ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Стець Юлія Василівна

УДК 517.537

АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Шеремета Мирослав Миколайович,
доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри теорії
функцій і теорії ймовірностей

ЛЬВІВ – 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $\Lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел.
- $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n).
- $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it$ – ряд Діріхле.
- $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$ – абсциса абсолютної збіжності.
- $S(\Lambda, A)$ – клас рядів Діріхле $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it$ з абсцисою абсолютної збіжності A.
- $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ – максимум модуля.
- $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geq 0\}$ – максимальний член.
- $\nu(\sigma, F) = \max\{n \geq 0 : |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс.
- $\Omega(A)$ – клас додатних і необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що їх похідні Φ' є невід'ємними, неперервними і зростаючими до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функціями.
- $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном.
- φ – функція, обернена до Φ', $\Phi \in \Omega(A)$.
- $G_1(a, b, \Phi) = \dfrac{ab}{b - a} \displaystyle\int_a^b \dfrac{\Phi(\varphi(t))}{t^2} dt$.
- $G_2(a, b, \Phi) = \Phi\left(\frac{1}{b - a} \int_a^b \varphi(t) dt\right)$.
- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad z = re^{i\varphi}$ – ціла функція, задана лакунарним рядом, де $\lambda_0 = 0, \lambda_n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n < \lambda_{n+1} (n \geq 0)$.

- $\varrho = \varlimsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$ – порядок функції f.
- $\lambda = \varliminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$ – нижній порядок функції f.
- $\mathbb{D}_R = \{z : |z| = 1\}$ – одиничне коло.
- $\varrho^0 = \varlimsup\limits_{r\uparrow 1} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}$ – порядок аналітичної в $\mathbb{D}_R$ функції f.
- $\lambda^0 = \varliminf\limits_{r\uparrow 1} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}$ – нижній порядок аналітичної в $\mathbb{D}_R$ функції f.
- $\varrho_R = \varlimsup\limits_{\sigma\to\infty} \dfrac{\ln\ln M(\sigma, F)}{\sigma}$ – R-порядок цілого ряду Діріхле.
- $\lambda_R = \varliminf\limits_{\sigma\to\infty} \dfrac{\ln\ln M(\sigma, F)}{\sigma}$ – нижній R-порядок цілого ряду Діріхле.
- $\varrho^0 = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} \dfrac{\ln\ln M(\sigma, F)}{-\ln|\sigma|}$ – порядок ряду Діріхле з $\sigma_a = 0$.
- $\lambda^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} \dfrac{\ln\ln M(\sigma, F)}{-\ln|\sigma|}$ – нижній порядок ряду Діріхле з $\sigma_a = 0$.
- $\varrho_R^0 = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ – R-порядок ряду Діріхле з $\sigma_a = 0$.
- $\lambda_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F)$ – нижній R-порядок ряду Діріхле з $\sigma_a = 0$.
- $T_R = \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{-\dfrac{\varrho_R}{|\sigma|}\right\} \ln\ M(\sigma, F)$ – R-тип ряду Діріхле з $\sigma_a = 0$, за умови, що $0 < \varrho_R < \infty$.
- $t_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{-\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\} \ln\ M(\sigma, F)$ – нижній R-тип ряду Діріхле з $\sigma_a = 0$.

Крім наведеного переліку умовних позначень, у відповідних розділах вводимо деякі додаткові позначення.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Актуальність теми. Ряди Діріхле з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками є безпосереднім узагальненням степеневих рядів. Їх роль як у математичному аналізі, так у теорії чисел, теорії диференціальних рівнянь та інших розділах сучасної математики добре відома. У другій половині минулого століття зацікавленість рядами Діріхле зросла завдяки дослідженням російських математиків А.Ф. Леонтьєва, Ю.Ф. Коробейника та їх учнів про зображення аналітичних функцій рядами Діріхле та їх узагальненнями.

Дещо інший напрямок досліджень властивостей аналітичних функцій, зображених рядами Діріхле, розробляється львівськими математиками М.М. Шереметою, Б.В. Винницьким, О.Б. Скасківим, М.В. Заболоцьким, П.В. Філевичем та іншими.

Зростання ряду Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності σ_a здебільшого ототожнюють зі зростанням максимум модуля $M(\sigma)$ його суми на вертикальній прямій з абсцисою $\sigma < \sigma_a$. Знаходження зв'язку між зростанням $M(\sigma)$ і поводженням коефіцієнтів ряду Діріхле здійснюється у два етапи. Спочатку знаходиться зв'язок між зростанням максимального члена ряду Діріхле і поводженням коефіцієнтів, а потім з огляду на нерівність Коші $\mu(\sigma) \leq M(\sigma)$ знаходяться оцінки $M(\sigma)$ через $\mu(\sigma)$ зверху.

Ще у 1903 р. Е. Ліндельоф вказав умови на тейлорові коефіцієнти цілої функції, за яких її порядок дорівнює нижньому порядку, а тип дорівнює нижньому типу. Для випадку цілих функцій експоненціального типу результат Е. Ліндельофа був перевідкритий М.В. Говоровим і Н.М. Черних [9]. М.М. Шеремета та М.В. Заболоцький [11], узагальнюючи теорему Е. Ліндельофа, знайшли умови на коефіцієнти і показники ряду Діріхле, за яких $\ln \mu(\sigma) \sim \Phi(\sigma)$ при $\sigma \uparrow \sigma_a$, де Φ - задана на $(-\infty, \sigma_a)$ опукла функція. Трохи пізніше М.М. Шеремета та О.М. Сумик [75] вказали умови, за яких $\Phi_1(\sigma) \le \ln\mu(\sigma) \le \Phi_2(\sigma)$, де $\Phi_1(\sigma)$ і $\Phi_2(\sigma)$ – задані опуклі функції.

Зв'язок між зростанням $\ln M(\sigma)$ і $\ln\mu(\sigma)$ досліджували багато авторів. В термінах функції порівняння $\Phi(\sigma)$ найзагальніший результат отримав М.М. Шеремета, який вказав необхідну і достатню умову на показники для того, щоб для кожного ряду Діріхле з фіксованою послідовністю показників з нерівності $\ln\mu(\sigma) \le \Phi(\sigma)$ випливала нерівність $\ln M(\sigma) \le \Phi(\sigma) + \Phi_1(\sigma)$, де $\Phi_1(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$ при $\sigma \uparrow \sigma_a$. У зв'язку з цим результатом виникла актуальна проблема опису асимптотичного поводження функції $\Phi_1(\sigma)$, розв'язанням якої стало отримання оцінок зверху і знизу суми ряду Діріхле з невід'ємними коефіцієнтами.

У теорії цілих функцій зусиллями харківських математиків з'явився новий напрямок - дослідження властивостей основних характеристик у термінах спочатку двохчленної, а потім багаточленної асимптотики. М.М. Шеремета вперше подібну задачу розв'язав для цілих рядів Діріхле. Спочатку він [50] для цілих рядів Діріхле у термінах двохчленної степеневої асимптотики встановив зв'язок між зростанням $\mu(\sigma)$ і спаданням коефіцієнтів, а потім в [68] - між зростанням $M(\sigma)$ і $\mu(\sigma)$. О.М Сумик у термінах двохчленних степеневих асимптотик вказала зв'язок між зростанням $\ln\mu(\sigma)$ і поводженням коефіцієнтів як для цілих рядів Діріхле, так і для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності. Також О.М. Сумик [74] і М.М. Гриців [10] вивчили багаточленну асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле у термінах n-членної показникової асимптотики для $n \ge 3$. Тричленну степеневу асимптотику $\ln\mu(\sigma)$ для цілих рядів Діріхле дослідили М.М. Шеремета і Л.Л. Лугова [14]. Залишилась відкритою актуальна задача про зв'язок між зростанням і поводженням коефіцієнтів рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності у термінах багаточленної і зокрема тричленної степеневої асимптотики.

