити скінченними лінійними комбінаціями функцій системи (4.74) за нормою цього простору, тобто G_1 є циклічною в $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$.

Нехай тепер G_1 є циклічною в $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$. Тоді для довільних функції $f\in\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ та $\varepsilon>0$ знайдеться така скінченна лінійна комбінація

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} c_{k,\varepsilon} G_1(z) z^k,$$

що $\|f - \mu\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})} < \varepsilon$. Із вищенаведеного результату Т. Срінівасана та Дж. Ванга випливає, що кожну функцію $\theta \in H^\infty(\mathbb{D})$ можна наблизити з довільною наперед заданою точністю за нормою простору $H^\infty(\mathbb{D})$ скінченними лінійними комбінаціями функцій системи (4.76). Тобто поклавши $\theta(z) = z^k$, для довільного $\delta > 0$ знайдеться скінченна лінійна комбінація

$$\mu_1(z) = \sum_{n=0}^{m_\delta} d_{n,\delta}(1-z) e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}},$$

що $\|z^k - \mu_1(z)\|_{H^\infty(\mathbb{D})} < \delta$. Тому за нерівністю трикутника

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} c_{k,\varepsilon} G_1(z)\mu_1(z) \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})} = \left\| f - \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} c_{k,\varepsilon} G_1(z) z^k \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$$

$$+ \left\| \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} c_{k,\varepsilon} G_1(z) z^k - \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} c_{k,\varepsilon} G_1(z) \sum_{n=0}^{m_\delta} d_{n,\delta}(1-z) e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}} \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$$

$$\le \varepsilon + \left\| \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} c_{k,\varepsilon} G_1(z) \left(z^k - \sum_{n=0}^{m_\delta} d_{n,\delta}(1-z) e^{\tau_{k,\varepsilon}\frac{1+z}{1-z}} \right) \right\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})}$$

$$\le \varepsilon + \delta \|G_1\|_{\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})} \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |c_{k,\varepsilon}|.$$

Знову вибравши δ тепер досить малим, одержимо, що довільну функцію $f \in \widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ можна з довільною наперед заданою точністю наблизити скінченними лінійними комбінаціями функцій системи (4.76) за нормою цього простору. $\square$

Доведення теореми 4.16. За лемою 4.27 система (4.76) є повною в $\widehat{H}^2_\sigma(\mathbb{D})$ тоді і тільки тоді, коли функція

$$G(z) = G_1\left(\frac{z-1}{z+1}\right)(z+1)$$

є циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. В цьому випадку, очевидно, кожна з функцій G та G_1 не має нулів у відповідній області.

Умову тривіальності інтегральної граничної функції функції $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ запишемо у вигляді

$$(\forall y > 0): \quad \lim_{x\to 0+}\int\limits_{-y}^{y} \ln|G(x+i\eta)|d\eta = \int\limits_{-y}^{y} \ln|G(i\eta)|d\eta. \quad (4.77)$$

Конформне відображення

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

переводить відрізок $\{z : \operatorname{Re} z = x_0, |\operatorname{Im} z| \le y_0\}$ у дугу кола $\partial U(s; 1-s)$, де

$$s = \frac{x_0}{x_0+1} \in [0; 1),$$

що лежить між точками $s + (1-s)e^{2i\,\mathrm{arctg}(y_0(1-s))}$ та $s + (1-s)e^{2\pi i - 2i\,\mathrm{arctg}(y_0(1-s))}$ і перетинає від'ємну піввісь. Тоді рівність (4.77) набуде вигляду (4.75).

Покажемо, що виконуються умови а)-д) теореми 4.8. Умова а) еквівалентна умові

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G_1\frac{x-1}{x+1}|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) = +\infty.$$

Позначимо

$$\frac{x-1}{x+1} = u,$$

тоді

$$\lim_{u\to 1-}\left(\frac{(1-u)\ln|G_1(u)|}{1+u}-\frac{2\sigma}{\pi}\ln(1-u)\right)=+\infty.$$

Оскільки

$$\lim_{u\to 1-}\left(\frac{(1-u)\ln|G_1(u)|}{1+u}-\frac{(1-u)\ln|G_1(u)|}{2}\right)=0,$$

то звідси отримаємо умову а$_1$). Аналогічно можна показати рівносильність умов б) та б$_1$).

Нехай тепер виконується умова в). Тоді

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln\left|G_1\left(\frac{it-1}{it+1}\right)\right|dt-2\sigma\ln r\right)=-\infty.$$

Зробивши заміну

$$\frac{it-1}{it+1}=e^{i\beta}$$

і врахувавши, що тоді $t=\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, отримаємо в$_1$). Аналогічно можна показати рівносильність умов г) та г$_1$).

Нехай виконується умова д). Тоді

$$G_1\left(\frac{z-1}{z+1}\right)(z+1)\exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z-cz\right)\notin H^p(\mathbb{C}_+).$$

Скориставшись лемою 4.26 та позначивши $w=\frac{z-1}{z+1}$, одержимо виконання д$_1$). $\square$

Нам не відомо, чи умови теореми 4.16 описують також циклічні функції у просторі $H^p_\sigma(\mathbb{D})$, $1<p<+\infty$, $\sigma\ge 0$, аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій, для яких

$$\|f\|=\sup_{\rho\in(0;1)}\left\{\int\limits_{|w|=\rho}|f(w)|^p\,e^{-\frac{2p\sigma|Imw|}{1-2Rew+|w|^2}}|dw|\right\}^{1/p}<+\infty.$$

4.6 Висновки до розділу 4

Цей розділ є центральним у дисертації. Він присвячений дослідженню умов циклічності функцій у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. У перших двох підрозділах встановлено результати, на яких в суттєвому базується критерій циклічності, який одержано в третьому підрозділі. У двох останніх підрозділах отримано опис трансляційно інваріантних підпросторів для функцій, що не є циклічними, а також сформульовано критерій циклічності для випадку вагового простору Гарді в одиничному крузі, що важливо для можливості співставлення з відомими результатами для просторів аналітичних функцій в одиничному крузі. Одержано такі результати:

- встановлено теорему, що є однією з реалізацій для пари функцій принципу невизначеності в гармонічному аналізі: функція та її перетворення Фур'є не можуть бути обидві дуже малими;
- встановлено для функцій із простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \leq p < +\infty$, що не мають нулів і інтегральні граничні функції яких є сталими, еквівалентність швидкого зростання у деякому сенсі по уявній осі та швидкого спадання по уявній осі;
- поширено результати про еквівалентність швидкого зростання по уявній осі та швидкого спадання по уявній осі для функцій із простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \leq p < +\infty$, на випадок, коли функція має нулі в $\mathbb{C}_+$ чи її інтегральна гранична функція є сталою;
- отримано критерій циклічності функцій у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;

- для функцій, які не є циклічними в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, описано трансляційно інваріантні підпростори;
- отриманий критерій циклічності для вагового простору Гарді у півплощині переформульовано для випадку вагового простору Гарді в одиничному крузі.

РОЗДІЛ 5

Інтегральні оператори та рівняння у просторах аналітичних функцій

5.1 Властивості одного інтегрального оператора

Розглянемо оператор

$$Tf(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{uK(x-u)}{(u-x)(u+x)} f(u)du.$$

в просторі $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Властивості цього оператора можуть бути використані при дослідженні задач розділу 4. Нами одержано наступний результат.

Теорема 5.1. *Нехай* $K : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *є непарною,* $\frac{2\pi}{\sigma}$ *– періодичною функцією,* K *зображається на проміжку* $\left[-\frac{\pi}{\sigma}; \frac{\pi}{\sigma}\right]$ *рядом Фур'є за синусами*

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\sigma t, \tag{5.1}$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k| < +\infty.$$

Тоді T *є обмеженим оператором з* $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *в* $L^1(0; +\infty)$ *і*

$$\|T\| \leqslant \frac{\pi\alpha}{2}, \tag{5.2}$$

де

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|. \tag{5.3}$$

Добре відомо, що простір $H^1(\mathbb{C}_+)$ займає "проміжну" позицію між просторами L^1 та $L^p, p > 1$, в теорії інтегральних операторів на просторах аналітичних функцій (див., наприклад, [135]). Також $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0$ є "проміжним простором" у цьому сенсі між L^1 та $H^1(\mathbb{C}_+)$ (див. наслідок нижче) навіть для найпростішого випадку з розглядуваних операторів.

Довести теорему можна, напевно, розвиваючи методи з [145] and [135], але ми це зробимо в інший спосіб. Для цього розглянемо деякі допоміжні результати.

Лема 5.1. *Оператор*

$$T_1 f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u \sin \sigma(x-u)}{(u-x)(u+x)} f(u) du$$

є обмеженим оператором з $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *в* $L^1(0;+\infty)$ *і* $\|T_1\| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Доведення. Нехай $f \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тоді за теоремою 3.4 маємо

$$f(z) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(v-y)e^{-i\sigma(z-iv)} f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv$$
$$+ \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{(v-y)e^{i\sigma(z-iv)} f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv$$
$$- \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(u-iy) f(u) \sin \sigma(z-u)}{(u-z)(u+\overline{z})} du, z = x+iy \in \mathbb{C}_+.$$

Поклавши в останній формулі $y=0$, одержимо зображення

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{u\sin\sigma(x-u)}{(u-x)(u+x)}f(u)du=\frac{i}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{ve^{-i\sigma(x-iv)}f(iv)}{v^2+x^2}dv$$

$$+\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{ve^{i\sigma(x-iv)}f(iv)}{v^2+x^2}dv-\frac{\pi}{2}f(x).$$

Звідси, скориставшись теоремою Фубіні, одержимо

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{u\sin\sigma(x-u)}{(u-x)(u+x)}f(u)du\right|dx$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{ve^{-i\sigma x}e^{-\sigma v}f(iv)}{v^2+x^2}\right|dvdx$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{0}\left|\frac{ve^{i\sigma x}e^{\sigma v}f(iv)}{v^2+x^2}\right|dvdx+\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}|f(x)|dx.$$

Врахувавши тепер що $f(iv)e^{-\sigma v}\in L^1(0;+\infty)$ і $f(iv)e^{\sigma v}\in L^1(-\infty;0)$, одержимо

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{u\sin\sigma(x-u)}{(u-x)(u+x)}f(u)du\right|dx$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}|f(iv)e^{-\sigma v}|\int\limits_0^{+\infty}\frac{v}{v^2+x^2}dxdv$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}|f(iv)e^{\sigma v}|\int\limits_0^{+\infty}\frac{-v}{v^2+x^2}dxdv+\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}|f(x)|dx=$$

$$= \frac{\pi}{4}\int\limits_0^{+\infty}|f(iv)e^{-\sigma v}|dv + \frac{\pi}{4}\int\limits_{-\infty}^{0}|f(iv)e^{\sigma v}|dv$$

$$+\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}|f(x)|dx \leqslant \frac{\pi}{2}\|f\|^*_{H^1_\sigma}.$$

$\square$

Лема 5.2. *Якщо* $f \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, *то*

$$(\exists c > 0)\,(\forall x > 0) : |f(x)| \leqslant c + \frac{c}{x}. \tag{5.4}$$

Доведення. Для доведення використаємо теорему 3.4 при $y = 0$. Оцінимо інтеграли в правій частині (3.15), скориставшись інтегруванням за частинами. Тоді

$$\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{ve^{-i\sigma x}e^{-\sigma v}f(iv)}{v^2+x^2}dv\right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty}\frac{v|f(iv)|e^{-\sigma v}}{v^2+x^2}dv$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\frac{v}{v^2+x^2}d\int\limits_0^{v}|f(is)e^{-\sigma s}|ds = \left(\int\limits_0^{v}|f(is)e^{-\sigma s}|ds\cdot\frac{v}{v^2+x^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$-\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{v}|f(is)e^{-\sigma s}|ds\,d\frac{v}{v^2+x^2} \leqslant$$

$$\leqslant -\int\limits_x^{+\infty}\int\limits_0^{v}|f(is)e^{-\sigma s}|ds\,d\frac{v}{v^2+x^2} \leqslant \frac{1}{2x}\int\limits_0^{+\infty}|f(is)e^{-\sigma s}|ds.$$

Аналогічно отримаємо

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{ve^{i\sigma x}e^{\sigma v}f(iv)}{v^2+x^2}dv\right| \leqslant \frac{1}{2x}\int\limits_{-\infty}^{0}|f(is)e^{\sigma s}|ds.$$

Також

$$\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{uf(u)\sin\sigma(x-u)}{(u-x)(u+x)}du\right|\leqslant\int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2\sigma}}\frac{u|f(u)||\sin\sigma(x-u)|}{|u-x|(u+x)}du$$

$$+\int\limits_{x-\frac{\pi}{2\sigma}}^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{u|f(u)||\sin\sigma(x-u)|}{|u-x|(u+x)}du$$

$$+\int\limits_{x+\frac{\pi}{2\sigma}}^{+\infty}\frac{u|f(u)||\sin\sigma(x-u)|}{|u-x|(u+x)}du=I_1+I_2+I_3.$$

Тоді

$$I_1=\int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2\sigma}}\frac{-u}{(u-x)(u+x)}\int\limits_0^u|f(s)|ds$$

$$=\left(\frac{-u}{(u-x)(u+x)}\int\limits_0^u|f(s)|ds\right)\Bigg|_0^{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$+\int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2\sigma}}\int\limits_0^u|f(s)|dsd\left(\frac{-u}{(u-x)(u+x)}\right)$$

$$=\frac{-u}{(u-x)(u+x)}\int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2\sigma}}|f(s)|ds$$

$$+\int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2\sigma}}|f(s)|ds\cdot\frac{-u}{(u-x)(u+x)}\Bigg|_0^{x-\frac{\pi}{2\sigma}}$$

$$=\frac{2\sigma}{\pi}\frac{x-\frac{\pi}{2\sigma}}{x-\frac{\pi}{4\sigma}}\int\limits_0^{x-\frac{\pi}{2\sigma}}|f(s)|ds\leqslant\frac{2\sigma}{\pi}\int\limits_0^{x-\frac{\pi\sigma}{2}}|f(s)|ds.$$

Аналогічно отримаємо

$$I_3 \leqslant \frac{2\sigma}{\pi}\frac{x+\frac{\pi}{2\sigma}}{x+\frac{\pi}{4\sigma}}\int\limits_{x+\frac{\pi}{2\sigma}}^{+\infty}|f(s)|ds \leqslant \left(\frac{2\sigma}{\pi}+\frac{1}{x}\right)\int\limits_{x+\frac{\pi}{2\sigma}}^{+\infty}|f(s)|ds,$$

$$I_2 \leqslant \int\limits_{x-\frac{\pi}{2\sigma}}^{x+\frac{\pi}{2\sigma}}\frac{u|f(u)|}{u+x}du \leqslant \int\limits_{x-\frac{\pi}{2\sigma}}^{x+\frac{\pi}{2\sigma}}|f(u)|du \leqslant \int\limits_{0}^{+\infty}|f(u)|du.$$

Звідси одержимо виконання умови (5.4). □

Лема 5.2 уточнює одну оцінку з [12].

Доведення теореми 5.1. Нехай $f \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, тоді

$$\|Tf\|_{L_1(0;+\infty)} = \int\limits_0^{+\infty}\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{uK(x-u)}{(u-x)(u+x)}f(u)du\right|dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\left|\int\limits_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{uf(u)\sin k\sigma(x-u)}{(u-x)(u+x)}b_k du\right|dx.$$

Для кожного $x>0$ функція

$$\frac{uf(u)}{u+x}$$

є обмеженою на $(0;+\infty)$ за лемою 5.2. Тоді за ознакою Вейєрштраса ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{uf(u)\sin k\sigma(x-u)}{(u-x)(u+x)}b_k$$

збігається рівномірно на $(0;+\infty)$. Проінтегрувавши почленно, одержимо

$$\|Tf\|_{L_1(0;+\infty)} = \int\limits_0^{+\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int\limits_0^{+\infty}\frac{uf(u)\sin k\sigma(x-u)}{(u-x)(u+x)}du\right|dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \left| \int\limits_0^{+\infty} \frac{uf(u)\sin k\sigma(x-u)}{(u-x)(u+x)} du \right| dx$$

Але $f \in H^1_{k\sigma}$, $k \in \mathbb{N}$. Тому за лемою 5.2 одержимо

$$\|Tf\|_{L_1(0;+\infty)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \int\limits_0^{+\infty} \left| \int\limits_0^{+\infty} \frac{uf(u)\sin k\sigma(x-u)}{(u-x)(u+x)} du \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| ||f||^*_{H^1_{k\sigma}} \leqslant \frac{\pi}{2} ||f||^*_{H^1_{\sigma}} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

□

Зауваження 5.1. *T є необмеженим оператором з $L^1(0;+\infty)$ в $L^1(0;+\infty)$ для випадку $K(t) = \sin \sigma t$.*

Доведення. Оператор

$$\int\limits_0^{+\infty} K_1(x,t)f(t)dt$$

є обмеженим оператором з $L^1(0;+\infty)$ в $L^1(0;+\infty)$ (див. [38]) тоді і тільки тоді, коли

$$\mathrm{vraisup}_{t>0} \int\limits_0^{+\infty} |K_1(x,t)|dx < +\infty. \tag{5.5}$$

Але для $x \in \ell_k := \left[\frac{\pi}{4\sigma} + \frac{\pi k}{2\sigma} + u; \frac{3\pi}{4\sigma} + \frac{\pi k}{2\sigma} + u\right]$, $k \in 2\mathbb{Z}$, виконується нерівність $|\sin \sigma(x-u)| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. Врахувавши, що функція

$$\psi(x) = \frac{u}{(x-u)(x+u)}$$

є спадною на $x \in (u;+\infty)$, одержимо

$$\int\limits_{\ell_{2k}} \frac{u}{(x-u)(x+u)} dx > \int\limits_{\ell_{2k+1}} \frac{u}{(x-u)(x+u)} dx, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Тому

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{u\sin\sigma(x-u)}{(x-u)(x+u)}\right|dx \geqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{\ell_{2k}}\frac{u|\sin\sigma(x-u)|}{(x-u)(x+u)}dx$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{\ell_{2k}}\frac{u}{(x-u)(x+u)}dx \geqslant \frac{\sqrt{2}}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{\ell_k}\frac{u}{(x-u)(x+u)}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int\limits_{u+\frac{\pi}{4\sigma}}^{+\infty}\frac{u}{(x-u)(x+u)}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{8u\sigma}{\pi}+1\right).$$

Отже, умова (5.5) не виконується, тобто оператор T не є обмеженим. $\square$

5.2 Рівняння згортки і аналітичне продовження

Добре відомим є наступний варіант теореми Берлінга-Лакса (див. [52]).

Теорема А9. *Нехай $q \in L_2(-\infty; 0)$ і*

$$Q(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} q(t)e^{tz}dt. \tag{5.6}$$

Тоді наступні твердження є еквівалентними:
1. Рівняння

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \psi(t+\tau)q(t)dt = 0, \quad \tau \le 0, \tag{5.7}$$

має нетривіальний розв'язок в $\psi \in L_2(-\infty; 0)$;
2. Система $\{Q(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ не є повною в $H^2(\mathrm{C}_+)$;
3. Q не є зовнішньою в $H^2(\mathbb{C}_+)$.

Функція $Q \in H^2(\mathbb{C}_+)$ називається зовнішньою для простору $H^2(\mathbb{C}_+)$, якщо $G(z) \ne 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$,

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\ln|Q(x)|}{x} = 0,$$

і інтегральна гранична функція функції Q є сталою.

Необхідна частина попередньої теореми базується на наступному твердженні.

Теорема А10. *Нехай $q \in L_2(-\infty; 0)$, $Q(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} q(t)e^{tz}dt$. Функція $\psi \in L_2(-\infty; 0)$ є розв'язком рівняння (5.7) тоді і тільки тоді, коли функція $Q(iy)\Psi(iy)$, де Q визначена рівністю (5.6), а*

$$\Psi(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} \psi(t)e^{-tz}dt,$$

є кутовою граничною функцією на $i\mathbb{R}$ *деякої функції* $P \in H^1(\mathbb{C}_+)$.

Нехай $E^p[D_\sigma]$ та $E^p_*[D_\sigma], 1 \le p < +\infty, \sigma > 0$, є просторами аналітичних функцій відповідно в областях $D_\sigma = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma, \operatorname{Re} z < 0\}$ та $D^*_\sigma = \mathbb{C}\backslash \overline{D}_\sigma$, для яких

$$\sup \left\{ \int\limits_{\gamma} |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де супремум береться за всіма відрізками γ, що лежать відповідно в D_σ та D^*_σ. Функції f, що належать цим просторам, мають майже скрізь на ∂D_σ кутові граничні значення, що позначаємо через $f(z)$ і $f \in L^p[\partial D_\sigma]$.

Розглянемо рівняння

$$\int\limits_{\partial D_\sigma} f(w+\tau) g(w) dw = 0, \quad \tau \le 0, \quad g \in E^2_*[D_\sigma]. \tag{5.8}$$

У цьому підрозділі ми знаходимо аналог теореми А10. Позначимо через F_j, $j \in \{1; 2; 3\}$ функції

$$F_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{l_j} f(w) e^{-zw} dw, \quad j \in \{1; 2; 3\}, \tag{5.9}$$

де l_1, l_3, та l_2 є сторонами межі півсмуги ∂D_σ (відповідно промені, що лежать під і над дійсною віссю, та відрізок $[-i\sigma; i\sigma]$), орієнтація яких узгоджена з додатньою орієнтацією D_σ.

