ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

імені ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Сокульська Наталія Богданівна

УДК 517.53

ВЛАСТИВОСТІ МЕРОМОРФНИХ У ПІВСМУЗІ ФУНКЦІЙ

01.01.01. Математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Кондратюк Андрій Андрійович
доктор фізико-математичних наук, професор

ЛЬВІВ - 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ПОЗНАЧЕНЬ

$S = \{s = \sigma + it : \sigma \; > \; 0, \quad 0 < t < 2\pi\}$ – півсмуга;

$R_\eta = \{\sigma + it : 0 < \sigma \; \leq \; \eta, \quad 0 \leq \; t < 2\pi\}$ – прямокутник;

$\{s_j\}$ – послідовність нулів функції f в S, $s_j = \sigma_j + it_j$;

$\{p_j\}$ – послідовність полюсів функції f в S;

$S^* = S \setminus \bigcup\limits_j (\{\tau\sigma_j + it_j\} \cup \{\tau \mathrm{Re} p_j + i \mathrm{Im} p_j\}), \quad 1 \leq \tau < \infty$;

$\log f(s) = \log f(s_0) + \int\limits_{s_0}^{s} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$ та

$\arg f = \mathrm{Im} \log f$, де інтеграл береться по деякому шляху в $S^* \cup \partial S$;

$\mathrm{A}(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \arg f(\sigma + it) dt -$ інтегральні середні функції f в S^*;

$N(\sigma, f) = \int\limits_0^{\sigma} n(\eta, f) d\eta$, де $n(\eta, f)$ –лічильна функція полюсів функції f, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, у прямокутнику R_η;

$m_0(\sigma, f) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+|f(\sigma+it)|dt$, де $x^+ = \max\{0, x\}$;

$T(\sigma, f) = m_0(\sigma, f) - \dfrac{\sigma}{\sigma_0} m_0(\sigma_0, f) + (\dfrac{\sigma}{\sigma_0} - 1)m_0(0, f) + N(\sigma, f), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0$ – характеристика Неванлінни функції f, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$;

$l_k(\sigma, f) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log f(\sigma+it)dt, \quad k \in \mathbb{Z}$;

$c_k(\sigma, f) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|f(\sigma+it)|dt, \quad k \in \mathbb{Z}$;

$\lambda(\sigma)$ – функція зростання;

Λ – клас мероморфних в $\overline{S}$ функцій $f, f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq 0$, скінченного λ - типу;

Λ_H – клас голоморфних в $\overline{S}$ функцій $f, f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq 0$, скінченного λ - типу;

$c_0(\sigma, f) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(\sigma+it)|dt$;

$\{z : |z| \geq 1\}$ – зовнішність одиничного круга;

$N_0(r, F) = \int\limits_1^r \dfrac{n_0(t, F)}{t}dt, \quad r \geq 1$, де $n_0(t, F)$ – лічильна функція полюсів F у кільці $\{z : 1 < |z| \leq t\}$;

$c_0(r, F) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|F(re^{it})|dt, \quad r \geq 1$;

$T_0(r,F) = m_0(r,F) - \dfrac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0,F) + \left(\dfrac{\log r}{\log r_0} - 1\right) m_0(1,F) + N_0(r,F),$
$r \geq r_0 > 1-$ характеристика Неванлінни мероморфної в $\{z : |z| \geq 1\}$ функції F;

$\Lambda(\infty)$– клас мероморфних функцій скінченного λ - типу в $\{z : |z| \geq 1\}$;

$\Lambda_H(\infty)$ – клас голоморфних функцій скінченного λ - типу в $\{z : |z| \geq 1\}$;

$\lambda_1(\sigma)$– функція зростання ($\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma), \sigma > 0$);

$Z = \{z_j\}$ -послідовність комплексних чисел із $\{z : |z| \geq 1\}$;

$n(t,Z)$ – лічильна функція послідовності Z в кільці $\{z : 1 \leq |z| \leq t\}$;

$\mathcal{H} = \{z : Im\ z > 0\}$ – верхня півплощина;

$\mathcal{H}^* = \overline{\mathcal{H}} \backslash \{0\}$ – проколене замикання верхньої півплощини;

$\mathcal{A}_t = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : qt < |z| \leq t\},\ t > 0,\ 0 < q < 1$ – півкільце;

$\mathcal{M}_q$ – клас мультиплікативно періодичних мероморфних в $\mathcal{H}^*$ функцій f з мультиплікатором q, $0 < q < 1$ (тобто функцій $f \in \mathcal{H}^*$, для яких виконується $f(qz) = f(z)$).

$\mathcal{L}_q$ – клас локсодромних функцій f з мультиплікатором q, $0 < q < 1$.

$\overset{o}{n}(r,f)$– лічильна функція полюсів f у кільці $\{z : 1/r < |z| < r\}$;

$\overset{o}{T}(r,f) = \overset{o}{N}(r,f) + \overset{o}{m}(r,f), \quad 1 \leq r$ - характеристика Неванлінни функції f у кільці $\{z : 1/r < |z| < r\}$;

$$\overset{o}{m}(r,f) = m(r,f) + m\left(\frac{1}{r}, f\right) - 2m(1,f), \text{ де } x^+ = \max\{0, x\};$$

$$\overset{o}{N}(r,f) = \int\limits_1^r \frac{\overset{o}{n}(r,f)}{r} dr.$$

ВСТУП

Провідну роль у вивченні класів аналітичних функцій відіграють дослідження властивостей цілих та мероморфних функцій, що узагальнюють многочлени та раціональні функції. Розвиток теорії розподілу значень цілих та мероморфних функцій має тривалу історію. Про важливість класів таких функцій свідчить значна кількість монографій, зокрема праці Бореля [1], Валірона [2], Картрайт [3], Хеймана [4], Левіна [5], Гольдберга, Островського [6], Рубела [7], Кондратюка [8]. Основи досліджень таких функцій були закладені ще в роботах Вейєрштрасса [9], Адамара [10], Бореля [11], Ліндельофа [12] та інших.

В 20-х роках минулого століття Ф. Неванлінна та Т. Карлеман ([13]-[15]) встановили зв'язок між розподілом нулів і полюсів мероморфної функції f у півкільці з її значеннями на межі. Т. Карлеману [15], використовуючи ці результати, вдалось наблизити голоморфні функції поліномами, а Р. Неванлінна ([16] - [22]) застосував їх до теорії розподілів значень мероморфних у півплощині функцій.

Вже у 60-70 роках того ж століття американські математики Л. А. Рубел і Б.А. Тейлор [23] розробили метод рядів Фур'є, за допомогою якого вдалося глибоко вивчати класи цілих і мероморфних функцій з обмеженнями на зростання, що задаються додатними, неспадними, неперервними, необмеженими функціями λ. Класи таких функцій отримали назву, класів функцій скінченного $\lambda-$ типу.

В дисертації дається аналог характеристики Неванлінни та його першої основної теореми для функцій мероморфних у півсмузі та мероморфних лише в деякому проколеному околі фіксованої точки. Отримано критерії скінченності $\lambda-$ типу голоморфних у замиканні півсмуги та в зовнішності одиничного круга функцій в термінах коефіцієнтів Фур'є логарифмів їх модулів. Встановлено зв'язок між характеристикою Неванлінни $T_0(r, F)$ мероморфних в зовнішності одиничного круга функцій і класичною характеристикою Неванлінни $T(r, f)$ для функцій, які мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$. Дослідження мероморфних функцій у зазначених областях має певний науковий інтерес. Тому задача розробки методу рядів Фур'є для класів таких функцій - цікава та актуальна.

Актуальність теми.

Метод рядів Фур'є, розроблений американськими математиками Л. А. Рубелом і Б. А. Тейлором [23], є одним з найбільш ефективних і потужних методів дослідження асимптотичних властивостей та розподілу значень голоморфних і мероморфних функцій.

В основі цього методу лежить тонкий аналіз формул для коефіцієнтів розвинення в ряд Фур'є функції $\log |f(re^{i\theta})|$, що узагальнюють класичну формулу Йенсена [24].

Вперше метод рядів Фур'є до цілих функцій застосував Н. І. Ахієзер [25], давши нове доведення класичної теореми Ліндельофа про тип цілої функції цілого порядку. Пізніше, окрім Л.А. Рубела і Б.А. Тейлора [23], [7], його також використовували А. Едрей і Ф. Фукс [26], В.С. Азарін

[27], Д. Майлз і Д. Шей ([28], [29]), А.А. Гольдберг і М.Л. Содін [30], А.А. Кондратюк ([8], [33]), Я.В. Васильків ([34] – [36]), В. Бергвайлер [37]-[38], К.Г. Малютін ([39], [40]), Б.В. Винницький [41] та інші.

За допомогою цього методу було розв'язано низку фундаментальних задач теорії цілих і мероморфних в комплексній площині функцій:

- Л. А. Рубел і Б. А. Тейлор, в термінах коефіцієнтів Фур'є цих функцій, дали вичерпний опис нулів і полюсів мероморфних функцій f з класів Λ, що визначаються довільними додатними, зростаючими, неперервними, необмеженими мажорантами зростання $\lambda(r)$ їх характеристик Неванлінни $T(r, f)$;

- Л. А. Рубел, Б. А. Тейлор і Д. Майлз розв'язали задачу про зображення мероморфних функцій з класу Λ часткою двох цілих функцій з класів цілих функцій $\Lambda_E \subset \Lambda$;

- Л. А. Рубел узагальнив класичне зображення Адамара для цілих функцій скінченного порядку;

- А. А. Кондратюк узагальнив теорію цілих функцій цілком регулярного зростання Левіна-Пфлюгера на цілі і мероморфні функції з класів Λ_E і Λ.

Незважаючи на ефективність та широкий спектр застосувань, метод рядів Фур'є для логарифма модуля мав природний недолік, а саме, він залишав поза увагою поведінку аргументів голоморфних та мероморфних функцій. Цей недолік було усунуто в роботах Дж. Літтлвуда [42], Д. Таунсенда [43], А.А. Гольдберга М.М. Строчика [30],[44]-[45], А.А. Кондратюка [8], Я.В. Васильківа [35]-[36], [46]. Зокрема, ще у 1924 р. Дж. Літтлвуд узагальнив формулу Йенсена для логарифма модуля і аргумента мероморфної в прямокутнику функції та застосував її до вивчення нулів класичної ζ-функції Рімана.

В роботах Ф. Новераза [47], Я.В. Васильківа [46],[48], К.Г. Малютіна [49] результати Л.А. Рубела і Б.А. Тейлора були узагальнені на субгармонійні та $\delta-$субгармонійні функції скінченного $\lambda-$типу в комплексній площині. В працях [50]-[51], для субгармонійних в евклідовому просторі функцій А.А. Кондратюком розроблено метод сферичних гармонік, який, фактично, є аналогом методу Рубела-Тейлора. За допомогою цього методу О.П. Гнатюк і А.А. Кондратюк [52]-[53] досліджували субгармонійні в кульових прошарках функції та побудували в них функцію Гріна для оператора Лапласа.

Узагальнюючи класи функцій скінченного $\gamma-$типу в сенсі Рубела-Тейлора, в [54] Б. Н. Хабібуллін ввів класи скінченного $(\gamma, \varepsilon)-$типу, поширивши на них класичний результат Рубела-Тейлора. Згодом Ю.С. Процик та Я.В. Васильків [55]-[56] модифікували метод сферичних гармонік для класів субгармонійних в $\mathbb{R}^m (m \geq 2)$ функцій скінченного $(\lambda, \varepsilon)-$типу та отримали ряд результатів щодо мажорант зростання субгармонійних функцій з певними обмеженнями на їх міри Ріса.

Важливим напрямком досліджень є розробка методу рядів Фур'є в областях, відмінних від круга, площини чи півплощини. Зокрема, розглядаючи композицію $f \circ \mathcal{R}$ трансцендентної мероморфної в $\mathbb{C}$ функції f і раціональної функції $\mathcal{R}$ з $n-1$ різними полюсами в $\mathbb{C}$, можна отримати мероморфну функцію в $n-$ зв'язній області з n істотно особливими точками.

Цікавим частковим випадком є випадок двозв'язної області, адже кожна така область конформно еквівалентна деякому кільцю, або проколеній площині, яку можна вважати узагальненим кільцем, а голоморфні в кільцях з центром в точці $z = 0$ функції допускають розвинення в ряд Лорана. Крім того, інтегральні середні модулів та логарифмів модулів таких функцій є опуклими відносно $\log |z|$. Тому, ряд авторів присвятили свої роботи ([33], [57]-[63]) вивченню властивостей мероморфних функцій в неоднозв'язних областях і узагальненню теорії Неванлінни на класи таких функцій.

В роботах [64]-[65] А. Бридун поширив деякі з результатів теорії Неванлінни на класи функцій, мероморфних у півсмузі $R = \{z = x + iy, x > x_0, 0 < y < \pi\}$, та довів критерій скінченності λ-типу для голоморфної в півсмузі функції.

Актуальною залишається задача розробки методу рядів Фур'є для функцій f, мероморфних у замиканні півсмуги $S = \{\sigma + it : \sigma > 0, 0 < t < 2\pi\}$, і таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, адже при виконанні умови $F(z) = f(\log z)$, де $z = e^s$, отримуємо мероморфну у зовнішності одиничного круга $\{z : |z| \geq 1\}$ функцію, яку, без втрати загальності, можна вважати околом точки ∞, а результати, пов'язані з властивостями мероморфних функцій в такій області, - певним узагальненням деяких результатів теорії Неванлінни на мероморфні в околі ∞ функції.

Відмінність наших підходів до вивчення мероморфних у півсмузі S функцій від підходів, запропонованих в [64]-[65], полягає в тому, що результати вказаних робіт спираються на доведену там теорему типу Карлемана, ми ж доводимо лему типу Йенсена-Літтлвуда, яка є ключовою в наших дослідженнях.

У 1926 році в роботі [66] Анрі Картан довів, що для мероморфної в $|z| < R$ функції f виконується $T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} N(r,e^{i\theta})d\theta + \log^+|f(0)|$ $(0 < r < R)$. Звідси випливає, що характеристика Неванлінни $T(r,f)$ є зростаючою опуклою функцією від $\log r$ при $0 < r < R$.

А. Кондратюк та А. Христіянин [62], [63] встановили умови на мероморфну в проколеній площині $A = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$ функцію f для того, щоб характеристика Неванлінни такої функції задовольняла умову $\overset{o}{T}(r,f) = O(\log r)$ при $r \to +\infty$. Крім того в цих роботах проведено порівняння $\overset{o}{T}(r,f)$ з класичною характеристикою Неванлінни $T(r,f)$ таких функцій, що мероморфно продовжуються в $D_{R_0} = \{z : |z| < R_0\}, 1 < R_0 \leq +\infty$.

Тому цікавими залишаються задача про порівняння характеристики типу Неванлінни $T_0(r,F)$ для мероморфної в зовнішності одиничного круга $\{z : \ |z| \ \geq \ 1\}$ функції F з $\log r$ при $0 < r < \infty$, а також питання про те, чи ця характеристика може служити характеристикою зростання мероморфної в $\{z : \ |z| \ \geq \ 1\}$ функції так само, як і класична характеристика Неванлінни $T(r,F)$, якщо F мероморфно продовжується в $\mathbb{C}$.

Теорія мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ була розроблена О. Раузенбергером [67]. Ж. Валірон [68] назвав такі функції локсодромними, адже у випадку недійсного q точки, у яких така функція приймає одне і те ж значення, лежать на логарифмічних спіралях. Образи цих спіралей на сфері Рімана перетинають кожен меридіан під одним і тим же кутом і називаються локсодромними кривими ($\lambda o\xi o\zeta$ - кривий, $\delta\rho o\mu o\zeta$ - шлях). В log-полярних координатах це прямі лінії. Теорія таких функцій тісно пов'язана з теорією еліптичних функцій: за допомогою локсодромних мероморфних функцій спрощується побудова еліптичних. Зважаючи на можливість різноманітного застосування таких об'єктів ([69]-[72]), постало питання вивчення різних класів мультиплікативно періодичних відображень довільних однорідних просторів. В цьому напрямку А. А. Кондратюком ([73]) розв'язано наступні задачі:

- описано міри Ріса локсодромних δ-субгармонійних функцій;
- доведено теорему про зображення кожної локсодромної δ-субгармонійної функції.

Попри те, цікавими залишаються задачі розподілу значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини та задачі, пов'язані з характеристиками зростання локсодромних функцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Напрямок досліджень, вибраний у дисертації, передбачений планом теми: МА-107Ф "Нові методи комплексного та функціонального аналізу в теорії мероморфних і субгармонійних функцій, теорії операторів та нелінійних динамічних систем"(номер держреєстрації 0112U001272).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертації є дослідження асимптотичних властивостей голоморфних і мероморфних у замиканні півсмуги $S = \{\sigma + it : \sigma > 0,\ 0 < t < 2\pi\}$ функцій f таких, що задовольняють умову $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq\ 0$, зокрема, мероморрфних функцій скінченного $\lambda-$ типу, та мероморфних в зовнішності одиничного круга функцій, вивчення розподілу нулів та полюсів функцій з цих класів методом рядів Фур'є, а також вивчення розподілу значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини та характеристик зростання локсодромних функцій. В роботі розв'язано наступні *задачі*:

- доведено аналог леми Йенсена-Літтлвуда для мероморфної у замиканні півсмуги функції f такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq\ 0$, встановлено співвідношення для коефіцієнтів Фур'є мероморфної в замиканні прямокутника R_σ функції f такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq\ 0$;

- описано множини нулів голоморфних, нулів і полюсів мероморфних у замиканні півсмуги функцій f таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq\ 0$.

Як наслідок, отримали розв'язок такі *задачі*:

- доведено теорему Йенсена для мероморфних зовні одиничного круга функцій та встановлено співвідношення для коефіцієнтів Фур'є таких функції;

- описано розподіл нулів і полюсів мероморфної функції в околі істотно особливої точки.

Крім того, для функцій F, мероморфних в $\{z : \ |z| \ \geq \ 1\}$:

- встановлено зв'язок між $T_0(r, F)$ та класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ для мероморфних функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$.

- встановлено умови на зростання мероморфної функції в околі істотно особливої точки.

А також:

- досліджено умови зростання локсодромних функцій;

- встановлено умови на розподіл значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини.

Об'єктами дослідження є мероморфні у замиканні півсмуги S функції f такі, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq\ 0$, функції, мероморфні в околі істотно особливої точки, локсодромні функції та мультиплікативно періодичні мероморфні функції у проколеному замиканні верхньої півплощини.

Предметом дослідження є асимптотичні властивості мероморфних у замиканні півсмуги S функцій f таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq\ 0$, скінченного $\lambda-$ типу, розподіл їх нулів та полюсів, зростання та розподіл нулів і полюсів мероморфних функцій скінченного $\lambda-$ типу в околі істотно особливої точки, характеристики зростання локсодромних функцій, розподіл значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини.

Основними *методами* досліджень є метод рядів Фур'є, а також різноманітні методи теорії функцій комплексної змінної, методи математичного аналізу та деякі прийоми з робіт Дж. Літтлвуда, Р. Неванлінни, А. А. Гольдберга, Й. В. Островського, К. Г. Малютіна, А. А. Кондратюка.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі одержані наукові результати є новими та оригінальними дослідженнями. У роботі вперше:

- доведено аналог леми Йенсена-Літтлвуда для мероморфних у замиканні півсмуги функцій f таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq 0$. Отримано критерій скінченності λ-типу голоморфної в замиканні півсмуги функції f, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \sigma \geq 0$, в термінах коефіцієнтів Фур'є логарифма її модуля.

- описано множини нулів голоморфних та нулів і полюсів мероморфних у півсмузі функцій скінченного λ - типу таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$ на межі півсмуги.

Крім того, новими є твердження, отримані як наслідки наведених вище результатів:

- доведено аналог теореми Йенсена для мероморфної в зовнішності одиничного круга функції та встановлено співвідношення для коефіцієнтів Фур'є такої функції;

- отримано критерій скінченності λ - типу голоморфних в зовнішності одиничного круга функцій F в термінах коефіцієнтів Фур'є функції $\log |F|$.

- описано послідовності нулів голоморфних і нулів та полюсів мероморфних функцій скінченного λ - типу в зовнішності одиничного круга.

А також:

- встановлено зв'язок між $T_0(r, F)$ та класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ для мероморфних функцій, які мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$;

- досліджено зростання характеристик локсодромних функцій;

- доведено теорему про розподіл значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, подані у дисертації, мають теоретичний характер і можуть знайти застосування у подальших дослідженнях із загальної теорії мероморфних функцій, теорії розподілу значень мероморфних у півсмузі та в околі істотно особливої точки функцій, а також при вивченні властивостей функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$, теоріях локсодромних та мультиплікативно періодичних функцій.

Особистий внесок здобувача. Усі основні наведені у роботі результати отримані здобувачем самостійно. У спільних з науковим керівником публікаціях [89], [96], А. А. Кондратюку належить постановка задач та загальне керівництво роботою. У роботі [89] співавтору А.Я. Христіянину належить формулювання та доведення Теореми 2 пункту 3, а у роботах [93], [99] співавтору В.С. Хорощак належить доведення перших теорем, що не внесені до даної дисертації.

Апробація результатів дисертації. Усі основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

1) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 20-26 лютого 2012 року);

2) міжнародній конференції "Functional Analysis and its Applications, Dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach"(Львів, 17–21 вересня 2012 року);

3) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013 року);

4) міжнародній конференції "Complex Analysis and Related Topics"(Львів, 23–28 вересня 2013 року);

5) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 24 лютого - 2 березня 2014 року);

6) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 25 лютого - 1 березня 2015 року);

7) міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій у м. Львові (керівники – проф. А. А. Кондратюк і проф. О. Б. Скасків).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 11 роботах (7 без співавторів), з яких: 5 (3 без співавторів) опубліковано у виданнях, включених до переліку наукових фахових видань України, затверджених наказом МОН України від 13.07.2015 року № 747, в тому числі 1 (1 без співавторів) - в зарубіжному виданні, 2 (2 без співавторів) - в тезах міжнародних конференцій, 4 (2 без співавторів) - в тезах всеукраїнських конференцій.

Структура і об'єм дисертації. Дисертація складається з вступу, п'яти розділів, поділених на підрозділи, висновків і списку використаних джерел. Загальний об'єм дисертації 128 сторінок. Список використаних джерел об'ємом 14 сторінок включає 99 найменувань.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

1.1. Огляд літератури

Розвиток теорії розподілу значень мероморфних функцій починається ще з класичних теорем Ю. В. Сохоцького —Казораті (1868 р.), К. Вейєрштрасса (1876 р.) і Е. Пікара (1879 р.). В 90-х роках 19-го століття Ж. Адамар, Е. Борель, Ж. Валірон, продовжуючи дослідження розподілу нулів цілих функцій, встановили ряд важливих результатів в цій теорії. Та найвагомішими працями в цій галузі вважаються роботи фінського математика Р. Неванлінни з теорії розподілу значень мероморфних функцій, датовані 20-ми роками попереднього століття, в яких отримано співвідношення, що узагальнюють формулу Йенсена [24]. Із цих співвідношень випливають зв'язки між коефіцієнтами

Фур'є

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ik\theta}\log|f(re^{i\theta})|d\theta,\quad r>0,\quad k\in\mathbb{Z},\tag{1.1}$$

функції $\log|f|$ та нулями і полюсами функції f. Тому одним із найбільш ефективних і потужних методів дослідження асимптотичних властивостей та розподілу значень голоморфних та мероморфних функцій став метод рядів Фур'є. Його засади в 1960-70-тих роках розробили американські математики Л. А. Рубел і Б. А. Тейлор [23], Майлз, Шей [28]-[29], [31] -[32] та інші. За допомогою цього методу в згаданих роботах введено й досліджено класи функцій скінченного $\lambda-$ типу.

Нехай f функція мероморфна у комплексній площині $\mathbb{C}$, $Z(f)=\{z_j\}$ та $W(f)=\{w_j\}$ множини її нулів та полюсів відповідно. Нехай також $T(r,f)$ - її характеристика Неванлінни

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f),$$

де $m(r,f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta$ і $N(r,f)=\displaystyle\int\limits_0^{r}\frac{n(t)}{t}dt$, $n(t)-$ кількість полюсів функції f в крузі $\{z:|z|<t,\ f(0)=1\}$, і

$$\log|f(re^{i\theta})|=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(r,f)e^{ik\theta}-$$

ряд Фур'є функції $\psi(\theta):=\log|f(re^{i\theta})|$ на $[0,2\pi]$, де $c_k(r,f)$ визначаються співвідношеннями (1.1)

У 1899 році Йенсеном [24] встановлено, що для довільного $k\in\mathbb{Z}$ та $0<r<+\infty$ виконуються співвідношення:

$$c_0(r,f)=\sum_{|z_j|\le r}\log\frac{r}{|z_j|}=N(r,f),$$

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2}\gamma_k r^k+\frac{1}{2k}\sum_{|z_j|\le r}\left(\left(\frac{r}{z_j}\right)^k-\left(\frac{\overline{z_j}}{r}\right)^k\right),$$

$$c_{-k}(r,f)=\overline{c_k(r,f)},$$

де γ_k- коефіцієнти розвинення $\log f(z)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\gamma_k z^k$ в деякому околі точки $z=0,\ \log f(0)=0$.

Додатну, неперервну, зростаючу та необмежену на $(0;\ +\infty)$ функцію λ називають *функцією зростання.* Ціла функція f називається функцією скінченного $\lambda-$типу, якщо існують додатні сталі A,B такі, що нерівність $T(r,f)\le A\lambda(Br)$ виконується для всіх $r>0$. Клас таких функцій позначають через Λ_E. Через Λ позначають клас мероморфних функцій скінченного $\lambda-$типу.