Для цілої функції порядку ρ і нижнього порядку λ, задану лакунарним степеневим рядом зі степенями λ_n, Дж. Уіттекер довів, що $\lambda \le \varrho\beta$, де $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\lambda_n}{\ln\lambda_{n+1}}$. Л. Сонс [72] зробила спробу довести, що для аналітичних в одиничному крузі функцій порядку ρ^0 і нижнього порядку λ^0 правильна оцінка $\lambda^0+1 \leq (\varrho^0+1)\beta$. Як виявилось, міркування Л. Сонс були помилковими і правильним є повний аналог нерівності Уіттекера $\lambda^0 \leq \varrho^0\beta$. П.В. Філевич і М.М. Шеремета [34] перенесли ці результати на цілі ряди Діріхле скінченного R-порядку і абсолютно збіжні ряди логарифмічного порядку. З іншого боку, А.М. Гайсин [5] для характеристики зростання рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності ввів так званий R-порядок. Тому актуальною стала проблема отримати аналоги теореми Е. Ліндельофа і нерівності Дж. Уіттекера для абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле скінченного R-порядку за Гайсиним.

Зв'язок роботи з науковими програмами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Матеріал дисертації є складовою частиною держбюджетних тем: Мг–159 Ф "Методи комплекного та гармонійного аналізу в теорії аналітичних функцій у банахових просторах"(номер держреєстрації 0113 U 000184), Мг–145 Ф "Нові комплексно-ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами"(номер держреєстрації 0113 U 003051).

Мета і завдання досліджень. Метою є:
- для рядів Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності і додатними коефіцієнтами отримати оцінки знизу і зверху їхніх сум;
- застосувати отримані оцінки до встановлення зв'язку між зростанням логарифмів максимума модуля і максимального члена у термінах функції порівняння;
- в термінах багаточленної (зокрема тричленної) степеневої асимптотики встановити зв'язок між зростанням логарифмів максимуму модуля та максимального члена і поводженням коефіцієнтів рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності;
- для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності скінченного R-порядку за Гайсиним отримати аналоги теореми Ліндельофа і нерівності Уіттекера.

Об'єктом дослідження є ряди Діріхле з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками.

Предметом дослідження є оцінки суми ряду Діріхле, багаточленна степенева асимптотика ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, регулярність зростання таких рядів скінченного R-порядку за Гайсиним.

Методи дослідження. Для розв'язання цих задач використовуються методи математичного аналізу і результати М.М. Шеремети та О.М. Сумик.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації є новими. У роботі вперше:
- отримано нові оцінки зверху та знизу ряду Діріхле з додатними коефіцієнтами, за допомогою яких отримано непокращувані результати про співвідношення між зростанням максимума модуля, максимального члена і поводженням коефіцієнтів;
- у термінах багаточленної (зокрема, тричленної) степеневої асимптотики встановлено зв'язок між зростанням максимуму модуля і максимального члена і поводженням коефіцієнтів ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності;
- для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності скінченного R-порядку за Гайсиним отримано аналоги теореми Ліндельофа і нерівності Уіттекера.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретичний характер. Її результати є внеском в теорію рядів Діріхле і можуть бути використані як у загальній теорії аналітичних функцій, так і в інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Наведені результати отримано самостійно. У спільних з науковим керівником [78-81],[83] статтях співавтору належить постановка задач та загальне керівництво. Зі спільної [79-80] з О.М. Сумик статті, отримані співавтором результати у дисертацію не увійшли.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на міжнародній науковій конференції ім. В. Я. Скоробагатька (19-23 вересня, 2011 р., Дрогобич); міжнародній науковій математичній конференції присвяченій 120-річчю з дня народження Стефана Банаха (17-21 вересня, 2012 р., Львів); міжнародній науковій конференції "Complex Analysis and Related Topics"(Lviv, Ukraine, September 23-28, 2013); IV міжнародній конференції присвячена пам'яті Ганса Гана (1879-1934) (30 червня – 5 липня, 2014 р., Чернівці); науковій конференції присвяченій 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (1-4 липня, 2015, Чернівці); міжнародній математичній конференції присвяченій пам'яті В.Я. Скоробагатька (25-28 серпня, 2015, Дрогобич); львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. А. А. Кондратюк і проф. О. Б. Скасків), семінарі з теорії потенціалу та його застосувань у Львівському національному університеті ім. Івана Франка (керівники проф. О. Б. Скасків і проф. І. Е. Чижиков), науковому семінарі з теорії аналітичних функцій у Прикарпатському державному університеті ім. В. Стефаника (керівник проф. П.В. Філевич).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 12 статтях та науковних повідомленнях, з яких 6 опубліковано у фахових виданнях.

Структура і об'єм дисертації Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, який налічує 89 найменувань. Загальний обсяг дисертації - 160 сторінок, обсяг списку використаних джерел - 10 сторінок.

1.1. Огляд літератури та напрямки досліджень.

Нехай f — ціла трансцендентна функція, а $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Е.Ліндельоф [62] вказав умови на тейлорові коефіцієнти функції f, за яких правильне співвідношення $\ln M_f(r) = (1 + o(1))\tau r^{\varrho}$ $(r \to +\infty)$, де $\varrho \in (0, +\infty)$, $\tau \in (0, +\infty)$. Цей результат для функцій експоненційного типу був перевідкритий М.В.Говоровим та Н.М.Черних [9].

Безпосереднім узагальненням степеневого розвинення аналітичної функції є ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1.1}$$

де $\Lambda = (\lambda_n)$ - зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$). Клас рядів Діріхле вигляду (1.1) з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$ позначимо $S(\Lambda, A)$, і через $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$ позначимо лічильну функцію послідовності (λ_n). Якщо абсциса абсолютної збіжності ряду (1.1) дорівнює $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$, то його зростання ототожнють зі зростанням функції $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ при $\sigma \uparrow A$. Важливу роль у дослідженні зв'язку між зростанням $M(\sigma, F)$ і поводженням коефіцієнтів відіграє дослідження поводження максимального члена $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \ge 0\}$.

Позначимо через $\Omega(A)$ клас додатних і необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що їх похідні Φ' є невід'ємними, неперервними і зростаючими до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функціями. Для $\Phi \in \Omega(A)$ через φ позначимо функцію, обернену до Φ', і нехай $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді функція Ψ неперервно диференційовна і зростає до A на $(-\infty, A)$, а функція φ неперервно диференційовна і зростає до A на $(0, +\infty)$. Звідси випливає, що і обернена до Ψ функція Ψ^{-1} також зростає до A на $(-\infty, A)$. Для цілих ($A = +\infty$) рядів Діріхле (1.1) у 1998 році М.М. Шеремета та М.В. Заболоцький [11], узагальнюючи теорему Е.Ліндельофа, показали, що для цілого ряду Діріхле і функції $\Phi \in \Omega(+\infty)$ правильна така теорема.

Теорема 1.1. *Для того, щоб $\ln \mu(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$ при $\sigma \to +\infty$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$:*

1) існувало $n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n \ge n_o(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \le -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n/(1+\varepsilon)));$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln |a_{n_k}| \ge -\lambda_{n_k} \Psi(\varphi(\lambda_{n_k}/(1-\varepsilon)))$$

і

$$\lim_{k\to\infty}\frac{G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)}{G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)}=1,$$

де

$$G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)=\frac{\lambda_{n_k}\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}\int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}}\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt,$$

$$G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)=\Phi\left(\frac{1}{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}\int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}}\varphi(t)dt\right).$$

Я.Я. Притула [18] подібну задачу розв'язав для рядів Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності ($\sigma_a\neq-\infty$).