Теорема 5.2. *Нехай функція* $f \in E_2[D_\sigma]$, $f \not\equiv 0$, *є розв'язком рівняння* (5.8). *Тоді функція* $F_1(iy)G(iy)e^{\sigma y}$ *є кутовою граничною функцією на* $i\mathbb{R}$ *деякої аналітичної в* $\mathbb{C}_+$ *функції* P_1, *такої що для кожного* $\delta \in (0; \pi/4)$

$$\sup\left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left|P_1(re^{i\varphi})\right| e^{-\sigma r|\sin\varphi|}dr : \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \backslash (-\delta; \delta) \right\} < +\infty. \tag{5.10}$$

Доведення. Нехай $f \in E_2[D_\sigma]$ є розв'язком рівняння (5.8) і

$$S(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+i\infty} \Phi_1(w)\frac{1}{w-z}dw + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{0} \Phi_3(w)\frac{1}{w-z}dw$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \Phi_2(w)\frac{1}{w-z}dw,$$

де $\Phi_j(it) = F_j(it)G(it)$, $j \in \overline{1;3}$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді функція

$$P_1(z) = e^{-i\sigma z}\begin{cases} S(z), z \in \mathbb{C}(0; \pi/2), \\ S(z) - \Phi_2(z), z \in \mathbb{C}(-\pi/2; 0) \end{cases}$$

володіє вказаними властивостями. Справді, за лемою 4.17 виконується рівність

$$\int\limits_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)dw = \int\limits_0^{+i\infty} \Phi_1(z)e^{\tau z}dz$$

$$+ \int\limits_{-i\infty}^{0} \Phi_3(z)e^{\tau z}dz + \int\limits_0^{+\infty} \Phi_2(z)e^{\tau z}dz,$$

тому

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\tau z} \left(\int\limits_0^{+i\infty} \Phi_1(z)e^{\tau z}dz + \int\limits_{-i\infty}^{0} \Phi_3(z)e^{\tau z}dz \right.$$

$$+\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi_2(z)e^{\tau z}dz\Bigg)\,d\tau=0,\quad \operatorname{Re} z<0.$$

Але за теоремою Фубіні для $\operatorname{Re} z<0$ маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\tau z}\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi_2(u)e^{\tau u}dud\tau$$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi_2(u)du\int\limits_{-\infty}^{0}e^{\tau(u-z)}d\tau=-\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\Phi_2(u)}{u-z}du.$$

Аналогічно

$$\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\tau z}\int\limits_{0}^{+\infty}i\Phi_1(iv)e^{\tau u}dvd\tau=-i\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\Phi_1(iv)}{iv-z}dv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\tau z}\int\limits_{-\infty}^{0}i\Phi_3(iv)e^{\tau u}dvd\tau=i\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\Phi_3(iv)}{iv-z}dv.$$

Звідси одержимо

$$0=-\int\limits_{0}^{+i\infty}\Phi_1(w)\frac{1}{w-z}dw+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{0}\Phi_3(w)\frac{1}{w-z}dw$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi_2(w)\frac{1}{w-z}dw,\quad \operatorname{Re} z<0.$$

Тоді для $\operatorname{Re} z>0$ маємо

$$0=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+i\infty}\Phi_1(w)\frac{1}{w+\bar z}dw+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{0}\Phi_3(w)\frac{1}{w+\bar z}dv$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi_2(w)\frac{1}{w+\bar{z}}dw,$$

$$0=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+i\infty}\Phi_1(w)\frac{1}{w+z}dw+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{0}\Phi_3(w)\frac{1}{w+z}dv$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi_2(w)\frac{1}{w+z}dw.$$

Як наслідок попередніх рівностей для $z=x+iy$, $y\neq 0$, одержимо

$$0=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+i\infty}\Phi_1(w)\left(-\frac{1}{w+\bar{z}}+\frac{x}{iy}\left(\frac{1}{w+\bar{z}}-\frac{1}{w+z}\right)\right)dw$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{0}\Phi_3(w)\left(-\frac{1}{w+\bar{z}}+\frac{x}{iy}\left(\frac{1}{w+z}-\frac{1}{w+\bar{z}}\right)\right)dw$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi_2(w)\left(-\frac{1}{w+\bar{z}}+\frac{x}{iy}\left(\frac{1}{w+z}-\frac{1}{w+\bar{z}}\right)\right)dw.$$

Тому

$$S(z)=-\int\limits_{0}^{+i\infty}\Phi_1(w)K_+(w;z)dw+\int\limits_{-i\infty}^{0}\Phi_3(w)K_+(w;z)dw$$

$$-\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi_2(w)K_+(w;z)dw,$$

де

$$K_+(w;z):=\frac{-2}{\pi i}\frac{wx}{(w+\bar{z})(w-z)(w+z)}$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w+\bar{z}} + \frac{x}{iy}\left(\frac{1}{w+\bar{z}} - \frac{1}{w+z}\right)\right),$$

Легко бачити, що

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left|K_+(it;re^{i\varphi})\right|dr$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\frac{|t|\,r\cos\varphi dr}{(t^2-2tr\sin\varphi+r^2)\sqrt{t^2+2tr\sin\varphi+r^2}}dr.$$

Якщо $t > 0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{|t|\,r\cos\varphi dr}{(t^2-2tr\sin\varphi+r^2)\sqrt{t^2+2tr\sin\varphi+r^2}}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\frac{u\cos\varphi du}{(1-2u\sin\varphi+u^2)\sqrt{(1+2u\sin\varphi+u^2)}}$$

Якщо $\varphi \in (0;\pi/2)$, то на підставі нерівності $u < \sqrt{u^2+1}$ маємо

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{u\cos\varphi du}{(1-2u\sin\varphi+u^2)\sqrt{(1+2u\sin\varphi+u^2)}}$$

$$\leq \int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\varphi du}{1-2u\sin\varphi+u^2} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\operatorname{tg}\varphi \leq \pi.$$

Якщо $\varphi \in (-\pi/2;0)$, то

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{u\cos\varphi du}{(1-2u\sin\varphi+u^2)\sqrt{1+2u\sin\varphi+u^2}}$$

$$\leq \int\limits_0^{+\infty}\frac{u\cos\varphi du}{(1+u^2)\sqrt{2u(1+\sin\varphi)}}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{u2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)du}{(1+u^2)\sqrt{4u\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}}$$

$$\le \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)du}{1+u^2} \le \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}du}{1+u^2} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Якщо ж $t < 0$, то аналогічно одержимо

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{|t|\, r\cos\varphi dr}{(t^2-2tr\sin\varphi+r^2)\sqrt{t^2+2tr\sin\varphi+r^2}}$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{u\cos\varphi du}{(1+2u\sin\varphi+u^2)\sqrt{1-2u\sin\varphi+u^2}}$$

$\le \max\left\{\pi; \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}du}{1+u^2}\right\} \le \pi.$

Скориставшись теоремою Фубіні, отримаємо

$$\int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_0^{+i\infty} \left|\Phi_1(w)K_+(w; re^{i\varphi})\right| dw \le c < +\infty$$

$$\int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_0^{+i\infty} \left|\Phi_3(w)K_+(w; re^{i\varphi})\right| dw \le c < +\infty,$$

де стала c від $\varphi \in (-\pi/2; \pi/2)$ не залежить. Також для $t > 0$ маємо

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty} \left|K_+(t; re^{i\varphi})\right| dr = \int\limits_0^{+\infty} \frac{tx}{|(t+\bar{z})(t-z)(t+z)|}dr$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{tr\cos\varphi}{(t^2+2tr\cos\varphi+r^2)\sqrt{(t^2-2tr\cos\varphi+r^2)}}dr$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{u\cos\varphi}{(u^2+2u\cos\varphi+1)\sqrt{(u^2-2u\cos\varphi+1)}}dr$$

Тому

$$\int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_0^{+\infty} \left|\Phi_2(w)K_+(w;re^{i\varphi})\right| dw \le c_1 < +\infty, ,$$

де стала c_1 від $\varphi \in (-\pi/2+\delta;\pi/2-\delta)$ не залежить. Отже, для цих φ нерівність (5.10) виконується. Аналогічна оцінка виконується також $\varphi \in (\pi/2;3\pi/2)$. □

Ми не знаємо, чи оцінка (5.10) є справедливою також для випадку $\delta = 0$, тобто чи $P \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Зауважимо, що у цьому випадку умови теореми 5.2 є достатніми для існування нетривіального розв'язку рівняння (5.8).

Зауваження 5.2. *Аналогічно можемо довести, що $F_3(iy)G(iy)e^{-\sigma y}$ є кутовою граничною функцією на $i\mathbb{R}$ такої аналітичної в $\mathbb{C}_+$ функції P_3, що*

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty} \left|P_3(re^{i\varphi})\right| e^{-\sigma r|\sin\varphi|}dr : \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\setminus(-\delta;\delta)\right\} < +\infty.$$

для кожного $\delta \in (0;\pi/4)$.

5.3 Про ефект "глибокого нуля" для розв'язків рівняння згортки

З теореми 4.8, врахувавши результати Б. Винницького [10] випливає наступний аналог теореми А9.

Теорема А11. *Нехай $g \in E^2_*[D_\sigma]$. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*
1) рівняння (5.8) *має нетривіальний розв'язок $f \in E^2[D_\sigma]$;*
2) система функцій $\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$, де

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma} g(w)e^{-zw}dw, \tag{5.11}$$

не є повною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
3) функція G має принаймні один нуль в $\mathbb{C}_+$, або інтегральна гранична функція функції G не є сталою, або

$$\varliminf_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|<r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|G(it)|dt - \frac{\sigma}{\pi}\ln r > -\infty. \right)$$

Отже, рівняння (5.8) має нетривіальний розв'язок $f \in E^2[D_\sigma]$ тоді і тільки тоді, коли одна з наступних умов виконується:

1) G має хоч один нуль в $\lambda \in \mathbb{C}_+$;

2) інтегральна гранична функція функції G не є сталою;

3) $$\varlimsup_{x\to+\infty} \left(\frac{\log|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x\right) < +\infty. \tag{5.12}$$

Розв'язки для випадків 1) та 2) вивчалися в [10] та [177]. В цьому підрозділі ми розглядаємо конструктивний опис розв'язків у випадку 3). Користуючись термінологією [37], Р. 2, 1.2, ми кажемо, що у цьому випадку G має "глибокий нуль". Зазначимо, що цей випадок не має аналогу для $\sigma = 0$, бо умова

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\log|G(x)|}{x} < +\infty$$

виконується для всіх $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$, але не кожне рівняння (5.7) має нетривіальні розв'язки.

В інших термінах, (див. [31]) ми розглядаємо спектральний аналіз в $E^2[D_\sigma]$ для випадку "глибокого нуля".

Теорема 5.3. *Нехай функція $f \in E^2[D_\sigma]$, $f \not\equiv 0$, є розв'язком рівняння (5.8), функція G не має нулів в $\mathbb{C}_+$ і інтегральна гранична функція функції G є сталою. Тоді визначені рівностями (5.9) функції F_1 та F_3 є цілими і мають в $\mathbb{C}_+$ вигляд*

$$F_1(z) = e^{i\sigma z} e^{a_1 z} \varkappa_1(z) \prod_{|\lambda_n|\le 1} \frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n} \prod_{|\lambda_n|>1} \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n} \exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\overline{\lambda}_n}\right), \tag{5.13}$$

$$F_3(z) = e^{-i\sigma z} e^{a_3 z} \varkappa_3(z) \prod_{|\mu_n|\le 1} \frac{z-\mu_n}{z+\overline{\mu}_n} \prod_{|\mu_n|>1} \frac{1-z/\mu_n}{1+z/\overline{\mu}_n} \exp\left(\frac{z}{\mu_n} + \frac{z}{\overline{\mu}_n}\right), \tag{5.14}$$

де $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_3 \in \mathbb{R}$, $\varkappa_1 \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $\varkappa_3 \in H^2(\mathbb{C}_+)$, функції $\varkappa_1$ та $\varkappa_3$ не мають жодного нуля в $\mathbb{C}_+$ і їх інтегральні граничні функції є сталими. Послідовності нулів (λ_n) та (μ_n) відповідно функцій F_1 та F_3 містяться обидві в $\mathbb{C}_+$ і задовільняють умови

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1} \operatorname{Re}\lambda_n < +\infty,$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \left(\sum_{1<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right) \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|} - \frac{\sigma}{\pi}\log r \right) = \beta_1, \tag{5.15}$$

$$\sum_{|\mu_n|\le 1} \operatorname{Re}\mu_n < +\infty,$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \left(\sum_{1<|\mu_n|\le r} \left(\frac{1}{|\mu_n|} - \frac{|\mu_n|}{r^2} \right) \frac{\operatorname{Re}\mu_n}{|\mu_n|} - \frac{\sigma}{\pi}\log r \right) = \beta_3, \tag{5.16}$$

причому $\beta_1 \in \mathbb{R}$, $\beta_3 \in \mathbb{R}$. *Також* $F_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, $F_3(z)e^{i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$.

Наступне твердження є оберненим, в деякому сенсі, до попереднього.

Теорема 5.4. *Нехай* $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, G *не має жодного нуля в* $\mathbb{C}_+$, *інтегральна гранична функція функції* G *є сталою і виконується нерівність* (5.12). *Якщо для функцій* F_1 *та* F_3 *справджуються зображення* (5.13) *та* (5.14), *також* $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_3 \in \mathbb{R}$, $\varkappa_1 \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $\varkappa_3 \in H^2(\mathbb{C}_+)$ *виконуються умови* (5.15) *та* (5.16) *і* $(F_1, -F_1 - F_3, F_3) \in T^2_\sigma(\mathbb{C}_-)$, *тоді для деякого* $c \ge 0$ *рівність* $F_2 = -F_1 - F_3$ *і представлення*

$$f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} F_1(iy)e^{iyw}dy + \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} F_2(x)e^{xw}dx$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} F_3(iy)e^{iyw}dy, \quad w \in D_\sigma, \tag{5.17}$$

дають розв'язок рівняння

$$\int_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)\widehat{g}(w)dw = 0, \ \tau \le 0, \tag{5.18}$$

де

$$\widehat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \widehat{G}(x)e^{-wx}dx, \quad \widehat{G}(z) = G(z)e^{-cz}.$$

Зауваження 5.3. *Умова* (5.15) *не може бути заміненою (див. [10]) умовою*

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1} \operatorname{Re}\lambda_n < +\infty,\ \varlimsup_{r\to+\infty} \left(\sum_{1<|\lambda_n|\le r} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2} - \frac{\sigma}{\pi}\log r \right) = \beta_1,\ \beta_1 \in \mathbb{R}.$$

Для доведення вищенаведених теорем сформулюємо деякі допоміжні результати.

Лема 5.3. *Якщо функція $f \in E^2[D_\sigma]$ є розв'язком рівняння* (5.8)*, то для кожного $c > 0$ функція f є також розв'язком рівняння* (5.18)*.*

Доведення. Справді, скориставшись лемою 4.14, маємо

$$\int\limits_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)\widehat{g}(w)dw = \int\limits_{0}^{+i\infty} F_1(z)G(z)e^{-cz}e^{\tau z}dz$$

$$+ \int\limits_{-i\infty}^{0} F_3(z)G(z)e^{-cz}e^{\tau z}dz + \int\limits_{0}^{+\infty} F_2(z)G(z)e^{-cz}e^{\tau z}dz$$

$$= \int\limits_{0}^{+i\infty} F_1(z)G(z)e^{(\tau-c)z}dz + \int\limits_{-i\infty}^{0} F_2(z)G(z)e^{(\tau-c)z}dz$$

$$+ \int\limits_{0}^{+\infty} F_2(z)G(z)e^{(\tau-c)z}dz.$$

Права частина цієї рівності рівна нулеві для всіх $\tau \in (-\infty;) \supset (-\infty; 0)$, з чого знову за лемою 4.14 випливає, що є f розв'язком рівняння (5.18). □

Лема 5.4. *Нехай $g \in E^2_*[D_\sigma]$ і для функції G, визначеної рівністю* (5.11)*, $G\log(2+x)$ належить до простору $L^2(0;+\infty)$.*

Тоді $f \in E^2[D_\sigma]$ *є розв'язком рівняння* (5.8) *тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*
1) існує функція P_1, $P_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, *така що кутові граничні значення функції* P_1/G *з* $\mathbb{C}_+$ *співпадають з кутовими граничними значеннями функції* F_1 *з* $\mathbb{C}_-$ *майже скрізь на* $i\mathbb{R}$;
2) існує функція P_3, $P_3(z)e^{i\sigma z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, *така що кутові граничні значення функції* P_3/G *з* $\mathbb{C}_+$ *співпадають з кутовими граничними значеннями функції* F_3 *з* $\mathbb{C}_-$ *майже скрізь на* $i\mathbb{R}$.

Ця лема доведена в [176].

Лема 5.5. *Нехай функція* f *належить до простору Смірнова* E^1 *в областях* $\square_1 = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1, a < \operatorname{Im} z < a+1\}$, $\square_2 = \{z : -1 < \operatorname{Re} z < 0, a < \operatorname{Im} z < a+1\}$ *і кутові граничні значення функції* f *з* $\square_1$ *та* $\square_2$ *співпадають майже скрізь на* $\{z = iy : y \in (a; a+1)\}$. *Тоді* f *належить до простору Смірнова* E^1 *в області* $\square = \{z : -1 < \operatorname{Re} z < 1, a < \operatorname{Im} z < a+1\}$.

Доведення. Справді, простір Смірнова E^1 співпадає (див. [53], Р. III, 7.1) з класом функцій, що зображаються інтегралом Коші. Тому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\square_1}\frac{f(t)}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), z \in \square_1, \\ 0, z \in \square_2, \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\square_2}\frac{f(t)}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), z \in \square_2, \\ 0, z \in \square_1, \end{cases}$$

Функція

$$\Upsilon(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\square}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

є аналітичною в $\square$, співпадає з f для всіх $z \in \square_1$ і $z \in \square_2$, тому Υ належить до простору E^1 в $\square$. $\square$

Доведення теореми 5.3. Нехай функція $f \not\equiv 0$ належить до простору $E^2[D_\sigma]$ і є розв'язком рівняння (5.8). Тоді за лемою 5.3 f є також розв'язком рівняння (5.18). За лемою 5.4 існує функція P_1, $P_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, така, що кутові граничні значення функції $P_1/\widehat{G}$ з $\mathbb{C}_+$ співпадають з кутовими граничними значеннями функції F_1 з $\mathbb{C}_-$ майже скрізь на $i\mathbb{R}$. Тоді за лемою 4.15 справедливе зображення

$$P_1(z) = e^{ia_0+a_1z+i\sigma z} \cdot \prod_{|\lambda_n|\le 1} \frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n} \prod_{|\lambda_n|>1} \frac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n} \exp\left(\frac{z}{\lambda_n}+\frac{z}{\overline{\lambda}_n}\right)$$
$$\times S^*_{P_1}(z) \cdot \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\log|P_1(it)e^{\sigma t}|dt\right\},\ z \in \mathbb{C}_+, \tag{5.19}$$

де (λ_n) є послідовністю нулів функції P_1 в $\mathbb{C}_+$. За умовами теореми 5.3 $G(z) \ne 0$ для кожного $z \in \mathbb{C}_+$ і кутова гранична функція функції G є сталою, тому за лемою 4.15

$$G(z) = e^{i\widehat{a}_0+\widehat{a}_1 z} \cdot \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\log|G(it)|dt\right\},\ z \in \mathbb{C}_+. \tag{5.20}$$

Врахувавши також зображення (5.19), для $z \in \mathbb{C}_+$ одержимо

$$P_1(z)/G(z) = e^{i\sigma z} e^{i\widetilde{a}_0+\widetilde{a}_1 z}\Pi^*_{P_1}(z) S^*_{P_1}(z)$$
$$\times \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\log\left|P_1(it)e^{\sigma t}/G(it)\right|dt\right\}.$$

Кутові граничні значення функції P_1/G на $i\mathbb{R}$ з $\mathbb{C}_+$ співпадають майже скрізь з кутовими граничними значеннями функції $F_1(z)$

на $i\mathbb{R}$ з $\mathbb{C}_-$. Але $F_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, тому за теоремою 1.2,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|F_1(it)e^{\sigma t}||}{1+t^2} dt < +\infty. \tag{5.21}$$

Оскільки

$$\frac{1}{i} Q(t,z) = \frac{-1}{it-z} - \frac{it(2+t^2)}{(1+t^2)^2} - \frac{zt^2}{(1+t^2)^2},$$

$$\left| \exp\left\{ -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{it(2+t^2)}{(1+t^2)^2} \log\left|P_1(it)e^{\sigma t}/G(it)\right| dt \right\} \right| = 1,$$

$$\exp\left\{ -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{zt^2}{(1+t^2)^2} \log\left|P_1(it)e^{\sigma t}/G(it)\right| dt \right\} = e^{cz},$$

з теореми 1.2 одержимо існування такого $c \in \mathbb{R}$, що

$$\exp\left\{ \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z) \log\left|P_1(it)e^{\sigma t}/G(it)\right| dt - cz \right\} \in H^2(\mathbb{C}_+). \tag{5.22}$$

Легко бачити, що умова (4.46) леми 4.15 виконується для всіх таких функцій f, що $f(z)e^{i\sigma z} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, бо $S_f \equiv S_{f(z)e^{i\sigma z}}$, $\Xi_f \equiv \Xi_{f(z)e^{i\sigma z}}$. Оскільки

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \sigma t dt = 0,$$

ми одержимо $K_f(r) = K_{f(z)e^{i\sigma z}}(r)$ для всіх $r > 1$. Тому будемо далі писати S_{P_1} замість $S_{P_1(z)e^{-i\sigma z}}$, $\Xi_{P_1}(r)$ замість $\Xi_{P_1(z)e^{-i\sigma z}}$ і $K_{P_1}(r)$ замість $K_{P_1(z)e^{-i\sigma z}}$. Умова (4.46) виконується також для тих функцій f, для яких $f(z)e^{-i\sigma z} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тому ми одержимо

$$\varlimsup_{r\to+\infty} (S_{P_1}(r) + \Xi_{P_1}(r) - K_{P_1}(r)) < +\infty. \tag{5.23}$$

Використавши очевидну рівність $K_{P_1}(r) = K_{P_1/G}(r) + K_G(r)$ та позначивши $\log^+ t = \max\{\log t; 0\}$ з (5.21), одержимо

$$K_{P_1/G}(r) = K_{P_1(z)/G(z)e^{-i\sigma z}}$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log^+ \left|P_1(it)/G(it)e^{\sigma t}\right| dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \frac{1}{t^2} \log^+ \left|P_1(it)/G(it)e^{\sigma t}\right| dt$$

$$\le \frac{1}{\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \frac{|\log|P_1(it)/G(it)e^{\sigma t}||}{t^2+1} dt < +\infty.$$

І оскільки

$$K_G(r) \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log^+ |G(it)| dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \log^+ \left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right| dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \frac{1}{t^2}\sigma|t| dt$$

$$\le \frac{1}{4\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \frac{1}{t^2} \left|G(it)e^{-\sigma|t|}\right|^2 dt + \frac{\sigma}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \frac{1}{|t|} dt \le c_1 + \frac{\sigma}{\pi}\log r,$$

то

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \left(S_{P_1}(r) + \Xi_{P_1}(r) - \frac{\sigma}{\pi}\log r\right)$$

$$\le \overline{\lim_{r\to+\infty}} \left(S_{P_1}(r) + \Xi_{P_1}(r) - K_{P_1}(r)\right)$$

$$+ \overline{\lim_{r\to+\infty}} K_{P_1/G}(r) + \overline{\lim_{r\to+\infty}} \left(K_G(r) - \frac{\sigma}{\pi}\log r\right) < +\infty.$$

Очевидно, функції $S_{P_1/G}$ та $\Xi_{P_1/G}$ є невід'ємними, тому

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \left(S_{P_1}(r) - \frac{\sigma}{\pi}\log r\right)$$

$$\leq \varlimsup_{r\to+\infty}\left(S_{P_1}(r)+\Xi_{P_1}(r)-\frac{\sigma}{\pi}\log r\right)<+\infty,$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(\Xi_{P_1}(r)-\frac{\sigma}{\pi}\log r\right)$$

$$\leq \varlimsup_{r\to+\infty}\left(S_{P_1}(r)+\Xi_{P_1}(r)-\frac{\sigma}{\pi}\log r\right)<+\infty.$$

Але за умовами теореми 5.3 функція G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$ і інтегральна гранична функція функції G є сталою, тому $S_G\equiv 0$, $\Xi_G\equiv 0$ і $S_{P_1/G}\equiv S_{P_1}$, $\Xi_{P_1/G}\equiv\Xi_{P_1}$. Отже,

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(S_{P_1/G}(r)-\frac{\sigma}{\pi}\log r\right)<+\infty,$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(\Xi_{P_1/G}(r)-\frac{\sigma}{\pi}\log r\right)<+\infty.$$

В [10], [155] показано, що з цих нерівностей і першої умови (4.45) випливають оцінки

$$\begin{aligned}\left|\Pi^*_{P_1/G}(z)e^{-i\sigma z}\right| &\leq \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}x\log r+c_1x\right),\\ \left|S^*_{P_1/G}(z)e^{-i\sigma z}\right| &\leq \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}x\log r+c_2x\right)\end{aligned}\tag{5.24}$$

для $z=x+iy=re^{i\varphi}\in\mathbb{C}_+$. З цих формул та (5.22) випливає, що функція P_1/G належить до простору Смірнова $E^2\subset E^1$ в $\triangle_c(0;1)$ для кожного $c\in\mathbb{R}$, де $\triangle_c(a;b)=\{z: a<\mathrm{Re}z<b, c<\mathrm{Im}z<c+1\}$. Оскільки кутові граничні значення функцій P_1/G та F_1 співпадають майже скрізь на $i\mathbb{R}$, ми можемо розглядати (див. [53], с. 392) функції P_1/G та F_1 як одну аналітичну функцію на усій комплексній площині і надалі писатимемо F_1 замість P_1/G. Оскільки $F_1(z)e^{-i\sigma z}\in H^2(\mathbb{C}_-)$, то за теоремою 2.11 ця функція належить також класу $E^2\subset E^1$ in $\triangle_c(-1;0)$ для кожного $c\in\mathbb{R}$. Тоді за лемою 5.5 функція F_1 є аналітичною в $\triangle_c(-1;1)$ для кожного $c\in\mathbb{R}$. З останнього випливає, що F_1 є

цілою функцією, тому, зокрема, аналітичною в $\overline{\mathbb{C}}_+$. Звідси випливає, що інтегральна гранична функція функції F_1 є сталою. Але інтегральна гранична функція функції F_1 співпадає з інтегральною граничною функцією функції P_1, тому $S^*_{P_1}(z) \equiv 1$, $\Xi_{P_1}(r) \equiv 0$. Тому з зображення (4.43) випливає формула (5.13) і виконуються умови

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1} \operatorname{Re}\lambda_n < +\infty,$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}-\frac{\sigma}{\pi}\log r\right) < +\infty,$$

для P_1/G. Також ці формули справедливі для послідовності нулів функції F_1, бо P_1/G є аналітичним продовженням функції F_1 в $\mathbb{C}_+$.