Нехай $\lambda-$ функція зростання. Послідовність $Z=\{z_j\}-$ неспадних за модулем комплексних чисел, $z_j\ne 0,\ |z_i|\to\infty$ при $j\to+\infty$, має скінченну $\lambda-$ щільність, якщо існують додатні сталі A,B такі, що $N(r,f)\le A\lambda(Br)$ для всіх $r>0$, де $N(r,Z)=\int\limits_0^r\frac{n(t,Z)}{t}dt$, $n(t,Z)-$кількість членів послідовності Z у крузі $\{z:|z|\le t\}$. В роботі Рубела і Тейлора [23] було встановлено наступний критерій.

Теорема А. *Нехай $f-$ ціла функція, $\lambda-$ функція зростання, наступні твердження еквівалентні:*

(i) $f\in\Lambda_E$;

(ii) послідовність $Z(f)$ має скінченну $\lambda-$ щільність і нерівності

$$|c_k(r,f)|\le A\lambda(Br),\ k\in\mathbb{Z},$$

виконуються при деяких додатних сталих A,B для всіх $r>0$.

Використовуючи метод рядів Фур'є, Рубелу, Тейлору і Майлзу вдалось зобразити мероморфну функцію f скінченного $\lambda-$типу у вигляді частки двох цілих функцій із класу Λ_E.

Цей метод дозволив побудувати узагальнення теорії Левіна-Пфлюгера цілих функцій цілком регулярного зростання і поширити його на мероморфні функції з класу Λ. Важливі результати в цьому напрямку отримав А. А. Кондратюк [74]-[76].

Працюючи з логарифмом модуля функцій, Рубел і Тейлор залишали поза увагою аргументи цих функцій. Цю проблему частково вдалось вирішити Таунсенду в роботі [43]. Використовуючи даний результат, А. Кондратюк і Р. Калинець в роботі [77] ввели прямі і обернені співвідношення для коефіцієнтів Фур'є повного логарифма цілої функції f $(f(0) = 1)$,

$$l_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{ik\theta} \log f(re^{i\theta}) d\theta,\ \ k \in \mathbb{Z}, r > 0,$$

де функція

$$\log f(z) = \int\limits_0^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi,$$

визначена у проколеній площині з радіальними розрізами від нулів функції f до ∞.

К. Г. Малютін у роботі [40] довів аналог цього твердження для субгармонійних та $\delta-$субгармонійних у верхній півплощині функцій за деяких додаткових умов на їх поведінку біля межі. Важливих результатів для класів субгармонійних функцій вдалось досягти А.Ф. Грішину в роботах [78]-[79].

В роботі А. Грішина, М. Федорова [80] введено поняття *істинно су-*

бгармонійної функції v, тобто субгармонійної в $\mathbb{C}_+$ функції, для якої виконується нерівність $\overline{\lim\limits_{z\to t}} v(z) \leq 0$ для кожного $t \in \mathbb{R}$. Клас таких функцій позначають через JS. Тут також введено характеристику Неванлінни $T(R, v)$ істинно субгармонійної функції v :

$$T(R, f) = m(R, v) + N(R, v) + m(r, -v), \quad R > r > 0.$$

На функцію зростання γ накладається умова $\underline{\lim\limits_{R\to+\infty}} \dfrac{\gamma(R)}{R} > 0.$

В роботі Малютіна [40] введено та вивчено класи $J\delta = JS - JS$ *істинно* $\delta-$*суб- гармонійних функцій* та $J\delta(\gamma(r))$ *істинно* $\delta-$*субгармонійних функцій скінченного* $\gamma-$*типу.*

Означення ([40]). Додатна міра λ має *скінченну* $\gamma-$*щільність*, якщо при деяких A та B, $A > 0$, $B > 0$, виконується нерівність

$$N(r, \lambda) := \int\limits_r^R \frac{\lambda(t)}{t^3} dt \leq \frac{A}{R}\gamma(BR)$$

для всіх $R, R > r$.

Теорема В. ([40]). *Нехай* $\gamma-$ *функція зростання,* $v \in JS$. *Тоді наступні твердження еквіваленті:*

(i) $v \in JS(\gamma)$;

(ii) $|c_k(R, v)| \leq A\gamma(BR), k \in \mathbb{N}$, *при деяких додатних* A, B *і всіх* $R,\ R > r$.

Технічний апарат для вивчення класів субгармонійних функцій скінченного (ε, δ)-типу в півплощині, а саме теорія повної міри, була розроблена А. Ф. Грішиним у працях [78],[79]. Використовуючи теорію повної міри і метод рядів Фур'є, К. Г. Малютін [49] отримав ряд фундаментальних результатів для суб- і δ-субгармонійних функцій довільного γ-зростання у півплощині. Логічним продовженням роботи К. Г.

Малютіна стали результати І. Козлової [81], де метод рядів Фур'є для субгармонійних в $\mathbb{C}_+$ функцій скінченного γ-типу модифіковано для класів дельта-субгармонійних в $\mathbb{C}_+$ функцій скінченного (ε, δ)-типу в півплощині в сенсі Б. Н. Хабібулліна [82].

Нехай $\varepsilon(r)$ - незростаюча функція на $[0; +\infty)$, така що $\varepsilon(0) = 1$, і для деякого $\eta > 1$ нерівність

$$\varepsilon(r + r\varepsilon(r)) \geq (\varepsilon(r))^{\eta}$$

виконується для всіх досить великих r. Клас таких функцій позначено $\mathcal{E}$.

Нехай для $v \in J\delta$, $v = v_+ - v_-$, λ – повна міра v, а $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ - жорданове розвинення λ. Нехай γ – функція зростання і $\varepsilon(r)$ – функція з класу $\mathcal{E}$ такі, що існують сталі $\alpha > 0$ і $B > 0$, при яких виконується умова:

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{\gamma(r + B\varepsilon(r)r)}{r(\varepsilon(r))^{\alpha}} > 0.$$

Означення 1 ([81]). *Нехай γ – функція зростання, а $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Функція $v \in J\delta, 0 \notin supp\lambda_v, v(0) = 0$, називається функцією скінченного (γ, ε)-типу, якщо існують сталі α, A і $B > 0$ такі, що*

$$T(r, v) \leq \frac{A}{r(\varepsilon(r))^{\alpha}} \gamma(r + B\varepsilon(r)r).$$

Клас таких функцій позначають через $J\delta((\gamma, \varepsilon))$.

Означення 2 ([81]). *Додатна міра λ на комплексній площині називається мірою скінченного (γ, ε)-типу, якщо існують додатні сталі α, A і B, такі, що для всіх $r > 0$,*

$$\lambda(r) \leq \frac{Ar}{(\varepsilon(r))^{\alpha}} \gamma(r + B\varepsilon(r)r).$$

Означення 3 ([81]). *Додатна міра λ має скінченну (γ,ε)-щільність, якщо існують додатні сталі α, A і B, такі, що*

$$N(r,\lambda) := \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda(t)}{t^3}dt \leq \frac{A}{r(\varepsilon(r))^\alpha}\gamma(r+B\varepsilon(r)r).$$

Теорема С. ([81]). *Нехай γ – функція зростання, ε – функція з класу $\mathcal{E}$ і $v \in J\delta$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(1) $v \in J\delta((\gamma,\varepsilon))$;

(2) міра $\lambda_+(v)$ (або $\lambda_-(v)$) має скінченну (γ,ε)-щільність і

$$|c_k(\theta,r,v)| \leq \frac{A\gamma(r+B\varepsilon(r)r)}{(\varepsilon(r))^\alpha}, k \in \mathbb{N},$$

для деяких додатних α, A, B і всіх $r > 0$.

Важливим напрямком досліджень є розробка методу рядів Фур'є в областях, відмінних від круга, площини чи півплощини. Певних результатів в неоднозв'язних кругових областях вдалось досягнути А. Я. Христіянину спільно з А. А. Кондратюком, а в півсмугах – А. М. Бридуну. Так, зокрема, в роботах [62], [63] побудовано аналог теорії Неванлінни для функцій мероморфних у плоскому круговому кільці:

- встановлено аналог формули Йенсена для кільця A;

- доведено аналог характеристики Сімідзу-Альфорса $\overset{o}{T^o}(R,f)$;

- встановлено зв'язок характеристики $\overset{o}{T}(R,f)$ з класичною характеристикою Неванлінни $T(r,f)$, у випадку, коли функція f мероморфно продовжується в $\mathbb{C}$;

- доведено аналог теореми Картана і властивості характеристик $\overset{o}{N}(R,f)$, $\overset{o}{T}(R,f)$, та $\overset{o}{T^o}(R,f)$;

- аналоги першої та другої теорем теорії Неванлінни розподілу значень для кільця.

Крім того в роботі Христіянина [83] встановлено критерій належності логарифма модуля функції, аналітичної у замиканні верхньої півплощини, до класу істинно субгармонійних функцій скінченного $\gamma-$ типу.

Нехай $a_k(R,f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \arg f(Re^{i\theta}) \cdot \cos k\theta d\theta, \ \ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, де $\arg f(Re^{i\theta}) = \operatorname{Im} \log f(Re^{i\theta})$.

Теорема D. ([83]). *Нехай γ функція зростання, $\varliminf\limits_{R\to\infty} \dfrac{\gamma(R)}{R} > 0$. Нехай функція f аналітична у замиканні верхньої півплощини і $|f(t)| \le 1$ при $t \in \mathbb{R}$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(i) $\log|f| \in JS(\gamma)$.

(ii) $|a_k(R,f)| \le A\gamma(BR)$ *при деяких додатних A, B та всіх R, $R > r, \ \ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.*

Теорема E. ([83]). *Нехай γ функція зростання, $\varliminf\limits_{R\to\infty} \dfrac{\gamma(R)}{R} > 0$. Нехай функція f аналітична у замиканні верхньої півплощини. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(i) $\log|f| \in JS(\gamma)$.

(ii) $|\, l_k(R,f)| \le A\gamma(BR)$, *при деяких додатних A, B та всіх R, $R > r, \ \ k \in \mathbb{Z}$, де $l_k(R,f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log f(Re^{i\theta}) d\theta$, а $\log f(Re^{-i\theta}) = -\overline{\log f(Re^{i\theta})}, \quad 0 < \theta < \pi$.*

В роботах [64]-[65], [84] А.М. Бридуна спільно з А.А. Кондратюком вивчалися мероморфні у півсмузі функції в термінах теорії Неванлінни, зокрема розв’язано наступні задачі:

- доведено аналог першої основної теореми теорії Неванлінни для функцій мероморфних у замиканні півсмуги $R = \{z = x + iy, x > x_0, 0 < y < \pi\}$;

- доведено критерій скінченності λ-типу для голоморфної у півсмузі функції.

Нехай $\lambda(x)(x \in [x_0, +\infty))-$ функція зростання, тобто додатна, неперервна, зростаюча і необмежена на $[x_0, +\infty)$. Функція $f, f(z) \not\equiv 0$, мероморфна в замиканні півсмуги $R = \{z = x + iy, x > x_0, 0 < y < \pi\}$, називається *функцією скінченного λ-типу в R,* якщо існують додатні сталі a, b такі, що для всіх $x > x_0$ виконується

1) $S(x; x_0, f) \leq a\lambda(x + b)$;

2) $\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} \frac{|\log|f(t)|| + |\log|f(t + i\pi)||}{e^t} dt \leq a\lambda(x + b)$,

де $S(x; x_0, f) = A(x; x_0, f) + B(x; x_0, f) + C(x; x_0, f)$, та

$$C(x; x_0, f) := 2 \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{\omega_p \in R_x} \sin\eta_p \left(\frac{1}{e^t} + \frac{e^t}{e^{2x}}\right) dt,$$

$$A(x; x_0, f) := \frac{1}{\pi} \int\limits_{x_0}^{x} (\log^+|f(t)| + \log^+|f(t + i\pi)|) \left(\frac{1}{e^t} + \frac{e^t}{e^{2x}}\right) dt,$$

$$B(x; x_0, f) := \frac{2}{\pi e^x} \int\limits_{0}^{\pi} \log^+|f(x + iy)| \sin y dy.$$

Клас таких функцій в [65] позначено як F_λ.

Нехай $c_k(x, f) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \log|f(x + iy)| \sin kydy, \quad k \in \mathbb{Z}$, $\sin-$ *коефіцієнти Фур'є* на $[0, \pi]$ функції $\log|f(x + iy)|$ як функції від y.

Теорема F ([65]). *Нехай $\lambda-$ функція зростання і нехай $f, f \not\equiv 0$, голоморфна в замиканні півсмуги R функція. Тоді наступні твердже-*

ння еквівалентні:

a) $f \in F_\lambda$;

b) виконується умова 2) та існують сталі $a, b > 0$ *такі, що для всіх* $x > x_0$ *і* $k \in \mathbb{N}$ *виконується* $|c_k(x, f)| \le ae^x\lambda(x+b)$.

Характеристика Неванлінни $T(r, f)$ дає зручніший підхід до визначення швидкості зростання функції, аніж максимум модуля голоморфної функції. В роботах [4], [6] показано, що $T(r, f)$ є зростаючою опуклою функцією від $\log r$ при $0 < r < R$.

Нехай f мероморфна функція в $A = \{z : \dfrac{1}{R_0} < |z| < R_0, 1 < R_0 \le +\infty.\}$ Характеристикою Неванлінни мероморфної в A функції f називається ([62], [63])

$$\overset{o}{T}(r, F) = \overset{o}{N}(r, f) + \overset{o}{m}(r, f), \quad 1 \le r < R_0,$$

де $\overset{o}{N}(r, f) := \int\limits_0^r \dfrac{\overset{o}{n}(t, f)}{t} dt, \quad \overset{o}{m}(r, f) := m(r, f) + m(\dfrac{1}{r}, f) - 2m(1, f), \quad 1 \le r < R_0$, а $\overset{o}{n}(t, f)-$ лічильна функція полюсів f в A.

Теорема 4 з [62] описує клас мероморфних функцій, характеристика $\overset{o}{T}(R, f)$ яких в певному розумінні зростає не швидше за $C \log R$ при $R \to +\infty$, $C = const$.

В дисертаційній роботі ж доведено твердження щодо зв'язку між класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ для мероморфних функцій, які мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$, та функції $T_0(r, F)$, що задається співвідношенням

$$T_0(r, F) = m_0(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0, F) +$$

$$+ \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) m_0(1, F) + N_0(r, F), \quad r \ge r_0 > 1;$$

встановлені умови на мероморфну зовні одиничного круга функцію F для того, щоб виконувалась рівність $T_0(r, F) = O(\log r), r \to \infty$.

Як вже було вище згадано, теорія мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ була розроблена О. Раузенбергером в праці [67]. Ж. Валірон назвав такі функції локсодромними. В роботі А.А. Кондратюка [73] показано наступне.

Нехай $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - проколена комплексна площина. Функція $z = e^{2\pi s}$ відображає комплексну площину $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}^*$. Таким чином, отримуємо $\mathbb{C}^* = \exp\{2\pi\mathbb{C}\}$. Позначивши $z = re^{i\varphi}$, $s = \sigma + it$, матимемо такі співвідношення

$$\sigma = \frac{\log r}{2\pi}, \quad t = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Пара (σ, t) називається log-*полярними координатами* в $\mathbb{C}^*$. Ці координати є локальними. Однак, справедливо $e^{2\pi it} = e^{2\pi i(t-[t])}$, де $[t]$ - це ціла частина t. Функція $t \to t-[t]$ відображає одновимірний тор $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на $[0, 1)$. Отже, $\mathbb{C}^* = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Таким чином, загальними координатами в $\mathbb{C}^*$ також є пари (σ, t) де $\sigma \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$. Тому кожну функцію f в $\mathbb{C}^*$ можна розглядати як періодичну в log - полярних координатах з періодом i, адже $f(e^{2\pi s}) = g(s)$, $g(s + i) = f(e^{2\pi(s+i)}) = f(z)$, та навпаки. Більш того, якщо $g(s)$ має відмінний від ω_1 період, скажімо 1, тоді з рівності $g(s + 1) = g(s)$ отримуємо співвідношення $f(e^{2\pi}e^{2\pi s}) = f(e^{2\pi s})$, або $f(e^{2\pi}z) = f(z)$. Тому, матимемо, що f є мультиплікативно періодичною з мультиплікатором $e^{2\pi}.\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

В загальному випадку після гомотетії $s \to \dfrac{s}{\omega}$ з довільним періодом $\omega_1 > 0$ отримаємо подвійно періодичну функцію g з ґраткою періодів $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, де $\omega_2 = i\omega$, $\omega > 0$, та f - мультиплікативно періодична з мультиплікатором $\dfrac{1}{q} = e^{2\pi\frac{\omega_1}{\omega}} = e^{2\pi i\frac{\omega_1}{\omega_2}}$, $0 < q < 1$. Таким чином, мультиплікативно періодична функція $f(z)$ з мультиплікатором q та відповідна подвійно періодична функція $g(s)$ з ґраткою періодів Λ пов'язані наступним співвідношенням

$$f(e^{\frac{2\pi i}{\omega_2}s}) = g(s), \quad \frac{1}{q} = e^{2\pi i\frac{\omega_1}{\omega_2}}, \quad \mathrm{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2} < 0.$$

Подвійно періодичні мероморфні функції є еліптичними функціями, відомими ще з праць К. Якобі, Н. Абеля, К. Вейєрштрасса.

Варто зауважити, що локсодромні функції дають простішу конструкцію еліптичних функцій.

Ми ж вивчаємо характеристики зростання локсодромних та властивості мультиплікативно періодичних мероморфних функцій з мультиплікатором q у проколеному замиканні верхньої півплощини, зокрема, досліджуємо розподіл значень таких функцій.

1.2. Огляд основних результатів

У даній роботі об'єктом дослідження є мероморфні у замиканні півсмуги $S = \{s = \sigma + it : \sigma > 0,\ 0 < t < 2\pi\}$ функції f такі, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq 0$, мероморфні в зовнішності одиничного круга $\{z : |z| \geq 1\}$ функції, мультиплікативно періодичні функції з $\mathcal{M}_q$ та локсодромні функції.

Розділ 2 дисертації присвячений вивченню мероморфних у замиканні півсмуги S функцій f таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq 0$. Він складається з чотирьох підрозділів і висновків.

Підрозділ 2.1 присвячено доведенню аналогу леми Йенсена-Літтлвуда для мероморфної у $\overline{S}$ функції f такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i),\ \sigma \geq\ 0$.

Нехай функція f мероморфна в $\overline{S}$, не має ні нулів, ні полюсів на ∂S, $f \not\equiv 0$ і, крім того, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \quad \sigma \geq\ 0$.

Через $\{s_j\}$ позначимо послідовність нулів функції f в S, $s_j = \sigma_j + it_j$, через $\{p_j\}$ - послідовність її полюсів в S.

Функцію $\log f(s)$ визначимо співвідношенням

$$\log f(s) = \int\limits_{s_0}^{s} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \log f(s_0), \tag{1.2}$$

вибравши деяке значення $\log f(s_0)$, де $s_0 \in S^*$ і інтеграл береться по деякому шляху в $S^* \cup \partial S$, а

$$S^* = S \setminus \bigcup_j (\{\tau\sigma_j + it_j : \tau \geq 1\} \cup \{\tau \mathrm{Re} p_j + i \mathrm{Im} p_j : \tau \geq 1\}).$$

Нехай $n(\eta, f)$ лічильна функція полюсів функції f у прямокутнику

$$R_\eta = \{\sigma + it : 0 < \sigma\ \leq\ \eta, \quad 0 \leq\ t < 2\pi\},$$

та $N(\sigma, f) = \int\limits_0^\sigma n(\eta, f) d\eta$ і $c_0(\sigma, f) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |f(\sigma + it)| dt$.

Аналог леми Йенсена - Літтлвуда ([42]) формулюється наступним чином.

Лема 2.1. *Нехай функція f мероморфна в $\overline{S}$, не має в ньому ні уявних нулів, ні уявних полюсів і $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq\ 0$. Тоді* $N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f) = c_0(\sigma, f) - \dfrac{\sigma}{\sigma_0} c_0(\sigma_0, f) + (\dfrac{\sigma}{\sigma_0} - 1) c_0(0, f), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0.$

У даному підрозділі також як наслідок отримано, що інтегральні середні аргумента мероморфної у $\overline{S}$ функції, яка задовольняє умови Леми 2.1, є сталими.

Нехай функція f мероморфна в $\overline{S}$, $\arg f = \mathrm{Im} \log f$, $\log f(s)$ визначений рівністю (1.2), де інтеграл береться по деякому шляху в $S^* \cup \partial S$.

Розглянемо інтегральні середні

$$\mathrm{A}(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \arg f(\sigma + it)dt.$$

Твердження 2.1. *За умов Леми 2.1 виконується*

$$A(\sigma, f) = A(0, f), \quad \sigma > 0.$$

У підрозділі 2.2 доведені властивості характеристики Неванлінни мероморфної в $\overline{S}$ функції f такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq\ 0$.

Позначимо $m_0(\sigma, f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \log^+|f(\sigma + it)|dt$, де $x^+ = \max\{0, x\}$.

Означення 2.1 *Нехай f мероморфна в $\overline{S}$, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Характеристикою Неванлінни функції f називаєтьcя*

$$T(\sigma, f) = m_0(\sigma, f) - \frac{\sigma}{\sigma_0}m_0(\sigma_0, f) + (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1)m_0(0, f) + N(\sigma, f),$$

$$\sigma \geq \sigma_0 > 0.$$

Властивості $T(\sigma, f)$ описано наступною теоремою.

Теорема 2.1. *Нехай f - мероморфна в $\overline{S}$ функція, $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$. Тоді її характеристика Неванлінни $T(\sigma, f)$ має наступні властивості:*

(i) $T(\sigma, f)$ - опукла відносно σ при $\sigma \geq \sigma_0 > 0$;

(ii) $T(\sigma, f)$ - невід'ємна при $\sigma \geq \sigma_0 > 0$;

(iii) $T(\sigma_0, f)$ =0, $\sigma_0 > 0$;

(iv) $T(\sigma, f)$ - неспадна при $\sigma \geq \sigma_0 > 0$;

(v) $T(\sigma, f) = T(\sigma, \dfrac{1}{f})$ при $\sigma \geq \sigma_0 > 0$.

В підрозділі 2.3 встановлено співвідношення для коефіцієнтів Фур'є функції, мероморфної в замиканні прямокутника R_σ.

Покладемо $c_k(\sigma, f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|f(\sigma+it)|dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Лема 2.3. *Нехай функція* f *- мероморфна в замиканні прямокутника* $R_\sigma = \{\eta + it : \quad 0 < \eta < \sigma, \quad 0 < t < 2\pi\}$, *відмінна від тотожного нуля і* $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. *Нехай* $\{s_j\}$ *- множина її нулів в* R_σ, *а* $\{p_j\}-$ *множина полюсів* f *в* R_σ *(*$s_j = \sigma_j + it_j, \quad p_j = Rep_j + iImp_j$*) і, крім того,* f *не має ні нулів, ні полюсів на* ∂R_σ. *Нехай* $R^*_\sigma = R_\sigma \backslash (\bigcup\limits_j \{\tau\sigma_j + it_j : \tau \geq 1\} \cup \{\tau Rep_j + iImp_j : \tau \geq 1\})$, *та* $\log f(s)$ *визначений рівністю (1.2), де інтеграл береться по деякому шляху в* $R^*_\sigma \bigcup \partial R_\sigma$.

Тоді справедливі наступні співвідношення:

$$c_k(\sigma, f) = \frac{e^{k\sigma}}{2k}\alpha_k(f) - \frac{e^{-k\sigma}}{2k}\overline{\alpha_{-k}}(f) +$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{s_j \in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right] - \frac{1}{2k}\sum_{p_j \in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{p_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{p_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right],$$

$$c_{-k}(\sigma, f) = \overline{c_k(\sigma, f)} \quad k \in \mathbb{N},$$

де $\alpha_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt, \quad k \in \mathbb{N}.$

Отримані в розділі 2 результати дають можливість описати множини нулів голоморфних і мероморфних та полюсів мероморфних у замиканні півсмуги функцій.

У підрозділі 3.1 для мероморфної у $\overline{S}$ функції скінченного λ-типу доведено критерій скінченності λ-типу такої функції.

Означення 3.1. *Додатна, неспадна, неперервна і необмежена фун-*

кція $\lambda(\sigma)$ *при* $\sigma > \sigma_0$ *називається функцією зростання.*

Означення 3.2. *Нехай* $\lambda(\sigma)$ *функція зростання,* f *мероморфна функція в* $\overline{S}$ *така, що* $f(\sigma + 2\pi i) = f(\sigma), \sigma \geq 0$. *Функція* f *називається функцією скінченного* λ *- типу, якщо* $\exists A, B > 0$ *такі, що*

$$T(\sigma, f) \leq A\lambda(\sigma + B),$$

для всіх $\sigma \geq \sigma_0 > 0$.

Клас мероморфних в $\overline{S}$ функцій таких, що $f(\sigma + 2\pi i) = f(\sigma), \sigma \geq 0$, скінченного λ - типу позначимо через Λ, а клас голоморфних в $\overline{S}$ функцій таких, що $f(\sigma + 2\pi i) = f(\sigma), \sigma \geq 0$, скінченного λ - типу позначимо через Λ_H.

Теорема 3.1. *Нехай функція* f *голоморфна в* $\overline{S}$ *і така, що* $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, *а* $\lambda(\sigma)$ *- функція зростання така, що* $\sigma = O(\lambda(\sigma))$. *Тоді наступні твердження еквівалентні.*

(i) $f \in \Lambda_H$;

(ii) $|c_k(\sigma, f)| \leq A\lambda(\sigma + B)$ *для всіх* $\sigma > \sigma_0$ *і деяких* $A, B > 0$, $k \in \mathbb{Z}$;

(iii) $|c_k(\sigma, f)| \leq \dfrac{A\lambda(\sigma + B)}{|k| + 1}$ *для всіх* $\sigma > \sigma_0$ *і деяких* $A, B > 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

В підрозділі 3.2 описано множини нулів голоморфних і мероморфних у замиканні півсмуги функцій.