Дослідження зв'язків між зростанням $\ln\mu(\sigma,F)$ і поводженням у термінах двочленної показникової асимтотики коефіцієнтів започатковано М.М. Шереметою [50], де вказано необхідну і достатню умови на a_n, за якої у випадку цілих ($A=+\infty$) рядів Діріхле $\ln\mu(\sigma,F)$ має двочленну показникову асимптотику.

Теорема 1.2. *Нехай $F\in S(\Lambda,+\infty)$. Для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma,F)=T_R\exp\{\varrho_R\sigma\}+(T+o(1))\exp\{\varrho\sigma\}\quad(\sigma\to+\infty),$$

$$0<\varrho<\varrho_R<+\infty,\quad T_R>0,\quad T\in\mathbb{R},$$

необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:

1) існувало $n_o=n_o(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n\geq n_o$

$$\ln|a_n|\leq-\frac{\lambda_n}{\varrho_R}\ln\frac{\lambda_n}{e\varrho_RT_R}+(T+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{\varrho_RT_R}\right)^{\varrho/\varrho_R};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}|\geq-\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_R}\ln\frac{\lambda_{n_k}}{e\varrho_RT_R}+(T-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_RT_R}\right)^{\varrho/\varrho_R}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o(\lambda_{n_k}^{\alpha})\quad(k\to\infty),\quad\alpha=\frac{\varrho+\varrho_R}{2\varrho_R}.$$

О.М. Сумик подібну задачу розв'язала для двочленної степеневої асимптотики $\ln\mu(\sigma,F)$ як для цілих рядів Діріхле, так і для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності. Зокрема, в [75] вона довела таку теорему.

Теорема 1.3. *Для того, щоб для $\ln\mu(\sigma,F)$ ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності була правильна асимптотична рівність*

$$\ln\mu(\sigma,F)=T_1/|\sigma|^{\rho_1}+\tau(1+o(1))/|\sigma|^{\rho}$$

при $\sigma\uparrow 0$, де $0<\rho<\rho_1<+\infty$, $T>0$ і $\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n\geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n|\leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $\ln|a_{n_k}|\geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+(\tau-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}$ для всіх $k\geq k_0$ і

$$\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho+\rho_1+2}{2(\rho_1+1)}}\right)\quad k\to\infty.$$

Для цілих рядів Діріхле скінченного логарифмічного R - порядку правильний наступний результат О.М. Сумик.

Теорема 1.4. *Нехай $F\in S(\Lambda,+\infty)$. Для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma,F)=T\sigma^p+(\tau+o(1))\sigma^{p_1}\quad(\sigma\to+\infty),$$

де $T\in(0,+\infty)$, $1<p<+\infty$, $0<p_1<p$ і $\tau\in\mathbb{R}$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon>0$:

1) існувало $n_o=n_o(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n\geq n_o$

$$\ln|a_n|\leq-(p-1)T\left(\frac{\lambda_n}{Tp}\right)^{\frac{p}{p-1}}+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{Tp}\right)^{\frac{p_1}{p-1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}|\geq-(p-1)T\left(\frac{\lambda_{n_k}}{Tp}\right)^{\frac{p}{p-1}}+(\tau-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{Tp}\right)^{\frac{p_1}{p-1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o(\lambda_{n_{k+1}}^{\alpha}) \quad (k \to \infty), \quad \alpha = \frac{p + p_1 - 2}{2(p-1)}.$$

Цей результат для випадку $\lambda_n \equiv n$ (тобто для степеневих розвинень цілих функцій) був отриманий Р.І. Тарасюком [31], а у поданому вигляді міститься у дисертації О.М. Сумик.

Загальну проблему про багаточленну показникову асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле розглянула О.М. Сумик [74]. Вона довела наступну теорему.

Теорема 1.5. *Нехай $F \in S(\Lambda, +\infty)$. Для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma, F) = \sum_{j=1}^{m-1} T_j \exp\{\varrho_j \sigma\} + (\tau + o(1)) \exp\{\varrho_m \sigma\} \quad (\sigma \to +\infty), \quad m \geq 2,$$

де $0 < \varrho_m < \cdots < \varrho_2 < \varrho_1 < +\infty$, $\varrho_2 < \dfrac{\varrho_1 + \varrho_m}{2}$, $T_1 > 0$, $T_j \in \mathbb{R}$ $(j = 2, \dots, m-1)$, $\tau \in \mathbb{R}$, *необхідно і достатньо, щоб для будь - якого* $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n_o = n_o(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $n \geq n_o$

$$\ln |a_n| \leq -\frac{\lambda_n}{\varrho_1} \ln \frac{\lambda_n}{eT_1\varrho_1} + \sum_{j=2}^{n-1} T_j \left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_j}{\varrho_1}} + (\tau + \varepsilon) \left(\frac{\lambda_n}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_m}{\varrho_1}};$$

2) існувала зростаюча до $+\infty$ послідовність (n_k) додатних чисел така, що

$$\ln |a_{n_k}| \geq -\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho_1} \ln \frac{\lambda_{n_k}}{eT_1\varrho_1} + \sum_{j=2}^{m-1} T_j \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_j}{\varrho_1}} + (\tau - \varepsilon) \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\varrho_1}\right)^{\frac{\varrho_m}{\varrho_1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o(\lambda_{n_k}^{\alpha}) \quad (k \to \infty), \quad \alpha = \frac{\varrho_1 + \varrho_m}{2\varrho_1}.$$

Умова $\varrho_2 < (\varrho_1 + \varrho_m)/2$ у теоремі 1.5 є істотною. Це випливає з результатів досліджень М.М. Гриціва [10], який вивчив зв'язок між зростанням $\ln \mu(\sigma, F)$ і спаданням коефіцієнтів у термінах тричленної степеневої асимптотики.

Зв'язок між зростанням максимального члена і поводженням коефіцієнтів цілого ряду Діріхле у термінах тричленної степеневої асимптотики досліджували М.М. Шеремета і Л.Л. Лугова. Основним їх результатом є така теорема.

Теорема 1.6. *Нехай* $F \in S(\Lambda, +\infty)$, $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $T_1 > 0$,$T_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *і* $\tau^* = \tau I_{\{\rho:\rho \geq 2\rho_2 - \rho_1\}}(\rho) - \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} I_{\{\rho:\rho \leq 2\rho_2 - \rho_1\}}(\rho)$, *де* $I_E(\rho)$ *- характеристична функція множини* E. *Тоді для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma, F) = T_1 \sigma_1^p + T_2 \sigma_2^p + (\tau + o(1))\sigma^p \quad (\sigma \to +\infty)$$

необхідно, а у випадку, коли $p \geq 2p_2 - p_1$, *і досить, щоб для кожного* $\varepsilon > 0:$

1) існувало $n_o = n_o(\varepsilon) > 0$ *таке, що для всіх* $n \geq n_o$

$$\ln |a_n| \leq -T_1(p_1-1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}} + (\tau^*+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1}\right)^{\frac{\max\{p, 2p_2-p_1\}}{p_1-1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln |a_{n_k}| \geq -T_1(p_1-1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}} + (\tau^*-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1 p_1}\right)^{\frac{\max\{p, 2p_2-p_1\}}{p_1-1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o(\lambda_{n_{k+1}}^{\frac{p_1+\max\{p,2p_2-p_1\}-2}{2(p_1-1)}}) \quad (k \to \infty).$$

Для рядів з нульовою абсцисою абсолютної збіжності О.М. Сумик [75] довела наступну теорему.