Оскільки $P_1(z)e^{-i\sigma z}e^{-cz} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, то для неї виконується перша з умов (5.15), а тому ця умова виконується і для функції F_1.

Припустимо, що друга умова (5.15) не виконується, тобто

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left(\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}-\frac{\sigma}{\pi}\log r\right) = -\infty.$$

Тоді (див. [178])

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left|\prod\limits_{|\lambda_n|\le 1}\frac{x-\lambda_n}{x+\overline{\lambda}_n}\prod\limits_{|\lambda_n|>1}\frac{1-x/\lambda_n}{1+x/\overline{\lambda}_n}\exp\left(\frac{x}{\lambda_n}+\frac{x}{\overline{\lambda}_n}\right)\right|}{x}-\frac{2\sigma}{\pi}\log x = -\infty.$$

Позначивши

$$\widetilde{F}_j(z) = F_j(z)e^{-\frac{2\sigma}{\pi}z\log z},\ j\in\{1;3\},$$

одержимо виконання умови (4.58) для $j = 1$, бо

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\log|e^{i\sigma z}e^{a_1 z}\varkappa_1(z)|}{x} < +\infty.$$

Аналогічна умова виконується для $j = 3$. Скориставшись першою умовою (5.24), одержимо

$$\left|\widetilde{F}_1(z)e^{-i\sigma z}\right| \le |F_1(z)| \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}x\log r + d_1 x\right)$$

$$\times \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}x\log r + \frac{2\sigma}{\pi}y\arg z\right)$$

$$= |F_1(z)| \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi}y\arg z + d_1 x\right),\ d_1 \in \mathbb{R}.$$

Тому

$$\widetilde{F}_1(z)e^{-i\sigma z}e^{-d_1 z} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+),$$

аналогічно одержимо

$$\widetilde{F}_3(z)e^{i\sigma z}e^{-d_3 z} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$$

для деякого $d_3 \in \mathbb{R}$. Якщо $d_1 < 0$ і $d_3 < 0$, то за лемою 4.23 маємо $(F_1, F_2, F_3) \equiv (0, 0, 0)$. Якщо $d_1 > 0$ чи $d_3 > 0$, то розглянемо функції $\widetilde{F}_1(z)e^{-dz}$, $\widetilde{F}_3(z)e^{-dz}$ замість $\widetilde{F}_1(z)$, $\widetilde{F}_3(z)$, де $d = \max\{d_1, d_3\}$. Легко бачити, що,

$$\left(\widetilde{F}_1(x) + \widetilde{F}_3(x)\right) e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\log x} \in L^2(0; +\infty).$$

Тоді за лемою 4.21 виконуються умови (4.59). Тому за лемою 4.23 маємо $(F_1, F_2, F_3) \equiv (0, 0, 0)$, що суперечить умові. $\square$

Доведення теореми 5.4. Якщо $(F_1, -F_1-F_3, F_3) \in T^2_\sigma(\mathbb{C}_-)$, $F_2 = -F_1 - F_3$, то визначена рівністю (5.17) функція f належить до простору $E^2[D_\sigma]$. З умови (5.15) випливають нерівності

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1} \operatorname{Re}\lambda_n < +\infty,$$

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\left(\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}-\frac{\sigma}{\pi}\log r\right)<+\infty.$$

Звідси (див. [10]) виконання першої нерівності (5.24). Умова (5.12) є еквівалентною (див. теорему 4.4) умові

$$(\exists c_0\in\mathbb{R}):G\left(z\right)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z-c_0z\right\}\in H^2\left(\mathbb{C}_+\right).$$

Тому

$$\left|F_1(z)\widehat{G}(z)e^{-i\sigma z}\right|\le e^{c_1x}\left|\varkappa_1(z)G\left(z\right)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z-cz\right\}\right|$$

$$\times\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}x\log r\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi}x\log r+\frac{2\sigma}{\pi}y\varphi\right\}$$

$$\le e^{c_1x}\left|\varkappa_1(z)G\left(z\right)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z-cz\right\}\right|\cdot\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}y\varphi\right\}$$

для $z=x+iy=re^{i\varphi}\in\mathbb{C}_+$. Але

$$\varkappa_1(z)G\left(z\right)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\log z-cz\right\}\in H^1(\mathbb{C}_+),$$

тому для деякого c_2 маємо $F_1(z)\widehat{G}(z)e^{-i\sigma z}\in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Аналогічно показується, що $F_3(x)\widehat{G}(z)e^{i\sigma z}\in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тому за лемою 5.4 функція f є розв'язком рівняння (5.18). □

Приклад 5.1. *Функція*

$$\psi_1(z)=\int\limits_{l_1}\exp(-e^{-\frac{\pi}{2\sigma}w})e^we^{-wz}dw$$

є цілою і для неї виконується зображення (5.13) *з умовами* (5.15).

Справді, функція

$$G_0(z) = \frac{\exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi} z \log z\right\}}{(1+z)^2}$$

не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$ і

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\left(\frac{\log|G_0(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\log x\right) = \varlimsup_{x\to+\infty}\left(-\frac{\log(1+x)^2}{x}\right) < +\infty.$$

Також G_0 є аналітичною в $\overline{\mathbb{C}}_+$, тому інтегральна гранична функція функції G є сталою. Отже, функція G_0 задовільняє умови теореми 5.3. Але, як показано в [14], функція

$$f(w) = \exp\left(-e^{-\frac{\pi}{2\sigma}w}\right)e^w$$

є розв'язком рівняння (5.8) для функції

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} G_0(x)e^{-xw}dx.$$

Тому за теоремою 5.3 функція ψ_1 є цілою, для неї справедливе зображення (5.13) і виконується умова (5.15).

5.4 Висновки до розділу 5

Функція є циклічною у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли деяке рівняння типу згортки у півсмузі має тільки нульовий розв'язок. Цей розділ присвячений дослідженню нетривіальних розв'язків. Критерій циклічності, встановлений в попередньому розділі, дає необхідні і достатні умови для існування нетривіальних розв'язків рівняння типу згортки. Він вказує, що нетривіальні розв'язки можливі у трьох випадках: коли характеристична функція G має хоч один нуль у правій півплощині, коли її інтегральна гранична функція є сталою або коли G має "глибокий нуль" на $+\infty$. У перших двох випадках розв'язки були відомими. Ми розглядаємо властивості розв'язків у третьому випадку. Також розгля Одержано такі результати:

- встановлено властивості розв'язків рівняння типу згортки у півсмузі, породжених "глибоким нулем";
- отримано необхідні умови існування розв'язку рівняння типу згортки у півсмузі у термінах аналітичного продовження;
- показано, що інтегральний оператор одного вигляду не є обмеженим у просторі $L^2(0;+\infty)$, але обмежений у його підпросторі $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

РОЗДІЛ 6

Простори Гарді-Смірнова у необмеженій багатокутній області

6.1 Представлення функцій у необмеженій багатокутній області

Нехай D - необмежений опуклий n- кутник, $n \in \mathbb{N}$, що лежить в деякому куті комплексної площини, величина якого є меншою за π, і межа якого складається з півпрямих l_1 і l_{n+1} та, можливо, відрізків l_2, ..., l_n, нумерація і орієнтація яких відповідає додатному обходу ∂D. Далі, нехай $D^* = \mathbb{C} \backslash \overline{D}$, а $E^p[D]$ і $E^p_*[D]$ - простори функцій, аналітичних відповідно в D і D^*, для яких

$$\sup \left\{ \int\limits_{\gamma} |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty$$

(тут під $|dz|$ розуміємо елемент довжини), де супремум береться за всіма відрізками γ, що лежать в D (відповідно в D^*). В останньому означенні замість відрізків γ супремум можна брати також за всіма ламаними, що містяться в D (чи, відповідно в D^*), сторони яких паралельні сторонам (відрізкам чи прямим) ∂D. Ці простори розглядалися в [8]. Там, зокрема, показано, що функції із цих просторів мають майже скрізь (м.с.) на ∂D кутові граничні значення і $f \in L^p(\partial D)$. Відзначимо ще наступне твердження, необхідне нам при доведенні наступних теорем.

Лема 6.1. *Якщо* $f \in E^1[D]$, *то*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

У випадку, коли D є областями $\mathbb{C}(\alpha, \beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ чи $D_\sigma = \{z : \operatorname{Re} z < 0, |\operatorname{Im} z| < \sigma\}$, вказані простори співпадають з досліджуваними відповідно у [34] та [10].

Нехай $\overline{m,n} = [m;n] \cap \mathbb{Z}$. Позначимо через a_j, $j = \overline{1,n}$, скінченні вершини області D, через α_j, $j \in \overline{1,n+1}$ – величини кутів, що рахуються в додатному обході, між додатним напрямом осі абсцис і напрямним вектором променя чи відрізка l_j, який визначається раніше вибраним обходом ∂D, а через l_j^* - пряму, що проходить через сторону l_j. Нехай $\frac{\pi}{\beta}$, $1 < \beta \leqslant +\infty$, – величина кута $\pi - \alpha_{n+1} + \alpha_1$. Через $\overrightarrow{b}$ при $\beta < +\infty$ позначимо вектор з початком у точці перетину прямих l_1^* і l_{n+1}^*, який лежить на бісектрисі l_1^* і l_{n+1}^* та напрямлений в сторону області D. Якщо ж $\beta = +\infty$, то через $\overrightarrow{b}$ позначатимемо вектор, напрям якого співпадає з вибраним напрямом сторони l_{n+1}. Нехай φ_*, $0 \leqslant \varphi_* < 2\pi$, – кут між додатним напрямом дійсної осі і вектором $\overrightarrow{b}$, який вимірюється від цієї осі у додатному напрямі. Через $\pi_*(l_j)$ позначимо ту півплощину, утворену прямою l_j^*, що не містить області D. Нехай також $1/\alpha + 1/\beta = 1$ (якщо $\beta = +\infty$, то вважаємо, що $\alpha = 1$) і $h(\theta) = h(\theta, D)$, де

$$h(\theta, D) = \sup\left\{\operatorname{Re}\left(ze^{-i\theta}\right) : z \in \overline{D}\right\}.$$

Функція h є неперервною на проміжку
$\triangle_{\alpha,\varphi_*} = \{\theta : |\theta - \pi + \varphi_*| \leqslant \pi/(2\alpha)\}$. Позначимо через $H^p(D_\times, h)$,

$1 \leqslant p < +\infty$, простір функцій f, аналітичних в куті $D_\times = \{z : |\arg z - \pi + \varphi_*| < \pi/(2\alpha)\}$, для яких

$$||f||^p := \sup_{|\varphi - \pi + \varphi^*| < \pi/(2\alpha)} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-prh(\varphi)} dr \right\} < +\infty.$$

Нехай W^2_σ – простір Вінера цілих функцій експоненціального типу $\leqslant \sigma$, звуження яких на $\mathbb{R}$ належать до простору $L^2(\mathbb{R})$, а через $H^2(\mathbb{C}_-)$ простір Гарді у півплощині $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$. Нехай далі $D^-_\times = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_\times$. Через $T^2(D^-_\times)$ позначимо множину всіх впорядкованих наборів $F = (F_1, F_2, ..., F_{n+1})$, де $F_1(ze^{-i\alpha_1})e^{a_1 z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, $F_{n+1}(ze^{i(\pi - \alpha_{n+1})})e^{a_{n+1} z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, а $F_j\left(ze^{-i\left(\alpha_j - \pi/2\right)}\right) e^{\frac{a_j + a_{j-1}}{2} z} \in W^2_{\left|\frac{a_j - a_{j-1}}{2}\right|}$, причому

$$\sum_{j=1}^{n+1} F_j(z) = 0, \quad z \in D^-_\times. \tag{6.1}$$

Простір $T^2(D^-_\times)$ можна розглядати як нормований простір з нормою $||F|| = \max\left\{\max\left\{||F_j||_{W^2}, j \in \overline{2,n}\right\}; ||F_1||_{H^2}; ||F_{n+1}||_{H^2}\right\}$, де під $||F_j||_{H^2}$ та $||F_j||_{W^2}$ розуміємо норми у відповідних просторах Гарді та Вінера. Властивості просторів $H^2(D_\times, h)$ та $E^2_*[D]$ відзначено в [8]. Зокрема показано, що рівність

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty e^{i\theta_*}} G(z) e^{-zw} dz, \tag{6.2}$$

$w \in \{\omega = u + iv : u \cos\theta_* - v \sin\theta_* > h(\theta_*)\}$, де θ_*– довільне число, яке задовольняє умову $|\theta_* - \pi + \varphi_*| < \frac{\pi}{2\alpha}$, задає взаємно однозначне відображення простору $H^2(D_\times, h)$ на $E^2_*[D]$ і справедлива двоїста формула

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D} g(w) e^{zw} dw. \tag{6.3}$$

Зазначимо, що при доведенні теореми 6.2 ми використовуємо рівність Парсеваля у формі (див. [61], с.62)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)G(x)dx = \frac{1}{i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)G(t)dt,$$

де $f \in L^2(-\infty; \infty)$, $g \in L^2(-\infty; \infty)$,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iut}dt, \quad G(u) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-iut}dt.$$

Теорема 6.1. *Рівності*

$$F_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{l_j} f(w)e^{-zw}dw, \; f \in E^2[D], \tag{6.4}$$

де $j \in \overline{1, n+1}$, *задають взаємно однозначне відображення простору* $E^2[D]$ *на* $T^2(D_{\times}^{-})$ *і справедлива двоїста формула*

$$f(w) = \frac{-1}{i\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{n+1} e^{-i\varphi_j} \int\limits_{0}^{+\infty} F_j(re^{-i\varphi_j}) e^{re^{-i\varphi_j}w} dr, \tag{6.5}$$

де $w \in D$, $\varphi_j = \alpha_j - \pi/2$.

Ця теорема встановлює опис перетворення Фур'є-Лапласа, у термінах Б. Винницького [10], функції $f \in E^2[D]$.

Доведення. Нехай $f \in E^2[D]$. Тоді,як зазначено вище, f має майже скрізь на ∂D кутові граничні значення і, зокрема,

$f\left(a_1+\rho e^{i(\alpha_1-\pi)}\right) \in L^2(0;+\infty)$. Тому за теоремою Пелі-Вінера А 3.16 маємо

$$F_1(z) = \frac{e^{i\alpha_1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1 z} \int\limits_0^{+\infty} f\left(a_1+\rho e^{i(\alpha_1-\pi)}\right) e^{-z\rho e^{i(\alpha_1-\pi)}} d\rho$$

$$= e^{-a_1 z} f_1(z e^{i\alpha_1}),$$

де $f_1 \in H^2(\mathbb{C}_-)$, та оскільки $f\left(a_{n+1}+\rho e^{i(\alpha_{n+1}-\pi)}\right) \in L^2(0;+\infty)$, то

$$F_{n+1}(z) = \frac{e^{i\alpha_{n+1}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_{n+1} z}$$

$$\times \int\limits_0^{+\infty} f\left(a_{n+1}+\rho e^{i\alpha_{n+1}}\right) e^{-z\rho e^{i\alpha_{n+1}}} d\rho$$

$$= e^{-a_1 z} f_{n+1}\left(z e^{(i\alpha_{n+1}-\pi)}\right),$$

де $f_{n+1} \in H^2(\mathbb{C}_-)$. Також, оскільки в сенсі кутових граничних значень

$$f\left(\frac{a_j+a_{j-1}}{2}+\rho e^{i\alpha_j}\right) \in L^2\left(-\frac{|a_j-a_{j-1}|}{2}; \frac{|a_j-a_{j-1}|}{2}\right),$$

на основі іншої теореми Пелі-Вінера 1.4 отримуємо

$$F_j(z) = \frac{e^{i\alpha_j}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a_j+a_{j-1}}{2} z}$$

$$\times \int\limits_{-\frac{|a_j-a_{j-1}|}{2}}^{\frac{|a_j-a_{j-1}|}{2}} f\left(\frac{a_j+a_{j-1}}{2}+\rho e^{i\alpha_j}\right) e^{-z\rho e^{i\left(\alpha_j-\frac{\pi}{2}\right)}} d\rho =$$

$$= e^{-\frac{a_j+a_{j-1}}{2} z} f_j\left(z e^{i\left(\alpha_j-\frac{\pi}{2}\right)}\right),$$

де $f_j \in W^2_{\frac{|a_j-a_{j-1}|}{2}}$, для всіх $j \in \overline{2;n}$. Якщо $z \in \left\{z_1 : |\arg z_1 + \varphi^*| < \frac{\pi}{2\alpha}\right\}$, то, оскільки $\mathrm{Re}(zw) > 0$, маємо $f(w)e^{-zw} \in E^1[D]$ і тому за лемою 6.1

$$\int\limits_{\partial D} f(w)e^{-zw}dw = 0,$$

звідки випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k(z) = 0, \quad z \in \left\{z_1 : |\arg z_1 + \varphi^*| < \frac{\pi}{2\alpha}\right\}.$$

Але кожна з функцій $F_2, F_3, ..., F_{n+1}$ є аналітичною у півплощині
$\left\{z : -\varphi^* - \frac{\pi}{2\alpha} < \arg z < \pi - \varphi^* - \frac{\pi}{2\alpha}\right\}$ і за щойно встановленим

$$F_1(z) = -\sum_{k=2}^{n+1} F_k(z), \quad z \in \left\{z_1 : |\arg z_1 + \varphi^*| < \frac{\pi}{2\alpha}\right\},$$

тому F_1 аналітично продовжується в $D^-_\times$. Аналогічно функції $F_1, F_2, ..., F_n$ є аналітичними у півплощині $\left\{z : \pi - \varphi^* - \frac{\pi}{2\alpha} < \arg z < 2\pi - \varphi^* - \frac{\pi}{2\alpha}\right\}$, тому F_{n+1} аналітично продовжується в $D^-_\times$. Отже, $(F_1, ..., F_{n+1}) \in T^2_\sigma(D^-_\times)$.

Нехай тепер навпаки $(F_1, ..., F_{n+1}) \in T^2_\sigma(D^-_\times)$ Позначимо доданки із правої частини 6.5 через $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n+1}$. Оскільки $F_1(z)e^{a_1 z} \in L^2(\{re^{-i\varphi_1} : r > 0\})$ то за теоремою Пелі-Вінера функція ψ_1 належить класу Гарді у півплощині $\{w : \alpha_1 < \arg(w - a_1) < \pi + \alpha_1\}$. Аналогічно, оскільки $F_{n+1}(z)e^{a_n z} \in L^2(\{re^{-i\varphi_{n+1}} : r > 0\})$, то ψ_{n+1} належить класу Гарді у півплощині $\{w : \alpha_{n+1} < \arg(w - a_n) < \pi + \alpha_{n+1}\}$. Далі,

$$F_j(z)\exp\left(\frac{a_j + a_{j-1}}{2}\right) \in L^2\left(\{re^{-i\varphi_j} : r > 0\}\right), \quad j \in \overline{2;n},$$

тому ψ_j належить класу Гарді у півплощині

$$\left\{w : \alpha_j < \arg\left(w - \frac{a_j + a_{j-1}}{2}\right) < \pi + \alpha_j\right\}.$$

Отже, функція

$$\psi = \sum_{j=1}^{n+1} \psi_j$$

належить класу $E^2[D_\sigma]$. Залишилось показати, що $f = \psi$, якщо F визначена рівністю 6.4. За теоремою Пелі-Вінера для кутових граничних значень ψ_1 на l_1 справедлива рівність (інтеграл розуміється в L^2-метриці)

$$\psi_1(w) = \frac{-e^{-i\varphi_1}}{i\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} F_1\left(re^{-i\varphi_1}\right) e^{\left(re^{-i\varphi_1}\right)w} dr.$$

Оскільки кожна функція F_j, $j = \overline{1;n}$, є цілою з індикатором (див. [45])

$$h_j(\varphi) = \frac{|a_j - a_{j-1}|}{2} |\sin(\varphi + \varphi_j)|$$
$$+ \frac{|a_j + a_{j-1}|}{2} \cos\left(\arg\frac{a_j + a_{j-1}}{2} + \varphi\right),$$

то функція ψ_j допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину за винятком відрізка $[a_{j-1}; a_j]$ і її аналітичне продовження у півплощину $\{w : |w| \cos(\arg w - \varphi_{n+1}) < A_j\}$, де

$$A_j = -\frac{|a_j - a_{j-1}|}{2} |\sin(\varphi_j - \varphi_{n+1})|$$
$$- \frac{|a_j + a_{j-1}|}{2} \cos\left(\arg\frac{a_j + a_{j-1}}{2} - \varphi_{n+1}\right)$$

дається рівністю

$$\psi_j(w) = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi_{n+1}} \int_0^{+\infty} F_j(re^{-i\varphi_{n+1}}) e^{re^{-i\varphi_{n+1}}w} dr.$$

Але майже скрізь на $\partial D_\times$ виконується $\sum\limits_{j=2}^{n+1} F_j(z) = -F_1(z)$. Тому кутові граничні значення функції ψ на l_1 майже скрізь рівні

$$-\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\times^-} F_1(z)e^{wz}dz,$$

де інтеграл береться в додатному обході області $D_\times^-$. За теоремою типу Планшереля (див. [34], с.432) останній інтеграл рівний $f(w)$, $w \in l_1$. А за теоремою Лузіна-Прівалова [53], с.292 функція f співпадає з ψ на $D_\times^-$. $\square$

6.2 Рівняння типу згортки у необмеженій багатокутній області

У цьому підрозділі розглядаємо властивості рівняння типу згортки у необмеженій багатокутній області.

Теорема 6.2 (Рівність Парсеваля). *Нехай* $f \in E^2[D]$, $g \in E_*^2[D]$ *і* $\varphi_j = \alpha_j - \pi/2$. *Тоді*

$$\int\limits_{\partial D} f(w)g(w)dw = \sum_{j=1}^{n+1} \int\limits_{0}^{+\infty e^{-i\varphi_j}} F_j(z)G(z)dz,$$

де функції G *та* F_j *визначаються відповідно рівностями* (6.3) *і* (6.4).