Означення 3.3. *Нехай* λ *- функція зростання. Послідовність комплексних чисел* $Q = \{s_j\}$ *з* $\overline{S}$ *має скінченну* λ*-щільність, якщо існують додатні сталі* A, B *такі, що*

$$N(\sigma, Q) \leq A\lambda(\sigma + B), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0,$$

де $N(\sigma, Q) = \displaystyle\int_0^\sigma n(\eta, Q)d\eta$, $n(\eta, Q)$ *- кількість членів послідовності* Q

в прямокутнику R_η.

Означення 3.4. *Послідовність комплексних чисел $Q = \{s_j\}$ з $\overline{S}$ називається λ-допустимою, якщо вона має скінченну λ-щільність та існують додатні сталі A, B такі, що*

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{\sigma_1 < Re s_j \leq \sigma_2}\left(\frac{1}{e^{s_j}}\right)^k\right| \leq \frac{A\lambda(\sigma_1 + B)}{e^{k\sigma_1}} + \frac{A\lambda(\sigma_2 + B)}{e^{k\sigma_2}},$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ *і* $\quad (\forall \sigma_1, \sigma_2 : \sigma_0 \leq \sigma_1 < \sigma_2)$.

Доведено наступні теореми.

Теорема 3.2. *Послідовність Q з $\overline{S}$ є послідовністю нулів голоморфної функції з Λ_H тоді і лише тоді, коли Q - λ-допустима.*

Теорема 3.3. *Послідовність Q з $\overline{S}$ є послідовністю нулів мероморфної функції з Λ тоді і лише тоді, коли вона має скінченну λ-щільність.*

Розглянувши функцію $F(z) = f(s)$, де $z = e^s$, отримуємо мероморфну в області $|z| \geq 1$ функцію. А дослідження мероморфних функцій у зовнішності одиничного круга має значний інтерес, бо йдеться про їхню поведінку в околі істотно особливої точки. Отож, природно, що наступний розділ присвячений питанням розподілу значень таких функцій. Зокрема:

- у підрозділі 4.1, як наслідок з тверджень попереднього розділу, отримано аналог теореми Йенсена, доведені властивості характеристики Неванлінни функції F, мероморфної в зовнішності одиничного круга $\{z : \ |z| \ \geq \ 1\}$, та отримані співвідношення для коефіцієнтів Фур'є логарифма модуля такої функції.

Нехай відмінна від тотожного нуля функція F - мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z : \ |z| \ \geq \ 1\}$. Нехай $n_0(t, F)$ – лічильна функція її полюсів у кільці $\{z : \ 1 < \ |z| \ \leq \ t\}$. Позначимо $N_0(r, F) = \int\limits_1^r \frac{n_0(t, F)}{t} dt$, і $c_0(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |F(re^{it})| dt, \ r \geq 1.$

Наступна лема є аналогом теореми Йенсена.

Лема 4.1. *Нехай функція F мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z : |z| \geq 1\}$. Тоді*

$$N_0(r, \frac{1}{F}) - N_0(r, F) =$$

$$= c_0(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0} c_0(r_0, F) + (\frac{\log r}{\log r_0} - 1) c_0(1, F), \quad r \geq r_0 > 1.$$

Означення 4.1. *Функція*

$$T_0(r, F) = m_0(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0, F) + \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1 \right) m_0(1, F) + N_0(r, F)$$

$r \geq r_0 > 1$, *називається характеристикою Неванлінни функції F.*

Властивості $T_0(r, F)$ описані в наступній теоремі.

Теорема 4.1. *Нехай функція F, $F \not\equiv 0$, мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z : |z| \geq 1\}$. Тоді*

(i) $T_0(r_0, F) = 0, \quad r_0 > 1;$

(ii) $T_0(r, F)$ *невід'ємна, неспадна і опукла відносно* $\log r$ *при* $r \geq r_0$;

(iii) $T_0(r, F) = T_0(r, \frac{1}{F})$ *при* $r \geq r_0$;

(iv) $T_0(r, F_1 F_2) \leq T_0(r, F_1) + T_0(r, F_2) + O(\log r), \quad r \geq r_0,$

$$T_0(r, F_1 + F_2) \leq T_0(r, F_1) + T_0(r, F_2) + O(\log r), \quad r \geq r_0.$$

Нехай функція F, $F \not\equiv 0$, мероморфна в $\{z : |z| \geq 1\}$. Припустимо, що F не має ні нулів, ні полюсів на $|z| = 1$.

Позначимо $c_k(r,F)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|F(re^{it})|dt, \quad r\geq 1, \quad k\in\mathbb{Z}.$

Лема 4.2. *Нехай функція F, $F\not\equiv 0$, мероморфна в $\{z:1\leq|z|<t, t>1\}$. Нехай $\{a_j\}-$ послідовність нулів F в $\{z:1\leq|z|<t, t>1\}$ і $\{b_j\}-$ послідовність її полюсів. Нехай F не має ні нулів, ні полюсів на колі $\{z:|z|=1\}$. Тоді виконуються наступні співвідношення*

$$c_k(r,F)=\frac{r^k}{2k}\alpha_k(F)-\frac{r^{-k}}{2k}\overline{\alpha_{-k}}(F)+$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{|a_j|\geq 1}\left[\left(\frac{r}{a_j}\right)^k-\left(\frac{\overline{a_j}}{r}\right)^k\right]-\frac{1}{2k}\sum_{|b_j|\geq 1}\left[\left(\frac{r}{b_j}\right)^k-\left(\frac{\overline{b_j}}{r}\right)^k\right],$$

$c_{-k}(r,F)=\overline{c_k(r,F)},\ k\in\mathbb{N},$ *де* $\alpha_k(F)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\dfrac{F'(e^{it})}{F(e^{it})}dt,\ k\in\mathbb{N}.$

- Випадок $T_0(r,F)=O(\log r)$ та зв'язок між $T_0(r,F)$ і класичною характеристикою Неванлінни $T(r,F)$ для мероморфних функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$, встановлено в підрозділі 4.2.

Теорема 4.2. *Нехай F мероморфна в $\{z:|z|\geq 1\}$ функція. Властивість $T_0(r,F)=O(\log r), \quad r\geq r_0$, виконується тоді і лише тоді, коли $F(z)=\mathcal{R}(z)e^{h(z)}$, де $\mathcal{R}(z)$ – раціональна та $h(z)$ – голоморфна і обмежена при $|z|\geq 1$ функція.*

Твердження 4.1. *Нехай мероморфна в $\{z:|z|\geq 1\}$ функція F має мероморфне продовження в $\mathbb{C}$. Тоді*

$$T_0(r,F)=T(r,F)-T(1,F)+$$

$$+\log r\left[\frac{m_0(1,F)-m_0(r_0,F)}{\log r_0}-n(1,F)\right], \quad r\geq r_0>1.$$

- Твердження підрозділу 4.3 є наслідками результатів 3-го розділу. Тут встановлено критерій належності функції F, голоморфної в $\{z : |z| \geq 1\}$, до класу функцій скінченного λ - типу, описано послідовності нулів функцій з класів $\Lambda_H(\infty)$ і $\Lambda(\infty)$.

Лема 4.3. *Голоморфна функція F в $\{z : |z| \geq 1\}$ є функцією скінченного λ-типу тоді і лише тоді, коли функція $f(s) = F(e^s)$ є функцією скінченного λ_1-типу в $\overline{S}$, де $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma)$, $\quad \sigma > 0$.*

Нехай $Z = \{z_j\}$ – послідовність комплексних чисел із $\{z : |z| \geq 1\}$. Через $n_0(t, Z)$ позначимо лічильну функцію послідовності Z в кільці $\{z : 1 \leq |z| \leq t\}$.

Нехай λ - функція зростання.

Означення 4.4. *Послідовність $Z = \{z_j\}$ із $\{z : |z| \geq 1\}$ має скінченну λ- щільність, якщо*

$$N_0(r, Z) \leq A\lambda(Br),$$

при деяких додатних сталих A, B для всіх r, $r \geq 1$, де $N_0(r, Z) = \int\limits_1^r \frac{n_0(t, Z)}{t} dt$.

Означення 4.5. *Послідовність $Z = \{z_j\}$ із $\{z : |z| \geq 1\}$ називаєтьcя λ-допустимою, якщо вона має скінченну λ - щільність, і існують додатні сталі A, B такі, що*

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{r_1 < r \leq r_2} \left(\frac{1}{z_j}\right)^k\right| \leq \frac{A\lambda(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\lambda(Br_2)}{r_2^k},$$

для всіх r_1, r_2, $r_0 \leq r_1 < r_2$ і кожного $k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема описує послідовності нулів функцій із класу $\Lambda_H(\infty)$.

Теорема 4.3. *Для того, щоб послідовність Z із $\{z : |z| \geq 1\}$ була* *послідовністю нулів функції з* $\Lambda_H(\infty)$ *необхідно і досить, щоб вона була* λ*-допустимою.*

Доведення цієї теореми базується на наступному твердженні.

Лема 4.4. *Нехай* $Z = \{z_j\}$ *- послідовність комплексних чисел із* $\{z : |z| \geq 1\}$ *і* $Q = \{s_j\}$ *- послідовність комплексних чисел із* $\overline{S}$ *таких, що* $z_j = e^{s_j}, \quad j \in \mathbb{N}$. *Послідовність* $\{z_j\}$ *є* λ*-допустимою тоді і лише тоді, коли послідовність* $\{s_j\}$ *є* λ_1*-допустимою, де* $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma), \quad \sigma > 0.$

Нехай $W = \{w_j\}$ - послідовність комплексних чисел із $\{z : |z| \geq 1\}$. Нехай λ - функція зростання.

Теорема 4.4. *Послідовність* $W = \{w_j\}$ *із* $\{z : |z| \geq 1\}$ *є послідовністю полюсів функції* F *із класу* $\Lambda(\infty)$ *тоді і лише тоді, коли вона має скінченну* λ*-щільність.*

Твердження 4.2. *Послідовність* $Z = \{z_j\}$ *із* $\{z : |z| \geq 1\}$ *є послідовністю нулів функції* F *із класу* $\Lambda(\infty)$ *тоді і лише тоді, коли вона має скінченну* λ*-щільність.*

П'ятий розділ присвячено вивченню деяких властивостей мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини та характеристик зростання локсодромних функцій.

Означення 5.1 ([67], [68]). *Мероморфна в проколеній площині* $\mathbb{C}^*$ *функція* f *називається локсодромною з мультиплікатором* $q, \quad 0 < |q| < 1$, *якщо вона задовольняє умову*

$$f(qz) = f(z), \quad 0 < |q| < 1, \quad z \in \mathbb{C}^*. \tag{1.3}$$

Нехай $\mathcal{L}_q$ - клас таких функцій.

Позначимо $A_r = \{z : |q|r < |z| \leq r\}$. Кожна відмінна від сталої локсодромна мероморфна функція з мультиплікатором q має принаймні два полюси в A_r. Кількість полюсів функції f є однаковою для кожного кільця A_r. Позначимо її через m. Число m називають *порядком функції* f.

З (1.3) отримуємо, що $f(q^n z) = f(z)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 5.1. *Нехай* $f-$ *функція з класу* $\mathcal{L}_q$ *і її порядок –* m*. Тоді*

$$\overset{o}{T}(r,f) = \frac{m}{\log\dfrac{1}{|q|}}\log^2 r + O(\log r), \quad r > 1,$$

де $|O(\log r)| \leq 2m\log r + C$, $C = \max\left\{\overset{o}{T}\left(\frac{1}{|q|}, f\right), 2m(1,f)\right\}$.

Нехай $\mathcal{H} = \{z : Im\ z > 0\}$ і $\mathcal{H}^* = \overline{\mathcal{H}}\backslash\{0\}$.

Означення 5.3. *Мероморфна в* $\mathcal{H}^*$ *функція* f *називається мультиплікативно періодичною з мультиплікатором* q*,* $0 < q < 1$*, якщо для кожного* $z \in \mathcal{H}^*$ *виконується рівність*

$$f(qz) = f(z).$$

Множину таких функцій позначено через $\mathcal{M}_q$.

Нехай f мультиплікативно періодична функція у проколеному замиканні верхньої півплощини $\mathcal{H}^*$. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Нехай $z_0 \in \mathcal{H}^*, f(z_0) \neq 0, \infty$. Виберемо деяке значення $\log f(z_0)$ і визначимо $\log f(z)$ наступним співвідношенням

$$\log f(z) = \log f(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

де інтеграл береться вздовж шляху, що з'єднує точки z_0 і z, у $\mathcal{H}^*$ з радіальними розрізами від нулів та полюсів функції f до ∞. Крім того, нехай

$$\arg f(z) = \arg f(z_0) + \operatorname{Im} \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi.$$

Тоді виконується наступна теорема.

Теорема 5.2. *Нехай* $f \in \mathcal{M}_q$, $f \neq const$ *і* $f(z) \neq 0, \infty$ *у* $\mathbb{R} \backslash \{0\}$. *Тоді*

1) *сума приростів* $\arg f$ *вздовж відрізків* $[qt, t]$ *та* $[-t, -qt]$ *не залежить від* t *і дорівнює* $2\pi\big(n_0(f) - n_\infty(f)\big)$, *де* $n_0(f)$, $n_\infty(f)$*– кількості нулів та полюсів функції* f *в* $\mathcal{A}_1 = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : q < |z| \leq 1\}$ *відповідно;*

2) *нехай* $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$*–* a*–точки функції* f, $a \in \mathbb{C}$, *та* $w_n = \rho_n e^{i\beta_n}$ *полюси* f *в* $\mathcal{A}_t = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : qt < |z| \leq t\}$. *Тоді*

$$\int_{qr}^{r} \sum_{qt < r_n \leq t} \left(\frac{q}{r_n} - \frac{r_n}{t^2} \right) \sin \alpha_n dt = \int_{qr}^{r} \sum_{qt < \rho_n \leq t} \left(\frac{q}{\rho_n} - \frac{\rho_n}{t^2} \right) \sin \beta_n dt$$

для всіх $r > 0$.

Розділ 2

МЕРОМОРФНІ У ПІВСМУЗІ ФУНКЦІЇ

У 1899 році в роботі [24] датський математик Й. Йенсен довів формулу, що пов'язує поведінку аналітичної в крузі функції з розподілом її нулів. 1924 року в роботі [42] Дж. І. Літтлвудом доведено аналог цієї формули для функцій $\varphi(s)$ мероморфних в замиканні прямокутника $\{s = \sigma + it : 0 \leq t \leq T, \alpha \leq \sigma \leq \beta\}$ і $\varphi(s) \not\equiv 0$. У роботі [64] 2005 року А. М. Бридун, доводить лему про те, що для голоморфної в замиканні півсмуги $R = \{z = x + iy : x_0 < x, 0 < y < \pi\}$ функції $f, f \not\equiv 0$, виконуються рівності

$$c_k(x, f) = \frac{2}{k} \sum_{p_q \in R_x} \left[\frac{e^{kx}}{e^{k\beta_q}} - \frac{e^{k\beta_q}}{e^{kx}} \right] \sin k\gamma_q +$$

$$+\frac{1}{\pi} \int\limits_{x_0}^{x} \left[\frac{e^{kt}}{e^{kx}} - \frac{e^{kx}}{e^{kt}} \right] (\log|f(t)| + (-1)^{k+1} \log|f(t+i\pi)|) dt +$$

$$+\frac{i}{\pi} \left[\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}} - \frac{e^{kx}}{e^{kx_0}} \right] \int\limits_{0}^{\pi} \log|f(x_0+iy)| \sin ky dy +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{kx_0}}{e^{kx}}-\frac{e^{kx}}{e^{kx_0}}\right]\int\limits_0^\pi \arg f(x_0+iy)\cos kydy,$$

які при $k = 0$ дають аналог формули Йенсена-Літтлвуда для таких функцій.

В другому розділі ми встановлюємо аналоги цих тверджень для функцій мероморфних у замиканні півсмуги $S = \{s = \sigma + it : \sigma > 0, \quad 0 < t < 2\pi\}$ таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \quad \sigma \geq 0$. Крім того, доводимо властивості характеристики Неванлінни таких функцій та встановлюємо співвідношення для коефіцієнтів Фур'є функції f, мероморфної в замиканні прямокутника $R_\sigma = \{\eta + it : \quad 0 < \eta < \sigma, \quad 0 < t < 2\pi\}$ такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$.

2.1. Лема Йенсена-Літтлвуда для мероморфних у півсмузі функцій та інтегральні середні аргумента таких функцій

Нехай функція f мероморфна в замиканні півсмуги

$$S = \{s = \sigma + it : \sigma > 0, \quad 0 < t < 2\pi\},$$

не має ні нулів, ні полюсів на ∂S, і, крім того,

$$f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \quad \sigma \geq 0.$$

Через $\{s_j\}$ позначимо послідовність нулів функції f в S, $s_j = \sigma_j + it_j$, через $\{p_j\}$ - послідовність її полюсів в S.

Через S^* позначимо смугу S з розрізами

$$\{\tau\sigma_j + it_j : \tau \geq 1\}, \quad \{\tau \mathrm{Re} p_j + i \mathrm{Im} p_j : \tau \geq 1\}.$$

Нехай $s_0 \in S^*$ і вибране деяке значення $\log f(s_0)$. Покладемо

$$\log f(s) = \int\limits_{s_0}^{s} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \log f(s_0), \tag{2.1}$$

де інтеграл береться по деякому шляху в $S^* \cup \partial S$ (див. рис. 2.1) і не залежить від шляху інтегрування.

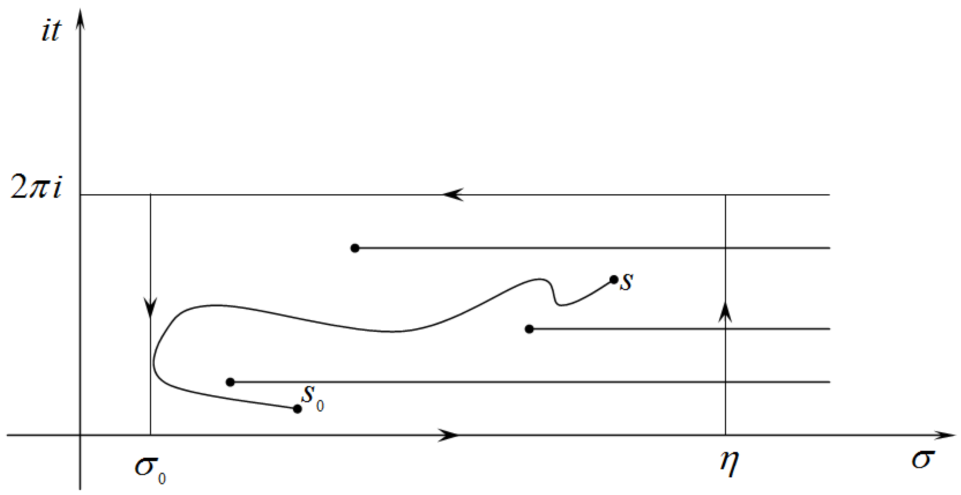

Рис. 2.1. Область визначення функції $\log f(s)$

Нехай $n(\eta, f)$ лічильна функція полюсів функції f у прямокутнику

$$R_\eta = \{\sigma + it : 0 < \sigma \ \le \ \eta, \quad 0 \le \ t < 2\pi\},$$

і

$$N(\sigma, f) = \int\limits_0^{\sigma} n(\eta, f) d\eta. \tag{2.2}$$

Позначимо

$$c_0(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |f(\sigma + it)| dt. \tag{2.3}$$

Аналог теореми Йенсена - Літтлвуда ([42]) формулюється наступним чином.

Лема 2.1. *Нехай функція* f *мероморфна в* $\overline{S}$, *не має в ньому ні уявних нулів, ні уявних полюсів і* $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$, $\sigma\geq\ 0$. *Тоді*

$$N(\sigma,\frac{1}{f})-N(\sigma,f)=$$

$$=c_0(\sigma,f)-\frac{\sigma}{\sigma_0}c_0(\sigma_0,f)+(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1)c_0(0,f),\quad \sigma\geq\sigma_0>0. \tag{2.4}$$

Доведення. Припустимо спочатку, що f не має ні нулів, ні полюсів на ∂S. Застосувавши принцип аргумента до функції $f(\zeta)$ в прямокутнику R_η, отримаємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R_\eta}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta=n(\eta,\frac{1}{f})-n(\eta,f).$$

Межа ∂R_η складається з чотирьох відрізків, тому

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_0^\eta\frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)}d\sigma+i\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}dt-\int\limits_0^\eta\frac{f'(\sigma+2\pi i)}{f(\sigma+2\pi i)}d\sigma-i\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(it)}{f(it)}dt\right]$$

$$=n(\eta,\frac{1}{f})-n(\eta,f). \tag{2.5}$$

Враховуючи, що

$$\int\limits_0^\eta\frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)}d\sigma=\int\limits_0^\eta\frac{f'(\sigma+2\pi i)}{f(\sigma+2\pi i)}d\sigma,$$

співвідношення (2.5) набуде вигляду

$$\frac{1}{2\pi i}\left[i\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}dt-i\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(it)}{f(it)}dt\right]=n(\eta,\frac{1}{f})-n(\eta,f). \tag{2.6}$$

Проінтегруємо рівність (2.6) по η від 0 до σ

$$\int\limits_0^\sigma n(\eta,\frac{1}{f})d\eta-\int\limits_0^\sigma n(\eta,f)d\eta=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\sigma}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}dtd\eta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\sigma}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(it)}{f(it)}dtd\eta = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2. \qquad (2.7)$$

Використовуючи означення логарифма (2.1) функції f, другий інтеграл співвідношення (2.7) запишемо у вигляді

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\sigma}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(it)}{f(it)}dtd\eta = \frac{\sigma}{2\pi i}[\log f(2\pi i) - \log f(0)], \qquad (2.8)$$

Застосовуючи теорему Фубіні до $\mathcal{J}_1$, отримаємо

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}dt\int\limits_0^{\sigma}\frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\log f(\sigma+it) - \log f(it)]dt. \qquad (2.9)$$

З врахуванням (2.8) і (2.9), рівність (2.7) можна записати наступним чином

$$N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f) =$$

$$= l_0(\sigma, f) - l_0(0, f) + i\frac{\sigma}{2\pi}[\log f(2\pi i) - \log f(0)], \qquad (2.10)$$

де

$$l_0(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log f(\sigma+it)dt.$$

Прирівнявши дійсні частини обох боків співвідношення (2.10), отримаємо

$$N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(\sigma+it)|dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(it)|dt + \sigma C_f, \qquad (2.11)$$

де $C_f = \dfrac{1}{2\pi}[\arg f(0) - \arg f(2\pi i)]$, і $\arg f = \mathrm{Im}\log f$, тобто

$$N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f) = c_0(\sigma, f) - c_0(0, f) + \sigma C_f, \quad \sigma > 0. \tag{2.12}$$

З припущення відсутності нулів та полюсів на ∂S та з ізольовності наявних випливає існування $\sigma_0 > 0$ такого, що $f \neq 0, \infty$ при $\sigma \leq \sigma_0$. Тому з (2.11) випливає

$$0 = \frac{1}{\sigma_0}c_0(\sigma_0, f) - \frac{1}{\sigma_0}c_0(0, f) + C_f, \quad \sigma > 0. \tag{2.13}$$

Поділивши рівність (2.12) на σ і віднявши від неї (2.13), одержимо

$$\frac{1}{\sigma}[N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f)] =$$

$$= \frac{1}{\sigma}c_0(\sigma, f) - \frac{1}{\sigma_0}c_0(\sigma_0, f) + (\frac{1}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma})c_0(0, f), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0, \tag{2.14}$$

звідки й випливає (2.4).

Незначна модифікація доведення у випадку, коли нулі або полюси функції f лежать на ∂S також приводить до справедливості співвідношення (2.4). Справді, якщо окрім нулів та полюсів в R_η функція f має дійсний нуль σ на ∂R_η, то за рахунок періодичності функції f її нулем буде також точка $\sigma + 2\pi i$. Оточивши σ та $\sigma + 2\pi i$ півколами $C_\varepsilon{}^-$ та $C_\varepsilon{}^+$ досить малих радіусів ε, справедливим буде співвідношення (2.5), в якому замість першого та третього інтегралів будуть

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_0^{\sigma-\varepsilon} \frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)}d\sigma + \int\limits_{C_\varepsilon^-} \frac{f'(s)}{f(s)}ds + \int\limits_{\sigma+\varepsilon}^{\eta} \frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)}d\sigma\right]$$

та

$$-\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_0^{\sigma-\varepsilon} \frac{f'(\sigma+2\pi i)}{f(\sigma+2\pi i)}d\sigma + \int\limits_{C_\varepsilon^+} \frac{f'(s)}{f(s)}ds + \int\limits_{\sigma+\varepsilon}^{\eta} \frac{f'(\sigma+2\pi i)}{f(\sigma+2\pi i)}d\sigma\right]$$

відповідно.

Враховуючи періодичність функції f, отримаємо, як і раніше, що перший та третій інтеграли тут взаємно скоротяться. А інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\varepsilon^-}\frac{f'(s)}{f(s)}ds \tag{2.15}$$

прямує до $-\dfrac{1}{2}$ при $\varepsilon \to 0$. Щоб довести це твердження, потрібно згадати канонічне зображення функції f та її логарифмічної похідної в досить малому околі її нуля σ,

$$f(s) = (s-\sigma)\cdot\psi(s), \quad \frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{1}{s-\sigma} + \frac{\psi'(s)}{\psi(s)}, \tag{2.16}$$

де ψ голоморфна без нулів функція. Підставивши (2.16) в (2.15), обчисливши перший інтеграл і спрямувавши ε до 0, отримаємо $-\dfrac{1}{2}$.