Теорема 1.7. *Для того, щоб для ряду Діріхле (1.1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності правильною була асимптотична рівність*

$$\ln \mu(\sigma, F) = \frac{T}{|\sigma|^p} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^q}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

де $1 < p < +\infty$, $0 < q < p$, $T > 0$ *і* $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *необхідно і досить, щоб для кожного* $\varepsilon > 0:$

1) існувало $n_o = n_o(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $n \geq n_o$

$$\ln|a_n| \leq T(p+1)\left(\frac{\lambda_n}{Tp}\right)^{\frac{p}{p+1}} + (\tau+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{Tp}\right)^{\frac{q}{p+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \geq T(p+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{Tp}\right)^{\frac{p}{p+1}} + (\tau-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{Tp}\right)^{\frac{q}{p+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o(\lambda_{n_{k+1}}^{\alpha}) \quad (k \to \infty), \quad \alpha = \frac{p+q+2}{2(p+1)}.$$

Під впливом цієї теореми з огляду на результати О.М. Сумик, М.М. Гриціва і Л.Л. Лугової виникає напрямок досліджень зв'язку між зростанням максимального члена і поводженням коефіцієнтів ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності у термінах n-членної степеневої асимптотики з $n \geq 3$.

У доведеннях теорем 1.4 - 1.7 про багаточленну асимптотику використано такі твердження.

Теорема 1.8 ([56,75]). *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega(A)$ і ряд Діріхле (1.1) має абсциссу абсолютної збіжності A. Для того, щоб $\ln\mu(\sigma,F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma < A$ необхідно і досить, щоб $\ln|a_n| \leq -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geq 0$.*

Лема 1.1 ([11, 75]). *Для кожної $\Phi \in \Omega(A)$ ($A = 0$ або $A = +\infty$) і додатних чисел $a < b$ правильна нерівність $G_1(a,b,\Phi) < G_2(a,b,\Phi)$, де*

$$G_1(a,b,\Phi) = \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt, \quad G_2(a,b,\Phi) = \Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)dt\right).$$

Теорема 1.9 ([75]). *Нехай $\Phi_j \in \Omega(A)$ ($A = 0$ або $A = +\infty$) ($j = 1,2$) і*

$$\Phi_1(\sigma) \leq \ln\mu(\sigma,F) \leq \Phi_2(\sigma) \tag{1.2}$$

для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$. Тоді

$$\ln|a_n| \leq -\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) \tag{1.3}$$

для всіх $n \geq n_0$ *та існує зростаюча послідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln |a_{n_k}| \geq -\lambda_{n_k} \Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) \tag{1.4}$$

і

$$G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \geq \Phi_1\biggl(\frac{1}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}} \varphi_2(t)dt\biggr). \tag{1.5}$$

Теорема 1.10 (**[75]**). *Нехай* $\Phi \in \Omega(A)$ *(*$A = 0$ *або* $A = +\infty$*) і* $\ln |a_{n_k}| \leq -\lambda_{n_k} \Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$ *для деякої зростаючої послідовності* (n_k) *натуральних чисел. Тоді для всіх* $\sigma \in [\varphi_1(\lambda_{n_k}), \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ *і всіх* $k \geq k_0$ *правильна нерівність*

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq \Phi_1(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi) - G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)). \tag{1.6}$$

Зв'язок між $\ln \mu(\sigma, F)$ і $\ln M(\sigma, F)$ у термінах двочленної показникової асимптотики встановлено у праці Шеремети М.М. [69], де доведено наступну теорему.

Теорема 1.11. *Нехай* $F \in S(\Lambda, +\infty)$. *Для того, щоб співвідношення*

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq T_R \exp\{\varrho_R \sigma\} + (\tau + o(1)) \exp\{\varrho \sigma\} \quad (\sigma \to +\infty),$$

і

$$\ln M(\sigma, F) \leq T_R \exp\{\varrho_R \sigma\} + (\tau + o(1)) \exp\{\varrho \sigma\} \quad (\sigma \to +\infty),$$

були рівносильними для кожної функції $F \in S(\Lambda, +\infty)$ *необхідно і достатньо, щоб*

$$\ln n(t) = o(t^{\varrho/\varrho_R}) \quad (t \to +\infty).$$

На випадок багаточленної показникової асимптотики теорему 1.11 узагальнено в [78].

Нехай $m \geq 2,\ 0 < \varrho_m < \cdots < \varrho_2 < \varrho_1 < +\infty, \quad \varrho_2 < \dfrac{\varrho_1 + \varrho_m}{2}, \quad T_1 > 0,\ T_j \in \mathbb{R}\ \ (j = 2, \ldots, m-1)$ і $\tau \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.12. *Нехай* $F \in S(\Lambda, +\infty)$. *Для того, щоб співвідношення*

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq \sum_{j=1}^{m-1} T_j \exp\{\varrho_j \sigma\} + (\tau + o(1)) \exp\{\varrho_m \sigma\} \quad (\sigma \to +\infty),$$

і

$$\ln M(\sigma, F) \le \sum_{j=1}^{m-1} T_j \exp\{\varrho_j \sigma\} + (\tau + o(1)) \exp\{\varrho_m \sigma\} \quad (\sigma \to +\infty),$$

були рівносильними для кожної функції $F \in S(\Lambda, +\infty)$ *необхідно і достатньо, щоб*

$$\ln n(t) = o(t^{\varrho_m/\varrho_1}) \quad (t \to +\infty).$$

З огляду на нерівність Коші $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F)$ для дослідження зв'язку між зростанням $\mu(\sigma, F)$ і $M(\sigma, F)$ потрібні оцінки $M(\sigma, F)$ через $\mu(\sigma, F)$ зверху. Цій проблемі присвятили свої праці багато авторів. Найзагальніший результат у термінах функції порівняння отримано М.М. Шереметою [71]. Правильна наступна теорема.

Теорема 1.13. *Нехай* $A = +\infty$ *або* $A = 0$, *ряд Діріхле (1.1) має абсциссу абсолютної збіжності* A, *і функція* $\Phi \in \Omega(A)$, *така, що* $\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$ *і* $\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$ *при* $\sigma \uparrow A$. *Тоді, для кожної функції* $F \in S(\Lambda, A)$ *співвідношення*

$$\ln \mu(\sigma, F) \le (1 + o(1))\Phi(\sigma)$$

і

$$\ln M(\sigma, F) \le (1 + o(1))\Phi(\sigma)$$

при $\sigma \uparrow A$ *є рівносильними тоді і тільки тоді, коли* $\ln n = o(\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_n))))$ *при* $n \to \infty$.

З теорем 1.8 і 1.2 випливає, що якщо функція Φ задовольняє умови теореми 1.13 і $\ln |a_n| \le -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \ge n_0$, то за умови $\ln n = o\big(\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_n)))\big)$ при $n \to \infty$ правильна наступна асимптотична нерівність

$$\ln M(\sigma, F) \le \Phi(\sigma) + \Phi_1(\sigma),$$

де $\Phi_1(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$ при $\sigma \uparrow A$. Природним стало дослідження умов на показники λ_n, за яких можна описати асимптотичне поводження функції Φ_1.