Доведення. Позначимо

$$f_1^*(a_1 + re^{i\alpha_1}) = \begin{cases} f(a_1 + re^{i\alpha_1}), r \leqslant 0, \\ 0, r > 0, \end{cases}$$

$$F_1^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(a_1 + re^{i\alpha_1})e^{-itr}dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} f(a_1 + re^{i\alpha_1})e^{-itr}dr,$$

$$G_1^*(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(a_1 + re^{i\alpha_1})e^{itr}dr. \tag{6.6}$$

Тоді, використавши рівність Парсеваля, отримаємо

$$\int\limits_{l_1} f(w)g(w)dw = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(a_1 + re^{i\alpha_1})g(a_1 + re^{i\alpha_1})e^{i\alpha_1}dr =$$

$$= e^{i\alpha_1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(t) G_1^*(t) dt. \qquad (6.7)$$

Але

$$F_1^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{l_1} f(w) e^{-it(w-a)e^{-i\alpha_1}} d((w-a_1)e^{-i\alpha_1}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha_1} e^{ita_1 e^{-i\alpha_1}} \int\limits_{l_1} f(w) e^{-itwe^{-i\alpha_1}} dw.$$

Тому

$$F_1^*(-ite^{i\alpha_1}) = e^{-i\alpha_1} e^{ta_1} \int\limits_{l_1} f(w) e^{-tw} dw.$$

Звідси за теоремою Пелі-Вінера, на підставі останньої рівності з (6.4), маємо, що для майже всіх $t \in \mathbb{R}$ функція $F_1^*(te^{i\alpha_1 - \frac{\pi}{2}})$ співпадає з кутовими граничними значеннями на прямій $\left\{z : z = te^{i\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right)}\right\}, t \in \mathbb{R}$, функції $e^{za_1 - i\alpha_1} F_1(z)$. Формула (6.2) залишається справедливою, і коли $|\theta_* - \pi + \varphi_*| = \frac{\pi}{2\alpha}$; в останньому випадку під $G(z)$ розуміємо відповідні кутові граничні значення функції G на ∂D_*. Тому, зокрема, при $\theta_* = \pi - \varphi_* + \frac{\pi}{2\alpha}$ одержимо

$$g(w) = \frac{e^{\pi - \varphi_* + \frac{\pi}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(re^{\pi - \varphi_* + \frac{\pi}{2\alpha}}) e^{-r \exp\left(i(\pi - \varphi_* + \frac{\pi}{2\alpha})\right) w} dr, w \in \pi_*(l_1).$$

Оскільки $\varphi_* = \alpha_1 + \pi - \frac{\pi}{2\beta}$, то $\pi - \varphi_* + \frac{\pi}{2\alpha} = -\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$. Отже,

$$g(a_1 + \rho e^{i\alpha_1}) = \frac{e^{-i\varphi_1}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(re^{-i\varphi_1}) e^{-re^{-i\varphi_1}(a_1 + \rho e^{i\alpha_1})} dr =$$

$$= \frac{e^{-i\varphi_1}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(re^{-i\varphi_1}) e^{-a_1 re^{-i\varphi_1}} e^{-i\rho r} dr.$$

Оскільки $h(-\varphi_1) = \sup\limits_{z\in\overline{D}}\left\{\mathrm{Re}\left(ze^{-i\left(\alpha_1-\frac{\pi}{2}\right)}\right)\right\} = \mathrm{Re}\left(a_1e^{-i\varphi_1}\right) = \mathrm{Re}\,a_1\cos\varphi_1+\mathrm{Im}\,a_1\sin\varphi_1$, то $G(re^{-i\varphi_1})e^{-a_1re^{-i\varphi_1}} \in L^2(0;+\infty)$. Тому, врахувавши, що функція g належить до простору Гарді H^2 у півплощині $\pi_*(l_1)$, за теоремою Пелі-Вінера та оберненою формулою для перетворення Лапласа маємо

$$G(re^{-i\varphi_1})e^{-a_1re^{-i\varphi_1}} = \frac{e^{i\varphi_1}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(a_1+\rho e^{i\alpha_1})e^{ir\rho}d\rho, r>0.$$

Порівнявши останню рівність з (6.7), одержимо
$G_1^*(t) = iG(te^{-i\varphi_1})e^{-a_1te^{-i\varphi_1}}e^{-i\varphi_1}$ для майже всіх $t \geqslant 0$. Крім того, оскільки g належить до простору Гарді у півплощині $\pi^*(l_1)$, то [19], с.88 з (6.7) маємо $G_1^*(t)=0$ для всіх $t<0$. Отже, з (6.7) отримаємо

$$\int\limits_{l_1} f(w)g(w)dw = e^{i\alpha_1}\int\limits_0^{+\infty} F_1(te^{-i\varphi_1})G(te^{-i\varphi_1})e^{-i\alpha_1}e^{-i\varphi_1}dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty e^{-i\varphi_1}} F_1(z)G(z)dz.$$

Аналогічно, позначивши

$$f_{n+1}^*(a_n+re^{i\alpha_{n+1}}) = \begin{cases} f_{n+1}(a_n+re^{i\alpha_{n+1}}), r\geqslant 0,\\ 0, r<0,\end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_{n+1}^*(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(a_n+re^{i\alpha_{n+1}})e^{-itr}dr,\\ G_{n+1}^*(t) &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} g(a_n+re^{i\alpha_{n+1}})e^{itr}dr, \end{aligned} \tag{6.8}$$

одержимо

$$\int\limits_{l_{n+1}} f(w)g(w)dw$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^*_{n+1}(a_n + re^{i\alpha_{n+1}})g(a_n + re^{i\alpha_{n+1}})e^{i\alpha_{n+1}}dr = \tag{6.9}$$

$$= \frac{e^{i\alpha_{n+1}}}{i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^*_{n+1}(t)G^*_{n+1}(t)dt.$$

Але

$$F^*_{n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{l_{n+1}} f(w)e^{-it(w-a_n)e^{-i\alpha_{n+1}}} d\left((w-a_n)e^{-i\alpha_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha_{n+1}} e^{ita_n e^{-i\alpha_{n+1}}} \int\limits_{l_{n+1}} f(w)e^{-itwe^{-i\alpha_{n+1}}}dw.$$

Тому

$$F^*_{n+1}(-ite^{i\alpha_{n+1}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha_{n+1}} e^{ta_n} \int\limits_{l_{n+1}} f(w)e^{-tw}dw.$$

За теоремою Пелі-Вінера маємо, порівнявши останню рівність з другою рівністю (6.8), що функція $F^*_{n+1}(te^{i\left(\alpha_{n+1}-\frac{\pi}{2}\right)})$ співпадає з кутовими граничними значеннями на прямій $\left\{z : z = te^{i\left(\alpha_{n+1}-\frac{\pi}{2}\right)}, t \in \mathbb{R}\right\}$ функції $e^{-i\alpha_{n+1}}e^{za_n}F_{n+1}(z)$. Далі, поклавши в (6.2) $\theta_* = \pi - \varphi_* - \frac{\pi}{2\alpha}$, маємо при $w \in \pi_*(l_{n+1})$

$$g(w) = \frac{e^{i\left(\pi-\varphi_*-\frac{\pi}{2\alpha}\right)}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} G(re^{i\left(\pi-\varphi_*-\frac{\pi}{2\alpha}\right)})e^{-r\exp\left(i\left(\pi-\varphi_*-\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)w}dr.$$

Оскільки $\pi - \varphi_* - \frac{\pi}{2\alpha} = -\varphi_{n+1}$, то

$$g(a_n + \rho e^{i\alpha_{n+1}}) = \frac{e^{-i\varphi_{n+1}}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(re^{-i\varphi_{n+1}}) e^{-re^{-i\varphi_{n+1}}(a_n+\rho e^{i\alpha_{n+1}})} dr =$$

$$\frac{e^{-i\varphi_{n+1}}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(re^{-i\varphi_{n+1}}) e^{-a_n re^{-i\varphi_{n+1}}} e^{-ir\rho} dr.$$

Врахувавши, що $h(-\varphi_{n+1}) = \left\{ \mathrm{Re}\left(ze^{-i\left(\alpha_{n+1}-\frac{\pi}{2}\right)}\right) : z \in \overline{D} \right\} = \mathrm{Re}\left(a_n e^{-i\varphi_{n+1}}\right) = \mathrm{Re}\, a_n \cos\varphi_{n+1} + \mathrm{Im}\, a_n \sin\varphi_{n+1}$, одержимо $G(re^{-i\varphi_{n+1}}) e^{-a_n re^{-i\varphi_{n+1}}} \in L^2(0; +\infty)$. Оскільки функція g належить до простору Гарді H^2 у півплощині $\pi_*(l_{n+1})$, за теоремою Пелі-Вінера та оберненою формулою для перетворення Лапласа знову маємо

$$G(re^{-i\varphi_{n+1}}) e^{-a_n re^{-i\varphi_{n+1}}} = \frac{e^{i\varphi_{n+1}}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(a_n + \rho e^{i\alpha_{n+1}}) e^{ir\rho} d\rho, r > 0.$$

Порівнявши цю рівність з (6.8) і врахувавши, що $G^*_{n+1}(t) = 0$ для всіх $t < 0$, з (6.9) одержимо

$$\int\limits_{l_{n+1}} f(w) g(w) dw = \int\limits_0^{+\infty e^{-i\varphi_{n+1}}} F_{n+1}(z) G(z) dz.$$

Нехай

$$f^*_j(a_{j-1}+re^{i\alpha_j}) = \begin{cases} f(a_{j-1} + re^{i\alpha_j}), r \in [0; |a_j - a_{j-1}|], \\ 0, r \in \mathbb{R} \setminus [0; |a_j - a_{j-1}|], \end{cases} \qquad j \in \overline{2; n},$$

$$F^*_j(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^*_j(a_{j-1} + re^{i\alpha_j}) e^{-itr} dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{|a_j - a_{j-1}|} f_j^*(a_{j-1} + re^{i\alpha_j}) e^{-itr} dr,$$

$$G_j^*(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(a_{j-1} + re^{i\alpha_j}) e^{itr} dr. \tag{6.10}$$

За рівністю Парсеваля отримаємо

$$\int\limits_{l_j} f(w) g(w) dw = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_j^*(a_{j-1} + re^{i\alpha_j}) g(a_{j-1} + re^{i\alpha_j}) e^{i\alpha_j} dr =$$

$$= \frac{e^{i\alpha_j}}{i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_j^*(t) G_j^*(t) dt, j \in \overline{2; n}.$$

Але

$$F_j^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{l_j} f(w) e^{-it(w - a_{j-1})e^{-i\alpha_j}} d\left((w - a_{j-1}) e^{-i\alpha_j}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha_j} e^{ita_{j-1}e^{-i\alpha_j}} \int\limits_{l_j} f(w) e^{-itwe^{-i\alpha_j}} dw.$$

За іншою теоремою Пелі-Вінера 1.4

$$F_j^*(t) = e^{-i\alpha_j} e^{ita_{j-1}e^{-i\alpha_j}} F_j\left(te^{-i\left(\alpha_j - \frac{\pi}{2}\right)}\right), t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $g \in \pi_*(l_j)$, то $G_j^*(t) = 0$, $t < 0$. Взявши в (6.2) $\theta_* = -\varphi_j$, одержимо

$$g(w) = \frac{e^{-i\varphi_j}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(re^{-i\varphi_j}) e^{-re^{-i\varphi_j} w} dr.$$

Тому

$$g(a_{j-1}+\rho e^{i\alpha_j})=\frac{e^{-i\varphi_j}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}G(re^{-i\varphi_j})e^{-re^{-i\varphi_j}(a_{j-1}+\rho e^{i\alpha_j})}dr=$$

$$=\frac{e^{-i\varphi_j}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}G(re^{-i\varphi_j})e^{-a_{j-1}re^{-i\varphi_j}}e^{-i\rho r}dr.$$

Оскільки $h(-\varphi_j)=\sup\left\{\mathrm{Re}\left(ze^{-i\varphi_j}\right):z\in\overline{D}\right\}=\mathrm{Re}\left(a_{j-1}e^{-i\varphi_j}\right)$, то $G(re^{-i\varphi_j})e^{-a_{j-1}re^{-i\varphi_j}}\in L^2(0;+\infty)$. Тому на підставі теореми Пелі-Вінера

$$G(re^{-i\varphi_j})=e^{-a_{j-1}re^{-i\varphi_j}}\frac{e^{i\varphi_j}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(a_{j-1}+\rho e^{i\alpha_j})e^{ir\rho}d\rho,r>0.$$

Порівнявши останню рівність з (6.10), одержимо

$$\int\limits_{l_j}f(w)g(w)dw=\int\limits_0^{+\infty e^{-i\varphi_j}}F_j(z)G(z)dz,j\in\overline{2;n}.$$

$\square$

Далі під $\mathbb{C}(\alpha;\alpha)$ розуміємо порожню множину, а під $\overline{\mathbb{C}(\alpha;\alpha)}$ – промінь $\{z:z=re^{i\alpha},r>0\}$.

Теорема 6.3. *Якщо $f\in E^2[D]$ і $g\in E_*^2[D]$, то для кожного $\tau\in\overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1};\pi+\alpha_1)}$ справджується рівність*

$$\int\limits_{\partial D}f(w+\tau)g(w)dw=\sum_{j=1}^{n+1}\int\limits_0^{+\infty e^{-i\varphi_j}}\Phi_j(z)e^{\tau z}dz,$$

де $\Phi_j=F_jG,j\in\overline{1;n+1}$, функції F_j та G визначені рівностями (6.4) та (6.3).

Доведення. Зазначимо спочатку, що

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial D} f(w+\tau)g(w)dw &= \int\limits_{\partial D(\tau)} f(w)g(w-\tau)dw\\ &= \int\limits_{\partial D} f(w)g(w-\tau)dw,\ \tau\in\overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1};\pi+\alpha_1)},\end{aligned}\tag{6.11}$$

де $D(\tau)=\{z: z-\tau\in D\}$. Справді, перша із рівностей (6.11) є очевидною. Для доведення другої зауважимо, що функція $\eta_\tau(w)=f(w)g(w-\tau)$ для будь-якого $\tau\in\overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1};\pi+\alpha_1)}$ є аналітичною в області $D\backslash\overline{D(\tau)}$. Цю область можна подати у вигляді об'єднання скінченної кількості многокутників та півсмуг, у кожній з яких функція $\eta_\tau(w)$ належить до класу Гарді-Смірнова E_1. Тому [53], с.205, [10]

$$\int\limits_{\partial\left(D\backslash\overline{D(\tau)}\right)} \eta_\tau(w)dw=0.$$

Звідси випливає друга рівність (6.11). Далі, якщо $g_\tau(w)=g(w-\tau)$, для будь-якого $\tau\in\overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1};\pi+\alpha_1)}$, маємо $g_\tau\in E_*^2[D]$. Оскільки $e^{wz}\in E^2[D]$ для кожного $z\in D_\times$, то з (6.11) отримаємо

$$\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\partial D} g_\tau(w)e^{wz}dw=e^{\tau z}G(z).\tag{6.12}$$

Тому потрібне випливає з попередньої теореми. □

Теорема 6.4. *Нехай функція G визначена рівністю* (6.3). *Тоді рівняння*

$$\int\limits_{\partial D} f(w+\tau)g(w)dw=0,\tag{6.13}$$

де $\tau\in\overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1};\pi+\alpha_1)}$, має ненульовий розв'язок $f\in E^2[D]$,

$f \not\equiv 0$, тоді і тільки тоді, коли система $\{g(w-\tau) : \tau \leqslant 0\}$ не є повною в $E^2_*[D]$.

Доведення. Справді, з (6.11) випливає, що рівняння (6.13) рівносильне рівнянню

$$\int\limits_{\partial D} f(w)g(w-\tau)dw = 0, \tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1}; \pi + \alpha_1)}.$$

Але за лемою 4 з [8] простір, спряжений (сильно) до $E^2_*[D]$, можна ототожнити з $E^2[D]$ і значення функціоналу $f \in E^2[D]$ на елементі $g(w-\tau)$ визначається формулою

$$\langle f; g(w-\tau)\rangle = \int\limits_{\partial D} f(w)g(w-\tau)dw.$$

Тому потрібне випливає з відомого критерію повноти Банаха.

$\square$

Теорема 6.5. *Нехай функція G визначена рівністю* (6.3). *Тоді рівняння* (6.13), *в якому $\tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1}; \pi + \alpha_1)}$, має ненульовий розв'язок $f \in E^2[D]$ тоді і тільки тоді, коли система $\left\{G(z)e^{\tau z} : \tau \in \overline{\mathbb{C}(\alpha_{n+1}; \pi + \alpha_1)}\right\}$ не є повною в $H^2(D_\times, h)$.*

Доведення. В [8] показано, що рівність (6.13) задає топологічне відображення $E^2_*[D]$ на $H^2(D_\times, h)$ а з (6.12) маємо, що образом функції $g(w-\tau)$ є функція $G(z)e^{\tau z}$. Отже, теорема випливає з попередньої теореми. $\square$

Приклад 6.1. *Нехай $D = \{z : |\pi - \arg z| < \pi/2\delta\}$, $\delta > 0$. Тоді $n = 1$, $a_1 = 0$, $\alpha_1 = \pi/2\delta$, $\alpha_2 = \pi - \pi/2\delta$. Тому $\beta = \delta$, $\alpha = \delta/(\delta-1)$, $\varphi_* = 0$. Отже, в цьому випадку $D_\times = \left\{z : |\arg z| < \pi/2\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)\right\}$, а функції F_1 та F_2 належать до просторам Гарді відповідно у півплощинах*

$\{z : \pi/2 + \pi/2\delta < \arg z < 3\pi/2 + \pi/2\delta\}$ *та* $\{z : \pi/2 - \pi/2\delta < \arg z < 3\pi/2 - \pi/2\delta\}$. *Ймовірно, теореми 6.2 та 6.3 для цього випадку є відомими, проте нам не вдалося знайти такі твердження у публікаціях.*

Приклад 6.2. *Нехай* $D_\sigma = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma, \operatorname{Re} z < 0\}$, $\sigma > 0$. *Тоді* $n = 2$, $a_1 = -\sigma$, $a_2 = \sigma$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$. *Тому* $\beta = 0$, $\alpha = +\infty$, $\varphi_* = 0$. *Отже, в цьому випадку* $D_\times = \{z : |\arg z - \pi| < \pi/4\} = \mathbb{C}_-$, *функції* $F_1(z)e^{-i\sigma z}$ *та* $F_3(z)e^{i\sigma z}$ *належать до просторам Гарді у півплощині* $\mathbb{C}_-$, *а* F_2 *є цілою функцією експоненціального типу* $\leq \sigma$, *що* $F_2 \in L^2(\mathbb{R})$. *Теореми 6.2 та 6.3 для цього випадку встановлені в [14].*

6.3 Висновки до розділу 6

Простори аналітичних функцій найчастіше вивчаються у класичних областях комплексної площини: півплощині, крузі, смузі, півсмузі. При накопиченні результатів одного типу виникає потреба сформулювати їх в загальному виді. Як правило, при цьому використовуються області досить загального вигляду. Ми в цьому розділі поширюємо на випадок необмеженої багатокутної області деякі результати Б. В. Винницького та М. М. Джрбашяна. Одержано такі твердження:

- встановлено бієкцію між простором Гарді-Смірнова у необмеженій n-кутній опуклій області та простором $T^2(D^-_\times)$, що складається з впорядкованих наборів $n+1$ функцій спеціального виду;
- отримано аналог рівності Парсеваля для просторів Гарді-Смірнова у необмежених багатокутних областях;
- отримано аналог теореми про згортку для просторів Гарді-Смірнова у необмежених багатокутних областях;
- встановлено критерій існування нетривіальних розв'язків рівняння типу згортки для просторів Гарді-Смірнова в багатокутних необмежених областях в термінах повноти системи зсувів.

РОЗДІЛ 7

Застосування одержаних результатів

7.1 Еквівалентне формулювання гіпотези Рімана

Функція Рімана ζ визначається рядом Діріхле

$$\zeta(s)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^s}, \tag{7.1}$$

який збігається для $\mathrm{Re}(s)>1$ і аналітично продовжується на всю комплексну площину крім точки $s=1$, в якій має простий полюс з лишком 1. Гіпотеза Рімана полягає в тому, що всі недійсні нулі дзета-функції ζ лежать на прямій $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$.

Ж.-Ф. Бурноль одержав [84], використовуючи ідеї Німана і Бьорлінга-Лакса, наступний результат.

Теорема 7.1. *Гіпотеза Рімана справедлива тоді і тільки тоді, коли функція* $\frac{z-1/2}{(z+1/2)^2}\zeta(z+1/2)$ *є циклічною в* $H^2(\mathbb{C}_+)$.

7.1.1 Ваговий випадок

Ми одержали наступне твердження.

Теорема 7.2. *Нехай* G_1 *– аналітична в* $\mathbb{C}_+$ *функція, інтегральна гранична функція якої є сталою,* G_1 *має єдиний простий нуль в точці* $z=1/2$, $G_1(z)\zeta(z+1/2)\in H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$, $\widehat{\sigma}>0$

і

$$\liminf_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G_1(it)|\,dt-\frac{\widehat{\sigma}}{\pi}\ln r\right)=-\infty. \tag{7.2}$$

Тоді наступні твердження є еквівалентними:

1) справджується гіпотеза Рімана;

2) $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ *– циклічна функція в* $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *для кожного* $\sigma \ge \widehat{\sigma}$*.*

Доведення. 1) $\Rightarrow$ 2) : В [111], с. 116 доведена оцінка

$$|\zeta(it+1/2)|=O(\log^{2/3}|t|),\ t\to+\infty.$$

З цього випливає, що

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|\zeta(it+1/2)|\,dt<+\infty.$$

З цієї нерівності та (7.2), одержимо

$$\liminf_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G_1(it)\zeta(it+1/2)|\,dt -\frac{\widehat{\sigma}}{\pi}\ln r\right)=-\infty. \tag{7.3}$$

Якщо гіпотеза Рімана виконується, то $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$. Очевидно, ζ є аналітичною в смузі $\{z: 0<\operatorname{Re} z<1\}$, тому інтегральна гранична функція функції $\zeta(z+1/2)$ на $i\mathbb{R}$ є сталою. Отже, за умовами теореми інтегральна гранична функція функції $G_1(z)\zeta(z+1/2)\in H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$ – також константа. Врахувавши також умову (7.3), бачимо, що виконуються умови теореми 4.8 для функції $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ та простору $H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$. Тому $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ є циклічною в $H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$. Тоді виконується умова б) теореми 4.8 для функції $G(z) = G_1(z)\zeta(z+1/2)$ і числа $\sigma = \widehat{\sigma}$, тобто

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G_1(it)\zeta(it+1/2)|\,dt - \frac{\widehat{\sigma}}{\pi}\ln r\right) = -\infty.$$

Легко бачити, що остання умова справджується для всіх $\sigma \ge \widehat{\sigma}$. Оскільки G належить $H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$, то належить і $H^2_{\sigma}(\mathbb{C}_+)$. Тому за теоремою 4.8 робимо висновок, що G також є циклічною в $H^2_{\sigma}(\mathbb{C}_+)$.

2) $\Rightarrow$ 1) : Якщо $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ – циклічна в $H^2_{\widehat{\sigma}},(\mathbb{C}_+)$, то за теоремою 4.8 $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$. G_1 є аналітичною функцією в $\mathbb{C}_+$, зокрема, не має там особливих точок. Тому ζ не має жодного нуля в $\{z : \operatorname{Re} z > 1/2\}$. $\square$

Сформулюємо твердження, яке може бути цікавим для подальших досліджень дзета-функції Рімана.

Наслідок 7.1. *Нехай G_1 – аналітична функція в $\mathbb{C}_+$, інтегральна гранична функція якої є сталою, G_1 має єдиний простий нуль в $z = 1/2$, $G_1(z)\zeta(z+1/2) \in H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$, $\widehat{\sigma} > 0$, і справедлива рівність (7.2). Тоді твердження 1) попередньої теореми еквівалентне кожному із наступних тверджень:*

3) для кожного $\sigma \ge \widehat{\sigma}$ рівняння

$$\int\limits_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)\widetilde{g}(w)\,dw = 0, \tau \le 0, \tag{7.4}$$

де

$$\widetilde{g}(w) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} G_1(x)\zeta(x+1/2)e^{-xw}dx$$

не має жодного розв'язку $f \in E^2[D_\sigma]$ *крім тотожнього нуля;*

4) нема розв'язків вигляду $f(w) = e^{\lambda w}$, $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1/2$, *для рівняння (7.4) при кожному* $\sigma \geq \widehat{\sigma}$.

Доведення. Еквівалентність умов 2) і 3) показана в [10].
4) $\Rightarrow$ 2) : Якщо припустити, що $f(w) = e^{\lambda w}$ – розв'язок рівняння (7.4), то [14] λ є нулем функції $G_1(z)\zeta(z+1/2)$. Але за теоремою 4.8 функція $G_1(z)\zeta(z+1/2)$ не має нулів в $\mathbb{C}_+$. Суперечність. Імплікація 3) $\Rightarrow$ 4) тривіальна. □

З допомогою теореми 7.2 легко одержати наступні твердження.