Аналогічно показується, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{C_\varepsilon^+}\frac{f'(s)}{f(s)}ds = -\frac{1}{2}.$$

Таким чином, матимемо рівність (2.6), в якій до кількості нулів $n(\eta, \dfrac{1}{f})$ функції f в R_η додасться 1 нуль з ∂R_σ. Якщо ж f має в $\overline{R_\eta}$ m дійсних нулів, то по індукції до правого боку (2.6) додасться m. Аналогічні міркування й для полюсів. Що ж стосується правого вертикального відрізка межі прямокутника R_η, то ми нехтуємо тими η, при яких f має нулі чи полюси на цьому відрізку, оскільки надалі інтегруємо по η. Отож, рівність (2.4) справедлива і в загальному випадку.

Лема 2.1 доведена. $\square$

Покажемо, що інтегральні середні аргумента мероморфної у півсмузі функції, яка задовольняє умови Леми 2.1, сталі. Точне формулювання цього факту наступне.

Нехай функція f мероморфна в $\overline{S}$, $\mathrm{arg} f = \mathrm{Im}\log f$, де $\log f$ визначений співвідношенням (2.1). Розглянемо інтегральні середні

$$\mathrm{A}(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{arg} f(\sigma + it)dt.$$

Твердження 2.1. *За умов Леми 2.1 виконується*

$$A(\sigma, f) = A(0, f), \quad \sigma > 0. \tag{2.17}$$

Доведення. Прирівнюючи уявні частини обох боків рівності (2.10), маємо

$$0 = \mathrm{A}(\sigma, f) - \mathrm{A}(0, f) + \frac{\sigma}{2\pi}\left[\log|f(2\pi i)| - \log|f(0)|\right].$$

Враховуючи, що $f(2\pi i) = f(0)$, отримуємо (2.17). $\square$

2.2. Характеристика Неванлінни мероморфних у півсмузі функцій

Нехай f мероморфна в $\overline{S}$, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Позначимо

$$m_0(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+|f(\sigma + it)|dt. \tag{2.18}$$

де $x^+ = \max\{0, x\}$.

Означення 2.1 *Нехай f мероморфна в $\overline{S}$, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Характеристикою Неванлінни функції f називається*

$$T(\sigma, f) = m_0(\sigma, f) - \frac{\sigma}{\sigma_0}m_0(\sigma_0, f) + (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1)m_0(0, f) +$$

$$+ N(\sigma, f), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0. \tag{2.19}$$

Властивості характеристики $T(\sigma, f)$ опишемо наступною теоремою.

Теорема 2.1. *Нехай f - мероморфна в $\overline{S}$ функція, $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$. Тоді її характеристика Неванлінни $T(\sigma, f)$ має наступні властивості:*

(i) $T(\sigma, f)$ - опукла відносно σ при $\sigma \geq \sigma_0 > 0$;

(ii) $T(\sigma, f)$ - невід'ємна при $\sigma \geq \sigma_0 > 0$;

(iii) $T(\sigma_0, f) = 0, \quad \sigma_0 > 0$;

(iv) $T(\sigma, f)$ - неспадна при $\sigma \geq \sigma_0 > 0$;

(v) $T(\sigma, f) = T(\sigma, \frac{1}{f})$ при $\sigma \geq \sigma_0 > 0$.

Доведення. Нехай $\log z = \log|z| + i\mathrm{arg}z, \quad 0 \leq \mathrm{arg}z < 2\pi, \quad z \neq 0$. Тоді функція $F(z) = f(\log z)$ мероморфна при $|z| \geq 1$, оскільки $f(\log|z|) = f(\log|z| + 2\pi)$.

Зобразимо функцію F у вигляді частки двох функцій $\frac{H}{G}$, де H, G - голоморфні при $|z| \geq 1$ без спільних нулів, і

$$h(s) = H(e^s), \quad g(s) = G(e^s).$$

Тоді, застосовуючи (2.4) до g для $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, маємо

$$N(\sigma, f) = N(\sigma, \frac{1}{g}) = c_0(\sigma, g) - \frac{\sigma}{\sigma_0}c_0(\sigma_0, g) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)c_0(0, g).$$

Враховуючи, що

$$(a-b)^+ + b = \max(a, b),$$

характеристику (2.19) функції $f = \frac{h}{g}$ запишемо у вигляді:

$$T(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max(\log|h(\sigma+it)|, \log|g(\sigma+it)|)dt -$$

$$-\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\max(\log|h(\sigma_0+it)|,\log|g(\sigma_0+it)|)dt+$$

$$+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\max(\log|h(it)|,\log|g(it)|)dt,\ \sigma\geq\sigma_0>0. \quad (2.20)$$

Позначимо

$$I(\sigma,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\max(\log|h(\sigma+it)|,\log|g(\sigma+it)|)dt.$$

Тоді

$$I(\sigma,F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\max(\log|H(e^{\sigma+it})|,\log|G(e^{\sigma+it})|)dt.$$

Функція $u=\max(\log|H(z)|,\log|G(z)|)$ субгармонійна при $|z|\geq 1$. Тому $I(\sigma,F)$ опукла [85, ст. 27], [86, ст. 49], при $\sigma\geq 0$.

Згідно з (2.20)

$$T(\sigma,f)=I(\sigma,f)-\frac{\sigma}{\sigma_0}I(\sigma_0,f)+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)I(0,f),\ \sigma\geq\sigma_0>0. \quad (2.21)$$

Оскільки $T(\sigma,f)$ є сумою опуклої відносно $\sigma\geq\sigma_0$ функції $I(\sigma,f)$ та лінійної функції $A\sigma+B$, то властивість (i) виконується.

За властивістю опуклості $I(\sigma,f)$ при $0\leq\sigma_0\leq\sigma$ маємо

$$I(\sigma_0,f)\leq\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma}I(0,f)+\frac{\sigma_0}{\sigma}I(\sigma,f).$$

Звідси

$$0\leq I(\sigma,f)-\frac{\sigma}{\sigma_0}I(\sigma_0,f)+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)I(0,f).$$

Таким чином, ми отримали згідно з (2.21) невід'ємність $T(\sigma,f)\geq 0$

Якщо $\sigma=\sigma_0$, то з (2.21) випливає, що $T(\sigma_0,f)=0$.

Оскільки $T(\sigma, f)$ опукла відносно σ при $\sigma \geq \sigma_0$, то за теоремою 1.6 із [86, ст. 11] в кожній точці вона має похідну справа і

$$\lim_{\sigma\to\sigma_0+0} \frac{T(\sigma, f) - T(\sigma_0, f)}{\sigma - \sigma_0} = \lim_{\sigma\to\sigma_0+0} \frac{T(\sigma, f)}{\sigma - \sigma_0} = T'_+(\sigma_0, f) \geq 0.$$

Похідна справа опуклої функції за цією ж теоремою не спадає. Тому $0 \leq T'_+(\sigma_0, f) \leq T'_+(\sigma, f), \quad \sigma \geq \sigma_0$. Таким чином, отримуємо, що характеристика $T(\sigma, f)$ неспадна.

Покажемо тепер, що виконується властивість (v).

Застосуємо рівність (2.4) до функції $\dfrac{1}{f}$

$$N(\sigma, f) - N(\sigma, \frac{1}{f}) = c_0(\sigma, \frac{1}{f}) - \frac{\sigma}{\sigma_0} c_0(\sigma_0, \frac{1}{f}) +$$

$$+ (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1) c_0(0, \frac{1}{f}), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0. \tag{2.22}$$

Зважаючи на (2.3) і властивість $\log x = \log^+ x - \log^+ \dfrac{1}{x}$ для $x \geq 0$, отримаємо

$$N(\sigma, f) - N(\sigma, \frac{1}{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(\sigma + it)|} dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma + it)| dt - \frac{\sigma}{\sigma_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(\sigma_0 + it)|} dt +$$

$$+ \frac{\sigma}{\sigma_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma_0 + it)| dt +$$

$$+ (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(it)|} dt - (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(it)| dt, \tag{2.23}$$

де $\sigma \geq \sigma_0 > 0$. Звідси

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma + it)| dt - \frac{\sigma}{\sigma_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma_0 + it)| dt +$$

$$+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+|f(it)|dt+N(\sigma,f)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\sigma+it)|}dt-\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\sigma_0+it)|}dt+$$

$$+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(it)|}dt+N(\sigma,\frac{1}{f}),\quad \sigma\geq\sigma_0>0. \tag{2.24}$$

З рівності (2.24) та означення 1.1 отримуємо (v). Теорему доведено □

2.3. Коефіцієнти Фур'є функцій, мероморфних в замиканні прямокутника R_σ

Нехай функція f - голоморфна в замиканні прямокутника

$$R_\sigma=\{\eta+it:\quad 0<\eta<\sigma,\quad 0<t<2\pi\},$$

відмінна від тотожного нуля і $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$.

Припустимо, що f не має нулів на ∂R_σ. Через $\{s_j\}$ - позначимо множину нулів f в R_σ, $(s_j=\sigma_j+it_j)$.

Нехай $R_\sigma^*=R_\sigma\backslash\bigcup\limits_j\{\tau\sigma_j+it_j:\tau\geq1\}$, і $\log f(s)$ визначений як в (2.1), де інтеграл береться по деякому шляху в $R_\sigma^*\bigcup\partial R_\sigma$.

Покладемо:

$$l_k(\sigma,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikt}\log f(\sigma+it)dt,\quad k\in\mathbb{Z}; \tag{2.25}$$

$$c_k(\sigma,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikt}\log|f(\sigma+it)|dt,\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{2.26}$$

Лема 2.2. *За зроблених вище припущень справедливі наступні співвідношення:*

$$l_k(\sigma, f) = e^{k\sigma} l_k(0, f) + \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}} \right)^k - \frac{1}{k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \frac{1}{e^{ikt_j}} -$$

$$- \frac{i}{2\pi} \frac{e^{k\sigma} - 1}{k} [\log f(2\pi i) - \log f(0)] \quad k \in \mathbb{Z}; \tag{2.27}$$

$$c_k(\sigma, f) = \frac{e^{k\sigma}}{2k} \alpha_k(f) - \frac{e^{-k\sigma}}{2k} \overline{\alpha_{-k}}(f) +$$

$$+ \frac{1}{2k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}} \right)^k - \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^\sigma} \right)^k \right], \ k \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$

$$c_{-k}(\sigma, f) = \overline{c_k}(\sigma, f),$$

де $\alpha_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt} \frac{f'(it)}{f(it)} dt, \quad k \in \mathbb{N}.$

Доведення. Нехай $\eta < \sigma$.

Застосуємо принцип аргумента до функції $\frac{f'(s)}{f(s)} e^{-ks}$ в прямокутнику R_η. Отримаємо:

$$\int\limits_{\partial R_\eta} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} e^{-k\zeta} d\zeta = 2\pi i \sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{2.29}$$

Оскільки ∂R_η складається з 4-х відрізків, то (2.29) запишемо наступним чином:

$$\int\limits_0^\eta \frac{f'(\gamma)}{f(\gamma)} e^{-k\gamma} d\gamma + i \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\eta + it)}{f(\eta + it)} e^{-k(\eta + it)} dt - \int\limits_0^\eta \frac{f'(\gamma + 2\pi i)}{f(\gamma + 2\pi i)} e^{-k(\gamma + 2\pi i)} d\gamma -$$

$$- i \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)} e^{-ikt} dt = 2\pi i \sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{2.30}$$

Зважаючи на $2\pi i$ - періодичність функцій $f(s)$ та e^{-ks}, тобто

$$\int\limits_0^\eta \frac{f'(\gamma)}{f(\gamma)} e^{-k\gamma} d\gamma = \int\limits_0^\eta \frac{f'(\gamma+2\pi i)}{f(\gamma+2\pi i)} e^{-k(\gamma+2\pi i)} d\gamma,$$

співвідношення (2.30) набуває вигляду:

$$i\int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)} e^{-k(\eta+it)} dt - i\int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)} e^{-ikt} dt =$$

$$= 2\pi i \sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{2.31}$$

Домножимо (2.31) на $\dfrac{e^{k\eta}}{i}$, проінтегруємо отриману рівність по η від 0 до σ.

$$\int\limits_0^\sigma e^{k\eta} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)} e^{-k(\eta+it)} dt d\eta -$$

$$-\int\limits_0^\sigma e^{k\eta} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)} e^{-ikt} dt d\eta =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^\sigma e^{k\eta} \sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j} d\eta, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{2.32}$$

До першого інтеграла співвідношення (2.32) застосуємо теорему Фубіні та рівність (2.1)

$$\int\limits_0^\sigma e^{k\eta} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)} e^{-k(\eta+it)} dt d\eta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^\sigma e^{k\eta} \frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)} e^{-k(\eta+it)} d\eta dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^\sigma e^{-kit} d(\log(\eta+it)) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-ikt}[\log f(\sigma+it) - \log f(it)]dt. \qquad (2.33)$$

Інтегруючи частинами другий інтеграл співвідношення (2.32), отримаємо

$$\int_0^{\sigma} e^{k\eta} \int_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)} e^{-ikt} dt d\eta = \frac{e^{k\sigma}-1}{k} \int_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)} e^{-ikt} dt =$$

$$= \frac{e^{k\sigma}-1}{ik} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} d(\log(it)) = -i\frac{e^{k\sigma}-1}{k}[\log f(2\pi i) - \log f(0)] +$$

$$+ \left(e^{k\sigma}-1\right) \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \log f(it) dt. \qquad (2.34)$$

Отримаємо

$$\int_0^{2\pi} e^{-ikt} \log f(\sigma+it) dt - \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \log f(it) dt +$$

$$+ i\frac{e^{k\sigma}-1}{k}[\log f(2\pi i) - \log f(0)] -$$

$$- \left(e^{k\sigma}-1\right) \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \log f(it) dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sigma} e^{k\eta} \sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j} d\eta, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \qquad (2.35)$$

Використавши означення логарифма функції і (2.25), надамо співвідношенню (2.35) вигляду

$$\int_0^{\sigma} e^{k\eta} \sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j} d\eta = l_k(\sigma, f) - e^{k\sigma} l_k(0, f) +$$

$$+\frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}-1}{k}\left[\log f(2\pi i)-\log f(0)\right], \quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{2.36}$$

Інтегруючи в інтегралі Стільтєса, отримуємо:

$$\int\limits_0^\sigma e^{k\eta}\sum_{s_j\in R_\eta}e^{-ks_j}d\eta=$$

$$=\frac{1}{k}e^{k\sigma}\sum_{s_j\in R_\sigma}e^{-ks_j}-\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}e^{k\sigma_j}e^{-ks_j}=$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k-\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\frac{1}{e^{ikt_j}}, \quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{2.37}$$

Із врахуванням (2.37), співвідношення (2.36) набуває вигляду

$$l_k(\sigma,f)=e^{k\sigma}l_k(0,f)+\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k-$$

$$-\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\frac{1}{e^{ikt_j}}-\frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}-1}{k}\left[\log f(2\pi i)-\log f(0)\right], \tag{2.38}$$

де $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Разом з (2.4) це дає (2.27).

Оскільки

$$c_k(\sigma,f)=\frac{l_k(\sigma,f)+\overline{l_{-k}(\sigma,f)}}{2}, \quad k\in\mathbb{N},$$

то

$$l_k(\sigma,f)+\overline{l_{-k}(\sigma,f)}=e^{k\sigma}l_k(0,f)-\overline{e^{-k\sigma}l_{-k}(0,f)}+$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k-\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\frac{1}{e^{ikt_j}}-\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{\overline{e^{s_j}}}\right)^{-k}+$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\frac{1}{e^{ikt_j}}+\frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}-1}{k}\left[\log f(2\pi i)-\log f(0)\right]+ \tag{2.39}$$

$$+\frac{i}{2\pi}\frac{e^{-k\sigma}-1}{k}\left[\overline{\log f(2\pi i)}-\overline{\log f(0)}\right], \quad k\in\mathbb{N}.$$

Але, використавши (2.25), можемо записати

$$l_k(0,f)+\overline{l_{-k}(0,f)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log f(it)dt+\overline{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ikt}\log f(it)dt}, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{2.40}$$

Проінтегруємо частинами в обох інтегралах (2.40):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log f(it)dt=\frac{i}{2\pi k}\left[\log f(2\pi i)-\log f(0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt, \quad k\in\mathbb{N},$$

$$\overline{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log f(it)dt}=\frac{i}{2\pi k}\left[\overline{\log f(2\pi i)}-\overline{\log f(0)}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\overline{\frac{f'(it)}{f(it)}}dt, \quad k\in\mathbb{N}.$$

З урахуванням вище отриманих обчислень, (2.39) набуває вигляду:

$$2c_k(\sigma,f)=\frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}}{k}\left[\log|f(2\pi i)|-\log|f(0)|\right]-$$

$$-\frac{e^{k\sigma}}{2\pi k}\left[\mathrm{arg}f(2\pi i)-\mathrm{arg}f(0)\right]+\frac{i}{2\pi}\frac{e^{-k\sigma}}{k}\left[\log|f(2\pi i)|-\log|f(0)|\right]+$$

$$+\frac{e^{-k\sigma}}{2\pi k}\left[\mathrm{arg}f(2\pi i)-\mathrm{arg}f(0)\right]+\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k-\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{\overline{e^{s_j}}}{e^{\sigma}}\right)^k+$$

$$+e^{k\sigma}\frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt+\frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}-1}{k}\left[\log|f(2\pi i)|-\log|f(0)|\right]$$

$$-e^{-k\sigma}\frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\overline{\frac{f'(it)}{f(it)}}dt+\frac{i}{2\pi}\frac{e^{-k\sigma}-1}{k}\left[\log|f(2\pi i)|-\log|f(0)|\right]+$$

$$+\frac{e^{-k\sigma}-1}{2\pi k}\left[\arg f(2\pi i)-\arg f(0)\right]-$$

$$-\frac{e^{k\sigma}-1}{2\pi k}\left[\arg f(2\pi i)-\arg f(0)\right], \tag{2.41}$$

для кожного $k \in \mathbb{N}$.

Використовуючи те, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, з (2.41) отримуємо такі співвідношення:

$$2c_k(\sigma, f) = e^{k\sigma}\frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt-$$

$$-e^{-k\sigma}\frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\overline{\frac{f'(it)}{f(it)}}dt+$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k-\left(\frac{\overline{e^{s_j}}}{e^{\sigma}}\right)^k\right], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.42}$$

Звідси негайно випливають рівності (2.28).

Рівність $c_{-k}(\sigma, f) = \overline{c_k(\sigma, f)}$ випливає безпосередньо з означення. Лема 2 доведена $\Box$

Нехай тепер функція f мероморфна в прямокутнику $R_\eta = \{\sigma + it : 0 < \sigma \le \eta, \quad 0 \le t < 2\pi\}$, відмінна від тотожного нуля і $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$.

Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на ∂R_σ. Через $\{s_j\}$ - позначимо множину нулів f в R_σ, через $\{p_j\}$ - множину її полюсів в R_σ ($s_j = \sigma_j + it_j, \quad p_j = \mathrm{Re}p_j + i\mathrm{Im}p_j$).

Нехай $R_\sigma^* = R_\sigma \setminus (\bigcup\limits_j \{\tau\sigma_j + it_j : \tau \ge 1\} \cup \{\tau\mathrm{Re}p_j + i\mathrm{Im}p_j : \tau \ge 1\})$, і $\log f(s)$ визначений як в (2.1), де інтеграл береться по деякому шляху в $R_\sigma^* \bigcup \partial R_\sigma$.

Для мероморфної функції f, що задовольняє зазначені вище умови, співвідношення (2.29) набуває вигляду

$$\int\limits_{\partial R_\eta} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} e^{-k\xi} d\xi = 2\pi i \left(\sum_{s_j \in R_\eta} e^{-ks_j} - \sum_{p_j \in R_\eta} e^{-kp_j} \right), k \in \mathbb{Z}.$$

Провівши міркування та обчислення, аналогічні до викладених в доведенні Леми 2.2, отримаємо наступне твердження.

Лема 2.3. *Нехай функція f - мероморфна в замиканні прямокутника $R_\sigma = \{\eta + it : \quad 0 < \eta < \sigma, \quad 0 < t < 2\pi\}$, відмінна від тотожного нуля і $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Нехай $\{s_j\}$ - множина її нулів в R_σ, а $\{p_j\}-$ множина полюсів f в R_σ ($s_j = \sigma_j + it_j, \quad p_j = Rep_j + iImp_j$) і, крім того, f не має ні нулів, ні полюсів на ∂R_σ. Нехай*

$$R_\sigma^* = R_\sigma \setminus (\bigcup_j \{\tau\sigma_j + it_j : \tau \geq 1\} \cup \{\tau Rep_j + iImp_j : \tau \geq 1\}),$$

та $\log f(s)$ визначений рівністю (2.1), де інтеграл береться по деякому шляху в $R_\sigma^* \bigcup \partial R_\sigma$. Тоді справедливі наступні співвідношення:

$$c_k(\sigma, f) = \frac{e^{k\sigma}}{2k} \alpha_k(f) - \frac{e^{-k\sigma}}{2k} \overline{\alpha_{-k}}(f) +$$

$$+ \frac{1}{2k} \sum_{s_j \in R_\sigma} \left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}} \right)^k - \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^\sigma} \right)^k \right] - \frac{1}{2k} \sum_{p_j \in R_\sigma} \left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{p_j}} \right)^k - \left(\frac{e^{\overline{p_j}}}{e^\sigma} \right)^k \right], \quad (2.43)$$

$$c_{-k}(\sigma, f) = \overline{c_k(\sigma, f)} \quad k \in \mathbb{N}.$$

де $\alpha_k(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt} \frac{f'(it)}{f(it)} dt, \quad k \in \mathbb{N}.$

Зауваження 2.1. Незначна модифікація доведення висновку Леми 2.2 без додаткового припущення, що нулі функції f лежать на ∂R_σ, приводить до його справедливості, як і справедливості (2.43). Ця модифікація здійснюється аналогічно до того, як ми це робили в кінці підрозділу 2.1.

Зауваження 2.2. При доведенні Лем 2.1 та 2.2 ми застосовували теорему Фубіні до функцій вигляду $\frac{f'}{f}\cdot\varphi$, де функція f – мероморфна, функція φ – голоморфна. Обґрунтованість такого застосування полягає в тому, що, як зазначали вище, в околі нуля чи полюса s_0, функція f зображається у вигляді $f(s) = (s - s_0)^m\psi(s)$, де $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\psi-$ голоморфна в деякому околі точки s_0. Тому $\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{m}{s - s_0} + \frac{\psi'(s)}{\psi(s)}$. Подвійний інтеграл від функції $\frac{1}{|s - s_0|}$ по кругу з центром в точці s_0 існує, в чому легко переконатися, переходячи до полярних координат.

2.4. Висновки до розділу 2

В другому розділі дисертаційної роботи, вивчаючи функції мероморфні в замиканні півсмуги $S = \{s = \sigma + it : \sigma\ >\ 0,\quad 0 < t < 2\pi\}$, що не мають ні уявних нулів, ні уявних полюсів і, крім того,

$$f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i),\quad \sigma \geq\ 0,$$

розв'язано такі задачі:

- доведено лему Йенсена-Літтлвуда;

- встановлено, що інтегральні середні в S^* функції $\arg f$ сталі;

- отримано співвідношення для коефіцієнтів Фур'є логарифма модуля функцій, мероморфних у замиканні прямокутника $R_\eta = \{\sigma + it : 0 < \sigma\ <\ \eta,\quad 0 <\ t < 2\pi\}$.

Оскільки в теорії розподілу значень важливу роль відіграє характеристика Неванлінни, цілком природно постає питання про запровадження такої характеристики функцій мероморфних в замиканні півсмуги $S = \{s = \sigma + it : \sigma > 0, \quad 0 < t < 2\pi\}$ таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \quad \sigma \geq 0$, Тому в цьому ж розділі також:

- сформульовані та доведені основні властивості характеристики Неванлінни $T(\sigma, f)$ мероморфних в $\overline{S}$ функцій f таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \quad \sigma \geq 0$, одна з яких, по суті, дає аналог першої основної теореми теорії Неванлінни.

Розділ 3

РОЗПОДІЛ НУЛІВ ТА ПОЛЮСІВ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОГО λ-ТИПУ У ПІВСМУЗІ

В 60-70 роках минулого століття американські математики Л.А. Рубел та Б.А. Тейлор [23] (див. також [8], [33], [62], [63]) розробили метод рядів Фур'є для цілих та мероморфних функцій. На відміну від класичних підходів, за функцію зростання вони запропонували брати довільну додатну, неперервну, неспадну і необмежену функцію $\lambda(r)$ і розглядали класи Λ мероморфних функцій скінченного λ - типу, тобто таких, що $T(r, f) \leq A\lambda(Br)$, для всіх $r > 0$ при деяких додатних сталих A і B, де $T(r, f)$ - характеристика Неванлінни функції f.

Цей метод дозволив розв'язати низку важливих задач. На основі детального вивчення коефіцієнтів Фур'є

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad r > 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

вдалось описати в термінах властивостей $c_k(r, f)$ множини нулів цілих функції з класів Λ.

В третьому розділі, використовуючи метод рядів Фур'є, ми доводимо критерій належності голоморфної в $\overline{S}$ функції f такої, що $f(\sigma+2\pi i)=f(\sigma), \sigma>0$, до класу Λ_H голоморфних функцій скінченного λ-типу, описуємо множину нулів голоморфних та множини нулів і полюсів мероморфних функцій.

3.1. Голоморфні у півсмузі функції скінченного λ-типу

Означення 3.1. *Додатна, неспадна, неперервна і необмежена функція $\lambda(\sigma)$ при $\sigma>\sigma_0$ називається функцією зростання.*

Означення 3.2. *Нехай $\lambda(\sigma)$ функція зростання, f мероморфна функція в $\overline{S}$ така, що $f(\sigma+2\pi i)=f(\sigma), \sigma \geq 0$. Функція f називається функцією скінченного λ - типу, якщо $\exists\ A, B>0$ такі, що*

$$T(\sigma, f) \leq A\lambda(\sigma+B),$$

для всіх $\sigma \geq \sigma_0>0$.