Для цілої функції f, заданої лакунарним рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad z = re^{i\varphi}, \tag{1.7}$$

де $\lambda_0 = 0, \lambda_n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n < \lambda_{n+1} (n \geq 1)$, позначимо через $\varrho = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$ і $\lambda = \underline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$- відповідно її порядок і нижній порядок. Дж. Уіттекер [77] довів, що

$$\lambda \leq \varrho\beta, \quad \beta = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \lambda_n}{\ln \lambda_{n+1}}.$$

Для аналітичних в $\mathbb{D}_R = \{z : |z| = 1\}$ функцій вигляду (1.7) порядок ϱ^0 і нижній порядок λ^0 визначають рівностями $\varrho^0 = \overline{\lim\limits_{r\uparrow 1}} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}$ і $\lambda^0 = \underline{\lim\limits_{r\uparrow 1}} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}$. За умови $\varrho^0 \in (0, +\infty)$ Л. Сонс [2] зробила спробу довести, що $\lambda^0 + 1 \leq (\varrho^0 + 1)\beta$. У 1976 р. на Брокпортській конференції з теорії функцій комплексної змінної Г. Шанкар (див. [63, с.169]) вказав на помилковість міркувань Л.Сонс. Пізніше М.М. Шеремета [42] довів, що для аналітичних в одиничному крузі функцій правильний повний аналог нерівності Дж. Уіттекера $\lambda^0 \leq \varrho^0\beta$. Результати Дж. Уіттекера і М.М. Шеремети були узагальнені П.В. Філевичем і М.М. Шереметою [34] на випадок цілих та абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле. При цьому поряд зі співвідношеннями між порядком і нижнім порядком було встановлено співвідношення між типом і нижнім типом ряду Діріхле, які були отримані зі загальної доведеної в [34] теореми про оцінки знизу максимального члена ряду Діріхле. Основним результатом [34] є наступна теорема.

Теорема 1.14. *Нехай ряд Діріхле (1.1) має абсцису абсолютної збіжності* $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$ *і* $\ln \mu(\sigma) \leq \Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \in [\sigma_0, A)$, *де* $\Phi(\sigma) \in \Omega(A)$. *Тоді*

$$\underline{\lim_{\sigma\uparrow A}} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)} \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)}{G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)}.$$

Якщо крім того функція $\Phi(\sigma) \in \Omega(A)$ *задовольняє умову*

$$Q(\sigma) + \left(\frac{\Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)^2} - 1\right) \ln \Phi(\sigma) \geq q > -\infty \quad \sigma \in [\sigma_0, A),$$

де $Q(\sigma) \equiv 0$, *у випадку* $A < +\infty$, $Q(\sigma) \equiv \ln \sigma$, *у випадку* $A = +\infty$, *то*

$$\varliminf_{\sigma \uparrow 0} \frac{\ln \ln \mu(\sigma, F)}{\ln \Phi(\sigma)} \leq \varliminf_{n \to \infty} \frac{\ln G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)}{\ln G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)}.$$

Якщо $A = +\infty$, то R-порядок ϱ_R і нижній R-порядок λ_R вводяться [67] за формулами $\varrho_R = \varlimsup\limits_{\sigma \to \infty} \dfrac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\sigma}$ і $\lambda_R = \varliminf\limits_{\sigma \to \infty} \dfrac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\sigma}$. Тоді за умови $\ln n = o\big(\lambda_n \ln \lambda_n\big)$, $n \to \infty$, правильна [34] нерівність $\lambda_R \leq \varrho_R \beta$, яка, очевидно, є узагальненням нерівності Уіттекера. Аналогами порядку і нижнього порядку аналітичної в $\mathbb{D}_R$ функції для рядів Діріхле (1.1) з нульвою абсцисою абсолютної збіжності є величини [7] $\varrho^0 = \varlimsup\limits_{\sigma \uparrow 0} \dfrac{\ln \ln M(\sigma, F)}{-\ln |\sigma|}$ та $\lambda^0 = \varliminf\limits_{\sigma \uparrow 0} \dfrac{\ln \ln M(\sigma, F)}{-\ln |\sigma|}$, і якщо $\ln \ln n = o(\ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, то [34] $\lambda^0 \leq \varrho^0 \beta$.

А.М. Гайсин для характеристики зростання рядів Діріхле (1.1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності ввів [5] R-порядок $\varrho_R^0 = \varlimsup\limits_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \ln M(\sigma, F)$ і вказав формулу для його знаходження, тобто якщо $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln \lambda_n}\right)$ при $n \to \infty$, то [5] $\varrho_R = \varlimsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln^+ |a_n|$. Нижнім R-порядком для таких рядів Діріхле будемо називати величину $\lambda_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma \uparrow 0} |\sigma| \ln \ln M(\sigma, F)$. За умови $0 < \varrho_R < \infty$ в [56] введено R-тип $T_R = \varlimsup\limits_{\sigma \uparrow 0} \exp\left\{ -\dfrac{\varrho_R}{|\sigma|}\right\} \ln\ M(\sigma, F)$ і доведено, що якщо

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} < 1, \tag{1.8}$$

то

$$T_R = \varrho_R e^{\delta - 1}, \quad \delta = \varlimsup_{n \to \infty} \left(\frac{\ln^+ |a_n|}{\varrho_R \lambda_n} \ln \frac{\lambda_n}{\ln^2 \lambda_n} - 1\right) \ln \lambda_n. \tag{1.9}$$

1.2. Огляд основних результатів дисертації.

Розділ 2 "Оцінки суми ряду Діріхле"присвячений оцінкам величини $M_1(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp\{\sigma \lambda_n\}$ як для цілих, так і для абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле (1.1). Оскільки $M(\sigma, F) \le M_1(\sigma, F)$, то з оцінок зверху для $M_1(\sigma, F)$ негайно отримуються такі ж оцінки для $M(\sigma, F)$. Зауважимо також, що у випадку додатних коефіцієнтів $M_1(\sigma, F) = M(\sigma, F)$ і, отже, оцінки знизу для $M_1(\sigma, F)$ і $M(\sigma, F)$ збігаються. Цією обставиною ми будемо користуватися для застосування отриманих результатів.

Оцінки знизу отримано у підрозділі 2.1. Тут доведено такі теореми.

Теорема 2.1. *Нехай $A = +\infty$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$, γ - невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція. Для $q \in (0, 1)$ і $x \ge 1$ приймемо*

$$\Delta_\gamma(x; q) = \frac{1}{x}\left(\gamma^{-1}(x) - \gamma^{-1}(x - e^{-qx})\right).$$

Якщо коефіцієнти цілого ряду Діріхле задовольняють умову

$$\ln |a_n| \ge -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$$

для всіх $n \ge n_0$, існує $q \in (0, 1)$, таке, що

$$\Delta_\gamma(x; q)\varphi(\gamma^{-1}(x)) \to 0$$

при $x \to +\infty$, і виконується умова

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)} > 1,$$

то

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln M_1(\sigma, F) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \ge 1 - q > 0.$$

Теорема 2.2. *Нехай $A = 0$, $\Phi \in \Omega(0)$, γ - невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція. Якщо коефіцієнти абсолютно збіжного у півплощині $\{s : \mathrm{Re}\,\sigma < 0\}$ ряду Діріхле задовольняють умову $\ln |a_n| \ge -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \ge n_0$, існує $q \in (0, 1)$ таке, що $\Delta_\gamma(x; q) = O(1)$ при $x \to +\infty$, і виконується умова $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)} > 1$, то*

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \frac{\ln M_1(\sigma, F) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \ge 1 - q > 0.$$

У підрозділі 2.2 доведено теореми, які вказують на оцінки $M(\sigma, F)$ знизу. Основною тут є наступна теорема.

Теорема 2.3. *Нехай $A = +\infty$ або $A = 0$, $F \in S(\Lambda, A)$, а функція $\Phi \in \Omega(A)$ така, що функція $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma \uparrow A$. Припустимо, що невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція γ така, що функція $\gamma(x)/x$ незростаюча на $[x_0, +\infty)$ і $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x)))$ при $x \to +\infty$. Тоді, якщо $\ln |a_n| \le -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \ge n_0$, то з*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)} = 0$$

випливає

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow A} \frac{\ln M_1(\sigma, F) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \le 0. \tag{2.6}$$

Крім цієї теореми у підрозділі 2.2 отримано результати у випадку, коли функція є близькою до степеневої, або повільно змінною.