Наслідок 7.2. *Гіпотеза Рімана справедлива тоді і тільки тоді, коли функція* $\frac{z-1/2}{(z+1/2)^2}\zeta(z+1/2)$ *є циклічною в* $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *для деякого* $\sigma \geq 0$.

Для випадку $\sigma = 0$ цей результат співпадає з теоремою Ж.-Ф. Бурноля 7.1.2.

Наслідок 7.3. *Гіпотеза Рімана справедлива тоді і тільки тоді, коли функція* $\zeta(z+1/2)(z-1/2)e^{-z}$ *є циклічною в* $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *для деякого* $\sigma > 0$.

Наслідок 7.4. *Гіпотеза Рімана справедлива тоді і тільки тоді, коли функція* $\zeta(z+1/2)(z-1/2)\exp\left(-\frac{2\sigma_1}{\pi}z\log z\right)$, $\sigma_1 > 0$, *є циклічною в* $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *для деякого* $\sigma > \sigma_1$.

Зазначимо, що як випливає з доведення теореми 7.2, вона може бути сформульованою у загальнішому вигляді, а саме замість дзета-функції Рімана можна розглянути деякий клас функцій, що її містить.

Теорема 7.3. *Нехай G_1 – аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція, інтегральна гранична функція якої є сталою, G_1 має єдиний простий нуль в $z = 1/2$, $G_1(z)\zeta(z+1/2) \in H^2_{\widehat{\sigma}}(\mathbb{C}_+)$, $\widehat{\sigma} > 0$ і виконується умова (7.2). Нехай також функція $\breve{\zeta}$ є аналітичною в $\{z : \operatorname{Re} z \geq 1/2\}\backslash\{1\}$, в точці $z = 1$ має простий полюс і*

$$\limsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln\left|\breve{\zeta}(it+1/2)\right| dt < +\infty.$$

Тоді наступні твердження є еквівалентними:

1) *функція $\breve{\zeta}$ не має жодного нуля у півплощині $\{z : \operatorname{Re} z > 1/2\}$;*
2) *$G_1(z)\breve{\zeta}(z+1/2)$ – циклічна функція в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\sigma \geq \widehat{\sigma}$.*

Існування нетривіального розв'язку рівняння (5.8) (частковим випадком якого є (7.4)) для деяких випадків (див. [10], [177]) є наслідком включень $f\,(w+\tau)\,g\,(w) \in E^1[D_\sigma]$ або $f\,(w+\tau)\,g\,(w) \in E^1_*[D_\sigma]$ (ми розглядаємо аналітичні продовження відповідно функцій f і g через ∂D_σ). Але якщо розв'язок породжений нулем функції G, то ситуація може бути дещо більш складною, на що вказує наступний приклад.

Приклад 7.1. *Існують функції $f \in E^2[D_\sigma]$ і $g \in E^2_*[D_\sigma]$, для яких справджується рівність (5.8), але $f\,(w+\tau)\,g\,(w) \notin E^1[D_\sigma]$ і $f\,(w+\tau)\,g\,(w) \notin E^1_*[D_\sigma]$.*

Доведення. Розглянемо функцію
$$G(z) = \frac{1-\cos\sigma z}{z} \in H^2_\sigma\left(\mathbb{C}_+\right).$$
Тоді одержимо, що
$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos\sigma x}{x}e^{-wx}dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\ln\left(1+\frac{\sigma^2}{w^2}\right), \mathrm{Re}\, w > 0,$$
(див. [93], 861.03). Легко бачити, що $z_1 = \frac{2\pi}{\sigma}$ є нулем функції G. Особливими точками функції g є точки $w_{1,2} = \pm i\sigma$ і $w_3 = 0$. Функція $f(w) = e^{\frac{2\pi}{\sigma}}w \in E^2[D_\sigma]$ – розв'язок рівняння (5.8) (див. [14]). Якщо $w = u, u > 0$, то
$$f\left(u\right)g\left(u\right) = e^{\frac{2\pi}{\sigma}u}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\ln\left(1+\frac{\sigma^2}{u^2}\right) \sim e^{\frac{2\pi}{\sigma}u}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma^2}{u^2} = c\frac{e^{\frac{2\pi}{\sigma}u}}{u^2} \to \infty,$$
для $u \to \infty$. Тому $f\left(u\right)g\left(u\right) \notin L^1\left(0;+\infty\right)$, з чого випливає, що $f(w)g(w) \notin E^1_*[D_\sigma]$ для всіх $\sigma > 0$. Оскільки g не є цілою, також умова $f\left(w\right)g\left(w\right) \in E^1\left[D_\sigma\right]$ не виконується. $\square$

Цей приклад ілюструє труднощі, з якими стикаємося при спробі довести гіпотезу Рімана з допомогою умови 3) наслідку 7.1.

7.1.2 Неваговий випадок

Поняття циклічності в (звичайному) просторі Гарді має деякі якісні відмінності від поняття цикличності у ваговому випадку. Зокрема, циклічні функції в просторі $H^2_\sigma\left(\mathbb{C}_+\right)$, $\sigma > 0$, (але не в $H^2(\mathbb{C}_+)$) володіють "властивістю сильної немінімальності". Під цим ми розуміємо той факт, що система
$\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ повна в $H^2_\sigma\left(\mathbb{C}_+\right)$ тоді і тільки тоді, коли система $\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le \tau_0\}$ повна для довільного $\tau_0 < 0$. Це означає, що справедливість гіпотези Рімана випливає з повноти

системи, яка містить "набагато менше функцій" ніж система $\{G(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\}$, що фактично фігурує в вищенаведених наслідках. У зв'язку з зазначеними відмінностями в апроксимативних властивостях систем у випадках $\sigma = 0$ та $\sigma > 0$ певний інтерес становить переформулювання гіпотези Рімана у термінах зсувів у просторах L^p. На основі теореми Бьорлінга-Лакса 1.6 можна одержати твердження, формулювання якого в літературі у наведеному вигляді нам знайти не вдалося.

Теорема 7.4. *Наступні умови еквівалентні:*

1. *справедлива Гіпотеза Рімана;*
2. *функція*
$$\frac{z-1/2}{(z+1/2)^2}\zeta(z+1/2)$$
є зовнішньою для $H^2(\mathbb{C}_+)$;
3. *рівняння*
$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(u+\tau)\left(g_\zeta^+(u) - g_\zeta^-(u)\right) du = 0, \tau \leq 0 \qquad (7.5)$$
де g_ζ^+ *- кутові граничні значення на дійсній осі функції* g_ζ *з півплощини* $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, g_ζ^- *– кутові граничні значення на дійсній осі функції* g_ζ *з півплощини* $\{w : \operatorname{Im} w < 0\}$,
$$g_\zeta(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x-1/2}{(x+1/2)^2}\zeta(x+1/2)e^{-xw}dx$$
має лише нульовий розв'язок в просторі $L^2(-\infty;0)$;
4. *рівняння (7.5) не має розв'язків вигляду* $f(w) = e^{zw}$, $0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$;

5. *функція*
$$\frac{z-1/2}{(z+1/2)^2}\zeta(z+1/2)$$
є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$;

6. *система функцій* $\{g_\zeta(w-\tau:\tau\le 0)\}$ *є повною у просторі* $E^2_*[D_0]$;

Еквівалентність умов 1) і 2) показана Ж.-Ф. Бурнолем (див. теорему), еквівалентність умов 3), 5), 6) та умови 2) випливає з теореми Берлінга-Лакса, а еквівалентність 3) і 4) – з наступної леми.

Лема 7.1. *Функція* $f(u)=e^{\lambda u}, \lambda\in\mathbb{C}_+$ *тоді і тільки тоді є розв'язком рівняння (7.5), коли* λ *є нулем функції*

$$G(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\int\limits_{\partial D_0} g(w)\,e^{zw}dw=\frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\int\limits_{-\infty}^{0}(g^+(u)-g^-(u))e^{zu}du. \tag{7.6}$$

Функція $f(u)=u^{m-1}e^{\lambda u}$, $m\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{C}_+$, *є розв'язком рівняння (7.5) тоді і тільки тоді, коли в т.*λ *функція має нуль порядку* $k\ge m$.

Доведення. Нехай $\lambda\in\mathbb{C}_+$ і функція $f(u)=e^{\lambda u}$ є розв'язком рівняння (7.5), тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda(u+\tau)}\left(g^+(u)-g^-(u)\right)du=0,$$

тобто

$$e^{\lambda\tau}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda u}\left(g^+(u)-g^-(u)\right)du=0,$$

з чого маємо $G(\lambda) = 0$. Отже, λ є нулем функції .

Навпаки, нехай $G(\lambda) = 0, \lambda \in \mathbb{C}_+$, тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda u} \left(g^+(u) - g^-(u)\right) du = 0.$$

Помноживши останню рівність на $e^{\lambda\tau}$, маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda(u+\tau)} \left(g^+(u) - g^-(u)\right) du = 0.$$

Отже, функція $f(u) = e^{\lambda u}$ є розв'язком рівняння (7.5).

Нехай функція в т. λ має нуль порядку $k \geq m$, тоді

$$\alpha \int\limits_{-\infty}^{0} u^s \left(g^+(u) - g^-(u)\right) e^{zu} du = 0, \alpha \in \mathbb{C}_+, 0 \leq s \leq m-1.$$

$$\beta \int\limits_{-\infty}^{0} \tau^\nu \left(g^+(u) - g^-(u)\right) e^{\lambda\nu} du = 0, \beta \in \mathbb{C}_+, 0 \leq \nu \leq +\infty, \nu \leq 0,$$

тому, враховуючи формулу бінома Ньютона, отримаємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} (u+\tau)^{m-1} e^{\lambda(u+\tau)} \left(g^+(u) - g^-(u)\right) du = 0, \tau \leq 0.$$

Навпаки, якщо функція $u^2 e^{\lambda u}$ (обмежимось випадком $m = 3$, бо інші розглядаються подібно) є розв'язком рівняння (7.5), то

$$\int\limits_{-\infty}^{0} (u+\tau)^2 e^{\lambda(u+\tau)} \left(g^+(u) - g^-(u)\right) du = 0.$$

Тому $G''(\lambda) + 2\tau G'(\lambda) + \tau^2 G(\lambda) = 0$. Оскільки $\tau \leq 0$ довільне, то звідси послідовно отримуємо $G''(\lambda) = 0$, $G'(\lambda) = 0$ і $G(\lambda) = 0$. $\square$

7.2 Теорема про представлення для парних функцій

Множину всіх цілих функцій експоненційного типу $\sigma \in (0;+\infty)$, звуження яких на $\mathbb{R}$ належить до простору $L_2(\mathbb{R})$, позначимо через PW^2_σ, а клас парних функцій з PW^2_σ — через $PW^2_{\sigma,+}$. За теоремою Пелі-Вінера клас PW^2_σ складається з функцій G, які зображаються у вигляді

$$G(z) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz} g(t)dt, \quad g \in L_2(-\sigma;\sigma),$$

а клас $PW^2_{\sigma,+}$ — із функцій G, зображуваних у вигляді $G(z) = \mathrm{Co}_\sigma(g,z)$, $g \in L_2(0;\sigma)$, де

$$\mathrm{Co}_\sigma(g,z) = \int\limits_0^\sigma \cos(tz)g(t)dt.$$

Ми подамо опис класу $\widehat{\mathcal{E}}$ цілих функцій G, які зображаються у вигляді

$$G(z) = \int\limits_0^1 (\cos(tz) + tz\sin(tz))g(t)dt,\ g \in L_2(0;1). \tag{7.7}$$

Клас таких парних цілих функцій експоненційного типу $\sigma \le 1$, для яких функція

$$\frac{G(w) - G(0)}{w^2}$$

належить $L_1(\mathbb{R})$, функція

$$z\int\limits_z^{+\infty} \frac{G(w)}{w^2}dw$$

належить $L_2(0;+\infty)$ і виконується

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(w)-G(0)}{w^2}dw = 0, \tag{7.8}$$

позначимо через $\mathcal{E}$.

Теорема 7.5. *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) $G \in \widehat{\mathcal{E}}$*;*

2) $G \in \mathcal{E}$*;*

3) *рівняння*

$$f(z) - zf'(z) = G(z) \tag{7.9}$$

має на $(0;+\infty)$ *розв'язок* $f = F$*, що належить* $PW^2_{1,+}$*;*

4) G *— парна ціла функція і функція*

$$\widetilde{G}(z) := G(z) - z\int\limits_0^z \frac{G'(w)}{w}dw$$

належить до простору $PW^2_{1,+}$;

5) G *— парна ціла функція експоненційного типу* $\sigma \le 1$*, функція*

$$\frac{G(w)-G(0)}{w^2}$$

належить $L_1(\mathbb{R})$*, функція*

$$z\int\limits_z^{+\infty} \frac{G(w)}{w^2}dw$$

належить $L_2(0;+\infty)$ *і* $G(z) = G_1(z) + G_1(-z)$*, де* G_1 *— така ціла функція, що виконується*

$$|G_1(z)| \le c_1\,(1+|z|)\,/\sqrt{1+\operatorname{Im} z}, \quad Imz \ge 0. \tag{7.10}$$

Лема 7.2. *Умови 1) і 3) еквівалентні. Якщо ці умови виконані, то функція*

$$\frac{G'(z)}{z}$$

теж належить до простору $PW^2_{1,+}$ і g можна знайти за кожною з формул

$$g(t) = \frac{2}{\pi} Co_{+\infty}(F, t), \tag{7.11}$$

$$g(t) = \frac{2}{\pi t^2} Co_{+\infty}\left(\frac{G'(z)}{z}, t\right). \tag{7.12}$$

Доведення. Нехай функція G зображається у вигляді (7.7). Тоді $G'(z) = z\mathrm{Co}_1(t^2 g(t), z)$ і $G'(0) = 0$. За теоремою Пелі-Вінера функції

$$F(z) = \mathrm{Co}_1(g, z), \quad \frac{G'(z)}{z} = \mathrm{Co}_1(t^2 g(t), z) \tag{7.13}$$

належать $PW^2_{1,+}$ і

$$F(z) - zF'(z) = \mathrm{Co}_1(g, z) + z\int\limits_0^1 t\sin(tz)g(t)dt = G(z).$$

Тому необхідність доведено. Зворотньо, якщо $f = F$ — вказаний розв'язок рівняння (7.9), то теоремою Пелі-Вінера $f(z) = \mathrm{Co}_1(g, z)$, $g \in L_2(0; 1)$. Тому

$$G(z) = f(z) - zf'(z) = \mathrm{Co}_1(g, z) + z\int\limits_0^1 t\sin(tz)g(t)dt$$

і ми отримуємо зображення (7.7). Формули (7.11) та (7.12) випливають з рівностей (7.13) і формули для оберненого косинус-перетворення Фур'є. $\square$

Зауваження 7.1. *Множина всіх розв'язків рівняння* (7.9) *на проміжку* $(0;+\infty)$ *визначається формулою*

$$f(z) = -z\Phi(z) - Cz,$$

де C *— довільна стала і* $\Phi(z)$ *— одна з первісних функції* $z^{-2}G(z)$. *Якщо* G *— ціла функція (ціла функція експоненційного типу* σ*) і* $G'(0) = 0$, *то всі розв'язки рівняння* (7.9) *є цілими функціями (цілими функціями експоненційного типу* σ*). Серед цих розв'язків може існувати не більше одного з простору* $L_2(0;+\infty)$. *Важливо знайти відповідну формулу для його знаходження.*

Лема 7.3. *Умови 1) і 4) еквівалентні. Якщо ці умови виконані, то функцію* g *можна знайти за формулою* (7.11), *в якій* $F = \widetilde{G}$.

Доведення. Нехай функція G зображається у вигляді (7.7). Тоді

$$\int\limits_0^z \frac{G'(w)}{w}dw = \int\limits_0^1 t^2 \int\limits_0^z \cos(tw)dwg(t)dt = \int\limits_0^1 t\sin(tz)g(t)dt.$$

Це означає, що

$$\widetilde{G}(z) = \int\limits_0^1 (\cos(tz) + tz\sin(tz))g(t)dt - z\int\limits_0^1 t\sin(tz)g(t)dt = \mathrm{Co}_1(g,z).$$

Тому за теоремою Пелі-Вінера $\widetilde{G} \in PW^2_{1,+}$. До того ж, функція $f = \widetilde{G}$ є розв'язком рівняння (7.9). Тому на основі леми 7.2 приходимо до потрібного висновку. □

Лема 7.4. *Умови 1) і 2) еквівалентні.*

Доведення. Справді, нехай G належить класу $\widehat{\mathcal{E}}$,

$$F(z)=\mathrm{Co}_1(g,z),\quad F_1(z)=\int\limits_0^1 z\sin(tz)tg(t)dt.$$

За теоремою Пелі-Вінера функції $F(z)$ і $F_1(z)/z$ належать до простору Пелі–Вінера PW_1^2 і

$$F(z)=\int\limits_0^1\frac{e^{itz}}{2}g(t)dt+\int\limits_0^1\frac{e^{-itz}}{2}g(t)dt.$$

Проста оцінка з використанням нерівності Шварца показує, що

$$|G(z)|\le c_1\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}}(1+|z|),\quad z\in\mathbb{C}.$$

Отже, G є парною цілою функцією експоненційного типу $\sigma\le 1$. Далі,

$$\int\limits_x^{+\infty}\left|\frac{G(w)}{w}\right|^2dw\le 2\left(\int\limits_x^{+\infty}\left|\frac{F(w)}{w}\right|^2dw+\int\limits_x^{+\infty}\left|\frac{F_1(w)}{w}\right|^2dw\right)<+\infty$$

і з нерівності Шварца також отримаєм

$$\left|\int\limits_x^{+\infty}\frac{G(w)}{w^2}dw\right|\le\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int\limits_x^{+\infty}\left|\frac{G(w)}{w}\right|^2dw\right)^{1/2},\ x\in(0;+\infty).$$

Тому $\frac{G(w)}{w^2}$ належить $L_1(1;+\infty)$. Крім того, інтегруючи частинами, одержимо

$$\int\limits_0^z\frac{G'(w)}{w}dw=\frac{G(z)-G(0)}{z}+\int\limits_0^z\frac{G(w)-G(0)}{w^2}dw.$$

Тому

$$\widetilde{G}(z) = G(z) - z\int\limits_0^z \frac{G'(w)}{w}dw = G(0) - z\int\limits_0^z \frac{G(w)-G(0)}{w^2}dw$$

$$= -\frac{z}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(w)-G(0)}{w^2}dw + z\int\limits_z^{+\infty} \frac{G(w)}{w^2}dw, z \in (0;+\infty).$$

Оскільки всі написані інтеграли — збіжні, $\widetilde{G} \in L_2(0;+\infty)$ і $\int\limits_z^{+\infty} \frac{G(w)}{w^2}dw \to 0$, якщо $(0;+\infty) \ni z \to \infty$, то виконується (7.9) і функція $z\int\limits_z^{+\infty} \frac{G(w)}{w^2}dw$ належить $L_2(0;+\infty)$. Тому доведення необхідності завершено. Зворотньо, якщо відповідні умови теореми виконані, то $\widetilde{G}(z) = G(z) - z\int\limits_0^z \frac{G'(w)}{w}dw$ є функцією експоненційного типу $\sigma \le 1$ і

$$\widetilde{G}(z) = z\int\limits_z^{+\infty} \frac{G(w)}{w^2}dw, \quad z \in (0;+\infty).$$

Тому $\widetilde{G}$ належить $L_2(0;+\infty)$ і належить $PW^2_{1,+}$. Отже, на основі леми 7.3 приходимо до завершення доведення. □

Наслідок 7.5. *Якщо функція G належить $\widehat{\mathcal{E}}$, то*

$$|G(z)| \le c_1 \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}}\left(1+|z|\right), \ z \in \mathbb{C},$$

$$\int\limits_x^{+\infty} \left|\frac{G(w)}{w}\right|^2 dw < +\infty, \left|\int\limits_x^{+\infty} \frac{G(w)}{w^2}dw\right| < +\infty$$

для кожного $x \in (0;+\infty)$ і

$$\left|\int\limits_x^{+\infty} \frac{G(w)}{w^2}dw\right| = o\left(1/\sqrt{x}\right), x \to +\infty, \quad \lim_{x\to 0+} x\int\limits_x^{+\infty} \frac{G(w)}{w^2}dw = G(0).$$

Приклад 7.2. *Очевидно,* $\cos z \notin \widehat{\mathcal{E}}$.

Приклад 7.3. *Нехай* $\rho_k = \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi$ *і* $\Omega(z) = \cos z$. *Тоді функція*

$$\Omega_k(z) = \frac{\Omega(z)}{z^2 - \rho_k^2}$$

не належить до простору $\widehat{\mathcal{E}}$, *а функція*

$$T_k(z) = \frac{\Omega(z)}{z^2 - \rho_k^2}\left(1 - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\right), \ \alpha_k := -\frac{\rho_k - \sin\rho_k}{\rho_k^3},$$

належить $\widehat{\mathcal{E}}$.

Лема 7.5. *Нехай* $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ *— послідовність таких комплексних чисел, що* $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$. *якщо послідовність* $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, $\rho_{-k} = -\rho_k$, *є підпослідовністю нулів деякої парної цілої функції* D *і*

$$|D(z)| \leq c_1\left(|z|+1\right)^{\beta}\exp\left(|\operatorname{Im} z|\right), \ z \in \mathbb{C}, \ \beta < 3/2,$$

то для кожного $m \in \mathbb{Z}\backslash\{-1; 0; 1\}$, *існують такі числа* a *і* b, *що* $|a| + |b| \neq 0$ *і функція*

$$G(z) = b\frac{D(z)}{z^2 - \rho_m^2} - a\frac{D(z)}{z^2 - \rho_1^2},$$

належить до простору $\widehat{\mathcal{E}}$.

Доведення. Справді, функція G є парною цілою функцією експоненційного типу $\sigma \leq 1$. Оскільки $\beta < 3/2$ і

$$\varlimsup_{x\to 0+} x\int\limits_x^{+\infty}\frac{|G(w)|}{|w|^2}\,|dw| < +\infty,$$

то функція $z\int\limits_z^{+\infty}\frac{G(w)}{w^2}dw$ належить $L_2(0;+\infty)$. Нехай

$$\Omega_m(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_m^2}.$$

Тоді інтеграли

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(z)-G(0)}{z^2}dz, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega_m(z)-\Omega_m(0)}{z^2}dz$$

є збіжними і

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(z)-G(0)}{z^2}dz = b\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega_m(z)-\Omega_m(0)}{z^2}dz$$

$$-a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega_1(z)-\Omega_1(0)}{z^2}dz.$$

Тому числа a і b можна підібрати так, щоб $|a|+|b|\neq 0$ і

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(z)-G(0)}{z^2}dz = 0.$$

Звідси на основі леми 7.4 отримаємо потрібне. $\square$

Лема 7.6. *Умови 1) і 5) еквівалентні.*

Доведення. Справді, якщо $G\in\widehat{\mathcal{E}}$, то $G(z)=G_1(z)+G_2(z)$, де

$$G_1(z) := \int\limits_0^1 \left(\frac{e^{itz}}{2}+\frac{e^{itz}}{2i}zt\right) g(t)dt,$$

$$G_2(z) := \int\limits_0^1 \left(\frac{e^{-itz}}{2}-\frac{e^{-itz}}{2i}zt\right) g(t)dt.$$

При цьому $G_2(z)=G_1(-z)$ і за нерівністю Шварца

$$|G_1(z)| \leq \frac{1}{2}(1+|z|)\,\|g\| \left(\int\limits_0^1 e^{-2yt}dt\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}(1+|z|)\,\|g\|\left(\frac{1-e^{-2y}}{2y}\right)^{1/2}$$
$$\leq c_1(1+|z|)/\sqrt{1+\operatorname{Im} z}, \quad z = x+iy,$$

тому виконується нерівність (7.10). З іншого боку, якщо G задовільняє умови теореми, то функція

$$\frac{2G_1(z)-G(0)}{z^2}$$

є цілою,

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\int\limits_0^\pi G_1(re^{i\varphi})d\varphi = 0$$

і тому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(z)-G(0)}{z^2}dz = \int\limits_{(-\infty;-r]}\frac{2G_1(z)-G(0)}{z^2}dz$$
$$+\int\limits_\pi^0\frac{2G_1(re^{i\varphi})-G(0)}{r}e^{-i\varphi}id\varphi$$
$$+\int\limits_{[r;+\infty)}\frac{2G_1(z)-G(0)}{z^2}dz \to 0,\ (0;+\infty)\ni r\to+\infty.$$

Залишилось скористатися лемою 7.4. □

Зауваження 7.2. *Теорема 7.5 дає опис функцій G, для яких диференціальне рівняння (7.9) має розв'язок у відповідному просторі. Подібні задачі розглядаються в багатьох дослідженнях (див. [120]).*

7.3 Умови повноти та мінімальності

Спираючись на результати попереднього підрозділу, досліджуємо питання повноти і мінімальності однієї системи функцій.