Клас мероморфних в $\overline{S}$ функцій скінченного λ - типу таких, що $f(\sigma+2\pi i)=f(\sigma), \sigma \geq 0$, позначимо через Λ, а клас голоморфних в $\overline{S}$ функцій скінченного λ - типу таких, що $f(\sigma+2\pi i)=f(\sigma), \sigma \geq 0$, позначимо через Λ_H.

Теорема 3.1. *Нехай функція f голоморфна в $\overline{S}$ і така, що $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$, а $\lambda(\sigma)$ - функція зростання така, що $\sigma=O(\lambda(\sigma))$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(i) $f \in \Lambda_H$;

(ii) $|c_k(\sigma, f)| \le A\lambda(\sigma + B)$ *для всіх* $\sigma > \sigma_0$ *при деяких* $A, B > 0$, $k \in \mathbb{Z}$*;*

(iii) $|c_k(\sigma, f)| \le \dfrac{A\lambda(\sigma + B)}{|k| + 1}$ *для всіх* $\sigma > \sigma_0$ *при деяких* $A, B > 0$, $k \in \mathbb{Z}$*.*

Доведення. Якщо виконується умова (i) теореми 2.1, то $T(\sigma, f) \le A\lambda(\sigma + B)$, при деяких $A, B > 0$ і всіх $\sigma > \sigma_0$. Тоді згідно з (2.3), властивістю $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \dfrac{1}{x}$, де $x > 0$, і пунктом (v) теореми 2.1, отримаємо

$$|c_k(\sigma, f)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|f(\sigma + it)|dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log|f(\sigma + it)||\, dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+|f(\sigma + it)|dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(\sigma + it)|}dt \le$$

$$\le m_0(\sigma, f) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right) m_0(0, f) + m_0(\sigma, \frac{1}{f}) +$$

$$+ \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right) m_0(0, \frac{1}{f}) - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log|f(it)||dt \le$$

$$\le 2T(\sigma, f) + \frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log|f(it)||dt \le$$

$$\le 2A\lambda(\sigma + B) + C\sigma \le A_1\lambda(\sigma + B), \quad k \in \mathbb{Z},$$

де C стала, $A_1 = \max\{2A, C\}$.

Отже, ми довели, що з (i) випливає (ii). Доведемо, що з (ii) випливає

(iii) З огляду на (2.28), маємо:

$$e^{-k}c_k(\sigma+1,f)-c_k(\sigma,f)=-\frac{\overline{\alpha_{-k}(f)}}{2k}(e^{-k(\sigma+2)}-e^{-k\sigma})+$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{\sigma<\sigma_j\le\sigma+1}\left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k-\frac{e^{-k}}{2k}\sum_{0<\sigma_j\le\sigma+1}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma+1}}\right)^k+$$

$$\frac{e^{-k}}{2k}\sum_{0<\sigma_j\le\sigma}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma}}\right)^k,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Звідси

$$|c_k(\sigma,f)|\le\frac{|c_k(\sigma+1,f)|}{e^k}+\frac{|\overline{\alpha_{-k}(f)}|}{2k}+\frac{n(\sigma+1,\frac{1}{f})}{2k}+$$

$$+\frac{n(\sigma+1,\frac{1}{f})}{2ke^k}+\frac{n(\sigma,\frac{1}{f})}{2k},\quad k\in\mathbb{N}.\tag{3.1}$$

Але, оскільки

$$N(\sigma+1,\frac{1}{f})=\int\limits_0^{\sigma+1}n(\eta,\frac{1}{f})d\eta\ge\int\limits_{\sigma}^{\sigma+1}n(\eta,\frac{1}{f})d\eta\ge n(\sigma,\frac{1}{f}),$$

то

$$|c_k(\sigma,f)|\le\frac{|c_k(\sigma+1,f)|}{e^k}+\frac{|\overline{\alpha_{-k}(f)}|}{2k}+\frac{N(\sigma+2,\frac{1}{f})}{2k}+$$

$$+\frac{N(\sigma+2,\frac{1}{f})}{2ke^k}+\frac{N(\sigma+1,\frac{1}{f})}{2k},\quad k\in\mathbb{N}.\tag{3.2}$$

З огляду на співвідношення (2.4), отримаємо таку нерівність

$$N(\sigma,\frac{1}{f})<|c_0(\sigma,f)|+C_1\sigma,\quad \sigma\ge\sigma_0>0,\tag{3.3}$$

де C_1 - стала.

$$|\overline{\alpha_{-k}}|=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikt}\overline{\frac{f'(it)}{f(it)}}dt\right|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\overline{\frac{f'(it)}{f(it)}}\right|dt=C,\quad k\in\mathbb{N}.\tag{3.4}$$

Використовуючи властивість $c_{-k} = \overline{c_k}$, умову (ii) та (3.3),(3.4), отримуємо

$$|c_k(\sigma, f)| \le \frac{A_1\lambda(\sigma + B_1)}{|k| + 1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.5}$$

для всіх $\sigma \ge \sigma_0 > 0$ і деяких A_1, B_1, таких, що $A_1 = \max\{A, C\}, B_1 = \max\{B, 1\}$.

Доведемо тепер, що з (iii) випливає (i). Оцінивши згори характеристику Неванлінни (2.19) та застосувавши рівність Парсеваля, отримаємо

$$T(\sigma, f) = m_0(\sigma, f) - \frac{\sigma}{\sigma_0} m_0(\sigma_0, f) + (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1) m_0(0, f) \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log|f(\sigma + it)||dt + C\sigma \le \left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(\sigma + it)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+C\sigma = \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\sigma, f)|^2\right]^2 + C\sigma \le A_2\lambda(\sigma + B_2)$$

для всіх $\sigma \ge \sigma_0 > 0$ при деяких сталих C, A_2, B_2. Теорему 3.1 доведено.

3.2. Опис множин нулів голоморфних і мероморфних у півсмузі функцій.

Означення 3.3. *Нехай $\lambda-$ функція зростання. Послідовність комплексних чисел $Q = \{s_j\}$ з $\overline{S}$ має скінченну λ-щільність, якщо існують додатні сталі A, B такі, що*

$$N(\sigma, Q) \le A\lambda(\sigma + B), \quad \sigma \ge \sigma_0 > 0,$$

де

$$N(\sigma, Q) = \int\limits_0^{\sigma} n(\eta, Q) d\eta,$$

$n(\eta, Q)$ - кількість членів послідовності Q в прямокутнику R_η.

Означення 3.4. *Послідовність комплексних чисел $Q = \{s_j\}$ з $\overline{S}$ називається λ-допустимою, якщо вона має скінченну λ-щільність та існують додатні сталі A, B такі , що*

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{\sigma_1 < Re s_j \le \sigma_2}\left(\frac{1}{e^{s_j}}\right)^k\right| \le \frac{A\lambda(\sigma_1 + B)}{e^{k\sigma_1}} + \frac{A\lambda(\sigma_2 + B)}{e^{k\sigma_2}},$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ *і* $\quad (\forall \sigma_1, \sigma_2 : \sigma_0 \le \sigma_1 < \sigma_2)$.

Використовуючи результати для цілих та мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій (див. [23] і [8]), доведемо наступні теореми.

Теорема 3.2. *Послідовність Q з $\overline{S}$ є послідовністю нулів голоморфної функції з Λ_H тоді і лише тоді, коли Q - λ-допустима.*

Доведення. Для доведення "необхідності"використаємо метод, запропонований в [33].

Нехай послідовність $Q = \{s_j\}$ з $\overline{S}$ є послідовністю нулів голоморфної функції $f \in \Lambda_H$.

Розглянемо різницю:

$$\frac{c_k(\sigma_2, f)}{e^{k\sigma_2}} - \frac{c_k(\sigma_1, f)}{e^{k\sigma_1}} = \frac{\alpha_k e^{k\sigma_2} - \overline{\alpha_{-k}} e^{-k\sigma_2}}{2ke^{k\sigma_2}} +$$

$$\frac{1}{2ke^{k\sigma_2}}\left[\sum_{s_j \in R_{\sigma_2}}\left(\frac{e^{\sigma_2}}{e^{s_j}}\right)^k - \sum_{s_j \in R_{\sigma_2}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_2}}\right)^k\right] - \frac{\alpha_k e^{k\sigma_1} - \overline{\alpha_{-k}} e^{-k\sigma_1}}{2ke^{k\sigma_1}} -$$

$$-\frac{1}{2ke^{k\sigma_1}}\left[\sum_{s_j \in R_{\sigma_1}}\left(\frac{e^{\sigma_1}}{e^{s_j}}\right)^k - \sum_{s_j \in R_{\sigma_1}}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_1}}\right)^k\right] =$$

$$= \frac{\overline{\alpha_{-k}}}{2k}\left[\frac{1}{e^{2k\sigma_1}} - \frac{1}{e^{2k\sigma_2}}\right] + \frac{1}{2k}\left[\sum_{s_j \in R_{\sigma_2}} \frac{1}{(e^{s_j})^k} - \sum_{s_j \in R_{\sigma_1}} \frac{1}{(e^{s_j})^k}\right] +$$

$$+\frac{1}{2ke^{k\sigma_1}} \sum_{s_j \in R_{\sigma_1}} \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_1}}\right)^k - \frac{1}{2ke^{k\sigma_2}} \sum_{s_j \in R_{\sigma_2}} \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_2}}\right)^k,$$

де $0 \le \sigma_1 < \sigma_2$.

Отримаємо

$$\frac{1}{k} \sum_{\sigma_1 < \mathrm{Re} s_j \le \sigma_2} \frac{1}{(e^{s_j})^k} = \frac{2c_k(\sigma_2, f)}{e^{k\sigma_2}} - \frac{2c_k(\sigma_1, f)}{e^{k\sigma_1}} + \frac{\overline{\alpha_{-k}}}{k}\left[\frac{1}{e^{2k\sigma_2}} - \frac{1}{e^{2k\sigma_1}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{ke^{k\sigma_2}} \sum_{s_j \in R_{\sigma_2}} \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_2}}\right)^k - \frac{1}{ke^{k\sigma_1}} \sum_{s_j \in R_{\sigma_1}} \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_1}}\right)^k \tag{3.6}$$

Оскільки в прямокутниках $R_{\sigma_i}, i = 1, 2$, при деяких сталих $A_1, B_1 > 0$ виконується

$$\sum_{s_j \in R_{\sigma_i}} \left|\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_i}}\right|^k \le \sum_{s_j \in R_{\sigma_i}} 1 \le n(\sigma_i, \frac{1}{f}) \le N(\sigma_i + 1, \frac{1}{f}) \le$$

$$\le A_1 \lambda(\sigma_i + 1 + B_1), \quad \sigma_i > \sigma_0, i = 1, 2,$$

то лівий бік рівності (3.6) оцінимо наступним чином

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{\sigma_1 < \mathrm{Re} s_j \le \sigma_2} \frac{1}{e^{ks_j}}\right| \le \frac{A_2\lambda(\sigma_2 + B_2)}{e^{k\sigma_2}} + \frac{A_2\lambda(\sigma_1 + B_2)}{e^{k\sigma_1}} +$$

$$+\frac{|\overline{\alpha_{-k}}|}{k}\left[\frac{1}{e^{2k\sigma_2}} + \frac{1}{e^{2k\sigma_1}}\right] + \frac{1}{ke^{k\sigma_2}} \sum_{s_j \in R_{\sigma_2}} \left|\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_2}}\right|^k +$$

$$+\frac{1}{ke^{k\sigma_1}} \sum_{s_j \in R_{\sigma_1}} \left|\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma_1}}\right|^k \le \frac{A_2\lambda(\sigma_2 + B_2)}{e^{k\sigma_2}} + \frac{A_2\lambda(\sigma_1 + B_2)}{e^{k\sigma_1}} +$$

$$+C\left[\frac{1}{e^{2k\sigma_2}}+\frac{1}{e^{2k\sigma_1}}\right]+\frac{1}{ke^{k\sigma_2}}N(\sigma_2+1,\frac{1}{f})+\frac{1}{ke^{k\sigma_1}}N(\sigma_1+1,\frac{1}{f})\leq$$

$$\leq\frac{A\lambda(\sigma_2+B)}{e^{k\sigma_2}}+\frac{A\lambda(\sigma_1+B)}{e^{k\sigma_1}},\quad k\in\mathbb{N},\sigma_2>\sigma_1\geq\sigma_0, \tag{3.7}$$

де $|\overline{\alpha_{-k}}|$ оцінюється як в (3.4), $A=\max\{A_1,A_2,C\}, B=\max\{B_1+1,B_2\}$.

За теоремою 3.1 (пункт (ii) при $k=0$) послідовність нулів Q функції f має скінченну λ-щільність. Разом із (3.7) отримуємо, що Q - λ-допустима.

Нехай тепер послідовність $Q=\{s_j\}$ - λ-допустима. Тоді послідовність $Z=\{z_j\}$, $z_j=e^{s_j}\in\mathbb{C}$, є λ_1-допустимою в $\mathbb{C}$ при $\lambda_1(r)=\lambda(\log r)$. За теоремою Рубела-Тейлора [23, ст. 84] ([8, ст. 29]) існує ціла функція $F(z)$ скінченного λ_1-типу з послідовністю нулів $Z=\{z_j\}$. Тоді функція $f(s)=F(e^s)$ є голоморфною функцією скінченного λ-типу в $\overline{S}$ з послідовністю нулів $\{s_j\}$ $\square$

Теорема 3.3. *Послідовність Q з $\overline{S}$ є послідовністю нулів мероморфної функції з Λ тоді і лише тоді, коли вона має скінченну λ-щільність.*

Доведення. Якщо $Q=\{s_j\}$ - послідовність нулів функції f, $f\in\Lambda$, то з (2.19) випливає

$$N(\sigma,Q)=N(\sigma,\frac{1}{f})\leq T(\sigma,f)\leq B\lambda(\sigma+C),$$

для всіх $\sigma\geq\sigma_0>0$ і деяких $B,C>0$.

Нехай тепер $Q=\{s_j\}$ деяка послідовність, що має скінченну λ-щільність. Тоді послідовність $Z=\{z_j\},\quad z_j=e^{s_j}$, має скінченну λ_1-щільність при $\lambda_1(r)=\lambda(\log r)$. За теоремою Рубела-Тейлора [23, ст. 88] ([8, ст. 35]) існує мероморфна в $\mathbb{C}$ функція F скінченного λ_1-типу, послідовністю нулів якої є Z. Функція $f(s) = F(e^s)$ є мероморфною функцією скінченного λ-типу в $\overline{S}$ з послідовністю нулів $\{s_j\}$. $\square$

Наслідок 3.1. *Послідовність* $P = \{p_j\}$ *є послідовністю полюсів мероморфної в* $\overline{S}$ *функції скінченного* λ *- типу тоді і лише тоді, коли* $P = \{p_j\}$ *має скінченну* λ *- щільність.*

Справді, застосувавши теорему 3.3 до функції $\dfrac{1}{f}$, одержимо висновок наслідку.

3.3. Висновки до розділу 3

У 1922-1923 роках Ф. Неванлінною та Т. Карлеманом встановлено зв'язок між розподілом нулів і полюсів мероморфної в півкільці функції з її значеннями на межі. В подальшому ці результати знайшли застосування в наближенні голоморфних функцій многочленами у роботах Т. Карлемана та в теорії розподілу значень мероморфних у півплощині функцій в дослідженнях Р. Неванлінни. Згодом К.Г. Малютіним встановлено критерій належності функції до класу аналітичних у верхній півплощині $\{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ функцій скінченного λ-типу в термінах $\sin -$коефіцієнтів Фур'є функції $\log|f|$, а в роботі А. Бридуна доведено критерій скінченності λ-типу голоморфної у півсмузі функції f скінченного λ-типу в термінах $\sin -$коефіцієнтів розвинення в ряд Фур'є функції $\log|f|$. В третьому розділі роботи:

- доведено критерій належності функції, голоморфної у $\overline{S}$ такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, до класу функцій скінченного λ-типу, який визначається деякою функцією зростання λ (додатна, неперервна, необмежена, неспадна);

- описано послідовність нулів голоморфної у $\overline{S}$ функції такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, скінченного λ - типу;

- описано послідовності нулів і полюсів мероморфної у $\overline{S}$ функції такої, що $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$, з класу Λ (мероморфних в S скінченного λ - типу).

Розділ 4

МЕРОМОРФНІ В ОКОЛІ ІСТОТНО ОСОБЛИВОЇ ТОЧКИ ФУНКЦІЇ

В класичній теорії Неванлінни вивчається розподіл значень мероморфних у всій площині функцій. Ми даємо аналог характеристики Неванлінни та його першої основної теореми для функцій мероморфних лише в деякому проколеному околі фіксованої точки. Без втрати загальності вважатимемо цю точку ∞, а її околом – зовнішність деякого круга, зокрема, одиничного.

Даний розділ присвячений отриманню певних наслідків тверджень розділів 2 та 3, зокрема, аналогу теореми Йенсена та співвідношень для коефіцієнтів Фур'є функцій, мероморфних зовні одиничного круга, доведенню критерію скінченності λ-типу функцій голоморфних в околі істотно особливої точки та опису множин їх нулів і полюсів. Крім того, тут також встановлено зв'язок між характеристикою Неванлінни $T_0(r, F)$ таких функцій та класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ для мероморфних функцій, що мероморфно продовжуються в

$\mathbb{C}$, розглянуто випадок, коли $T_0(r,F)=O(\log r)$.

4.1. Теорема Йенсена, характеристика Неванлінни та коефіцієнти Фур'є мероморфних зовні одиничного круга функцій

Нехай відмінна від тотожного нуля функція F - мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z: \ |z| \ \geq \ 1\}$. Нехай $n_0(t,F)$ – лічильна функція її полюсів у кільці $\{z: \ 1< \ |z| \ \leq \ t\}$. Позначимо

$$N_0(r,F)=\int\limits_1^r \frac{n_0(t,F)}{t}dt, \quad r\geq 1. \tag{4.1}$$

і

$$c_0(r,F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|F(re^{it})|dt, \quad r\geq 1. \tag{4.2}$$

Наступна лема є аналогом теореми Йенсена.

Лема 4.1. *Нехай функція F мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z: |z|\geq 1\}$. Тоді*

$$N_0(r,\frac{1}{F})-N_0(r,F)=$$

$$=c_0(r,F)-\frac{\log r}{\log r_0}c_0(r_0,F)+(\frac{\log r}{\log r_0}-1)c_0(1,F), \quad r\geq r_0>1. \tag{4.3}$$

Доведення. В розділі 2 ми вивчали функції f мероморфні в замиканні півсмуги $S=\{s=\sigma+it: \sigma \ > \ 0, \quad 0<t<2\pi\}$, такі, що $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i), \quad \sigma\geq \ 0$. Відобразивши $\overline{S}$ у зовнішність одиничного круга $\{z: |z|\geq 1\}$ за допомогою відображення $z=e^s$, отримаємо такі співвідношення між мероморфною в $\{z : |z| \geq 1\}$ функцією F та мероморфною в $\overline{S}$ функцією f такою, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i), \quad \sigma \geq\ 0,$

$$f(s) = F(e^s).$$

Очевидно, що за допомогою відображення $z = e^s, z = re^{it}, s = \sigma + it$ отримуємо співвідношення $r = e^\sigma$, а також:

$$n_0(r, F) = n(\log r, f) = n(\sigma, f), \quad r \geq 1, \quad \sigma \in S, \tag{4.4}$$

де $n(\sigma, f)$ - лічильна функція полюсів функції f у прямокутнику $\{\eta + it : 0 < \eta \leq \sigma, 0 \leq t < 2\pi\}$.

З огляду на (4.1)

$$N_0(r, F) = \int\limits_1^r \frac{n_0(t, F)}{t} dt =$$

$$= \int\limits_1^{e^\sigma} \frac{n(\log t, f)}{t} dt = \int\limits_0^\sigma n(\eta, f) d\eta = N(\sigma, f), \tag{4.5}$$

для $r \geq 1$ і $\sigma \geq 0$.

А також,

$$c_0(\sigma, f) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |f(\sigma + it)| dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |F(e^{\sigma + it})| dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |F(re^{it})| dt = c_0(r, F),\ r \geq 1. \tag{4.6}$$

Із (2.4) та рівностей (4.5), (4.6), отримуємо (4.3) $\square$

Нехай відмінна від тотожного нуля функція F мероморфна в зовнішності одиничного круга $\{z :\ |z|\ \geq\ 1\}$. Позначимо

$$m_0(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{it})| dt,$$

де $x^+ = \max\{0, x\}$.

Означення 4.1. *Функція*

$$T_0(r, F) = m_0(r, F) - \frac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0, F) +$$

$$+ \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) m_0(1, F) + N_0(r, F), \quad r \geq r_0 > 1. \tag{4.7}$$

називається характеристикою Неванлінни функції F.

Властивості $T_0(r, F)$ описані в наступній теоремі.

Теорема 4.1. *Нехай функція* F, $F \not\equiv 0$, *мероморфна в зовнішності одиничного круга* $\{z : |z| \geq 1\}$. *Тоді*

(i) $T_0(r_0, F) = 0, \ r_0 > 1$;

(ii) $T_0(r, F)$ *невід'ємна, неспадна і опукла відносно* $\log r$ *при* $r \geq r_0$;

(iii) $T_0(r, F) = T_0(r, \frac{1}{F})$ *при* $r \geq r_0$.

(iv) $T_0(r, F_1F_2) \leq T_0(r, F_1) + T_0(r, F_2) + O(\log r), \quad r \geq r_0,$

$T_0(r, F_1 + F_2) \leq T_0(r, F_1) + T_0(r, F_2) + O(\log r), \quad r \geq r_0.$

Доведення. За означенням (4.7) маємо (i).

Далі, нехай F частка двох голоморфних функцій $H(z)$ і $G(z)$ в $\{z : |z| \geq 1\}$, $\quad F = \dfrac{H}{G}$, де H і G не мають спільних нулів. Застосувавши (4.3) до G, отримаємо

$$N_0(r, \frac{1}{G}) = c_0(r, G) - \frac{\log r}{\log r_0} c_0(r_0, G) +$$

$$+ \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) c_0(1, G) = N_0(r, F),$$

де $\quad r \geq r_0 > 1$. Зауважимо, що $(a - b)^+ + b = \max(a, b)$. Тому, зважаючи на (4.7), характеристику Неванлінни функції $F = \dfrac{H}{G}$ можна записати наступним чином

$$T_0(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max(\log|H(re^{i\theta})|, \log|G(re^{i\theta})|)d\theta -$$

$$-\frac{\log r}{\log r_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max(\log|H(r_0e^{i\theta})|, \log|G(r_0e^{i\theta})|)d\theta +$$

$$+\left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max(\log|H(e^{i\theta})|, \log|G(e^{i\theta})|)d\theta, \qquad (4.8)$$

де $r \geq r_0 > 1$.

Позначимо

$$I(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max(\log|H(re^{i\theta})|, \log|G(re^{i\theta})|)d\theta, \qquad (4.9)$$

$$r \geq r_0 > 1.$$

Функція $u(z) = \max(\log|H(z)|, \log|G(z)|)$ є субгармонійною в $\{z : |z| \geq 1\}$. Тому, $I(r,F)$ є опуклою відносно $\log r$ [4, ст. 27]. З рівностей (4.7), (4.8) і (4.9) отримуємо співвідношення

$$T_0(r,F) = I(r,F) - \frac{\log r}{\log r_0} I(r_0,F) + \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) I(1,F), \qquad (4.10)$$

$$r \geq r_0.$$

Правий бік рівності (4.10) є сумою опуклої відносно $\log r$ і лінійної відносно $\log r$ $A\log r + B$ функцій. Тому $T_0(r,F)$ є опуклою відносно $\log r$ для $r \geq r_0$.

З опуклості $I(r,F)$ відносно $\log r$ випливає

$$I(r_0,F) \leq \frac{\log r - \log r_0}{\log r} I(1,F) + \frac{\log r_0}{\log r} I(r,F), \quad 1 < r_0 \leq r.$$

Таким чином,

$$0 \leq I(r,F) - \frac{\log r}{\log r_0} I(r_0,F) + \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) I(1,F), 1 < r_0 \leq r.$$

Тому, з огляду на (4.10), отримуємо $T_0(r,F) \geq 0, \quad r \geq r_0$. Отже, $T_0(r,F)$ - невід'ємна.

Оскільки кожна опукла функція має похідну справа [85, ст. 28], то

$$\lim_{r\to r_0+0} \frac{T_0(r,F)-T_0(r_0,F)}{\log r - \log r_0} =$$

$$= \lim_{r\to r_0+0} \frac{T_0(r,F)}{\log r - \log r_0} = T'_{0+}(r_0,f) \geq 0.$$

Оскільки ця похідна неспадна [85, ст. 28], то $0 \leq T'_0(r_0,F) \leq T'_0(r,F), \ r \geq r_0$. Тому характеристика (4.7) є неспадною при $r \geq r_0$, і властивість (ii) доведена.

Застосовуючи (4.3) до функції $\dfrac{1}{F}$, отримаємо

$$N_0(r,F) - N_0(r,\frac{1}{F}) = c_0(r,\frac{1}{F}) - \frac{\log r}{\log r_0} c_0(r_0,\frac{1}{F}) +$$

$$+ \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) c_0(1,\frac{1}{F}), \ r \geq r_0 > 1. \tag{4.11}$$

Твердження (iii) випливає негайно з (4.11), (4.2) і властивості $\log x = \log^+ x - \log^+ \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$.

Використовуючи нерівності

$$\log^+ xy \leq \log^+ x + \log^+ y,$$

$$\log(x+y) \leq \log^+ x + \log^+ y + \log 2,$$

для додатних x, y і нерівності

$$n_0(r, F_1F_2) \leq n_0(r,F_1) + n_0(r,F_2),$$

$$n_0(r, F_1+F_2) \leq n_0(r,F_1) + n_0(r,F_2),$$

отримаємо (iv), що завершує доведення. $\square$

Нехай функція F, $F \not\equiv 0$, мероморфна в $\{z : |z| \geq 1\}$. Припустимо, що F не має ні нулів, ні полюсів на $|z| = 1$.