Теорема 2.4. *Нехай $F \in S(\Lambda, +\infty)$, функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ така, що $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \ge h > 1$ і $\sigma\Phi''(\sigma)/\Phi'(\sigma) \le H < +\infty$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0$, а невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція γ задовольняє умови $\gamma(2x) = O(\gamma(x))$ і $\gamma(x) = O(x\Psi(\varphi(x)))$ при $x \to +\infty$. Тоді, якщо $\ln |a_n| \le -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \ge n_0$, то з $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)} = 0$ випливає (2.6) з $A = +\infty$.*

Теорема 2.5. *Нехай $F \in S(\Lambda, +\infty)$, функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ така, що Φ' є повільно зростаючою функцією і $\Phi'(\sigma) = (1 + o(1))\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma \to +\infty$. Припустимо, що невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція γ задовольняє умову $\gamma(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to +\infty$ і γ^{-1} є повільно зростаючою функцією. Тоді, якщо $\ln |a_n| \le -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \ge n_0$ і*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\gamma^{-1}(\ln n(t))}{t} < 1,$$

то правильна нерівність (2.6) з $A = +\infty$.

Теорема 2.6. *Нехай $F \in S(\Lambda, 0)$, $\Phi \in \Omega(0)$ і невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція γ така, що $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(2\sigma)))$ і $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(|\sigma|\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))$ при $\sigma \uparrow 0$. Тоді, якщо $\ln |a_n| \le -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$*

для всіх $n \geq n_0$ *і*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\gamma(\Phi'(\Psi(\varphi(\lambda_n))))} = 0,$$

то правильна нерівність (2.6) з $A = 0$.

Доведені у підрозділах 2.1 і 2.2 теореми застосовано у підрозділі 2.3 до вивчення зв'язку між зростанням функції $M(\sigma, F)$ і максимального члена $\mu(\sigma, F)$ ряду Діріхле (1.1) з довільною абсцисою абсолютної збіжності ($A = +\infty$, або $A = 0$) у термінах багаточленних асимптотик (степеневої та показникової для цілих рядів Діріхле і степеневої для рядів Діріхле з нульовою абсциссою абсолютної збіжності.)

Теорема 2.7. *Нехай* $T_1 > 0$, $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, j = \overline{2, n-1}$, $\quad \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\quad 0 < \rho_n < ... < \rho_2 < \rho_1$. *Для того, щоб для кожної функції* $F \in S(\Lambda, 0)$ *співвідношення*

$$\ln M(\sigma, F) \leq \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

і

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma \uparrow 0.$$

були рівносильними, необхідно і досить, щоб $\ln n(t) = o(t^{\varrho/(\varrho_1+1)})$ *при* $t \to +\infty$. *Ця умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей*

$$\ln M(\sigma, F) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma \uparrow 0$$

і

$$\ln \mu(\sigma, F) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma \uparrow 0.$$

З огляду на теорему 2.7 для того, щоб встановити зв'язок між зростанням $M(\sigma, F)$ і поводженням коефіцієнтів, потрібно таку залежність встановити між максимальним членом і коефіцієнтами. Цій проблемі присвячено розділ 3 "Багаточленна степенева асимптотика ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності".

У підрозділі 3.1 доведено наступну теорему.

Теорема 3.1. *Якщо $\rho > 2\rho_2 - \rho_1$, то для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho}}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leq T_1(\rho_1 + 1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \sum_{j=2}^{m} T_j \left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} + (\tau + \varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1 + 1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \sum_{j=2}^{m} T_j \left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} + (\tau - \varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}};$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho+\rho_1+2}{2(\rho_1+1)}}\right) \quad k \to \infty.$$

Умова $\rho > 2\rho_2 - \rho_1$ у теоремі 3.1 є важливою. Це видно на прикладі тричленної асимптотики, у дослідженні якої важливу роль відіграє така лема. Позначимо через

$$U(x) = \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}} + \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1 + 1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}.$$

Лема 3.1. *Якщо функція $\Phi \in \Omega(0)$ така, що $\Phi(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{\tau}{|\sigma|^{\rho}} + \frac{\delta}{|\sigma|^{s}}, \quad \sigma_0 \leq \sigma < 0$, а φ - функція обернена до Φ'. Тоді при $x \to +\infty$ правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s = \varrho > 2\rho_2 - \rho_1$ і $\tau + \delta \neq 0$, то

$$\varphi(x) = -U(x) - \frac{(\tau + \delta + o(1))\rho}{T_1\rho_1(\rho_1 + 1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

2) якщо $s=\rho<2\rho_2-\rho_1$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)+\frac{2\rho_2-\rho_1+o(1)}{2}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

3) якщо $s=\rho=2\rho_2-\rho_1$, $\tau\neq\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $\tau+\delta\neq\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)-\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\tau+\delta-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

4) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=3\rho_2-2\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)\neq 0$, $\delta\neq\dfrac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)+\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-\right.$$
$$\left.-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-3\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

5) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)-\frac{\rho_1}{3\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\right.$$
$$\left.-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-4\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

6) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1-1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, $\rho_1\neq 4$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)-\frac{\rho_1-4}{3\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\right.$$
$$\left.-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-4\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

7) якщо $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$, $s = 5\rho_2 - 4\rho_1$, $\rho_1 = 4$, $\tau = \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2 - 2\rho_1 - 1 = 0$, *то*

$$\varphi(x) = -U(x) + \frac{1}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-5\rho_1-1}{\rho_1+1}}.$$

Зрозуміло, що кожному з перелічених в лемі 3.1 випадкові буде відповідати окрема теорема. Наступна теорема випливає з теореми 3.1.

Теорема 3.2. *Якщо* $\rho > 2\rho_2 - \rho_1$, *то для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho}}, \quad \sigma \uparrow 0$$

необхідно і досить, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$*:*

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, *що для всіх* $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + (\tau+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що для всіх* $k \geq k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + (\tau-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho+\rho_1+2}{2(\rho_1+1)}}\right), \quad k \to \infty.$$

Теорема 3.3. *Якщо* $\rho < 2\rho_2 - \rho_1$, *то для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \left(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}},$$

необхідно, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$*:*

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, *що для всіх* $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} -$$

$$-\left(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}-\varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}-$$

$$-\left(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}+\varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2+1}{\rho_1+1}}\right),\quad k\to\infty.$$

Наступні теореми стосуються випадку, коли $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$.

Теорема 3.4. *Нехай $\rho = 2\rho_2-\rho_1$ і $\tau \neq \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$ тоді для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma)=\frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}}+\frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}}+\frac{(\tau+o(1))}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}},\quad \sigma\uparrow 0,$$

необхідно і досить, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}+$$

$$+\left(\tau+\varepsilon-\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}+$$

$$+\left(\tau-\varepsilon-\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\biggl(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2+1}{\rho_1+1}}\biggr), \quad k \to \infty.$$

Теорема 3.5. *Для того, щоб при* $\sigma \uparrow 0$

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \left(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}},$$

необхідно і досить, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$*:*

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$*, що для всіх* $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + \varepsilon\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що для всіх* $k \geq k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \varepsilon\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\biggl(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2+1}{\rho_1+1}}\biggr), \quad k \to \infty.$$

Об'єднаємо твердження теорем 3.2 - 3.5 у наступну теорему. Для цього приймемо

$$\tau^* = \tau I_{\{\rho:\rho\geq 2\rho_2-\rho_1\}}(\rho) - \frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} I_{\{\rho:\rho\leq 2\rho_2-\rho_1\}}(\rho),$$

де $I_E(\rho)$ - характеристична функція множини E, тобто, $I_E(\rho) = 1$, коли $\rho \in E$, $I_E(\rho) = 0$, коли $\rho \notin E$. Основною підрозділу 3.2 є наступна теорема.