Теорема 7.6. *Нехай* $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ *— довільна послідовність таких різних комплексних чисел, що* $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$, *якщо* $k \neq m$. *Система* $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$, $v_k(t) = \cos t\rho_k + t\rho_k \sin t\rho_k$ *є неповною в просторі* $L_2(0;1)$ *тоді і тільки тоді, коли послідовність* $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, *є підпослідовністю нулів деякої ненульової цілої функції* $G \in \mathcal{E}$.

Доведення. За відомим критерієм Банаха неповнота системи в просторі $L_2(0;1)$ рівносильна існуванню ненульової функціії $g \in L_2(0;1)$, для якої

$$\int\limits_0^1 (\cos(t\rho_k) + t\rho_k \sin(t\rho_k))g(t)dt = 0,$$

тобто існуванню цілої функції $G \neq 0$, яка зображається у вигляді (7.7) і має нулі у всіх точках ρ_k. $\square$

Теорема 7.7. *Нехай* $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ *— послідовність комплексних чисел таких, що* $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$, *якщо* $k \neq m$ *і послідовність* $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, *є послідовністю нулів деякої парної цілої функції* D *експоненційного типу* $\sigma \in [0;+\infty)$, *для якої при деякій сталій* $c_2 > 0$ *на променях* $\arg z = \varphi_j$, $j \in \{1;2;3;4\}$, $\varphi_1 \in [0;\pi/2)$, $\varphi_2 \in [\pi/2;\pi)$, $\varphi_3 \in [\pi;3\pi/2)$, $\varphi_4 \in [3\pi/2;2\pi)$, *виконується*

$$|D(z)| \geq c_2 (1 + |z|) \exp(\operatorname{Im}|z|).$$

Тоді система $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ *є повною у просторі* $L_2(0;1)$.

Доведення. Припустимо, що система не є повною. Тоді існує функція $G \in \mathcal{E}$, для якої послідовність $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, є підпослідовністю нулів. За наслідком 7.5 $|G(z)| \leq c_1 \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}} (1+|z|)$. Тому функція $T(z) = G(z)/D(z)$ — ціла функція, порядок якої не перевищує 1 і $|T(z)| \leq c_1/\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}$, $z \in \mathbb{C}$. У відповідності з принципом Фрагмена-Ліндельофа $T(z) \equiv 0$. Тому $G(z) \equiv 0$. Суперечність. □

Теорема 7.8. *Нехай $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ — послідовність таких комплексних чисел, що $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$, якщо $k \neq m$ і послідовність $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, є послідовністю нулів деякої парної цілої функції $D \notin \mathcal{E}$ експоненційного типу $\sigma \in [0; +\infty)$, для якої при деяких сталих $\alpha < 3/2$, $c_2 > 0$ і $r_0 \in \mathbb{R}$ на променях* $\arg z = \varphi_j$, $j \in \{1; 2; 3; 4\}$, $\varphi_1 \in [0; \pi/2)$, $\varphi_2 \in [\pi/2; \pi)$, $\varphi_3 \in (\pi; 3\pi/2]$, $\varphi_4 \in (3\pi/2; 2\pi)$, *виконується*

$$|D(z)| \geq c_2 (1+|z|)^{-\alpha} \exp(\operatorname{Im}|z|).$$

Тоді система $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в просторі $L_2(0;1)$.

Доведення. Припустимо, що система не є повною. Тоді існує функція $G \in \mathcal{E}$, для якої послідовність $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, є підпослідовністю нулів. З наслідку 7.5 одержуємо $|G(z)| \leq c_1 \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}} (1+|z|)$. Тому функція $T(z) = G(z)/D(z)$ є цілою функцією, порядок якої не перевищує 1 і $|T(z)| \leq c_1 (1+|z|)^{1+\alpha}/\sqrt{1+|\operatorname{Im} z|}$, $z \in \mathbb{C}$. За принципом Фрагмена-Ліндельофа T — многочлен степеня, меншого 2. Оскільки T — парна ціла функція, то T — стала. Отже, $D = c_2 G$, а тому $D \in \mathcal{E}$. Суперечність. □

Наслідок 7.6. *Нехай $\rho_k = \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi$. Тоді система $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ є повною у просторі $L_2(0;1)$.*

Доведення. Це твердження випливає з теореми 7.8, бо у відповідності до прикладу 7.3 функція $D(z) = \cos z$ задовільняє її умови. $\square$

Система $(v_k : k \in \mathbb{N})$ гільбертового простору називається мінімальною, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ елемент v_n не належить замиканню лінійної оболонки системи $\{v_k : k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{n\}\}$. Система є мінімальною тоді і тільки тоді, коли вона має біортогональну систему [56].

Теорема 7.9. *Нехай $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ — довільна послідовність таких різних комплексних чисел, що $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$, якщо $k \neq m$. Якщо послідовність $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ є підпослідовністю нулів такої парної функції D, яка у всіх точках $\rho_k \neq 0$ має прості нулі, а в точці $z = 0$ має, можливо, нуль кратності $m \leq 2$, для деяких $\alpha_k \in \mathbb{C}$ і $s \in \mathbb{C}$, $s^2 \neq \rho_\nu^2$ для всіх $\nu \in \mathbb{N}$, функція $T_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2}\left((z^2 - s^2) - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\right)$ або функція $\widetilde{T}_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2}\left(1 - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\right)$ належить до простору $\mathcal{E}$, то система $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ має в просторі $L_2(0;1)$ біортогональну систему $(g_k : k \in \mathbb{N})$ і її, зокрема, складають функції g_k, визначені формулою $\bar{g}_k(t) = \frac{2}{\pi t^2} Co_1\left(\frac{D_k'(z)}{z}, t\right)$, де*

$$D_k(z) = \frac{D(z)}{\xi_k(z^2 - \rho_k^2)}\left((z^2 - s^2) - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\right),$$

$$\xi_k = \begin{cases} \frac{D'(\rho_k)}{2\rho_k}(\rho_k^2 - s^2), \rho_k \neq 0, \\ \frac{D''(\rho_k)}{2}(\rho_k^2 - s^2), \rho_k = 0. \end{cases}$$

або, відповідно,

$$\widetilde{D}_k(z) = \frac{D(z)}{\xi_k(z^2 - \rho_k^2)}\left(1 - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\right), \quad \xi_k = \begin{cases} \frac{D'(\rho_k)}{2\rho_k}, \rho_k \neq 0, \\ \frac{D''(\rho_k)}{2}, \rho_k = 0. \end{cases}$$

Доведення. Функція T_k належить до простору $\mathcal{E}$. Отже, знайдуться функції $g_k \in L_2(0;1)$ такі, що

$$T_k(z) = \int_0^1 (\cos(tz) + tz\sin(tz))g_k(t)dt.$$

Але $T_k(\rho_n) = 0$, якщо $n \neq k$, і

$$T_k(\rho_k) = \begin{cases} \frac{D'(\rho_k)}{2\rho_k}(\rho_k^2 - s^2), \rho_k \neq 0, \\ \frac{D''(\rho_k)}{2}(\rho_k^2 - s^2), \rho_k = 0, \end{cases}$$

у випадку, якщо $T_k(z) = \frac{D(z)}{z^2-\rho_k^2}\left((z^2 - s^2) - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\right)$, і

$$\widetilde{T}_k(\rho_k) = \begin{cases} \frac{D'(\rho_k)}{2\rho_k}, \rho_k \neq 0, \\ \frac{D''(\rho_k)}{2}, \rho_k = 0. \end{cases}$$

якщо $\widetilde{T}_k(z) = \frac{D(z)}{z^2-\rho_k^2}\left(1 - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\right)$. Це разом с теоремою 7.5 приводить нас до завершення доведення. □

Лема 7.7. *Нехай $G \in \mathcal{E}$. Якщо $\zeta \neq 0$ — нуль кратності $p \geq 1$ або $\zeta = 0$ — нуль кратності $2p$ функции G, то при довільному $b \in \mathbb{C}$ функція $\frac{R(w)-R(0)}{w^2}$ належить до простору $L_1(\mathbb{R})$ і функція $z\int_z^{+\infty} \frac{R(w)}{w^2}dw$ належить до простору $L_2(0;+\infty)$, якщо $R(z) = \frac{z^2-b^2}{(z^2-\zeta^2)^p}G(z)$.*

Доведення. Справді, функція $\frac{R(w)-R(0)}{w^2}$ є цілою, тому з наслідку 7.5 маємо виконання першої з доводжуваних умов. Для випадку $p = 1$ друга умова випливає з рівності

$$z\int_z^{+\infty} \frac{R(w)}{w^2}dw = z\int_z^{+\infty} \frac{G(w)}{w^2}dw + z(\zeta^2 - b^2)\int_z^{+\infty} \frac{1}{w^2}\frac{G(w)}{w^2 - \zeta^2}G(w)dw,$$

оскільки при $|z| > 2|\zeta| + 1$

$$\left| z \int\limits_z^{+\infty} \frac{1}{w^2} \frac{G(w)}{w^2 - \zeta^2} dw \right|$$

$$\leq |z| \left(\int\limits_z^{+\infty} \left| \frac{1}{w\,(w^2 - \zeta^2)} \right|^2 dw \int\limits_z^{+\infty} \left| \frac{G(w)}{w} \right|^2 dw \right)^{1/2} \leq c/|z|^{-3/2}$$

для деякої додатної сталої c. Випадок $p > 1$ розглядається аналогічно. □

Теорема 7.10. *Нехай $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ — довільна послідовність різних комплексних чисел таких, що $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$ при $k \neq m$. Система $\{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ є повною і мінімальною в $L_2(0;1)$ тоді і тільки тоді, коді послідовність $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$, є послідовністю нулів такої парної цілої функції $D \notin \mathcal{E}$, що для деяких $\alpha_k \in \mathbb{C}$ і $s \in \mathbb{C}$, $s^2 \neq \rho_\nu^2$ для всіх $\nu \in \mathbb{N}$, функція*

$$T_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2} \left((z^2 - s^2) - \alpha_k (z^2 - \rho_k^2) \right)$$

або функція

$$\widetilde{T}_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2} \left(1 - \alpha_k (z^2 - \rho_k^2) \right)$$

належить до простору до $\mathcal{E}$.

Доведення. Достатність випливає з теорем 7.6 і 7.9. Доведемо необхідність. Вважаємо, що $\rho_1 = 0$, якщо один з членів послідовності $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ дорівнює нулеві. Якщо розглядувана система — мінімальна, то існують такі ненульові функції $\gamma_n \in L_2(0;1)$, що

$$\int\limits_0^1 (\cos(t\rho_k) + t\rho_k \sin(t\rho_k))\gamma_n(t) dt = \begin{cases} 1, k = n, \\ 0, k \neq n. \end{cases}$$

Нехай

$$S_k(z)=\int\limits_0^1(\cos(tz)+tz\sin(tz))\gamma_k(t)dt.$$

Функція $S_k(z)$ є парною цілою функцією і послідовність $(\rho_m : m\in\mathbb{Z}\backslash\{-k;0;k\})$, $\rho_{-m}:=-\rho_m$, є підпослідовністю її нулів. Розглянемо можливі випадки.

1. Нехай кожна функція S_k інших нулів не має, тобто послідовність $(\rho_m : m\in\mathbb{Z}\backslash\{-k;0;k\})$ є послідовністю її нулів. В цьому випадку шуканою буде функція $D(z)=(z^2-\rho_1^2)S_1(z)$. Справді, послідовність $(\rho_m : m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ є послідовністю її нулів і $D\notin\mathcal{E}$, оскільки в протилежному випадку система $\{v_k : k\in\mathbb{N}\}$ була б неповною за теоремою 7.6. Далі, функція $T_1(z):=\frac{D(z)}{z^2-\rho_1^2}\big((z^2-s^2)-\alpha_1(z^2-\rho_1^2)\big)=(\rho_1^2-s^2)S_1(z)$ належить $\mathcal{E}$, якщо $\alpha_1=1$ і s — довільне число, для якого $s^2\neq\rho_k^2$. Нехай $\alpha_k=1$ і $T_k(z):=\frac{D(z)}{z^2-\rho_k^2}\big((z^2-s^2)-\alpha_k(z^2-\rho_k^2)\big)=(\rho_k^2-s^2)\frac{z^2-\rho_1^2}{z^2-\rho_k^2}S_1(z)$. Також D є цілою функцією експоненційного типу $\sigma\leq 1$, має нулі у всіх точках ρ_k і тільки в них; $D\notin\mathcal{E}$, оскільки в протилежному випадку система була б неповною за теоремою 7.11. Функції S_k і T_k обидві є парними функціями експоненційного типу і їх послідовності нулів співпадають. Тому вони відрізняються тільки на сталий множник. Отже, скориставшись лемою 7.7, переконуємось, що функція D задовільняє всі умови теореми.

2. Нехай існує таке ν, що функція S_ν має нуль $s\neq\rho_m$, $s\neq 0$, тобто послідовність нулів функції S_ν, крім членів ρ_m, $m\in\mathbb{Z}\backslash\{-\nu;0;\nu\}$, має ненульові члени $s\neq\rho_m$ і $-s\neq\rho_\mu$. Тоді s є простим нулем. Справді, припустимо, що s є нулем кратності

$m_s > 1$. Розглянемо функції

$$\psi_1(z) = \frac{(z^2 - \rho_\nu^2)S_\nu(z)}{(z^2 - s^2)}$$

і

$$\psi_2(z) = \frac{(z^2 - \rho_\nu^2)S_\nu(z)}{(z^2 - s^2)^2}.$$

Тоді інтеграли

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_1(z) - \psi_1(0)}{z^2} dz, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_2(z) - \psi_2(0)}{z^2} dz$$

збігаються. Якщо другий з них рівний нулю, то функція ψ_2 за лемою 7.7 належить $\mathcal{E}$. Але функція ψ_2 має нулі у всіх точках ρ_k, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, а це суперечить повноті системи. Якщо ж другий інтеграл не рівний нулю, то знайдеться таке β, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_1(z) - \psi_1(0)}{z^2} dz = \beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_2(z) - \psi_2(0)}{z^2} dz.$$

Тоді функція $\psi(z) = \psi_1(z) - \beta\psi_2(z)$ належить $\mathcal{E}$. Але функція ψ також має нулі у всіх точках ρ_k. Крім цього,

$$\psi(z) = \psi_1(z) - \beta\psi_2(z) = \frac{(z^2 - \rho_\nu^2)S_\nu(z)}{(z^2 - s^2)^2} \left(z^2 - s^2 - \beta\right) \not\equiv 0.$$

Отже, система є неповною. Суперечність. Далі, інших нулів, відмінних від s і ρ_k функція S_ν не має, тобто послідовність нулів функції S_ν складається з чисел ρ_k, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, s і $-s$, причому всі вони в послідовність нулів входять по одному разу. Справді, припустимо протилежне, тобто що послідовність нулів функції S_ν містить ще один член $\widetilde{s}$ (можливо, $\widetilde{s} = \rho_k$ для деякого k). Розглянемо функції

$$\chi_1(z) = \frac{(z^2 - \rho_\nu^2)S_\nu(z)}{(z^2 - s^2)}$$

і

$$\chi_2(z) = \frac{(z^2-\rho_\nu^2)S_\nu(z)}{(z^2-\widetilde{s}^2)}.$$

Тоді інтеграли

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_1(z)-\chi_1(0)}{z^2}dz, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_2(z)-\chi_2(0)}{z^2}dz$$

збігаються. Якщо другий з них рівний нулю, то функція χ_2 за лемою 7.7 належить $\mathcal{E}$. Але функція χ_2 має нулі у всіх точках ρ_k, а це суперечить повноті системи. Якщо ж другий інтеграл не рівний нулю, то знайдеться таке β, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_1(z)-\chi_1(0)}{z^2}dz = \beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_2(z)-\chi_2(0)}{z^2}dz.$$

Тоді функція $\chi(z) = \chi_1(z) - \beta\chi_2(z)$ належить $\mathcal{E}$. Але функція χ також має нулі у всіх точках ρ_k. Крім цього,

$$\chi(z) = \chi_1(z) - \beta\chi_2(z) = \frac{(z^2-\rho_\nu^2)S_\nu(z)}{(z^2-s^2)} - \beta\frac{(z^2-\rho_\nu^2)S_\nu(z)}{(z^2-\widetilde{s}^2)}$$

$$= \frac{(z^2-\rho_\nu^2)S_\nu(z)}{(z^2-s^2)(z^2-\widetilde{s}^2)}((1-\beta)z^2 + \beta s^2 - \widetilde{s}^2) \not\equiv 0.$$

Отже, система є неповною. Суперечність. Нехай

$$D(z) = \frac{(z^2-\rho_\nu^2)S_\nu(z)}{(z^2-s^2)}$$

і

$$T_k(z) = \frac{D(z)}{z^2-\rho_k^2}\left((z^2-\widetilde{s}^2) - \alpha_k(z^2-\rho_k^2)\right).$$

Тоді функція D має нулі у всіх точках ρ_m і $D \notin \mathcal{E}$. Крім цього,

$$T_k(z) = \left(\frac{(z^2-\rho_\nu^2)S_\nu(z)}{z^2-\rho_k^2} - \alpha_k\frac{(z^2-\rho_\nu^2)S_\nu(z)}{(z^2-\widetilde{s}^2)}\right)$$

і можна підібрати α_1 так, щоб

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T_k(z) - T_k(0)}{z^2} dz = 0,$$

тобто D є шуканою функцією.

3. Нехай існує таке ν, що функція S_ν має в деякій точці $\rho_j \neq 0$ нуль кратності $m_j \geq 2$. Тоді $m_k = 2$. Справді, припустимо, що $m_k > 2$. Тоді розглянемо функції

$$\varpi_1(z) = \frac{(z^2 - \rho_\nu^2) S_\nu(z)}{(z^2 - \rho_j^2)}$$

і

$$\varpi_2(z) = \frac{(z^2 - \rho_\nu^2) S_\nu(z)}{(z^2 - \rho_j^2)^2}$$

та знову, як і вище, приходимо до суперечності. Крім цього, подібно переконуємось, що всі інші відмінні від нуля нулі функції S_ν є простими і функція не має нулів, відмінних від точок $\pm\rho_m$. Нехай

$$D(z) = \frac{(z^2 - \rho_\nu^2) S_\nu(z)}{(z^2 - \rho_j^2)}$$

і

$$T_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2} \left(1 - \alpha_k (z^2 - \rho_k^2)\right).$$

Тоді функція D має нулі у всіх точках ρ_m і $D \notin \mathcal{E}$. Крім цього,

$$T_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2} - \alpha_k D(z),$$

$$D(z) = \frac{(z^2 - \rho_\nu^2) S_\nu(z)}{(z^2 - \rho_k^2)(z^2 - \rho_j^2)} - \alpha_k \frac{(z^2 - \rho_\nu^2) S_\nu(z)}{(z^2 - \rho_j^2)}.$$

і можна підібрати α_k так, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T_k(z) - T_k(0)}{z^2} dz = 0.$$

Тоді $T_k \in \mathcal{E}$, тобто функція D — шукана.

4. Нехай $\rho_1 = 0$ та існує таке ν, що функція S_ν має в точці ρ_1 нуль кратності $m_1 \geq 4$. Тоді $\rho_1 \neq \rho_\nu$ і $m_1 = 4$. Справді, в протилежному випадку $m_1 \geq 6$. Розглянемо функції

$$\omega_1(z) = \frac{(z^2 - \rho_\nu^2) S_\nu(z)}{z^2}$$

і

$$\omega_2(z) = \frac{(z^2 - \rho_\nu^2) S_\nu(z)}{z^4}.$$

Тоді інтеграли

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_1(z) - \omega_1(0)}{z^2} dz, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_2(z) - \omega_2(0)}{z^4} dz$$

збігаються. Якщо другий з них рівний нулю, то функція ω_2 належить $\mathcal{E}$. Але функція ω_2 має нулі у всіх точках ρ_k, а це суперечить повноті системи. Якщо ж другий інтеграл не рівний нулю, то знайдеться таке β, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_1(z) - \omega_1(0)}{z^2} dz = \beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_2(z) - \omega_2(0)}{z^2} dz.$$

Тоді функція $\omega(z) = \omega_1(z) - \beta\omega_2(z)$ належить $\mathcal{E}$. Але функція ω також має нулі у всіх точках ρ_k. Крім цього,

$$\omega(z) = \omega_1(z) - \beta\omega_2(z) = \frac{(z^2 - \rho_\nu^2) S_\nu(z)}{z^2} - \beta \frac{(z^2 - \rho_\nu^2) S_\nu(z)}{z^4}$$

$$= \frac{(z^2 - \rho_\nu^2) S_\nu(z)}{z^4} \left(z^2 - \beta\right) \not\equiv 0.$$

Отже, система не є повною. Суперечність. Крім цього, подібно переконуємось, що всі інші відмінні від нуля нулі функції S_ν є простими і ця функція не має інших нулів, відмінних від точок $\pm\rho_m$. Нехай

$$D(z) = \frac{(z^2 - \rho_\nu^2) S_\nu(z)}{z^2}$$

і

$$T_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2} \left(1 - \alpha_k (z^2 - \rho_k^2)\right).$$

Тоді функція D має нулі у всіх точках ρ_m, $D \notin \mathcal{E}$ і α_k можна підібрати так, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{T_k(z) - T_k(0)}{z^2} dz = 0.$$

Тоді T_1 належить $\mathcal{E}$, функція D є шуканою і доведення необхідності завершено, а достатність випливає з попередньої теореми. □

Зауваження 7.3. *Теорема 7.10 відрізняється від її аналога для систем експонент [122], [56] наявністю двох випадків, які насправді можливі.*

Для деяких застосувань [120], [156] важливим є випадок, коли ρ_k – нулі функції $Q(s) = (\alpha - \beta)(\cos s + s \sin s) + \beta s^2 \cos s$, де α і β — довільні дійсні числа, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Її послідовність нулів позначимо через $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\})$. Функція Q є парною і тому разом з нулем ρ_k має і нуль $-\rho_k$. Крім цього, $\overline{Q}(\overline{s}) = Q(s)$ і тому разом з нулем ρ_k має і нуль $\overline{\rho_k}$. Будемо вважати, що $\rho_k \geq 0$ або $\operatorname{Im} \rho_k > 0$ при $k > 0$ і $\rho_{-k} = \rho_k$ при $k < 0$.