Позначимо

$$c_k(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \log |F(re^{it})| dt, \quad r \geq 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Лема 4.2. *Нехай функція F, $F \not\equiv 0$, мероморфна в $\{z : 1 \leq |z| < t, t > 1\}$. Нехай $\{a_j\}$ послідовність нулів F в $\{z : 1 \leq |z| < t, t > 1\}$ і $\{b_j\}$ - послідовність її полюсів. Нехай F не має ні нулів, ні полюсів на колі $\{z : |z| = 1\}$. Тоді виконуються наступні співвідношення*

$$c_k(r, F) = \frac{r^k}{2k} \alpha_k(F) - \frac{r^{-k}}{2k} \overline{\alpha_{-k}}(F) +$$

$$+ \frac{1}{2k} \sum_{|a_j| \geq 1} \left[\left(\frac{r}{a_j} \right)^k - \left(\frac{\overline{a_j}}{r} \right)^k \right] - \frac{1}{2k} \sum_{|b_j| \geq 1} \left[\left(\frac{r}{b_j} \right)^k - \left(\frac{\overline{b_j}}{r} \right)^k \right], \quad (4.12)$$

$$c_{-k}(r, F) = \overline{c}_k(r, F), \quad k \in \mathbb{N},$$

де $\alpha_k(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \frac{F'(e^{it})}{F(e^{it})} dt, \quad k \in \mathbb{N}.$

Доведення. Використовуючи співвідношення $z = re^{it} = e^s = e^{\sigma + it}$ і $f(s) = F(e^s)$ отримуємо

$$\alpha_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \frac{f'(it)}{f(it)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \frac{F'(e^{it})}{F(e^{it})} dt = \alpha_k(F), \quad (4.13)$$

$$k \in \mathbb{N},$$

$$c_k(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \log |f(\sigma + it)| dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} \log |F(re^{it})| dt = c_k(r, F), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.14)$$

Застосовуючи цю ж підстановку до (2.43), отримуємо рівності (4.12), де $c_k(r, F)$ і $\alpha_k(F)$ визначені співвідношеннями (4.14), (4.13) відповідно $\square$

4.2. Випадок $T_0(r, F) = O(\log r)$ та зв'язок між $T_0(r, F)$ і класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ для мероморфних функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$

Розглянемо випадок

$$T_0(r, F) = O(\log r), \quad r \geq r_0 > 1. \tag{4.15}$$

Теорема 4.2. *Нехай F – мероморфна в $\{z : |z| \geq 1\}$ функція. Властивість $T_0(r, F) = O(\log r), \quad r \geq r_0$, виконується тоді і лише тоді, коли*

$$F(z) = \mathcal{R}(z)e^{h(z)}, \tag{4.16}$$

де $\mathcal{R}(z)$ – раціональна та $h(z)$ – голоморфна і обмежена при $|z| \geq 1$ функція.

Доведення. Нехай F має вигляд (4.16) Тоді з огляду на властивість (iv) Теореми 4.1

$$T_0(r, F) \leq T_0(r, \mathcal{R}) + T_0(r, e^h) + O(\log r), \quad r \geq r_0 > 1. \tag{4.17}$$

Оскільки

$$m_0(r, \mathcal{R}) = O(\log r), \text{ і } N_0(r, \mathcal{R}) = O(\log r), \quad r \geq r_0 > 1,$$

то ми отримуємо

$$T_0(r,\mathcal{R}) = O(\log r), \quad r \geq r_0 > 1. \tag{4.18}$$

Крім того, оскільки h є обмеженою при $|z| \geq 1$, то

$$m_0(r,e^h) = O(1),\ r \geq r_0 > 1.$$

Таким чином, маємо

$$T_0(r,e^h) = m_0(r,e^h) + O(\log r) = O(\log r),\ r \geq r_0 > 1.$$

З цього співвідношення та з (4.17) і (4.18) випливає (4.15).

Навпаки, нехай виконується (4.15). Тоді

$$N_0(r,F) + m_0(r,F) = T_0(r,F) + \frac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0,F) -$$

$$-\left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) m_0(1,F) = O(\log r), \quad r \geq r_0 > 1. \tag{4.19}$$

Отже

$$N_0(r,F) = O(\log r) \text{ і } m_0(r,F) = O(\log r), \quad r \geq r_0 > 1,$$

бо обидва доданки зліва співвідношення (4.19) невід'ємні.

Зі співвідношення $N_0(r,F) = O(\log r), \quad r \geq r_0 > 1,$ випливає, що $n_0(r,F) \leq const$. Тому число полюсів F скінченне.

За властивістю (iii) Теореми 4.1 кількість нулів F також скінченна.

Нехай $\mathcal{R}(z)$ - раціональна функція, нулі і полюси якої співпадають з нулями і полюсами функції F з урахуванням їх кратностей.

Функція $g(z) = \dfrac{F(z)}{\mathcal{R}(z)}$ не має ні нулів, ні полюсів у $\{z : |z| \geq 1\}$. За Лемою 4.1. з [33] існує $m \in \mathbb{Z}$ таке, що гілка $\log G(z)$, $G(z) = z^{-m} g(z)$ визначена в $\{z : |z| \geq 1\}$. Розглянемо її ряд Лорана

$$\log G(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k. \tag{4.20}$$

Тоді

$$\log|G(z)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Re(c_k z^k) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_k z^k + \overline{c}_{-k}\overline{z}^k) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_k r^k + \overline{c}_{-k}r^{-k})e^{ik\theta}, r \geq 1,$$

і

$$\frac{1}{2}(c_k r^k + \overline{c}_{-k}r^{-k}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|G(re^{i\theta})|e^{-ik\theta}d\theta, \quad r \geq 1,\ k \in \mathbb{Z}. \quad (4.21)$$

Оскільки

$$|\log|G(z)|| \leq |\log|g(z)| + |m||\log z|, \quad |z| \geq 1,$$

зі співвідношень (4.15) і (4.21) випливає

$$c_k r^k + \overline{c}_{-k}r^{-k} = O(\log r), \quad r \geq 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.22)$$

Оскільки $r \geq 1$, то співвідношення (4.22) виконується тоді і лише тоді, коли $c_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Тому ряд Лорана (4.20) можна записати наступним чином

$$\log G(z) = \log\left(z^{-m}\frac{F(z)}{\mathcal{R}(z)}\right) = c_0 + \frac{\overline{c}_{-1}}{z} + ... + \frac{\overline{c}_{-k}}{z^k} + ..., \quad k \in \mathbb{N}.$$

Позначимо

$$c_0 + \frac{\overline{c}_{-1}}{z} + ... + \frac{\overline{c}_{-k}}{z^k} + ... = h(z), \quad |z| \geq 1.$$

Тоді

$$\log\left(z^{-m}\frac{F(z)}{\mathcal{R}(z)}\right) = h(z), \quad |z| \geq 1. \quad (4.23)$$

Оскільки ряд Лорана є абсолютно збіжний на $\{z : |z| = 1\}$, отримаємо $|h(z)| \leq |c_0| + |c_{-1}| + ... + |c_{-k}| + ... = const$.

Таким чином з (4.23) випливає

$$F(z) = z^m\mathcal{R}(z)e^{h(z)},$$

де $h(z)$ обмежена при $|z| \geq 1$, що завершує доведення $\square$

Якщо мероморфна в $\{z : |z| \geq 1\}$ функція F мероморфно продовжується в $\mathbb{C}$, то її класична характеристика Неванлінни $T(r, F)$ також визначена. Тоді

$$N(r, F) - N_0(r, F) =$$
$$= \int\limits_0^r \frac{n(t, F) - n(0, F)}{t} dt + n(0, F) \log r - \int\limits_1^r \frac{n_0(t, F)}{t} dt =$$
$$= \int\limits_0^1 \frac{n(t, F) - n(0, F)}{t} dt + \int\limits_1^r \frac{n(t, F) - n(0, F) - n_0(t, F)}{t} dt +$$
$$+ n(0, F) \log r = N(1, F) + \int\limits_1^r \frac{n(1, F)}{t} dt.$$

Оскільки $n(1, F) = n(t, F) - n_0(t, F)$ при $t \geq 1$ і

$$N(1, F) = \int\limits_0^1 \frac{n(t, F) - n(0, F)}{t} d, t$$

то $N(r, F) - N_0(r, F) = N(1, F) + n(1, F) \log r$ при $r \geq r_0 > 1$.

Таким чином,

$$T(r, F) - T_0(r, F) = N(r, F) + m(r, F) - N_0(r, F) -$$
$$- m_0(r, F) + \frac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0, F) - \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1 \right) m_0(1, F) =$$

$$= N(1, F) + m_0(1, F) +$$
$$+ \log r \left[\frac{m_0(r_0, F) - m_0(1, F)}{\log r_0} + n(1, F) \right], \ r \geq r_0 > 1. \tag{4.24}$$

Зауважимо, що

$$N(1, F) + m_0(1, F) = N(1, F) + m(1, F) = T(1, F), \tag{4.25}$$
$$r \geq r_0 > 1.$$

Використовуючи співвідношення (4.24) і (4.25), отримуємо наступне твердження.

Твердження 4.1. *Нехай мероморфна в* $\{z : |z| \geq 1\}$ *функція* F *має мероморфне продовження в* $\mathbb{C}$. *Тоді*

$$T_0(r,F) = T(r,F) - T(1,F) +$$

$$+ \log r \left[\frac{m_0(1,F) - m_0(r_0,F)}{\log r_0} - n(1,F) \right], \quad r \geq r_0 > 1. \qquad (4.26)$$

4.3. Зростання і розподіл нулів та полюсів мероморфних функцій в околі істотно особливої точки

Означення 4.2. *Додатна, неспадна, неперервна і необмежена при* $r > 1$ *функція* $\lambda(r)$ *називається функцією зростання.*

Означення 4.3. *Нехай* $\lambda(r)$ *функція зростання і* F *мероморфна в* $\{z : |z| \geq 1\}$. *Функція* F *називається функцією скінченного* λ *- типу, якщо існують додатні сталі* $A > 0, B > 0$ *такі, що нерівність* $T(r,F) \leq A\lambda(Br)$ *виконується для всіх* r, $r \geq r_0 > 1$.

Позначимо через $\Lambda(\infty)$ клас мероморфних функцій скінченного $\lambda-$ типу в $\{z : |z| \geq 1\}$ і через $\Lambda_H(\infty)$ - клас голоморфних функцій скінченного λ - типу в $\{z : |z| \geq 1\}$.

Лема 4.3. *Голоморфна функція* F *в* $\{z : |z| \geq 1\}$ *є функцією скінченного* λ*-типу тоді і лише тоді, коли функція* $f(s) = F(e^s)$ *є функцією скінченного* λ_1*-типу в* $\overline{S}$, *де* $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma), \quad \sigma > 0$.

Доведення. Нехай $F \in \Lambda_H(\infty)$. Тоді $T_0(r,F) \le A\lambda(Br)$ при деяких сталих $A, B > 0$ і всіх $r \ge r_0$.

Використовуючи співвідношення $z = re^{it} = e^s = e^{\sigma+it}$ і $F(z) = F(e^s) = f(s)$, отримаємо

$$T_0(r,F) = m_0(r,F) - \frac{\log r}{\log r_0} m_0(r_0,F) + \left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right) m_0(1,F) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{it})|dt - \frac{\log r}{\log r_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ |F(r_0 e^{it})|dt +$$

$$+\left(\frac{\log r}{\log r_0} - 1\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ |F(e^{it})|dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma+it)|dt - \frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma_0+it)|dt +$$

$$+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(it)|dt = T(\sigma,F),\ \sigma \ge \sigma_0.$$

Тому, оскільки $T_0(r,F) \le A\lambda(Br)$ при деяких сталих $A, B > 0$ і всіх $r \ge r_0$, то

$$T(\sigma,f) \le A\lambda(Be^\sigma) = A\lambda(e^{\sigma+\log B}) = A\lambda_1(\sigma+C),$$

де $C = \log B$.

Навпаки, якщо $T(\sigma,f) \le A\lambda_1(\sigma+C)$ при деяких $A, C > 0$ і всіх $\sigma \ge \sigma_0 > 0$, тоді

$$T_0(r,F) \le A\lambda_1(\log r + C) = A\lambda_1(\log r + \log e^C) = A\lambda_1(\log e^C \cdot r) = A\lambda(Br),$$

де $B = e^C$ □

Нехай $Z = \{z_j\}$ -послідовність комплексних чисел із $\{z : |z| \ge 1\}$.

Через $n_0(t, Z)$ позначимо лічильну функцію послідовності Z в кільці $\{z : 1 \leq |z| \leq t\}$.

Нехай λ - функція зростання.

Означення 4.4. *Послідовність* $Z = \{z_j\}$ *із* $\{z : |z| \geq 1\}$ *має скінченну* λ*- щільність, якщо*

$$N_0(r, Z) \leq A\lambda(Br), \tag{4.27}$$

при деяких додатних сталих A, B *для всіх* r, $r \geq 1$, *де*

$$N_0(r, Z) = \int\limits_1^r \frac{n_0(t, Z)}{t} dt.$$

Означення 4.5. *Послідовність* $Z = \{z_j\}$ *із* $\{z : |z| \geq 1\}$ *називається* λ*-допустимою, якщо вона має скінченну* λ *- щільність, і існують додатні сталі* A, B *такі, що*

$$\frac{1}{k} \left| \sum_{r_1 < r \leq r_2} \left(\frac{1}{z_j} \right)^k \right| \leq \frac{A\lambda(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\lambda(Br_2)}{r_2^k},$$

для всіх r_1, r_2, $r_0 \leq r_1 < r_2$ *і кожного* $k \in \mathbb{N}$.

Крім того, для зручності означення 3.3, 3.4 підрозділу 3.2 перепишемо наступним чином:

Означення 4.6. *Послідовність комплексних чисел* $Q = \{s_j\}$ *з* $\overline{S}$ *має скінченну* λ_1*-щільність, якщо існують додатні сталі* A, B *такі, що*

$$N(\sigma, Q) \leq A\lambda_1(\sigma + B), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0,$$

де

$$N(\sigma, Q) = \int\limits_0^\sigma n(\eta, Q) d\eta,$$

$n(\eta, Q)$ - *кількість членів послідовності* Q *в прямокутнику* R_η *і* $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma), \quad \sigma > 0.$

Означення 4.7. *Послідовність комплексних чисел* $Q = \{s_j\}$ *з* $\overline{S}$ *називаеться* λ_1*-допустимою, якщо вона має скінченну* λ_1*-щільність та існують додатні сталі* A, B *такі, що*

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{\sigma_1 < Res_j \le \sigma_2}\left(\frac{1}{e^{s_j}}\right)^k\right| \le \frac{A\lambda_1(\sigma_1 + B)}{e^{k\sigma_1}} + \frac{A\lambda_1(\sigma_2 + B)}{e^{k\sigma_2}},$$

$k \in \mathbb{N}$ *і* $\quad \sigma_0 \le \sigma_1 < \sigma_2$, *де* $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma), \quad \sigma > 0.$

Наступна теорема описує послідовності нулів функцій з класу $\Lambda_H(\infty)$.

Теорема 4.3. *Для того, щоб послідовність* Z *з* $\{z : |z| \ge 1\}$ *була послідовністю нулів функції з* $\Lambda_H(\infty)$ *необхідно і досить, щоб вона була* λ*-допустимою.*

Перш, ніж доводити цю теорему, доведемо наступне твердження.

Лема 4.4. *Нехай* $Z = \{z_j\}$ *- послідовність комплексних чисел з* $\{z : |z| \ge 1\}$ *і* $Q = \{s_j\}$ *- послідовність комплексних чисел із* $\overline{S}$ *таких, що* $z_j = e^{s_j}, \quad j \in \mathbb{N}$. *Послідовність* $\{z_j\}$ *є* λ*-допустимою тоді і лише тоді, коли послідовність* $\{s_j\}$ *є* λ_1*-допустимою, де* $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^\sigma), \quad \sigma > 0.$

Доведення. Нехай послідовність комплексних чисел $\{z_j\}$ є λ-допустимою. Тоді виконуються наступні нерівності

$$N_0(r, Z) \le A\lambda(Br),$$

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{r_1 < r \le r_2}\left(\frac{1}{z_j}\right)^k\right| \le \frac{A\lambda(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\lambda(Br_2)}{r_2^k},$$

для деяких додатних сталих A, B і всіх r_1, r_2, $r_0 \le r_1 < r_2$ та кожного $k \in \mathbb{N}$. Покладемо в обох нерівностях $z = e^s, \quad z = re^{it}$, де $e^{\sigma+it} =$

re^{it}, $\sigma = \log\ r$, і використаємо співвідношення (4.5). Таким чином, отримаємо

$$N_0(r, Z) = N(\sigma, Q) \le A\lambda(Be^{\sigma}) = A\lambda(e^{\sigma+\log B}) = A\lambda_1(\sigma + D)$$

і

$$\frac{1}{k}\left|\sum_{r_1<r\le r_2}\left(\frac{1}{z_j}\right)^k\right| = \frac{1}{k}\left|\sum_{\sigma_1<Res_j\le\sigma_2}\left(\frac{1}{e^{s_j}}\right)^k\right| \le$$

$$\frac{C\lambda(e^{\sigma_1+\log D})}{e^{k\sigma_1}} + \frac{C\lambda(e^{\sigma_2+\log D})}{e^{k\sigma_2}} = \frac{C\lambda_1(\sigma_1+\widetilde{A})}{e^{k\sigma_1}} + \frac{C\lambda_1(\sigma_2+\widetilde{A})}{e^{k\sigma_2}},$$

при деяких $A, B, C, D > 0$, $\widetilde{A} = \log D$, $D = \log B$ і всіх σ_1, σ_2, $\sigma_0 \le \sigma_1 < \sigma_2$, для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Тому $\{s_j\}$ задовольняє означення λ_1-допустимості.

Нехай тепер $\{s_j\}$ – λ_1-допустима. Аналогічними міркуваннями отримуємо λ-допустимість послідовності $\{z_j\}$, $z_j = e^{s_j}$ із $\{z : |z| \ge 1\}$. □

Доведення Теореми 4.3. Нехай $\{z_j\}$ -послідовність нулів з $\{z : |z| \ge 1\}$ голоморфної функції F скінченного λ-типу. Зважаючи на лему 4.3, отримаємо, що голоморфна функція $f(s) = F(e^s)$ є функцією скінченного λ_1-типу, де $\lambda_1(s) = \lambda(e^s)$. Нехай послідовність $Q = \{s_j\}$ з $\overline{S}$, де $e^{s_j} = z_j$, є послідовністю нулів голоморфної функції $f \in \Lambda_H$. За Теоремою 3.2 послідовність Q є λ_1- допустимою. Тоді за Лемою 4.4 послідовність $Z = \{z_j\}$ з $\{z : |z| \ge 1\}$ є $\lambda-$ допустимою, де $\lambda_1(\sigma) = \lambda(e^{\sigma})$, $\sigma > 0$.

Навпаки, якщо послідовність $\{z_j\}$ є λ-допустимою, тоді згідно з теоремою Рубела-Тейлора [23, ст. 84] ([8, ст. 29]) існує ціла функція $F(z)$ скінченного λ-типу з послідовністю нулів $Z = \{z_j\}$, що завершує доведення. □

Нехай $W = \{w_j\}$ - послідовність комплексних чисел з $\{z : |z| \geq 1\}$. Нехай λ - функція зростання.

Теорема 4.4. *Послідовність $W = \{w_j\}$ із $\{z : |z| \geq 1\}$ є послідовністю полюсів функції F з класу $\Lambda(\infty)$ тоді і лише тоді, коли вона має скінченну λ-щільність.*

Перш, ніж довести цю теорему, доведемо наступне твердження.

Твердження 4.2. *Послідовність $Z = \{z_j\}$ із $\{z : |z| \geq 1\}$ є послідовністю нулів функції F з класу $\Lambda(\infty)$ тоді і лише тоді, коли вона має скінченну λ-щільність.*

Доведення. Якщо $Z = \{z_j\}$ є послідовністю нулів функції F, $F \in \Lambda(\infty)$, тоді з (4.7) отримаємо

$$N_0(r, Z) = N_0(r, \frac{1}{F}) \leq T_0(r, F) \leq A\lambda(Br),$$

для всіх $r \geq r_0 > 1$ і деяких сталих $A, B > 0$.

Нехай тепер $Z = \{z_j\}$ -послідовність зі скінченною λ-щільністю. Тоді за теоремою Рубела-Тейлора [23] (див. також [8, p. 35]) існує мероморфна в $\mathbb{C}$ функція F скінченного λ-типу з послідовністю нулів Z. $\Box$

Застосовуючи Твердження 4.2 до функції $\dfrac{1}{F}$ ми отримуємо висновок теореми 4.4.

4.4. Висновки до розділу 4

В роботі [9] Вейєрштрасс показав, що кожну цілу функцію можна зобразити як нескінченний добуток, побудований по її нулях. Якщо ж порядок функції, що визначається через швидкість зростання її максимума модуля, скінченний, то, за доведеним в роботі [10] Адамара, таке зображення "майже"єдине. Та, при вивченні мероморфних функцій $f(z)$, зручніший підхід до вираження швидкості зростання функції дає не максимум модуля, а характеристика Неванлінни $T(r, f)$. В роботах [6], [4] показано, що $T(r, f)$ є зростаючою опуклою функцією від $\log r$ і, відповідно прямує до нескінченності разом із r. Тому логічним було виникнення питання про швидкості зростання мероморфних функцій в областях, відмінних від комплексної площини та її верхньої півплощини, зокрема, в півсмузі $S = \{s = \sigma + it : \sigma\ >\ 0,\ 0 < t < 2\pi\}$. Але при відображенні замикання півсмуги $\overline{S}$ у зовнішність одиничного круга $\{z : |z| \geq 1\}$ за допомогою відображення $z = e^s$ отримуємо, що $f(s) = F(e^s)$. Власне, для мероморфної в $\{z :\ |z|\ \geq\ 1\}$ функції F, що задається рівністю $f(s) = F(e^s)$, в четвертому розділі, як наслідки з тверджень 2-го розділу, отримано такі результати:

- аналог теореми Йенсена для мероморфних зовні одиничного круга функцій;
- властивості характеристики Неванлінни $T_0(r, F)$ мероморфних зовні одиничного круга функцій;
- рівності для коефіцієнтів Фур'є мероморфної в зовнішності одиничного круга функції.

Крім того:

- встановлено зв'язок між $T_0(r, F)$ та класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ для мероморфних функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$;
- розглянуто випадок $T_0(r, F) = O(\log r)$;

В цьому ж розділі отримано ряд наслідків для функцій, голоморфних в зовнішності одиничного круга, з тверджень, доведених в розділі 3:

- встановлено критерій скінченності λ-типу функцій, голоморфних в зовнішності одиничного круга;
- описано послідовності нулів голоморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга;
- описано послідовності нулів і полюсів мероморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга.

Розділ 5

МУЛЬТИПЛІКАТИВНО ПЕРІОДИЧНІ МЕРОМОРФНІ ФУНКЦІЇ У ПРОКОЛЕНОМУ ЗАМИКАННІ ВЕРХНЬОЇ ПІВПЛОЩИНИ

Якщо мероморфна в замиканні півсмуги $S = \{s = \sigma + it : \quad \sigma > 0, 0 < t < 2\pi\}$ функція g, $g(\sigma) = g(\sigma + 2\pi i)$, мероморфно продовжується у замикання смуги $S_\infty = \{s = \sigma + it : \ -\infty < \sigma < +\infty, \ 0 < t < 2\pi\}$, то функція f, що пов'язана з g співвідношенням $f(z) = f(e^\sigma) = g(s)$, мероморфна в проколеній площині $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Смуга S_∞ інваріантна відносно зсувів на дійсні числа, тому ми можемо розглянути підклас періодичних мероморфних в S_∞ функцій з дійсним періодом ω, тобто таких, що $g(s + \omega) = g(s), s \in S_\infty$, і, крім того, $g(\sigma) = g(\sigma + 2\pi i)$.

Тоді функція $f(z), z = e^s, f(e^s) = g(s)$, мультиплікативно періодична з мультиплікатором $q = e^{\omega}$. Справді,

$$f(e^{\omega} \cdot e^{s}) = g(s+\omega) = g(s) = f(e^{s}).$$

Якщо $q = e^{\omega}$– мультиплікатор, то $e^{-\omega}$ також, тому можна вважати $0 < q < 1$. Зручними характеристиками зростання таких функцій є характеристики Неванлінни, запропоновані в [62] [63].

Теорія мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ була розроблена О. Раузенбергером [67]. Ж. Валірон назвав такі функції локсодромними тому, що точки, у яких така функція набуває одне і те ж значення у випадку недійсного q, лежать на логарифмічних спіралях. Образи цих спіралей на сфері Рімана перетинають кожен меридіан під одним і тим же кутом і вони називаються локсодромними кривими ($\lambda o \xi o \zeta$ - кривий, $\delta \rho o \mu o \zeta$ - шлях). В log-полярних координатах це – прямі лінії. Теорія таких функцій тісно пов'язана з теорією еліптичних функцій ([69], [68]).

В цьому параграфі ми вивчаємо характеристики Неванлінни довільних локсодромних функцій а також мультиплікативно періодичні функції у проколеному замиканні верхньої півплощини.

5.1. Характеристики зростання локсодромних функцій

Означення 5.1 ([67], [68]). *Мероморфна в проколеній площині* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *функція* f *називається локсодромною з мультиплікатором* q, *якщо вона задовольняє умову*

$$f(qz) = f(z), \quad 0 < |q| < 1, \quad z \in \mathbb{C}^*. \tag{5.1}$$

Множину локсодромних мероморфних функції з мультиплікатором q позначимо $\mathcal{L}_q$ [69].

Характеристики типу Неванлінни мероморфних у $\mathbb{C}^*$ функцій були введені і вивчались у [62], [63] (див. також [33]).