Теорема 3.6. *Для того, щоб при* $\sigma \uparrow 0$

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho}},$$

необхідно, а у випадку, коли $\rho \geq 2\rho_2 - \rho_1$*, і досить, щоб для кожного* $\varepsilon > 0$*:*

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$*, що для всіх* $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + (\tau^*+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\max\{\rho,2\rho_2-\rho_1\}}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + (\tau^*-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\max\{\rho,2\rho_2-\rho_1\}}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1+\max\{\rho,2\rho_2-\rho_1\}+2}{2(\rho_1+1)}}\right), \quad k\to\infty.$$

Вкажемо ще на дві теореми, які відповідають твердженням 5) і 6) леми 3.1.

Теорема 3.7. *Якщо $2\rho_2-\rho_1>0$ і $(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)\neq 0$, то для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \left(\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}} + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{3\rho_2-2\rho_1}}\right), \quad \sigma\uparrow 0$$

необхідно і досить, щоб для будь якого $\varepsilon>0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n\geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2} - \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k\geq k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2} + \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{3\rho_2-2\rho_1+2}{2(\rho_1+1)}}\right), \quad k\to\infty.$$

Теорема 3.8. *Якщо* $\rho_1 \neq 4$, *то для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\frac{2\rho_1+1}{3}}} + \frac{(T_2(2\rho_1+1))^2}{18\rho_1 T_1(\rho_1+1)} \frac{1}{|\sigma|^{\frac{\rho_1+2}{3}}} + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\frac{-\rho_1+4}{3}}}\right), \quad \sigma \uparrow 0$$

необхідно і досить, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$*:*

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, *що для всіх* $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_1+1}{3(\rho_1+1)}} -$$
$$- \left(\frac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3} - \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{-(\rho_1-4)}{3(\rho_1+1)}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що для всіх* $k \geq k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} -$$
$$- \left(\frac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3} + \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{-(\rho_1-4)}{3(\rho_1+1)}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1+5}{3(\rho_1+1)}}\right), \quad k \to \infty.$$

Нарешті, у розділі 4 "Абсолютно збіжні у півплощині ряди Діріхле скінченного R-порядку"досліджуються асимптотичні властивості рядів Діріхле (1.1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, які мають скінченний R-порядок за А. Гайсиним. Тут доведені такі теореми.

Теорема 4.1. *Нехай* $T > 0$ *і* $\varrho > 0$. *Для того, щоб для ряду Діріхле* (1.1)

$$\ln \mu(\sigma, F) = T(1+o(1)) \exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}, \quad \sigma \uparrow 0$$

необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon \in (0, T)$*:*

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \ge n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \le \frac{\lambda_n \varrho}{\ln^2 \lambda_n} \ln\left(\frac{(T+\varepsilon)e}{\varrho}\lambda_n \ln^2 \lambda_n\right);$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \ge k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \ge \frac{\lambda_{n_k} \varrho}{\ln^2 \lambda_{n_k}} \ln\left(\frac{(T-\varepsilon)e}{\varrho}\lambda_{n_k} \ln^2 \lambda_{n_k}\right)$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} = 1.$$

Теорема 4.2. *Нехай $\ln n = o(\lambda_n \ln^{-2} \lambda_n)$ при $n \to \infty$. Тоді*

$$T_R^0 = \frac{\varrho_R^0}{e} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n \ln^2 \lambda_n} |a_n|^{\ln^2 \lambda_n / \varrho_R^0 \lambda_n}$$

і для того, щоб асимптотична рівність

$$\ln M(\sigma, F) = T_R^0(1+o(1)) \exp\left\{\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}, \quad \sigma \uparrow 0.$$

була правильною, необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon \in (0, T)$ виконувались умови 1) і 2) теореми 4.1 з $T = T_R^0$ і $\varrho = \varrho_R^0$.

Теорема 4.3. *Нехай $\varrho > 0$. Для того, щоб*

$$\ln\ln \mu(\sigma, F) = \frac{(1+o(1))\varrho}{|\sigma|}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon \in (0, \varrho)$:

1) існувало число $n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \ge n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \le \frac{(\varrho+\varepsilon)\lambda_n}{\ln \lambda_n};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \ge k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \ge \frac{(\varrho-\varepsilon)\lambda_{n_k}}{\ln \lambda_{n_k}}$$

і

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\lambda_{n_{k+1}}}{\ln\lambda_{n_k}}=1.$$

Теорема 4.4. *Нехай виконується умова (1.8). Для того, щоб асимптотична рівність*

$$\ln\ln M(\sigma,F)=\frac{(1+o(1))\varrho_R^0}{|\sigma|},\quad \sigma\uparrow 0,$$

була правильною, необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon\in(0,\varrho)$ виконувались умови 1) і 2) теореми 4.3 з $\varrho=\varrho_R^0$.

Нехай $\lambda_R^0=\varliminf_{\sigma\uparrow 0}|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)$ - нижній R-порядок, а $t_R^0=\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\exp\left\{-\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ M(\sigma,F)$ - нижній R-тип. На зв'язок між λ_R^0 і ϱ_R^0, t_R^0 і T_R^0 вказують наступні аналоги класичної теореми Уіттекера.

Теорема 4.5. *Якщо $\ln n=o\left(\frac{\lambda_n}{\ln\lambda_n}\right)$ при $n\to\infty$, то $\lambda_R^0\le\varrho_R^0\beta$, $\beta=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\lambda_n}{\ln\lambda_{n+1}}$.*

Теорема 4.6. *Якщо $T_R^0<\infty$, $\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}<1$ і $\varliminf_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}=\gamma$, то*

$$t_R^0\le T_R^0 g(\gamma),\quad g(\gamma)=\frac{\ln(1/\gamma)}{1-\gamma}\exp\left\{1+\frac{\ln\gamma}{1-\gamma}\right\}$$

РОЗДІЛ 2

ОЦІНКИ СУМИ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Нехай

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{2.1}$$

ряд Діріхле із невід'ємною зростаючою до $+\infty$ послідовністю (λ_n) показників і абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$. Через $S(\Lambda, A)$ позначимо клас рядів Діріхле (2.1) зі заданою послідовністю $\Lambda = (\lambda_n)$ показників і абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = A$. Нехай для $\sigma < A$ $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, $M_1(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ - максимальний член.

Очевидно, що $M(\sigma, F) \leq M_1(\sigma, F)$, а якщо $a_n \geq 0$ для всіх $n \geq 0$, то $M(\sigma, F) = M_1(\sigma, F) = F(\sigma)$. У цьому розділі буде отримано нові оцінки $M_1(\sigma, F)$ як знизу, так і зверху, і буде вказано на їх застосування до вивчення зв'язку між зростанням функції $M(\sigma, F)$ та максимального члена ряду (2.1) у термінах багаточленних асимптотик.

2.1. Оцінки $\ln M_1(\sigma, F)$ знизу.

У попередньому розділі було зауважено, що якщо $\ln|a_n| \geq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geq 0$, то $\ln M_1(\sigma_n, F) \geq \Phi(\sigma_n)$ для $\sigma_n = \varphi(\lambda_n)$. Останню нерівність можна поліпшити, якщо врахувати можливе зростання показників (λ_n) ряду Діріхле (2.1). Для цього використаємо таку лему з [76].

Лема 2.1. *Нехай γ - невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція, а (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел. Якщо*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)} > 1, \tag{2.2}$$

то існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що:

1) $k \leq \exp\{\gamma(\lambda_k^*)\} + 1$ для всіх $k \geq 1$;

2) $k_s \geq \exp\{\gamma(\lambda^*_{k_s})\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_s) натуральних чисел.