Лема 7.8. *Якщо $\alpha \neq \beta$ то функція Q має нескінченну множину нулів, всі її нулі, за винятком хіба що скінченної їх кількості, є дійсними, простими, відмінними від нуля.*

Доведення. Справді, $Q'(s) = (\alpha+\beta)s\cos s - \beta s^2 \sin s$. Якщо s — кратний нуль, то

$$(\alpha+\beta)s\cos s - \beta s^2 \sin s = 0 \tag{7.14}$$

і

$$(\alpha-\beta)(\cos s + s\sin s) + \beta s^2 \cos s = 0. \tag{7.15}$$

Якщо $\beta = 0$, то одержимо систему рівнянь $\alpha s\cos s = 0$ і $\alpha(\cos s + s\sin s) = 0$, а ця система не має розв'язків. Якщо ж $\beta \neq 0$, то кратними нулями можуть бути тільки ті s, для яких $(\alpha - \beta)\big(\beta^2 s^2 + \alpha + 2\beta\big)\cos s = 0$. Далі, корені рівняння $\cos s = 0$ не є коренями рівняння (7.15). Тому якщо s — кратний нуль функції Q, то $\beta^2 s^2 + \alpha + 2\beta = 0$. У випадку, коли $\beta \neq 0$ і $\alpha + 2\beta = 0$, коренем останнього рівняння є тільки число $s = 0$. Але $s = 0$ не є нулем функції Q. Якщо ж $\beta \neq 0$ і $\alpha + 2\beta \neq 0$, то кратним нулем функції Q može бути тільки число

$$s = \frac{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha+2\beta)}}{\beta}.$$

Підставивши це значення s в рівняння (7.14), одержимо

$$\operatorname{tg} s = \frac{(\alpha+\beta)}{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha+2\beta)}}.$$

З іншого боку, підставивши це ж s в рівняння (7.15), знаходимо

$$\operatorname{tg} s = -\frac{(\alpha+3\beta)}{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha+2\beta)}}.$$

Тому $\beta = 0$. Суперечність. Значить, всі нулі функції Q є простими. До того ж,

$$Q(s) = \frac{1}{2}\left((\alpha-\beta)(e^{is} + e^{-is} - ise^{is} + ise^{-is}) + \beta s^2 e^{is} + \beta s^2 e^{-is}\right)$$

і

$$Q(s) = \frac{1}{2}\left(\beta(t^2 + 2it\tau - \tau^2)e^{\operatorname{Im} s}\right.$$

$$\left.+\beta s^2 e^{-is}(\alpha - \beta)(e^{is} + e^{-is} - ise^{is} + ise^{-is})\right), s = t + i\tau.$$

Тому для кожного $\tau > 0$ (вважаємо, що $\beta \neq 0$) $\operatorname{Im} s = \tau$

$$|Q(s)| \geq \frac{1}{2}\left(|\beta|\, t^2 \left|e^{\operatorname{Im} s}\right|\right.$$

$$\left.-\left|\beta(2it\tau - \tau^2)e^{\operatorname{Im} s} + \beta s^2 e^{-is}(\alpha - \beta)(e^{is} + e^{-is} - ise^{is} + ise^{-is})\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,|\beta|\, t^2 \left|e^{\operatorname{Im} s}\right| (1 + o(1)),$$

якщо $s \to \infty$. Аналогічно,

$$|Q(s)| \geq \frac{1}{2}\left(|\beta|\, t^2 \left|e^{\operatorname{Im} s}\right|\right.$$

$$\left.-\left|\beta(2it\tau - \tau^2)e^{\operatorname{Im} s} + \beta s^2 e^{-is}(\alpha - \beta)(e^{is} + e^{-is} - ise^{is} + ise^{-is})\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,|\beta|\, t^2 \left|e^{-\operatorname{Im} s}\right| (1 + o(1)),$$

для кожного $\tau < 0$, якщо $s \to \infty$. Значить, всі нулі функції Q за винятком, можливо, скінченної їх кількості, є дійсними. □

Лема 7.9. *Нехай $\alpha \neq \beta$, ρ_k — нулі функції Q. Тоді функція*

$$G_k(z) = \frac{G(z)}{z^2 - \rho_k^2}$$

не належить до простору $\mathcal{E}$,

$$\theta_k := -\frac{\pi}{\rho_k^3}\left((\alpha - \beta)\left(\sin\rho_k - \rho_k\cos\rho_k\right) + \beta\rho_k^2\sin\rho_k\right) \neq 0,$$

а функція $G_k(z) - a_k G_1(z)$ належить цьому простору, якщо $\alpha_k = \theta_k/\theta_1$.

Доведення. Справді,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_k(z) - G_k(0)}{z^2} dz$$

$$= \frac{1}{2\rho_k^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\alpha-\beta)\rho_k^2 \left(e^{iz} + e^{-iz} + \frac{ze^{iz}}{i} - \frac{ze^{-iz}}{i}\right)}{z^2(z^2-\rho_k^2)} dz$$

$$+\frac{1}{2\rho_k^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta\rho_k^2 z^2 \left(e^{iz} + e^{-iz}\right) + 2(\alpha-\beta)(z^2-\rho_k^2)}{z^2(z^2-\rho_k^2)} dz$$

$$= \frac{\pi i}{2\rho_k^2} \left(\frac{(\alpha-\beta)\rho_k^2 \left(e^{i\rho_k} + \frac{\rho_k e^{i\rho_k}}{i}\right) + \beta\rho_k^2\rho_k^2 e^{i\rho_k}}{2\rho_k^3} \right.$$

$$\left. - \frac{(\alpha-\beta)\rho_k^2 \left(e^{-i\rho_k} - \frac{\rho_k e^{-i\rho_k}}{i}\right) + \beta\rho_k^2\rho_k^2 e^{-i\rho_k}}{2\rho_k^3} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{\rho_k^3} \left((\alpha-\beta)\left(\sin\rho_k - \rho_k\cos\rho_k\right) + \beta\rho_k^2 \sin\rho_k \right) = \theta_k.$$

Якщо ж припустити, що $\theta_k = 0$, то одержимо

$$\rho_k \operatorname{tg} \rho_k = \frac{\rho_k^2}{\left(\frac{\beta\rho_k^2}{(\alpha-\beta)} + 1\right)}.$$

Але $(\alpha-\beta)(\cos\rho_k + \rho_k \sin\rho_k) + \beta\rho_k^2 \cos\rho_k = 0$. Тому

$$\rho_k \operatorname{tg} \rho_k = -\frac{\beta}{(\alpha-\beta)}\rho_k^2 - 1.$$

Звідси отримаємо

$$\left(\frac{\beta\rho_k^2}{(\alpha-\beta)} + 1\right)^2 = -\rho_k^2,$$

тому отримаємо суперечність. Для завершення доведення леми залишилось скористатися теоремою 7.5. $\square$

Теорема 7.11. *Нехай* α *і* β *— довільні комплексні числа,* $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, *а* $\{\rho_k : k \in \mathbb{N}\}$, *— множина тих нулів функції* $G(s) = (\alpha - \beta)(\cos s + s \sin s) + \beta s^2 \cos s$, *для яких* $\rho_k \geq 0$ *або* $\operatorname{Im} \rho_k > 0$. *Нехай* $\rho_1 = 0$, *якщо* $0 \in \{\rho_k : k \in \mathbb{N}\}$. *Тоді система* $(v_k : k \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$ *є повною і мінімальною в просторі* $L_2(0;1)$.

Доведення. Послідовність $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1;0;1\})$, де $\rho_{-k} = -\rho_k$, є послідовністю нулів функції $D(z) = \frac{G(z)}{z^2-\rho_1^2}$. Ця функція задовільняє умови теореми 7.8, тому система $(v_k : k \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$ є повною. Далі, якщо $\alpha \neq \beta$ і $\alpha_k = \theta_k/\theta_1$, то, скориставшись лемою 7.9, переконуємось, що функція

$$T_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2}\left((z^2 - \rho_1^2) - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\right)$$

$$= \frac{G(z)}{z^2 - \rho_k^2} - \alpha_k \frac{G(z)}{z^2 - \rho_1^2} = G_k(z) - \alpha_k G_1(z)$$

належить $\mathcal{E}$. Крім того, якщо $\alpha = \beta$ і

$$\alpha_k = -\frac{\rho_k - \sin \rho_k}{\rho_k^3},$$

то у відповідності з прикладом 7.3

$$\widetilde{T}_k(z) = \frac{D(z)}{z^2 - \rho_k^2}\left(1 - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\right) = \frac{\beta \cos z}{z^2 - \rho_k^2}\left(1 - \alpha_k(z^2 - \rho_k^2)\right)$$

належить до простору $\mathcal{E}$. Отже, з теореми 7.10 випливає, що розглядувана система має біортогональну, що і вимагалось довести. □

7.4 Висновки до розділу 7

У цьому розділі розглядаються питання застосування одержаних раніше результатів та порівняння різних повних систем функцій. Гіпотеза Рімана має понад 150-літню історію досліджень та залишається однією з найвідоміших відкритих математичних проблем. Відомо багато її еквівалентних формулювань у термінах повноти систем функцій. Подібні результати одержали, зокрема, А. Бьорлінг, Б. Німан, П. Лакс, Н. Нікольський, Ж.-Ф. Бурноль. Ми застосовуємо одержаний в розділі 4 критерій циклічності для простору $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ до дослідження дзета-функції Рімана. Також розглядається повнота деякої системи функцій спеціального вигляду у одному просторі цілих функцій, що є близьким, у деякому сенсі, до простору Пелі-Вінера. Одержано такі твердження:

- встановлено еквівалентність гіпотези Рімана і повноти деякої системи функцій, чим узагальнено один результат Ж.-Ф. Бурноля;

- показано, що система, повнота якої є еквівалентною гіпотезі Рімана, має істотно інші апроксимаційні властивості, ніж розглянута Ж.-Ф. Бурнолем;

- отримано теорему про представлення для функцій вигляду
$$G(z) = \int\limits_0^1 (\cos(tz) + tz\sin(tz))g(t)dt,\ g \in L_2(0;1);$$

- встановлено критерій повноти та критерій мінімальності системи $\{\cos t\rho_k + t\rho_k \sin t\rho_k : k \in \mathbb{N}\}$ у просторі $L_2(0;1)$.

Висновки

Дисертація містить нові науково обгрунтовані результати, що в сукупності значно просувають теорію просторів аналітичних функцій.

Зміст основних результатів дисертації полягає в наступному:

- знайдено критерій циклічності функцій у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- отримано опис трансляційно інваріантних підпросторів у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- знайдено нову реалізацію принципу невизначеності в гармонічному аналізі для пари функцій: функції та їх перетворення Фур'є не можуть бути одночасно дуже малими;
- встановлено для функцій із простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \le p < +\infty$, еквівалентність швидкого зростання у деякому сенсі по уявній осі та швидкого спадання по уявній осі;
- знайдено нові зображення для функцій з вагових просторів Гарді;
- встановлено критерій розщеплення функцій із W^1_σ;
- завершено встановлення аналогу теорії спектрального аналізу В.П. Гурарія для простору Гарді-Смірнова у півсмузі $E^2[D_\sigma]$;

- одержано аналог теореми про зображення та теореми про згортку для просторів типу Смірнова у багатокутній необмеженій області;
- знайдено новий еквівалент гіпотези Рімана, чим узагальнено один результат Ж.-Ф. Бурноля;
- встановлено критерій повноти та критерій мінімальності системи $\{\cos t\rho_k + t\rho_k \sin t\rho_k : k \in \mathbb{N}\}$ у просторі $L_2(0;1)$.

Основні результати дисертації мають завершений вигляд або критеріальний характер. При їх отриманні використовуються класичні та сучасні методи комплексного та функціонального аналізу та деякі прийоми з робіт А. Бьорлінга, Б. Я. Левіна, Ю. І. Любарського, А. М. Сєдлєцкого, Б. В. Винницького, В. П. Гурарія.

На основі доведених у розділах 4 і 7 результатів можна висунити такі загальні принципи:

1) якщо перетворення Фур'є суми двох функцій є "дуже малим" при природних обмеженнях на самі функції, то кожна з функцій є "дуже малою";

2) для функцій експоненціального зростання у півплощині "екстремальне" зростання їх модуля на межі є еквівалентним "екстремальному" спаданню всередині півлощини;

3) циклічність функції із вагового простору Гарді є еквівалентною відсутності "екстремальності" в поведінці модуля функції.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосованими у подальших дослідженнях з теорії аналітичних функцій, зокрема просторів типу Гарді, Неванлінни та Бергмана, теорії інтерполяції, теорії наближення, рядів Діріхле, також при вивченні мероморфних та субгармонійних функцій, в теорії ймовірності. Як і результати класичної теорії просторів Гарді, одержані результати можуть отримати застосування у теорії інформації, квантовій механіці, теорії керування, сейсмології та інших дисциплінах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Аветисян К. Л. Весовые пространства гармонических и голоморфных функций : дисс. ... доктора. физ.-мат. наук / К. Л. Аветисян. – Ереван, 2009.

[2] Амосов Г. Г. О применении модельных пространств для построения коциклических возмущений полугруппы сдвигов на полупрямой / Г. Г. Амосов, А. Д. Баранов, В. В. Капустин // Уфимск. матем. журн. – 2012. – Т.4, № 1. – С. 17–28.

[3] Бари Н.К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1961.

[4] Бер Г. З. О явлении интерференции в интегральной метрике и приближении целыми функциями экспоненциального типа / Г. З. Бер // Теор. функц, функ. анал. и прилож. – 1980. – Т.34. – С.11–24.

[5] Богомолов А. Н. Определение глубины развития областей пластических деформаций в однородном основании заглубленного ленточного фундамента на основе анализа напряженного состояния грунтового массива при помощи методов теории функций комплексного переменного / А. Н. Богомолов, А. Н. Ушаков, О. А. Богомолова, А. В. Соловьев, А. В. Прокопенко, С. А. Калиновский // Вестник ВолгГАСУ. Сер.: Стр-во и архит. – 2013. – № 30 (49). – С. 13–26.

[6] Васюнин В. И. Об одной биортогональнои системе, связанной с гипотезой Римана / В. И. Васюнин //Алгебра и анализ. – 1995. – V.7, № 3. – С. 118–135.

[7] Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций / С. Б. Вакарчук // Укр. мат.журн. – 1989. – V.41, № 6. – С. 686-689.

[8] Винницкий Б. В. Аппроксимационные свойства систем экспонент в одном пространстве аналитических функций / Б. В. Винницкий // Укр. мат. журн. –1996. – Т.48, №2. – С. 168–183.

[9] Винницкий Б. В. О базисности некоторых систем аналитических функций / Б. В. Винницкий. – Дрогобич, 1991. – 195 с. – Деп. в Укр НІІНТІ, № 277-Ук91.

[10] Винницкий Б. В. О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент / Б. В. Винницкий // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, №5. – С. 484–500.

[11] Винницький Б.В. Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки / Б. В. Винницький, В. М. Дільний // Мат. студ. – 2001. – Т.16, №1. – С. 61-70.

[12] Винницький Б. В. Про нулі деяких класів функцій, аналітичних в півплощині / Б. В. Винницький// Матем. студії. – 1996. – Т.6. – С. 67–72.

[13] Винницький Б. Про один аналог теореми Пелі-Вінера для вагових просторів Гарді / Б. Винницький, В. Дільний // Мат. Студ. – 2000. – Т.14. – С. 35–40.

[14] Винницький Б. В. Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних в півсмузі / Б. В. Винницький // Матем. студії. – 1997. – Т.7, №1. – С. 41–52.

[15] Винницький Б. Про узагальнення теореми Пелі-Вінера / Б. Винницький // Мат. студ. – 1995. – Т.4. – С. 37–44.

[16] Винницький Б.В. Обмеженість розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку і одна крайова задача для рівняння Бесселя / Б. Винницький, О. Шавала // Мат. студ. – 2008. – Т.29, №3. – С. 213–216.

[17] Власов В. И. О весовых пространствах типа Харди / В. И. Власов, А. В. Рачков // Докл. Акад. наук. – 1993. – Т.328. – С. 281–284.

[18] Власов В. И. Весовые пространства типа Харди / В. И. Власов, А. В. Рачков. М. : ВЦ РАН, 1991. – 61 с.

[19] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции / Дж Гарнетт. – М. : Мир, 1984. – 470 с.

[20] Гіщак Т. Теорема єдиності для вагового простору Гарді / Т. Гіщак. – Тези доп. IV міжн. ганська конф. – Чернівці, 2014. – С. 29.

[21] Говоров Н. Краевая задача Римана с бесконечным индексом / Н. Говоров. – М. : Наука, 1986. – 240 с.

[22] Горбачук В. И. Операторный подход к задачам аппроксимации / В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук // Алгебра и анализ. – 1997. – Т.9, № 6. – С. 90–108.

[23] Горбачук М. Л. О порядке роста операторной экспоненты на целых векторах / М. Л. Горбачук // Функц. анализ и его прил. – 2002. – Т.36, № 1. – С. 75–78.

[24] Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций / К. Гофман. – М. : ИЛ. – 1963. – 306 с.

[25] Григорян Ш. Ф. О базисности неполных систем рациональных функций в угловой области / Ш. Ф. Григорян // Изв. АН Армянской ССР. Матем. – 1978. – Т.12, № 5-6. – С.460–487.

[26] Громов В. П. К вопросу о циклических элементах оператора дифференцирования в пространствах аналитических функций / В. П. Громов // Матем. заметки. – 1983. – V.33, № 4. – С. 529–538

[27] Громов В. П. О полноте системы производных аналитических функций / В. П. Громов// Изв. АН СССР. – 1961. – Сер. матем. – V.25. – С. 543—551.

[28] Губреев Г. М. Возмущения сильно непрерывных полугрупп операторов и матричные веса Макенхаупта / Г. М. Губреев, Ю. Д. Латушкин // Функц. анализ и его прил. – 2008. – 42:3. – С. 85–89

[29] Гурарий В. Гармонический анализ в пространствах с весом / В. Гурарий // Труды Моск. матем. общества. – 1976. – Т.35. – С. 21–76.

[30] Гурарий В.П. Групповые методы коммутативного гармонического анализа. Современные проблемы математики / В. П. Гурарий // ВИНИТИ. – 1988. – Т.25. – С. 1-312.

[31] Гурарий В. Спектральный анализ ограниченных функций на полуоси / В. Гурарий // Теор. функц., функ. анал. и их прилож. – 1965. – Т.5. – С. 210–231.

[32] Гурарий В. П. О полноте систем сдвижек в пространстве $L(0; +\infty)$ с весом / В. П. Гурарий, Б. Я. Левин // Запис. мех.-мат. ф-та ХГУ и ХМО. – 1964. – Т.30, сер. 4. – С. 178–185.

[33] Джрбашян М. М. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полупло-

скости / М. М. Джрбашян // Изв. АН СССР. – Сер. матем. – 1978. – Т.42,№ 6. – С. 1322–1384.

[34] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян. – М. : Наука. – 1966. – 672 с.

[35] Дынькин Э. М. Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения. Современные проблемы математики / Э. М. Дынькин, Б. П. Осиленкер // ВИНИТИ. – 1983. – Т.21. – С. 42–129.

[36] Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. – М. : Наука, 1979. – 320 с.

[37] Ёрикке Б. Принцип неопределенности в гармоническом анализе / Б. Ёрикке, В. П. Хавин // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. – 1991. – Т.72. – С. 181-260.

[38] Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука. – 1984. – 752 с.

[39] Капустин В. В. Вещественные пространства в весовых пространствах Харди / В. В. Капустин // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 1999. – № 262. – С. 138–146.

[40] Капустин В. В. Граничные значения интегралов типа Коши / В. В. Капустин // Алгебра и анализ. – 2004. – Т.16, № 4. – С. 114–131.

[41] Капустин В. В. Коммутаторы в модельных пространствах / В. В. Капустин // Исследования по линейным операторам и теории функций. – Т.34 : Зап. научн. сем. ПОМИ. – № 333. – СПб. : ПОМИ, 2006. – С. 54–61

[42] Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы / Ю. Ф. Коробейник // Усп. мат. наук. – 1995. – Т.36, № 1. – С. 73–126.

[43] Кондратюк А. А. Отделимость нулей целых функций экспоненциального типа и полнота характеров / А. А. Кондратюк, Ю. Ф. Коробейник //Мат. замет. – 1992. – V.52, № 2. – P. 83–91.

[44] Лаврентьев М. А. О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций / М. А. Лаврентьев // Мат. Сборн. – 1936. – Т.1(43), №6. – С. 815-846.

[45] Левин Б. Я. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент / Б. Я. Левин, Ю.

И. Любарский // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1975. – Т.39. – С. 657–702.

[46] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. – М : Гостехиздат, 1956.

[47] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. – М. : Наука. – 1976. – 538 с.

[48] Любарский Ю. И. Представление функций из H^p в полуплоскости и некоторые его приложения / Ю. И. Любарский // Теория функций, функциональный анализ и их приложения : Респ. межвед. науч. сб. / Харьковский государственный университет им. А.М. Горького. – Вып. 38. – Х. : Вища школа, 1982. – С. 76–84

[49] Маергойз Л. С. Аналог теоремы Пэли-Винера и его приложения к оптимальному восстановлению целых функций / Л. С. Маергойз, Н. Н. Тарханов // Уфим. мат. журн. – 2011. – Т.3. № 1. – С. 16-30.

[50] Мандельбройт С. Квазианалитические классы функций / С. Мандельбройт. – М. ; Л : Гостехиздат, 1937.

[51] Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции / Р. Неванлинна. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1941.

[52] Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига / Н. К. Никольский. – М : Наука, 1980.

[53] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций / И. И. Привалов. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1950.

[54] Пухов С. С. Базисы из экспонент, синусов и косинусов в весовых пространствах на конечном интервале / С. С. Пухов // Известия РАН. – Сер. матем. – 2011. – Т.75, № 2. – С. 167–196.

[55] Романюк А. С. Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Известия РАН. – Сер. матем. – 2003. – Т.67, № 2. – С. 61–100.

[56] Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье / А. М. Седлецкий. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[57] Седлецкий А. М. Негармонический анализ / А. М. Седлецкий. – Итоги науки и техники – 2006. – Т.96, – С. 106-211.

[58] Седлецкий А. Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения / А. Седлецкий// Матем. сб. – 1975. – Т.96, №1. – С. 75-82.

[59] Скаскив О. Б. К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции / О. Б. Скаскив // Изв. АН СССР. – Сер. матем. – 1989. – Т.53, № 3.4. – С. 833–850

[60] Скаскив О. Б. Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле / О. Б. Скаскив, М. Н. Шеремета // Матем. сб. – 1986. – Т.131(173), № 3(11). – С. 385–402.

[61] Титчмарш Э. Введение в теорию интегралов Фурье / Э. Титчмарш. –М. ; Л.: ОГИЗ. – 1948. – 418 с.

[62] Федорюк М. В. Асимптотики : Интегралы и суммы / М. В. Федорюк. – М : Наука, 1987.

[63] Філевич П. В. Асимптотичні властивості аналітичних і випадкових аналітичних функцій, зображених степеневими рядами і рядами Діріхле : дис. ... доктора фіз.-мат. наук : 01.01.01 / П. В. Філевич. – Львів, 2007.

[64] Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности / Б. Н. Хабибуллин // РИЦ БашГУ. – Уфа, 2006. – 172 с.

[65] Хавин В. П. Результаты В. И. Смирнова в комплексном анализе и их дальнейшее развитие / В. П. Хавин, Н. К. Никольский// Смирнов В. И. Избранные труды : Комплексный анализ. Математическая теория дифракции / В. И. Смирнов. - Л. : Изд-во ЛГУ, 1988. – С. 111–145.

[66] Шабозов М. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H^2 / М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов //Мат. замет. – 2000. – V.68, № 5. – P. 796–800.

[67] Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре / С. В. Шведенко // Итоги науки и техн. – Сер. Мат. анал. – 1985. – Т.23. – С. 3–124.

[68] Шеремета М. М. Цілі ряди Діріхле / М. М. Шеремета. – К. : ІСДО. – 1993. – 168 с.

[69] Юлмухаметов Р. С. Расщепление целых функций с нулями в полосе / Р. С. Юлмухаметов // Мат. сборн. – 1995. – Т.186, № 7. – С. 147–160.