Зокрема, характеристики Неванлінни функції f визначались рівностями

$$\overset{o}{T}(r,f) = \overset{o}{N}(r,f) + \overset{o}{m}(r,f), \quad 1 \le r,$$

де

$$\overset{o}{m}(r,f) = m(r,f) + m\left(\frac{1}{r}, f\right) - 2m(1,f),$$

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi, \quad a^+ = \max(a,0),$$

$$\overset{o}{N}(r,f) = \int\limits_1^r \frac{\overset{o}{n}(r,f)}{r}dr,$$

і $\overset{o}{n}(r,f)$– лічильна функція полюсів f у кільці $\{z : 1/r < |z| < r\}$.

Теорема H ([33], [62]). *Характеристика* $\overset{o}{T}(r,f)$ *є невід'ємною, неперервною, неспадною і опуклою функцією відносно* $\log r$ *на* $[1;+\infty)$, $\overset{o}{T}(1,f) = 0$.

Нагадаємо деякі властивості функцій з $\mathcal{L}_q$ ([67], [68], [69]).

Позначимо $A_r = \{z : |q|r < |z| \le r\}$. Кожна відмінна від сталої локсодромна мероморфна функція з мультиплікатором q має принаймні два полюси в A_r. Кількість полюсів f є однаковою для для кожного кільця A_r. Позначимо її через m. Число m називають *порядком функції* f.

З (5.1) отримуємо, що $f(q^n z) = f(z)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 5.1. *Нехай $f-$ функція з класу $\mathcal{L}_q$ і її порядок – m. Тоді*

$$\overset{o}{T}(r,f) = \frac{m}{\log\frac{1}{|q|}}\log^2 r + O(\log r), \quad r > 1, \tag{5.2}$$

де

$$|O(\log r)| \le 2m\log r + C, \tag{5.3}$$

$$C = \max\left\{\overset{o}{T}\left(\frac{1}{|q|}, f\right), 2m(1,f)\right\}.$$

Доведення. Якщо $\frac{1}{|q|^{n-1}} < r \le \frac{1}{|q|^n}$, $n \in \mathbb{N}$, тоді

$$2m\left(\frac{\log r}{\log\frac{1}{|q|}} - 1\right) \le 2m(n-1) \le \overset{o}{n}(r,f) \le 2mn \le 2m\left(\frac{\log r}{\log\frac{1}{|q|}} + 1\right).$$

Тому,

$$\frac{m\log^2 r}{\log\frac{1}{|q|}} - 2m\log r \le \overset{o}{N}(z,f) \le \frac{m\log^2 r}{\log\frac{1}{|q|}} + 2m\log r \tag{5.4}$$

Функція $f \in \mathcal{L}_q$ визначається своїми значеннями у $A_{\frac{1}{|q|}}$. Таким чином,

$$-2m(1,f) \le \overset{o}{m}(r,f) \le \overset{o}{T}\left(\frac{1}{|q|}, f\right). \tag{5.5}$$

Співвідношення (5.2) і (5.3) випливають з (5.4) і (5.5), що завершує доведення.

Теорема 5.1 і Теорема 10.1 з [33] дають ще один спосіб зображення локсодромних функцій наступним чином.

Кількість нулів функції $f \in \mathcal{L}_q$ у A_1 співпадає з кількістю її полюсів у кільці A_r ([68]). Позначимо нулі функції f в кільці A_r через $a_1, a_2, ..., a_m$, а полюси - $b_1, b_2, ..., b_m$. Тоді з рівності (5.1) випливає $z_j = a_k q^n, w_j = b_k q^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Нехай

$$\widetilde{z_j} = \begin{cases} z_j, & \text{якщо } |z_j| > 1, \\ \dfrac{1}{z_j}, & \text{якщо } |z_j| \le 1, \end{cases} \qquad \widetilde{w_j} = \begin{cases} w_j, & \text{якщо } |w_j| > 1, \\ \dfrac{1}{w_j}, & \text{якщо } |w_j| \le 1. \end{cases}$$

Рід послідовності z_j визначається як найменше невід'ємне ціле ν, що задовольняє умову

$$\sum_j |\widetilde{z_j}|^{-\nu-1} < +\infty.$$

Легко бачити, що рід послідовностей $\widetilde{z_j}$ і $\widetilde{w_j}$ дорівнює нулеві, та зображення (10.2) з [33] набуває вигляду

$$f(z) = Cz^p \frac{\prod\limits_{|z_j|\le 1} \left(1 - \dfrac{z_j}{z}\right) \prod\limits_{|z_j|>1} \left(1 - \dfrac{z}{z_j}\right)}{\prod\limits_{|w_j|\le 1} \left(1 - \dfrac{w_j}{w}\right) \prod\limits_{|w_j|>1} \left(1 - \dfrac{w}{w_j}\right)}, \tag{5.6}$$

де $p \in \mathbb{Z}$, $C-$ стала.

Оскільки добутки у співвідношені (5.6) є збіжними абсолютно, то його можна переписати наступним чином

$$f(z) = Cz^p \frac{\prod\limits_{k=1}^{m} P\left(\dfrac{z}{a_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{m} P\left(\dfrac{z}{b_k}\right)}, \tag{5.7}$$

де $P-$ первинна функція Шотткі-Кляйна [71], [87], [88]

$$P(z) = (1-z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n z)\left(1 - \frac{q^n}{z}\right).$$

Існує $p \in \mathbb{Z}$ ([2], [4]) таке, що

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{b_1 b_2 \ldots b_m} = q^p. \tag{5.8}$$

З (5.1) випливає ([68], [69]), що ціле p у співвідношенні (5.7) має співпадати з таким же значенням з рівності(5.8).

Ми отримали відоме зображення (5.7) функцій $f \in \mathcal{L}_q$ [68], [69] з p, що задовольняє (5.8). Воно є схожим до зображення раціональної функції, де $P\left(\dfrac{z}{a_k}\right)$ і $P\left(\dfrac{z}{b_k}\right)$ замінені на $\left(1-\dfrac{z}{a_k}\right)$ та $\left(1-\dfrac{z}{b_k}\right)$ відповідно. Раціональна функція є мероморфною на сфері Рімана, що є компактною рімановою поверхнею роду нуль. Первинна функція Шотткі-Кляйна $P\left(\dfrac{z}{c}\right)$ узагальнює ([71]) $\left(1-\dfrac{z}{c}\right)$ на Рімановій поверхні першого роду, яка є тором.

Тому функції f з $\mathcal{L}_q$ можна розглядати як раціональні функції на торі.

5.2. Розподіл значень мультиплікативно періодичної мероморфної функції в $\mathcal{H}^*$

Нехай $\mathcal{H} = \{z : Im\ z > 0\}$ і $\mathcal{H}^* = \overline{\mathcal{H}}\backslash\{0\}$. Простір $\mathcal{H}^*$ інваріантний відносно мультиплікативної групи $\mathbb{R}^+$.

Позначимо $\mathcal{A}_t = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : qt < |z| \leq t\},\ t > 0,\ 0 < q < 1$. Зауважимо, що $\overline{\mathcal{A}_t} = \mathcal{H}^*$.

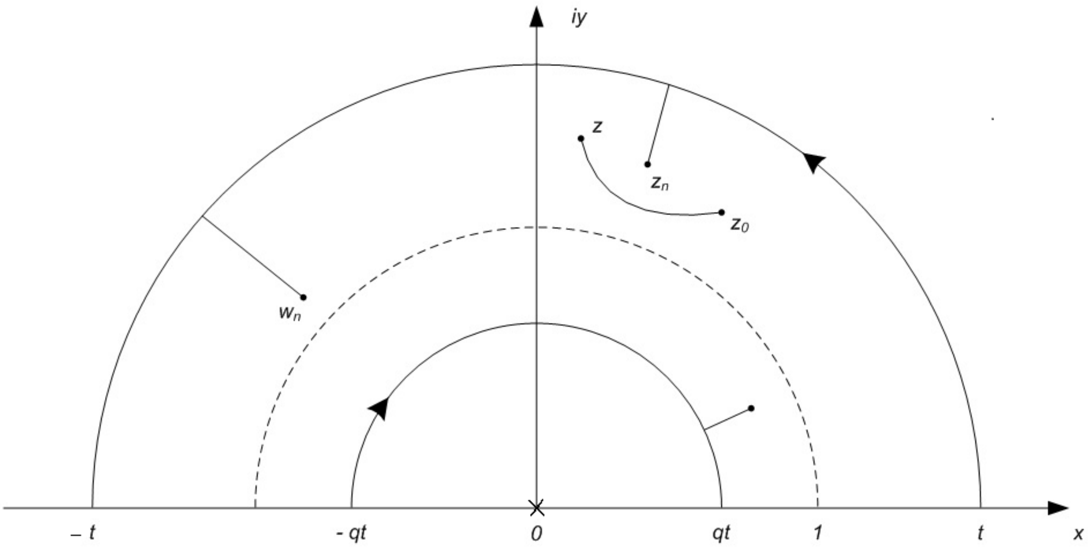

Рис. 5.1. Півкільце $\mathcal{A}_t$

Означення 5.2. *Функція f називається мероморфною в $\mathcal{H}^*$, якщо вона мероморфна в замиканні кожного півкільця $\mathcal{A}_t$.*

Означення 5.3. *Мероморфна в $\mathcal{H}^*$ функція f називається мультиплікативно періодичною з мультиплікатором q, $0 < q < 1$, якщо для всіх $z \in \mathcal{H}^*$ виконується рівність*

$$f(qz) = f(z). \tag{5.9}$$

Клас таких функцій позначимо через $\mathcal{M}_q$.

Теорема H. ([93]). *Нехай $f \in \mathcal{M}_q$. Тоді*

1) *кількість $a-$точок, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, функції $f \neq const$ у кільці $\mathcal{A}_t = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : qt < |z| \leq t\}$, $t > 0$, не залежить від t;*

2) *якщо функція f голоморфна і $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, то $f = const$;*

3) якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, то функція $g(\zeta) = f(\sqrt{\zeta})$, $\sqrt{-1} = i$, є мультиплікативно періодичною в $\mathbb{C}^*$ з мультиплікатором q^2. Функція $g\left(e^{\frac{2\pi i}{\omega_2}s}\right)$ є подвійно періодичною з ґраткою періодів $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ при $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = -\dfrac{i}{\pi}\log q$.

Наведемо приклад мультиплікативно періодичної мероморфної функції.

Приклад 5.1. Нехай $z \in \mathbb{C}$. Покладемо $\log 1 = 0$. Тоді

$$\log z = \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta},$$

де інтеграл береться вздовж шляху, що з'єднує точки 1 і z в $D = \mathbb{C}\backslash[-\infty i, 0]$ (див. рис. 5.2)

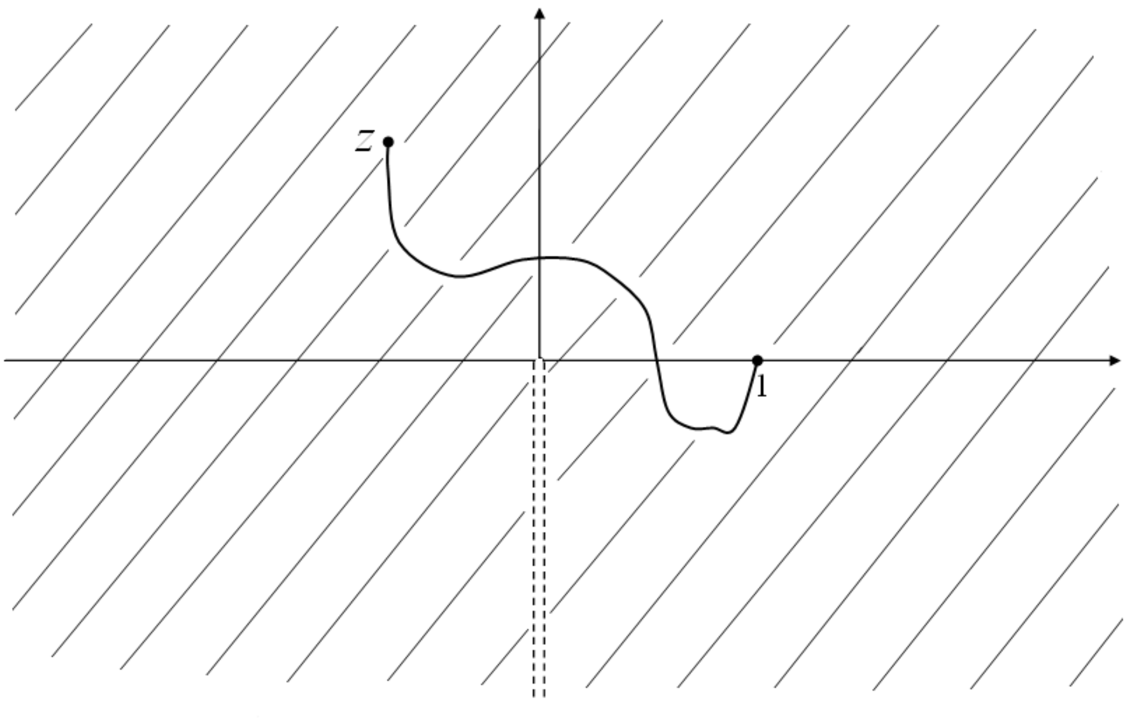

Рис. 5.2. Область визначення функції $\log z$

Розглянемо мероморфну функцію $f(z) = \sin\log z$.

Покажемо, що вона мультиплікативно періодична з мультиплікатором $q = e^{-2\pi}, 0 < q < 1$. Для перевірки цього, зауважимо, що при $a > 0 \quad z \in D \Rightarrow az \in D$ і функції

$$F(z) = \int\limits_1^{az} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad G(z) = \int\limits_1^{a} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int\limits_1^{z} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

співпадають в D. Справді, $F'(z) = G'(z)$. Звідси $F(z) = G(z) + C,\ z \in D$, де $C-$ деяка стала. З рівності $F(1) = G(1)$ знаходимо $C = 0$. Отож,

$$f(qz) = \sin\log(qz) = \sin\log(e^{-2\pi} \cdot z) =$$

$$= \sin(\log e^{-2\pi} + \log z) = \sin\log z = f(z).$$

Нехай f мультиплікативно періодична мероморфна функція в $\mathcal{H}^*$. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Нехай $z_0 \in \mathcal{H}^*$, $f(z_0) \neq 0, \infty$, і $\log f(z)$ визначений співвідношенням

$$\log f(z) = \log f(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta, \tag{5.10}$$

де інтеграл береться вздовж шляху, що з'єднує точки z_0 і z, у $\mathcal{H}^*$ з радіальними розрізами (рис. 5.1). Крім того, нехай

$$\arg f(z) = \arg f(z_0) + \operatorname{Im} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi. \tag{5.11}$$

Розподіл значень функції f з $\mathcal{M}_q$ описаний наступною теоремою.

Теорема 5.2. *Нехай $f \in \mathcal{M}_q$, $f \neq const$ і $f(z) \neq 0, \infty$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тоді*

1) *сума приростів $\arg f$ вздовж відрізків $[qt, t]$ та $[-t, -qt]$ не залежить від t і дорівнює $2\pi\big(n_0(f) - n_\infty(f)\big)$, де $n_0(f)$, $n_\infty(f)-$ кількості нулів та полюсів функції f в $\mathcal{A}_1 = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : q < |z| \leq 1\}$ відповідно;*

2) нехай $z_n = r_n e^{i\alpha_n}-$ $a-$*точки функції* f, $a \in \mathbb{C}$, *та* $w_n = \rho_n e^{i\beta_n}$ *полюси* f *в* $\mathcal{A}_t = \{z \in \overline{\mathcal{H}} : qt < |z| \le t\}$. *Тоді*

$$\int_{qr}^{r} \sum_{qt<r_n\le t} \left(\frac{q}{r_n} - \frac{r_n}{t^2}\right) \sin\alpha_n dt = \int_{qr}^{r} \sum_{qt<\rho_n\le t} \left(\frac{q}{\rho_n} - \frac{\rho_n}{t^2}\right) \sin\beta_n dt$$

при кожному $r > 0$.

Доведення. Застосовуючи принцип аргумента до функції $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, отримуємо

$$\int_{\partial\mathcal{A}_t} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i\big(n_0(f) - n_\infty(f)\big). \tag{5.12}$$

Оскільки

$$\partial\mathcal{A}_t = \Gamma_{qt} \cup \Gamma_t \cup [qt, t] \cup [-t, -qt], \tag{5.13}$$

де Γ_{qt}, Γ_t півкільця з радіусами qt, t відповідно та з центрами в початку координат, то рівність (5.12) набуде вигляду

$$it\int_0^\pi \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})} e^{i\varphi} d\varphi - iqt\int_0^\pi \frac{f'(qte^{i\varphi})}{f(qte^{i\varphi})} e^{i\varphi} d\varphi + \int_{qt}^{t} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau + \int_{-t}^{-qt} \frac{f'(z)}{f(z)} dz =$$

$$= 2\pi i\big(n_0(f) - n_\infty(f)\big). \tag{5.14}$$

Використовуючи співвідношення $f(qz) = f(z)$, $f'(qz) = \dfrac{1}{q} f'(z)$ та (5.10), з (5.14) випливає

$$[\log f(t) - \log f(qt)] + [\log f(-qt) - \log f(-t)] =$$

$$= 2\pi i\big(n_0(f) - n_\infty(f)\big). \tag{5.15}$$

Взявши уявні частини обох боків рівності (5.15), отримуємо

$$[\arg f(t) - \arg f(qt)] + [\arg f(-qt) - \arg f(-t)] = 2\pi\big(n_0(f) - n_\infty(f)\big).$$

Таким чином, перше твердження Теореми 5.2 доведене.

Нехай z_n нулі функції f у $\mathcal{A}_t$. Застосовуючи теорему про лишки до інтегралів $\int\limits_{\partial\mathcal{A}_t} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ та $\int\limits_{\partial\mathcal{A}_t} \frac{1}{z}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$, отримуємо

$$\int\limits_{\partial\mathcal{A}_t} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\left(\sum_{qt<|z_n|\le t} z_n - \sum_{qt<|z_n|\le t} w_n\right),$$

і

$$\int\limits_{\partial\mathcal{A}_t} \frac{1}{z}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\left(\sum_{qt<|z_n|\le t} \frac{1}{z_n} - \sum_{qt<|z_n|\le t} \frac{1}{w_n}\right).$$

З врахуванням (5.13) ці співвідношення набудуть вигляду

$$it^2\int\limits_0^\pi \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}e^{2i\varphi}d\varphi - iqt^2\int\limits_0^\pi \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}e^{2i\varphi}d\varphi + \int\limits_{qt}^t \tau\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau +$$

$$+\int\limits_{-t}^{-qt} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\left(\sum_{qt<|z_n|\le t} z_n - \sum_{qt<|z_n|\le t} w_n\right), \tag{5.16}$$

та

$$i\int\limits_0^\pi \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}d\varphi - \frac{i}{q}\int\limits_0^\pi \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}d\varphi + \int\limits_{qt}^t \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\frac{d\tau}{\tau} + \int\limits_{-t}^{-qt} \frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{z} =$$

$$= 2\pi i\left(\sum_{qt<|z_n|\le t} \frac{1}{z_n} - \sum_{qt<|z_n|\le t} \frac{1}{w_n}\right)$$

відповідно.

Поділивши (5.16) на t^2 та проінтегрувавши по t від qr до r, матимемо

$$2\pi i\int\limits_{qr}^r \left[\sum_{qt<|z_n|\le t} z_n - \sum_{qt<|w_n|\le t} w_n\right]\frac{dt}{t^2} = \int\limits_{qr}^r \left[\int\limits_{qt}^t z\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]\frac{dt}{t^2} +$$

$$+\int_{qr}^{r}\left[\int_{-t}^{-qt} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]\frac{dt}{t^2}+i(1-q)\int_{qr}^{r}\left[\int_{0}^{\pi}\frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}e^{2i\varphi}d\varphi\right]dt.$$

За теоремою Фубіні з останньої рівності випливає

$$2\pi i\int_{qr}^{r}\left[\sum_{qt<|z_n|\le t} z_n-\sum_{qt<|w_n|\le t} w_n\right]\frac{dt}{t^2}=\int_{qr}^{r}\left[\int_{qt}^{t} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]\frac{dt}{t^2}+$$

$$+\int_{qr}^{r}\left[\int_{-t}^{-qt} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]\frac{dt}{t^2}+i(1-q)\int_{0}^{\pi}e^{2i\varphi}\left[\int_{qr}^{r}\frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}dt\right]d\varphi. \quad (5.17)$$

Позначимо

$$I_1=\int_{qr}^{r}\left[\int_{qt}^{t} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]\frac{dt}{t^2},\quad I_2=\int_{qr}^{r}\left[\int_{-t}^{-qt} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]\frac{dt}{t^2}. \quad (5.18)$$

Застосовуючи означення (5.10) та позначення (5.18) до (5.17), отримаємо

$$2\pi i\int_{qr}^{r}\left[\sum_{qt<|z_n|\le t} z_n-\sum_{qt<|w_n|\le t} w_n\right]\frac{dt}{t^2}=$$

$$=I_1+I_2+i(1-q)\int_{0}^{\pi}\left[\log f(re^{i\varphi})-\log f(qre^{i\varphi})\right]e^{i\varphi}d\varphi. \quad (5.19)$$

Аналогічними міркуваннями, застосованими до інтегралу $\int\limits_{\partial\mathcal{A}_t}\frac{1}{z}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$, показуємо справедливість рівності

$$2\pi qi\int_{qr}^{r}\left[\sum_{qt<|z_n|\le t}\frac{1}{z_n}-\sum_{qt<|w_n|\le t}\frac{1}{w_n}\right]dt=$$

$$=qI_3+qI_4+i(q-1)\int_{0}^{\pi}\left[\log f(re^{i\varphi})-\log f(qre^{i\varphi})\right]e^{-i\varphi}d\varphi, \quad (5.20)$$

де $I_3 = \int\limits_{qr}^{r} \left[\int\limits_{qt}^{t} \frac{1}{z} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] dt, \quad I_4 = \int\limits_{qr}^{r} \left[\int\limits_{-t}^{-qt} \frac{1}{z} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] dt.$

Додаючи співвідношення (5.19) та (5.20), отримуємо

$$2\pi i \int\limits_{qr}^{r} \left[\sum_{qt<|z_n|\le t} z_n - \sum_{qt<|w_n|\le t} w_n \right] \frac{dt}{t^2} +$$

$$+2\pi q i \int\limits_{qr}^{r} \left[\sum_{qt<|z_n|\le t} \frac{1}{z_n} - \sum_{qt<|w_n|\le t} \frac{1}{w_n} \right] dt = I_1 + I_2 + qI_3 + qI_4 -$$

$$- 2(1-q) \int\limits_{0}^{\pi} \left[\log f(re^{i\varphi}) - \log f(qre^{i\varphi}) \right] \sin\varphi d\varphi. \qquad (5.21)$$

Оскільки $\log|f(re^{i\varphi})| - \log|f(qre^{i\varphi})| = 0$, то взявши дійсні частини рівності (5.21), матимемо

$$2\pi \mathrm{Re} \left[i \int\limits_{qr}^{r} \left(\sum_{qt<|z_n|\le t} z_n - \sum_{qt<|w_n|\le t} w_n \right) \frac{dt}{t^2} \right] +$$

$$+2\pi \mathrm{Re} \left[iq \int\limits_{qr}^{r} \left(\sum_{qt<|z_n|\le t} \frac{1}{z_n} - \sum_{qt<|w_n|\le t} \frac{1}{w_n} \right) dt \right] =$$

$$= Re\left(I_1 + I_2 + qI_3 + qI_4 \right). \qquad (5.22)$$

Знайшовши дійсні частини інтегралів I_1, I_2, I_3, I_4, отримаємо наступні рівності

$$\mathrm{Re} I_1 = \int\limits_{qr}^{r} \frac{1}{t^2} \left[t \log|f(t)| - qt \log|f(qt)| - \int\limits_{qt}^{t} \log|f(\tau)| d\tau \right] dt =$$

$$= (1-q) \int\limits_{qr}^{r} \log|f(t)| \frac{dt}{t} + \int\limits_{qr}^{r} \left(\int\limits_{qt}^{t} \log|f(\tau)| d\tau \right) d\left(\frac{1}{t} \right) =$$

$$= (1-q)\int\limits_{qr}^{r}\log|f(t)|\frac{dt}{t} + \frac{1}{r}\int\limits_{qr}^{r}\log|f(t)|dt - \frac{1}{qr}\int\limits_{q^2r}^{qr}\log|f(t)|dt -$$

$$-\int\limits_{qr}^{r}\frac{1}{t}\left[\log|f(t)| - q\log|f(qt)|\right]dt = \frac{1}{r}\int\limits_{qr}^{r}\log|f(t)|dt - \frac{1}{qr}\int\limits_{q^2r}^{qr}\log|f(t)|dt.$$

Зробивши підстановку $t = q\tau$ в другому інтегралі, отримаємо $\mathrm{Re}\, I_1 = 0$. Аналогічним чином доводиться, що $\mathrm{Re} I_2 = 0$.

Знайдемо дійсну частину третього інтеграла,

$$\mathrm{Re} I_3 = \int\limits_{qr}^{r}\left[\frac{1}{t}\log|f(t)| - \frac{1}{qt}\log|f(qt)| + \int\limits_{qt}^{t}\log|f(\tau)|\frac{d\tau}{\tau^2}\right]dt =$$

$$= (1-\frac{1}{q})\int\limits_{qr}^{r}\log|f(t)|\frac{dt}{t} + r\int\limits_{qr}^{r}\log|f(t)|\frac{dt}{t^2} - qr\int\limits_{q^2r}^{qr}\log|f(t)|\frac{dt}{t^2} -$$

$$-\int\limits_{qr}^{r} t\left(\frac{\log|f(t)|}{t^2} - q\frac{\log|f(qt)|}{q^2t^2}\right)dt = (1-\frac{1}{q})\int\limits_{qr}^{r}\log|f(t)|\frac{dt}{t} -$$

$$-(1-\frac{1}{q})\int\limits_{qr}^{r}\log|f(t)|\frac{dt}{t} + r\int\limits_{qr}^{r}\log|f(t)|\frac{dt}{t^2} - qr\int\limits_{q^2r}^{qr}\log|f(t)|\frac{dt}{t^2} = 0.$$

Схожим чином доводиться, що $\mathrm{Re} I_4 = 0$.