[70] Юлмухаметов Р. С. Решение проблемы Л. Эренпрайса о факторизации / Р. С. Юлмухаметов // Мат. сборн. – 1999. – Т.190, № 4. – С. 123–157.

[71] Bakan A. Hardy spaces for the strip / A. Bakan, St. Kaijser // J. Math. Anal. and Appl. – 2007. – V.333, № 3. – P. 347-364.

[72] Baranov A. Symbols of truncated Toeplitz operators / A. Baranov, R. Bessonov, V. Kapustin // J. Funct. Anal. – 2011. – V.261, № 12. – P. 3437–3456

[73] Balazard M.The Nyman-Beurling Equivalent Form for the Riemann Hypothesis / M. Balazard, E. Saias // Expos. Math. – 2000. – V.18, № 1. – P. 131-138.

[74] Benedetto J. Weighted Hardy spaces and the Laplace transform / J. Benedetto, H. Heinig // Lect. Notes. Math. – 1983. – V.992. – P. 240–277.

[75] Beurling A. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space / A. Beurling // Acta math. – 1949. – V.81. – P. 239-255.

[76] Beurling A. The collected works of Arne Beurling / A. Beurling. – V.2 : Harmonic analysis. – Birkhuser ; Boston, 1989.

[77] Boas R. Entire functions / R. Boas. – New York : Academic Press, 1954.

[78] Bonilla A. Approximation in weighted Hardy spaces / A. Bonilla, F. Pe'rez-Gonza'lez, R. Trujillo-Gonza'lez // Journal d'Analyse Mathématique. – 1997. – V.73, № 1. – P. 65-89.

[79] Bohm A. The Marvelous Consequences of Hardy Spaces in Quantum Physics / A. Bohm, H. Bui, // Geometric Methods in Physics. – 2013. – V.30, № 1. – P. 211-228.

[80] Borichev A. Completeness of translates in weighted spaces on the half-line / A. Borichev, H. Hedenmalm // Acta math. – 1995. – V.174. – P. 1–84.

[81] Bourdon P.S. Cyclic Phenomena for Composition Operators / P. S. Bourdon , J. H. Shapiro // Mem. Amer. Math. Soc. – V.125. – Providence : AMS, 1997.

[82] Bourdon P.S. Somewhere dense orbits are everywhere dense / P. S. Bourdon, N. S. Feldman // Indiana Univ. Math. J. – 2003. – V.52, № 3. – P. 811–819

[83] Brydun A.M. On the Fourier series of the zeta-function logarithm on the vertical lines / A. M. Brydun, A. A. Kondratyuk // Мат. студ. – 2004. – 21. – 1. – P. 97–104.

[84] Burnol J.-F. An adelic causality problem related to abelian L–functions / J.-F. Burnol // J. Number Theory. – 2001. – V.87 – P. 432–428.

[85] Chyzhykov I. Growth of pth means of analytic and subharmonic functions in the unit disc and angular distribution of zeros / I. Chyzhykov // 1509.02141.v2/arXiv.org – 2015. – 20 Sep. – P. 1–19.

[86] Cima J. A. The Backward Shift on the Hardy Space / J. A. Cima, W. T. Ross. – AMS, 2000.

[87] Cima J. A. The Cauchy Transform / J. A. Cima, A. Matheson, W. T. Ross. – AMS, 2006.

[88] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases / O. Christensen. – Boston : Birkhauser, 2002. – 440 p.

[89] Coifman R. Transference methods in analysis / R. Coifman, G. Weiss. – Providence : AMS, 1997. – 62 p.

[90] Dallard T. 2-D walevet transforms: generalisation of the Hardy space and application to experimental studies / T. Dallard, Spedding G. // Europ. J. of Mech., B/Fluids – 1993. – V.12, № 1. – P. 107–134.

[91] Domar Y. On the analytic transform of bounded linear functionals on certain Banach algebras / Y. Domar // Studia Math. – 1975. – V.53. – P. 203–224.

[92] Duren P. Theory of H^p spaces / P. Duren. – New York ; London : Acad. Press, 1970. – 258 p.

[93] Dwight H. Tables of Integrals and Other Mathematical Data / H. Dwight. – 4-th ed. – New York : The Macmillan Company, 1961.

[94] Ehrenpreis L. Solution of some problems of division. IV / L. Ehrenpreis // Amer. J. Math. – 1960. – V.82. – P. 522-588

[95] Eoff C. The discrete nature of the Paley-Wiener spaces / C. Eoff // Proc. of the AMS. – 1995. – V.123, № 2. – P. 505–512.

[96] Eroglu K. On an Application of the Hardy Classes to the Riemann Zeta-Function / K. Eroglu, I. Ostrovskii // Turk. J. Math. – 2001. – V.25. – P. 545–551.

[97] Favorov S.Ju. Zero sets of entire functions of exponential type with some conditions on real axis / S. Ju. Favorov // Алгебра и анализ. – 2008. – V.20. – P. 138-145.

[98] Favorov S. A Blaschke-type condition for analytic and subharmonic functions and application to contraction operators / S. Favorov, L. Golinskii // Amer. Math. Soc. Transl. – 2009. – V.226, № 2. – P. 37-47.

[99] Fedorov M. A. Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane / M. A. Fedorov, A. F. Grishin // Math. Physics, Anal. and Geom. – 1998. – V.1. – P. 223-271.

[100] Folland G., Stein E. Hardy spaces and gomogeneous grups / G. Folland, E. Stein. – Princeton : Princeton Univ. Press, 1982. – 284 p.

[101] Gallardo-Gutiérrez E. The role of the spectrum in the cyclic behavior of composition operators / E. Gallardo-Gutiérrez, A. Montes-Rodrígues // Memoirs of the AMS. – 2004. – V.167, № 791. – P. 1-87.

[102] Garsia-Cuerva J. Weighted H^p spaces / J. Garsia-Cuerva // Rozpr. Matem. – 1979. – V.162. –P. 1–58.

[103] Gorbachuk M. L. M.G. Krein's Lectures on Entire Operators / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk . – Basel-Boston-Berlin : Birkhauser Verlag, 1997. – 220 c.

[104] Gögüs N. G. Structure of weighted Hardy spaces in the plane / N. G. Gögüs. – arXiv:1401.4328v1. – P. 1-11.

[105] Halmos P. Shifts on Hilbert spaces / P. Halmos // Crelles J. – 1961. – V.208. – P. 102–112.

[106] Hardy G. H. The mean value of the modulus of an analytic function / G. H. Hardy // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1915. – V.14. – P. 269–277.

[107] Hedenmalm H. Theory of Bergman Spaces / H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu. – Springer, 2000.

[108] Heil K. A Basis Theory Primer / K. Heil. – Boston, 2011. – 534 p.

[109] Heins M. Hardy Classes on Riemann Surfaces / M. Heins. – Springer ; Berlin, 1969 – 106 p.

[110] Heitokangas J. Linear Differential Equations with Coefficients in Weighted Bergman and Hardy Spaces / J. Heitokangas, R. Korhonen, J. Rattya // Trans. of the AMS. – 2008. – V.260, № 2. – P. 1035-1055.

[111] Karatsuba A. A. The Riemann Zeta-Function / A. A. Karatsuba, S. M. Voronin. – Valter de Gruyter, 1992.

[112] Keldysch M. V. Sur la representation conforme des domaines limites par des courbes rectifiables / M. V. Keldysch, M. A. Lavrentiev // Annis scient. Ec. norm. sup. – Paris, 1937. – V.54. – P. 1-38.

[113] Kim V. Commutation relations and hypercyclic operators / V. Kim // Archiv der Mathematik. – 2012. – V.99, № 3. – P. 247-253.

[114] King F. Hilbert transforms / F. King. – V.1-2. – Cambridge : Cambridge university press, 2009. – 534 p.

[115] Kisliakov S. Partial retractions of weighted Hardy spaces / S. Kisliakov, X. Quanxua // Stud. Math. – 2000. – V.138, № 3. – P. 251-264.

[116] Koosis P. *Introduction to H^p spaces*, Second edition / P. Koosis // Cambridge Tracts in Mathematics. – V.115. – Cambridge : Cambridge University Press, 1998.

[117] Lax P. Functional analysis / P. Lax. – Wiley Interscience, 2002.

[118] Lax P. Translation invariant subspaces / P. Lax // Acta math. – 1959. – V.101. – P. 163-178.

[119] Lax P. Scattering theory / P. Lax , R. Phillips. – New-York ; London : Academic Press, 1976.

[120] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations / I. Laine. – Berlin : Walter de Gruiter, 1993.

[121] Lerer L. Convolution Equations and Singular Integral Operatorss / L. Lerer, V. Olshevsky, I. Spitkovski. – Springer, 2007.

[122] Levin B. Ja. Lectures on entire functions / B. Ja. Levin // Translations of Mathematical Monographs. – V.150. AMS. – Providence : RI, 1996.

[123] Lyubarskii Y. Complete interpolating sequences for Paley-Wiener spaces and Muckenhoupt's (A_p) condition / Y. Lyubarskii, K. Seip // Revista Matema'tica Iberoamericana. – 1997. – V.13. – P. 361-376.

[124] Maergois L. S. An analog of the Paley-Wiener theorem for entire functions of the space W^p_σ, $1 < p < 2$, and some Applications / L. S. Maergois // CMFT. – 2006. – V.6. – P. 459-469.

[125] Martirosian V. On a Theorem of Djrbashian of the Phragmen-Lindelof Type / V. Martirosian // Math. Nachr. – 1989. – V.144. – C.21–27.

[126] Mashreghi J. Representation Theorems in Hardy Spaces / J. Mashreghi. – Oxford : Oxford Univ. Press, 2009. – 372 p.

[127] Massaneda X. Non cyclic functions in the Hardy space of the bidisc with arbitrary decrease / X. Massaneda, P. Thomas. – arXiv:1301.2622v1. – 2013. – P. 1-4.

[128] Mengestie T.Y. Two Weight Discrete Hilbert Transforms and Systems of Reproducing Kernels / T. Y. Mengestie // Thesis for the degree of Ph. D. – Trondheim, 2011. – 155 c.

[129] Nevanlinna R. Eindeutige analytische Funktionen / R. Nevanlinna. – Springer, 1936.

[130] Nikolski N. K. Operators, functions and systems : an easy reading. Hardy, Hankel, and Toeplitz / N. K. Nikolski. – AMS, 2002. – V.1.

[131] Nikolski N. K. Operators, functions and systems : an easy reading. Model Operators and Systems / N. K. Nikolski. – AMS, 2002. – V.2.

[132] Nyman B. On some groups and semigroups of translations / B. Nyman // Thesis. – Uppsala, 1950.

[133] Martinez-Avendano R. A. An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space / R. A. Martinez-Avendano, P. Rosenthal. – Springer, 2007.

[134] Paley R.E.A.C. Fourier transforms in complex domain / R.E.A.C. Paley, N. Wiener. – Providence : AMS, 1934. – 184 p.

[135] Pan Y. Hardy spaces and oscillatory singular integrals: II / Y. Pan // Pacific Journ. of Math. – 1995. – V.168. – P. 167-182.

[136] Pan Y. Oscillatory singular integrals on L^p and Hardy Spaces / Y. Pan // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – V.124. – P. 2821–2825.

[137] Petersen K. Brownian Motion, Hardy Spaces and Bounded Mean Oscillation / K. Petersen. – Cambridge University Press; Cambridge, 1977.

[138] Peterson H. Supercyclic and hypercyclic non-convolution operators / H. Peterson // Archiv der Mathematik. – 2006. – V.55, № 1. – P. 135–151.

[139] Phong D. H. Hilbert integrals, singular integrals and Radon transforms, I / D. H. Phong, E. M. Stein // Acta Math. – 1987. – V.157. – P. 179-194.

[140] Riemann B. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Gro"sse / B. Riemann // Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. – 1859. – P. 136–144.

[141] Riesz F. Uber die Randwerte einer analytischen Funktion / F. Riesz // Math. Z. – 1923. – V.18. – P. 87–95.

[142] Rooney P. A generalization of the Hardy spaces / P. Rooney // Can. J. Math. – 1964. – V.16. – P. 358–369.

[143] Rosenblum M. Hardy classes and operator theory / M. Rosenblum, J. Rovnyak. – Oxford Univ. Press, New York and Clarendon Press, Oxford, 1985.

[144] Rudin W. Function theory in polydiscs / W. Rudin. – Benjamin ; New York, 1969.

[145] Sampson G. Oscillatory kernels that map H^1 into L^1 / G. Sampson // Arkiv for Mathematic. – 1980. – V.18. – P. 125-140.

[146] Savchuk V. M. Best Approximations for the Cauchy Kernel on the Real Axis / V. M. Savchuk, S. O. Chaichenko // Ukr. Math. J. – 2015. – T.66, №11. – C. 1731-1741.

[147] Shapiro Harold S. Weakly invertible elements in certain function spaces and generators in l^1 /Harold S. Shapiro // Mich. Math. J. – 1964. – V.11. – P. 161-165.

[148] Soldatov A. P. Weighted Hardy classes of analytic functions / A. P. Soldatov // Diff. Uravn. – 2002. – T.38, №6. – P. 809–817.

[149] Smirnov V. I. Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problemes qui s'y rattachent / V. I. Smirnov // Изв. АН СССР. – Сер. физ.-мат. – 1932. – V.7, №3. – P. 331-372.

[150] Srinivasan T. On closed ideals of analytic functions / T. Srinivasan, J.-K. Wang // Proc. – AMS,1965. – V.16. – P. 49-52.

[151] Srivastava H. M. Theory and Applications of Convolution Integral Equations / H. M. Srivastava, R. G. Buschman. – Springer, 2010.

[152] Strömberg J.-O. Weighted Hardy spaces / J.-O. Strömberg, V. Torchinsky // Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 1381. – Springer, 1989. – 193 p.

[153] Tsutsui Y. An application of weighted Hardy spaces to the Navier-Stokes equations / Y. Tsutsui // J. Funct. Anal. – 2014. – V.266. – P. 1395–1420.

[154] Van Spaendonck R. Seismic applications of complex walevet transforms / Van Spaendonck R. L. C. // Thesis for the degree of Ph. D. – Nijmegen, 2002. – 229 p.

[155] Vynnytskyi B. On the factorization of one class of functions analytic in the half-plane / B. Vynnytskyi, V. Sharan // Мат. студ. – 2000. – T.14. – C. 41-48.

[156] Vynnytskyi B. Some approximation properties of the systems of Bessel functions of index $-3/2$ / B. Vynnytskyi, R. Khats' // Mat. Stud. – 2010. – V.2,№ 10. – P. 152–159.

[157] Yousefi B. Cyclicity on the Weighted Hardy Spaces / B. Yousefi, E. Pazokinejad // Int. Jour. of Nonlinear Science. – 2011. – V.11, № 4. – P. 459-463.

[158] Zhu K. Operator Theory in Function Spaces / K. Zhu // Marcel Deccer Inc. – New York, 1991.

[159] Zorboska N. Cyclic composition operators on smooth weighted Hardy spaces / N. Zorboska // Rocky mountain journal of mathematics. – 1999. – V.29, № 2. – P. 725-740.

[160] Дільний В. Достатня умова повноти системи експонент / В. Дільний // Міжн. наук. конф. "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь.": Тези доп. – Дрогобич, 27 вересня – 1 жовтня, 2004. – С. 53.

[161] Dilnyi V. On equivalency of some conditions for a weighted Hardy space/ В. Дільний // Міжн. конф. "Математичний аналіз і суміжні питання.": Тези доп. – Львів, 17 -20 листопада, 2005. – С. 22.

[162] Dilnyi V. On Completeness of a System in a Weighted Hardy Space / V. Dilnyi, B. Vynnytskyi // "International Ufa Winter Mathematical ... Conf.": Тезисы докл. – Уфа, 2005. – С. 57.

[163] Dilnyi V. On one Beurling-Lax-type theorem / V. Dilnyi, B. Vynnytskyi // "Міжн. конф. "Entire and subharmonic functions and related topics": Тези доп. – Харків, 14 – 17 серпня 2006. – С. 38–39.

[164] Dilnyi V. On some Poisson type formulas / V. Dilnyi, B. Vynnytskyi // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька: Тези доп. – Дрогобич, 24–28 вересня, 2007. – С. 53.

[165] Dilnyi V. Riemann's hypothesis and weighted Hardy spaces / V. Dilnyi // Міжнародна конференція "Аналіз і Топологія": Тези доп. – Львів, 26 травня – 07 червня, 2008. – С. 12.

[166] Dilnyi V. On some analogues of Paley-Wiener theorem and one boundary value problem for Bessel operator / V. Dilnyi, B. Vynnytskyi // Міжнародна конференція з комплексного аналізу пам'яті А. А. Гольдберга: Тези доп. – Львів, 31 травня – 5 червня, 2010. – С. 63–64.

[167] Dilnyi V. Special decomposition of Wiener space / V. Dilnyi // Міжнародна конференція з комплексного аналізу пам'яті А. А. Гольдберга: Тези доп. – Львів, 31 травня – 5 червня, 2010. – С. 13–14.

[168] Dilnyi V. Some operators on weighted Hardy spaces / V. Dilnyi, // Міжн. конф. ім. В.Е. Лянце: Тези доп. – Львів, 17-21 листопада 2010 р. – С. 63–64.

[169] Dilnyi V. On some decompositions of Wiener and weighted Hardy space / V. Dilnyi // "Complex Analysis and its applications". International conference dedicated to the 70th anniversary of A. F. Grishin: Book of abstracts – Kharkiv, August 15–18, 2011. – Kharkiv : V. N. Karazin Kharkiv National University, B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NASU, 2011. – P. 18.

[170] Дільний В. Про розв'язки одного інтегрального рівняння типу Вінера-Хопфа у кутовій області / В. Дільний, Я. Ренчка // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька: Тези доп. – Дрогобич, 19–23 вересня, 2011. – С. 63.

[171] Dilnyi V. On cyclic functions in a weighted Hardy space and some decompositions / V. Dilnyi // "Complex Analysis and its applications". 21st St. Petersburg Summer meeting in mathematical analysis: Book of abstracts – St. Petersburg, June 25–30, 2012. – P. 15–16.

[172] Dilnyi V. Cyclic functions in Hardy spaces and related problems / V. Dilnyi // International conference dedicated... S. Banah: Тези доп. – Львів, 23–28 вересня 2013 р.– С. 128.

[173] Дільний В. Умови циклічності у ваговому просторі Гарді в крузі / В. Дільний // IV міжн. ганська конф, присв. 135 річн. ... Ганса Гана: Тези доп. – Чернівці, 30 червня–5 липня, 2014. – С. 51–52.

[174] Дільний В. Про розщеплення в деяких просторах аналітичних функцій / В. Дільний // Всеукр. наук. конф.: Тези доп. – Ворохта, 25 лютого – 1 березня, 2015. – С. 14–15.

[175] Dilnyi V. On upper-lower splitting in the Paley-Wiener spaces / V. Dilnyi, T. Hishchak, I. Hordienko // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька: Тези доп. – Дрогобич, 25–28 серпня, 2015. – С. 55.

[176] Дільний В. Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій Гарді-Смірнова / В. Дільний // Матем. студії. – 2000. – Т.14. – С. 171–174.

[177] Dil'nyi V. On solutions of homogeneous convolution equation generated by singularity / V. Dil'nyi, B. Vynnyts'kyi // Mat. Stud. – 2003. – V.19. – P. 149–155.

[178] Дільний В. Про уточнення однієї оцінки добутку Неванлінни-Вейерштрасса / В. Дільний // Мат. Студ. – 2007. – Т.28, № 1. – С. 41–44.

[179] Дільний В. Про формули типу Коші та Пуассона для одного вагового простору Гарді / В. Дільний, Б. Винницький // Мат. Студ. – 2007. – Т.28, № 2. – С. 209–212.

[180] Дільний В. Про існування розв'язків одного рівняння типу згортки / В. Дільний // Доп. НАН України. – 2008. – № 11. – С. 7–10.

[181] Dilnyi V. On some integral operators on weighted Hardy spaces / V. Dilnyi // Мат. Студ. – 2009. – Т.31, № 1. – С. 107–112.

[182] Dilnyi V. On equivalence for subspaces of one weighted Hardy space / V. Dilnyi // Мат. Студ. – 2010. – Т.33, № 1. – С. 71–77.

[183] Дільний В. Гіпотеза Рімана і повнота системи зсувів / В. Дільний // Вісник Дрогобицького пед. ун-ту. – 2009. – Т.1, № 1. – С. 50–53.

[184] Дільний В. Про зображення одного класу аналітичних функцій у кутовій області / В. Дільний // Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2012. – № 718. – С. 15–18.

[185] Дильный В. Об одном обобщении теоремы Пели-Винера для весовых пространств Харди / В. Дильный, Б. Винницкий // Уфимский математический журнал. – 2013. – Т.5, № 4. – С. 31–37.

[186] Дільний В. Про деякі функції із вагових просторів Гарді, що мають сингулярність / В. Дільний // Вісник Львівського ун-ту. – Серія мех.-мат. – 2013. – Вип.84. – С. 21–30.

[187] Dilnyi V. On solutions of one convolution equation generated by a "deep zero" / V. Dilnyi, I. Sheparovych // Мат. студ. – 2013. – Т.39. – С. 45–53.

[188] Dilnyi V. On estimations of solutions of one convolution type equation / V. Dilnyi, B. Vynnytskyi // Карпатські математичні публікації. – 2013. – Т.5, № 19. – С. 30–35.

[189] Дільний В. Деякі властивості дзета-функції Рімана і циклічність у вагових просторах Гарді / В. Дільний // Мат. студ. – 2014. – Т.41, № 2. – С. 115–122.

[190] Dilnyi V. On the solutions of a convolution equation in a semi-strip / V. Dilnyi // Мат. студ. – 2014. – Т.42, № 1. – С. 61–66.

[191] Дільний В. Про циклічність функцій в одному ваговому просторі Гарді в крузі / В. Дільний // Буковинський мат. журн. – 2014. – Т.2, № 2-3. – С. 86–89.

[192] Дільний В. Про одну реалізацію принципу невизначеності / В. Дільний, Т. Війчук // Карпатські математичні публікації. – 2015. – Т.7, № 1. – С.66–71.

[193] Дильный В. Н. Об обобщении теоремы Берлинга–Лакса / В. Н. Дильный, Б. В. Винницкий // Мат. заметки. – 2006. – Т.79, № 3. – С. 362–368.

[194] Дільний В. Про еквівалентність деяких умов для вагових просторів Гарді / В. Дільний // Укр. мат. журн. – 2006. – Т.58, № 9. – С. 1257–1263.

[195] Дільний В. Еквівалентне означення деяких вагових просторів Гарді / В. Дільний // Укр. мат. журн. – 2008. – Т.60. – С. 1477–1482.

[196] Dilnyi V. On Cyclic Functions in Weighted Hardy Spaces / V. Dilnyi // Jour. of Math. Phys., Anal., Geom. – 2011. – V.7, № 1. – P. 19–33.

[197] Дільний В. Про поведінку на дійсній півосі функцій із вагових просторів Гарді / В. Дільний // Укр. мат. вісн. – 2012. – Т.10, № 4. – С. 455–468.

[198] Дільний В. Про згортку функцій у кутових областях / В. Дільний // Укр. мат. журн. – 2012. – Т.64, № 9. – С.1155–1164.

[199] Дільний В. Про інваріантні підпростори у вагових просторах Гарді / В. Дільний // Укр. мат. журн. – 2014. – Т.66, № 6. – С. 853–857.

[200] Дильный В. Расщепление некоторых пространств аналитических функций / В. Дильный //Уфимский математический журнал. – 2014. – Т.6, № 2. – С. 26–35.

[201] Дильный В.Н. Об аппроксимационных свойствах одной тригонометрической системы / В. Н. Дильный, Б. В. Винницкий // Известия вузов. Математика. – 2014. – № 11. – С. 13–25.