Зі співвідношення (5.22) випливає

$$2\pi\mathrm{Re}\left[i\int\limits_{qr}^{r}\left(\sum_{qt<|z_n|\le t} z_n - \sum_{qt<|w_n|\le t} w_n\right)\frac{dt}{t^2}\right] +$$

$$+ 2\pi\mathrm{Re}\left[iq\int\limits_{qr}^{r}\left(\sum_{qt<|z_n|\le t}\frac{1}{z_n} - \sum_{qt<|w_n|\le t}\frac{1}{w_n}\right)dt\right] = 0. \qquad (5.23)$$

З урахуванням позначень $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$ та $w_n = \rho_n e^{i\beta_n}$, результатом обчислення дійсної частини рівності (5.23) буде

$$\int\limits_{qr}^{r}\sum_{qt<r_n\le t}\left(\frac{q}{r_n}-\frac{r_n}{t^2}\right)\sin\alpha_n dt-\int\limits_{qr}^{r}\sum_{qt<\rho_n\le t}\left(\frac{q}{\rho_n}-\frac{\rho_n}{t^2}\right)\sin\beta_n dt=0.$$

Застосовуючи даний результат до функції $f(z)-a$, отримаємо висновок 2) Теореми 5.2, що й завершує доведення.

Наслідок 5.1. *Нехай функція f є голоморфною і мультиплікативно періодичною з мультиплікатором q, $0<q<1$, у $\mathcal{H}^*$, $f\neq const$ і $f(z)\neq 0,\infty$ на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Нехай, крім того, точки $z_n=r_ne^{i\alpha_n}$ є a-точками функції f, $a\in\mathbb{C}$. Тоді для кожного додатного r справедливе співвідношення*

$$\int\limits_{qr}^{r}\sum_{qt<r_n\le t}\left(\frac{q}{r_n}-\frac{r_n}{t^2}\right)\sin\alpha_n dt=0.$$

5.3. Висновки до розділу 5

П'ятий розділ дисертаційної роботи присвячений вивченню зростання характеристик локсодромних мероморфних в $\mathbb{C}^*$ функцій та властивтаостей мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини. Тут знайшли відповідь такі задачі:

- встановлено умови на зростання характеристик локсодромних мероморфних в $\mathbb{C}^*$ функцій;
- введені та вивчені класи $\mathcal{M}_q$ мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини;

- сформульовано та доведено одне твердження типу Карлемана для функцій з $\mathcal{M}_q$;
- вивчений розподіл значень функцій з $\mathcal{M}_q$.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розв'язано низку актуальних задач теорії голоморфних і мероморфних в півсмугах та в зовнішності одиничного круга функцій, які стосуються зростання та розподілу значень таких функцій, а також задач, повязаних з характеристиками зростання локсодромних функцій та розподілом значень мультиплікативно періодичних мероморфних в замиканні верхньої півплощини функцій. Зміст отриманих результатів полягає в наступному:

- доведено лему типу Йенсена-Літтлвуда для мероморфної у замиканні півсмуги функції;
- отримано співвідношення для коефіцієнтів Фур'є логарифма модуля функції мероморфної у замиканні прямокутника $R_\eta = \{\sigma + it : 0 < \sigma \ < \ \eta, \quad 0 < \ t < 2\pi\}$;
- доведені основні властивості характеристики Неванлінни $T(\sigma, f)$ мероморфної у замиканні півсмуги функції;
- отримано критерій належності логарифма модуля функції голоморфної у $\overline{S}$ такої, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, до класу функцій скінченного λ-типу, який визначається деякою функцією зростання λ (додатна, неперервна, необмежена, неспадна);

- описано послідовності нулів голоморфних у $\overline{S}$ функцій з класу Λ_H;
- описано послідовності нулів і полюсів мероморфних у $\overline{S}$ функцій з класу Λ.

Як наслідки отримано:

- аналог теореми Йенсена для мероморфних зовні одиничного круга функцій;
- основні властивості характеристики Неванлінни $T_0(r, F)$ мероморфних зовні одиничного круга функцій;
- рівності для коефіцієнтів Фур'є мероморфної в зовнішності одиничного круга функції;
- критерій скінченності λ-типу для функцій, голоморфних у зовнішності одиничного круга;
- опис послідовностей нулів голоморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга;
- опис послідовностей нулів і полюсів мероморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга.

Крім того, для функцій мероморфних зовні одиничного круга:

- встановлено зв'язок між $T_0(r, F)$ та класичною характеристикою Неванлінни $T(r, F)$ мероморфних функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$;
- розглянуто випадок $T_0(r, F) = O(\log r)$.

Для функцій з класів $\mathcal{L}_q$, $\mathcal{M}_q$:

- досліджено зростання характеристик локсодромних функцій;
- введені та вивчені класи $\mathcal{M}_q$ мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у проколеному замиканні верхньої півплощини;
- сформульовано та доведено одне твердження типу Карлемана для функцій з $\mathcal{M}_q$;
- вивчений розподіл значень функцій з $\mathcal{M}_q$.

В дисертації отримала розв'язок задача розробки методу рядів Фур'є для голоморфних та мероморфних функцій у півсмузі та в околі істотно особливої точки, а також повністю описано послідовності нулів і полюсів функцій скінченного λ-типу в таких областях, введено та вивчено класи $\mathcal{M}_q$ мультиплікативно періодичних мероморфних функцій, вивчені деякі властивості функцій з класу $\mathcal{L}_q$. Результати дисертаційної роботи є теоретичними. Вони можуть знайти застосування у подальших дослідженнях із загальної теорії мероморфних функцій, теорії Неванлінни розподілу значень мероморфних у півсмузі функцій, а також при вивченні властивостей функцій, що мероморфно продовжуються в $\mathbb{C}$, теорії розподілу нулів аналітичних функцій, при вивченні властивостей функцій з класів $\mathcal{L}_q$, $\mathcal{M}_q$. Крім того, ці результати можуть бути включені в спеціальні курси з теорії голоморфних і мероморфних функцій в областях відмінних від круга, площини чи півплощини. Результати роботи також можна застосовувати в наукових дослідженнях, які проводяться у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Національному університеті «Львівська політехніка», Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника, Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка, Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна, Сумському державному університеті, Інституті математики НАН України, Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України. Більшість результатів дисертації є завершеними і носять критеріальний характер. Вони доповнюють відомі раніше результати. При їх доведенні використовувались: метод рядів Фур'є, а також різноманітні методи теорії функцій комплексної змінної, методи математичного аналізу і деякі прийоми з робіт Дж. Літтлвуда, Р. Неванлінни, А.А. Гольдберга, Й.В. Островського, А. А. Кондратюка, І. Лайне, К.Г. Малютіна.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Borel É. Leçons sur les fonctions entières. 2 éd., / É. Borel. – Paris: 1921.

[2] Valiron G. Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes / G. Valiron. - Geneve: 1960.

[3] Cartwright M. L. Integral functions / M. L. Cartwright. - Cambridge University Press, 1956.

[4] Хейман У. К. Мероморфные функции/ У. К. Хейман.– М.: Мир, 1966.

[5] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин – М.: ГИТТЛ, 1956.

[6] Гольдберг А. А. Распределение значений мероморфных функций. / Гольдберг А. А., Островский И. В. – М: Наука, 1970.

[7] Rubel L. A. Entire and meromorphic functions / L. A. Rubel. – New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.

[8] Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции.– Л.: Выща школа, 1988.

[9] Weierstrass K. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen/ K. Weierstrass // - Math. Abh. der Akad. der Wiss. - Berlin. –1876. –P. 11—60.

[10] Hadamard J. Sur les propriétés des fonctions entières et en particulier une fonction étudiée par Riemann / Hadamard J. // J. math, pure appl. – 1893. –V. 9. –P.171—215.

[11] Borel É. Sur les zéros des fonctions entiéres/ É. Borel // Acta Math. – 1897. – V. 20. – P. 357–396.

[12] Lindelöf S. Sur les fonctions entieres d'ordre entier / S. Lindelöf // Ann.Sci. Ecole Normale Sup. –1905. – V. 22. – P. 365-395.

[13] Nevanlinna F. Über die Beziehungen zwischen dem Anwachesen einer analytischen Funktion und der Verteilung ihrer Nullstellen und Pole / F. Nevanlinna. - Proc. of 5-th Cong. des mathématiciens scand. - Helsingfors. - 1922.

[14] Nevanlinna F. Sur les relations qui existent entre la distribution des zéros et des pôles d'une fonction monogène et la croissance de son module / F. Nevanlinna // C.r. Acad. sci. -1922. - V. 175.- P. 676-679.

[15] Carleman T. Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen / T. Carleman // Ark. för Mat., Astr.och Fysik. - 1923. - V. 17, № 9. - P. 1-30.

[16] Nevanlinna R. Über die Eigenschaften meromorphe Funktionen in einem Winkelraum / R. Nevanlinna // Acta Soc. Fenn. –1925. - V. 50, №12. – P.1-45.

[17] Nevanlinna R. Zur Theorie der meromorphen Funktionen./ R. Nevanlinna // Acta math. –1925. – V. 46. – P. 1—99.

[18] Nevanlinna R. Le théorème de Picard—Borel et la théorie des fonctions méromorphes/ R. Nevanlinna. – Paris, 1929.

[19] Nevanlinna R. Remarques sur les fonctions monotones / R. Nevanlinna // Bull. sci. math. – 1931. – v. 55. – P. 140 — 144.

[20] Nevanlinna R. Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion/ R. Nevanlinna. – Verhandl. internat. Mathematiker-Kongr.: Zürich, 1932.

[21] Nevanlinna R. Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten / R. Nevanlinna // Acta math. – 1932. – V. 58. –P. 295—373.

[22] Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции / Р. Неванлинна. - Москва: ОГИЗ ГИТТЛ, 1941.

[23] Rubel L.A. Fourier series method for meromorphic functions / L.A. Rubel, B.A. Taylor // Bull. Soc. Math. France – 1968. – V. 96. – P. 53-96.

[24] Jensen J.L.W.V. Sur un nouvel et important théoréme de la théorie des founctions / Jensen J.L.W.V. // Acta Math. – 1899. – V. 22. – P. 359-364.

[25] Ахієзер Н. І. Новий вивід необхідних умов приналежності цілої функції цілого порядку до певного типу / Н. І. Ахієзер // Запис. фіз.-мат. відділення АН УРСР –1927.– Т. 12.–№ 3–С. 29-33.

[26] Edrei A. Meromorphic functions with several dificient values / A. Edrei, W.H.J. Fuchs // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – V. 93. – P. 252-328.

[27] Azarin V. S. Growth theory of subharmonic functions / V. S. Azarin. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2009.

[28] Miles J. B. An extremal problem in value distribution theory / Miles J.B., Shea D. F. // Quart. J. Math. Oxford - 1973. - V. 24 - P.377-383.

[29] Miles J. B. On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value / Miles J.B., Shea D. F. // Duke. Math. J. - 1976. - V. 43, № 1. - P.171-186.

[30] Гольдберг А. А. Мероморфные функции вполне регулярного роста и их логарифмические производные / А. А. Гольдберг, М. Л. Содин, Н. Н. Строчик// Сиб. мат. журнал–1992.–Т. 33, №1. –С. 44-52.

[31] Miles J. A Fourier series method in value distribution theory / Miles J. // Fourier series Methods in complex analysis (Mekrijärvi, 2005). Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. – 2006. – V. 10. – P. 129-158.

[32] Miles J. On entire functions of finite order with radialli distributed zeroes/ Miles J. // Pacif. J. Math. - 1979. - V. 81, № 1. - P. 131-157.

[33] Kondratyuk A. Meromorphic functions in multiply connected domains, Fourier series method in complex analysis (Merkrijärvi, 2005) / A. Kondratyuk, I. Laine // Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. – 2006. – V. 10. – P. 9-111.

[34] Васильків Я. В. Деякі властивості δ-субгармонійних функцій скінченного λ -типу / Я. В. Васильків // Вісн. Львів. у-ту, Сер. мех.-мат. – 1983. – Т. 21. – С. 14–21.

[35] Васильків Я.В. Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]-$ метриці. Ч.1 // Математичні Студії.- 1999.-Т. 12, №1.-С.37-58.

[36] Васильків Я.В. Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]-$ метриці. Ч.2 // Математичні Студії.- 1999.-Т. 12, №2.-С.135-144.

[37] Bergweiler W. Canonical product of infinite order / W. Bergweiler // J. Reine Angew. Math. – 1992. – V. 430. – P. 85–107.

[38] Bergweiler W. A question of Gol'dberg concerning entire functions with prescribed zeros / W. Bergweiler // J. d'Analyse Math. – 1994. – V. 63. – P. 121–129.

[39] Малютин К. Г. Ряды Фурье и истинно-субгармонические функции конечного $\gamma-$ типа // Малютин К.Г., Коломиец С. В. // Вісник Харківського ун-ту серія "матем., прикладна матем. і мех.". – 2000. – № 475. – С. 105-112.

[40] Малютин К. Г. Ряды Фурье и $\delta-$субгармонические функции конечного $\gamma-$ типа в полуплоскости / Малютин К.Г. // Матем. сборник. – 2001. – Т. 192, № 6. – С. 51-70.

[41] Vynnyts'kyi B.V. Asymptotic properties of holmorphic functions in the half-plane of improved regular growth of order less than one / B.V. Vynnyts'kyi, M. I. Yurkiv // Mat. Stud. – 2008. – V. 30, № 2. – P.173-176.

[42] Littlewood J. E. On the zeros of the Riemann zeta-function/ J. E. Littlewood // Proc. Camb. Philos. Soc. –1924. – V. 22. – P. 295-318.

[43] Townsend D. Comparisons between $T(r, f)$ and total variations of $\arg f(re^{i\theta})$ and $\log |f(re^{i\theta})|$ / D. Townsend // J. Math. Anal. Appl. - 1987. – V. 128 – P. 347-361.

[44] Гольдберг А. А. Асимптотическое поведение мероморфных функций вполне регулярного роста и их логарифмических производных / А. А. Гольдберг, Н. Н. Строчик// Сиб. мат. журнал.– 1985.–Т. 26, №6. –С. 29-38.

[45] Гольдберг А. А. О представлении мероморфных функций в виде частного целых функций / А. А. Гольдберг // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 10. – С. 13–17.

[46] Василькив Я. В. Исследование асимптотических свойств целых и субгармонических функций методом рядов Фурье: дис. ... канд.физ.-мат. наук: 01.01.01 / Василькив Ярослав Владимирович. – Львов, 1986. – 129 с.

[47] Noverraz P. Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes / P. Noverraz // Ann. Inst. Fourier. – 1969. – Vol. 19, № 2. – P. 419–493.

[48] Kondratyuk A. A. Growth majorants and quotient representations of meromorphic functions / A. A. Kondratyuk, Ya. V. Vasyl'kiv // Comput. Meth. and Function Theory – 2001. – V. 1, № 2. – P. 595-606.

[49] Малютин К. Г. Ряды Фурье и δ-субгармонические функции / К. Г. Малютин // Труды ИППММ НАН Украины. – 1998. – Т. 3. – С. 146–157.

[50] Кондратюк А. А. О методе сферических гармоник для субгармонических функций / А. А. Кондратюк // Мат. сб. – 1981. – Т. 116, № 2. – С. 147–165.

[51] Кондратюк А. А. Сферические гармоники и субгармонические функции / А. А. Кондратюк // Мат. сб. – 1984. – Т. 125, № 2. – С. 147–166.

[52] Gnatiuk O. P. Subharmonic functions and electric fields in ball layers. I / O. P. Gnatiuk, A. A. Kondratyuk // Mat. Stud. – 2010. – V. 34, № 2. – P. 180–192.

[53] Gnatiuk O. P. Subharmonic functions and electric fields in ball layers. II / O. P. Gnatiuk, A. A. Kondratyuk // Mat. Stud. – 2011. – V. 35, № 1. – P. 50–59.

[54] Хабибуллин Б. Н. Рост целых функций с заданными нулями и представления мероморфных функций / Б. Н. Хабибуллин // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73, № 1. – С. 120–134.

[55] Процик Ю. С. Субгармонійні функції скінченного (γ, ε)-типу / Ю. С. Процик // Мат. Студ. – 2005. – Т. 24, № 1. – С. 39–56.

[56] Protsyk Yu. S. On growth majorants of subharmonic functions / Yu. S. Protsyk, Ya. V. Vasyl'kiv // Mat. Stud. – 2011. – V. 36, № 1. – P. 73–76.

[57] Oğuztöreli N. Exetension de la théorie de Nevanlinna aux domaines multiplement connexes / N. Oğuztöreli // Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul. -1953.- Sér A18., № 4. - P. 384-419.

[58] Oğuztöreli N. Représentations intégrales de la fonction caractéristique, de la fonction de nombre et de la forme sphérique normale généralisée et extension d'unthéorème de Borel / N. Oğuztöreli // Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul. -1953.- Sér A19., № 2. - P. 79-85.

[59] Wittich H. Defecte Werte eindeutiger analytischer Functionen / H. Wittich // Arch. Math. – 1958. – V. 9, № 1. – P. 65-74.

[60] Mathevossian H. H. On a factorisation of meromorphic function in multiply conected domain and some of its applications / H. H. Mathevossian // Izv. Akad. Nauk Arm. SSR IX. – 1974. – № 5. – P. 387-408.

[61] Korhonen R. Nevanlinna theory in an annulus / R. Korhonen // Boston - Dordrecht - New Yok - London. - Kluwer Academic Publishers, 2004.

[62] Khrystiyanyn A. Ya. On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I / Khrystiyanyn A. Ya., Kondratyuk A. A. // Matematychni studii. - 2005. - V. 23, № 1. - P. 19-30.

[63] Khrystiyanyn A. Ya. On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. II / Khrystiyanyn A. Ya., Kondratyuk A. A. // Mat. Stud. - 2005. - V. 24, № 2. - P. 57-68.

[64] Бридун А. М. Характеристика і перша основна теорема Неванлінни для мероморфних в півсмузі функцій / Бридун А. М. // Вісник ЛНУ серія мех.-мат. - 2004. -Вип. 63. - С. 32-43.

[65] Бридун А. М. Голоморфні функції скінченного λ-типу в півсмузі / Бридун А. М. // Вісник ЛНУ серія мех.-мат. - 2007. - Вип. 67. - С. 14-29.

[66] Cartan H. Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables, et ses applications aux fonctions méromeromorphes d'une variable / H. Cartan // C. R. Acad. Sci. Paris. 1929. – V. 189.– P. 521-523

[67] Rausenberger O. Lehrbuch der Theorie der Periodischen Functionen einer Variablen / O. Rausenberger. - Leipzig: Druck und Ferlag von B.G.Teubner, 1884.

[68] Valiron G. Cours d'Analyse Mathematique. Theorie des fonctions. 3nd Edition / G. Valiron. - Paris: Masson et.Cie., 1966.

[69] Hellegouarch Y. Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles / Y. Hellegouarch. - Academic Press, 2002.

[70] Crowdy D.G. Geometric function theory: a modern view of a classical subject / D.G.Crowdy // IOP Pablishing Ltd and London Mathematical Society, Nonlinearity. - 2008. - V. 21. - T205-T219.

[71] Crowdy D.G. Exact solutions on Steady Capillary Waves on a Fluid Annulus / D.G.Crowdy // J.Nonlinear Sci. - 1999. - V. 9. - P. 615-640.

[72] Richardson S. Hele-Shaw flaws with time dependent free boundaries involving a concentric annulus / S. Richardson // Philosophical Transactions: Mathemetical, Physical and Engeneering Sciences. - 1996. - V. 354, №1718. - 2513-2553.

[73] Kondratyuk A. A. Loxodromic meromorphic and δ-subharmonic functions / A. A. Kondratyuk // Proceedings of the Workshop on complex Analysis and its Applications to Differential and Functional Equations. In the honour of ILpo Laine's 70th birthday. Publ. of the Univ. of Eastern Finland. Roports and Studies in Forestry and Natural Sciences. - 2014. - №14. - P. 91-99.

[74] Кондратюк А. А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста / А. А. Кондратюк // Матем. сб. – 1978. – Т. 106, №3. – С. 386–408.

[75] Кондратюк А. А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста II / А. А. Кондратюк // Матем. сб. – 1980. – Т. 113, №1. – С. 118–132.

[76] Кондратюк А. А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста III / А. А. Кондратюк // Матем. сб. – 1983. – Т. 120, №3. – С. 331–343.

[77] Калинець Р. З. Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p[0,2\pi]-$ метриці / Калинець Р.З., Кондратюк А.А. // Укр. мат. ж. – 1998. – Т. 50, №7. – С. 889-896.

[78] Гришин А. Ф. Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций / Гришин А. Ф.// Матем. физика, анализ, геом. – 1994. – №1. – С.193-215.

[79] Гришин А. Ф. Непрерывность и асимтотическая непрерывность субгармонических функций / А. Ф. Гришин // Матем. физика, анализ, геом. – 1995. – Т. 2, №2. – С. 177–193.

[80] Grishin A. F. Some questions of the Nevanlinna theory for the complex half-plane / Grishin A. F., Fedorov M. A. // Mat. Fiz., Anal., Geom. – 1998. – V. 1, № 3. – P. 223-371.

[81] Козлова І. В. Метод рядів Фур'є для субгармонійних у півплощині функцій: дис. на здобуття звання канд .фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Козлова І. В. – Івано-Франківськ, 2014. – 140 с.

[82] Khabibullin B. N. The representation of meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in Cn: survey of some results / B. N. Khabibullin // Mat. Fiz. Anal. Geom. – 2002. – V. 9, №2. – P. 146–167.

[83] Khrystiyanyn A. Ya. One criterion of $\gamma-$type finiteness of analytic in a half-plane function / Khrystiyanyn A. Ya. // Mat. Stud. - 2004.- V. 21, № 2. - P. 151 - 169.

[84] Brydun A. M. On the Fourier series of the zeta-function logarithm on the vertical lines/ Brydun A. M., Kondratyuk A. A. // Mat. Stud. - 2004. - V. 21, № 1. - P. 97-104.

[85] Хейман У. Субгармонические функции/ У. Хейман, П. Кеннеди. –М. Издат. Мир, 1980.

[86] Бридун А. М. Опуклі, гармонійні та субгармонійні функції. Задачі і теореми./ Бридун А.М., Бродяк О.Я., Васильків Я.В., Христіянин А.Я. – Львів: Видавницто ЛНУ ім. І. Франка, 2011.

[87] Klein F. Zur Theorie der Abel'schen Functionen / Klein F. // Math. Ann. - 1890. - V. 36. - P. 1-83.

[88] Schottky F. Über eine specielle Function welche bei einer bestimmten linearen Transformationihres Arguments unverändert bleibt J. / Schottky F. // Reine Angew. Math. - 1887. - V. 101. - P. 227-272.

[89] Khrystiyanyn A. Ya. Growth characteristics of loxodromic and elliptic functions/ Khrystiyanyn A. Ya., Kondratyuk A. A., Sokul's'ka N. B.//Mat. Stud. – 2012. – V. 37, №1. – P. 52–57.

[90] Сокульська Н.Б. Мероморфні функції скінченного λ-типу у півсмузі/ Сокульська Н.Б. // Карпатські математичні публікації.– 2012.–Т.4, № 2.– С.328-339.

[91] Sokulska N.B. Description of zero sequences for holomorphic and meromorphic functions of finite λ-type in a closed half-strip / Sokulska N. B.// Ufa Math. Journ. – 2012. – V. 6, №2. – P. 123-127.

[92] Сокульська Н. Зростання і розподіл нулів і полюсів мероморфної функції в околі істотно особливої точки/ Н. Сокульська // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2014. – Вип. 79. – С. 134-147.

[93] Khoroshchak V. S. Multiplicatively periodic meromorphic functions in the upper halfplane / V. S. Khoroshchak, N. B. Sokulska // Mat. Stud.– 2014. – V. 42, № 2. – P. 143–148.

[94] Сокульська Н. Б. Мероморфні у півсмузі функції скінченного λ-типу/Сокульська Н. Б. // Тези доповідей/ Всеукраїнська наукова конференція, Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Ворохта 20-26 лютого 2012 року, Івано-Франківськ, 2012, С. 57.

[95] Сокульська Н. Б. Опис множин нулів голоморфних та мероморфних у півсмузі функцій скінченного λ-типу/ Н. Б. Сокульська // Abstracts of Reports/ International Conference on Functional Analysis and its Applications, Dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, Lviv, September 17–21, 2012, P. 173-174.

[96] Кондратюк А. А. Зростання та розподіл нулів і полюсів мероморфної функції в околі істотно особливої точки / Кондратюк А. А., Сокульська Н. Б. // Тези доповідей/ Всеукраїнська наукова конференція, Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Ворохта 25 лютого - 3 березня 2013 року, Івано-Франківськ, 2013, С. 57.

[97] Sokulska N. Description of zero and pole sequences of holomorphic and meromorphic function of finite λ-type near an essential singulsrity / N. Sokulska // Abstracts of Reports/ International Conference Complex Analysis and Related Topics, Lviv, September 23–28, 2013, P. 81-82.

[98] Sokulska N. B. The value distribution of multiplicatively periodic meromorphic function in the upper halfplane / Sokulska N. B. // Тези доповідей/ Всеукраїнська наукова конференція, Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Ворохта 24 лютого - 2 березня 2014 року, Івано-Франківськ, 2014, С. 90-91.

[99] Сокульська Н. Б. Розподіл значень мультиплікативно періодичних мероморфних функцій у верхній півплощині / Сокульська Н. Б., Хорощак В. С. // Тези доповідей/ Всеукраїнська наукова конференція, Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Ворохта 25 лютого - 1 березня 2015 року, Івано-Франківськ, 2015, С. 73-74.