Використовуючи цю лему, спочатку отримаємо оцінку знизу для $M_1(\sigma_n, F)$ у випадку цілих рядів Діріхле. Правильна така теорема.

Теорема 2.1. *Нехай $A = +\infty$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$, γ- невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція. Для $q \in (0,1)$ і $x \geq 1$ приймемо*

$$\Delta_\gamma(x;q) = \frac{1}{x}\left(\gamma^{-1}(x) - \gamma^{-1}(x - e^{-qx})\right).$$

Якщо коефіцієнти цілого ряду Діріхле задовольняють умову

$$\ln|a_n| \geq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$$

для всіх $n \geq n_0$, існує $q \in (0,1)$, таке, що

$$\Delta_\gamma(x;q)\varphi(\gamma^{-1}(x)) \to 0$$

при $x \to +\infty$, і виконується умова (2.2), то

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln M_1(\sigma, F) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \geq 1 - q > 0. \tag{2.3}$$

Доведення. Нехай (λ^*_k) - підпослідовність послідовності (λ_n), яка за лемою 2.1 має властивості 1) і 2), наведені в цій лемі, а $m_j = [k_j - k_j^p]$, де $0 < p < 1 - q$. Тоді, якщо припустити, що $\lambda^*_1 \geq \lambda_{n_0}$, то для кожного $\sigma > 0$ отримаємо

$$\begin{aligned} M_1(\sigma, F) &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \exp\{-\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n)) + \sigma\lambda_n\} \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\lambda^*_k \Psi(\varphi(\lambda^*_k)) + \sigma\lambda^*_k\} \geq \\ &\geq \sum_{k=m_j}^{k_j} \exp\{-\lambda^*_k \Psi(\varphi(\lambda^*_k)) + \sigma\lambda^*_k\} \geq \\ &\geq \sum_{k=m_j}^{k_j} \exp\{-\lambda^*_{k_j} \Psi(\varphi(\lambda^*_{k_j})) + \sigma\lambda^*_{m_j}\} \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq\ (k_j - m_j + 1)\exp\{-\lambda^*_{k_j}\Psi(\varphi(\lambda^*_{k_j})) + \sigma\lambda^*_{m_j}\} \geq \\ &\geq\ k_j^p \exp\{-\lambda^*_{k_j}\Psi(\varphi(\lambda^*_{k_j})) + \sigma\lambda^*_{m_j}\}. \end{aligned}$$

За властивостями 1) і 2) послідовності (λ^*_k) маємо

$$\begin{aligned} \lambda^*_{m_j} &\geq \gamma^{-1}(\ln(m_j - 1)) \geq \gamma^{-1}(\ln(k_j - k_j^p - 2)) = \gamma^{-1}\left(\ln\, k_j - \frac{1+o(1)}{k_j^{1-p}}\right) = \\ &= \gamma^{-1}(\ln\, k_j) - \delta_j \geq \lambda^*_{k_j} - \delta_j, \quad j \to +\infty, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \delta_j = \gamma^{-1}(\ln\, k_j) - \gamma^{-1}\left(\ln\, k_j + (1+o(1))e^{-(1-p)\ln\, k_j}\right) \leq \\ \leq \gamma^{-1}(\ln\, k_j) - \gamma^{-1}\left(\ln\, k_j + e^{-q\ln\, k_j}\right) = \Delta_\gamma(\ln k_j; q_j)\ln k_j, \quad j \geq j_0, \end{aligned}$$

$$q_j = -\frac{\ln\ln\frac{k_j}{k_j - k_j^p - 2}}{\ln\, k_j} = 1 - p + o(1) > q$$

Отже, для $\sigma = \sigma_j = \varphi(\lambda^*_{k_j})$ і всіх досить великих j маємо

$$\begin{aligned} \ln\, M_1(\sigma_j, F) &\geq p\ln\, k_j - \lambda^*_{k_j}\Psi(\varphi(\lambda^*_{k_j})) + \lambda^*_{k_j}\varphi(\lambda^*_{k_j}) - \delta_j\varphi(\lambda^*_{k_j}) = \\ &= p\ln\, k_j + \Phi(\varphi(\lambda^*_{k_j})) - \delta_j\varphi(\lambda^*_{k_j}). \end{aligned}$$

Оскільки $\lambda^*_{k_j} \leq \gamma^{-1}(\ln\, k_j)$ і $\Delta_\gamma(x; q)\varphi(\gamma^{-1}(x)) \to 0$ при $x \to +\infty$, то

$$\frac{\delta_j\varphi(\lambda^*_{k_j})}{\ln k_j} \leq \Delta_\gamma(\ln k_j; q)\varphi(\gamma^{-1}(\ln k_j)) \to 0, \quad j \to +\infty,$$

і тому

$$\begin{aligned} \ln\, M_1(\sigma_j, F) &\geq (1+o(1))p\ln\, k_j + \Phi(\varphi(\lambda^*_{k_j})) \geq \\ &\geq (1+o(1))p\gamma(\lambda^*_{k_j}) + \Phi(\varphi(\lambda^*_{k_j})) = \\ &= (1+o(1))p\gamma(\Phi'(\varphi(\lambda^*_{k_j}))) + \Phi(\varphi(\lambda^*_{k_j})) = \\ &= \Phi(\sigma_j) + (1+o(1))p\gamma(\Phi'(\sigma_j)), \quad j \to +\infty. \end{aligned}$$

Звідси випливає нерівність (2.3). Теорему 2.1 доведено.

Зауважимо, що умова $\Delta_\gamma(x; q)\varphi(\gamma^{-1}(x)) \to 0$ $(x \to +\infty)$ для деякого

$q \in (0,1)$ з урахуванням зростання φ означає, що $\Delta_\gamma(x;q) \to 0$ $(x \to +\infty)$ для таких q. Функція $\gamma(x) = \ln x$ не задовольняє останню умову, але будь-яка функція , що зростає швидше ніж $\ln x$, наприклад, $\gamma(x) = (1+\eta)\ln x$, $\eta > 0$, її задовольняє.

Виникає природнє питання, за яких умов на γ and φ умову (2.2) можна буде замінити наступною умовою

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln\, n}{\gamma(\lambda_n)} > 0? \tag{2.4}$$

З умови (2.4) випливає існування такого $\beta > 0$, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln\, n}{\beta\gamma(\lambda_n)} > 1,$$

і оскільки β є довільним, тоді твердження теореми 2.1 є правильним для всіх $q \in (0,1)$. Іншими словами правильне наступне тверження.

Наслідок 2.1. *Нехай $A = +\infty$, $\Phi \in \Omega(+\infty)$ і γ - невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція така, що*

$$\ln\frac{1}{\gamma'(x)} = o(\gamma(x)), \quad x \to +\infty \tag{2.5}$$

і

$$\ln\varphi(x) = o(\gamma(x)), \quad x \to +\infty.$$

Якщо коефіцієнти цілого ряду Діріхле задовольняють умову $\ln\,|a_n| \geq -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geq n_0$ і виконується (2.4), то оцінка (2.3) є правильною.

Доведення. Оскільки для будь-якого $q > 0$, за теоремою Лагранжа, існує $\xi \in (x - e^{-qx}, x)$ таке, що завдяки умовам $\ln\varphi(x) = o(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$ і (2.5)

$$\{\gamma^{-1}(x) - \gamma^{-1}(x - e^{-qx})\} \cdot \varphi(\gamma^{-1}(x)) = \frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(\xi))} \cdot e^{-qx} \cdot \varphi(\gamma^{-1}(x)) =$$

$$= \frac{e^{-q(1+o(1))x}}{\gamma'(\gamma^{-1}(\xi))} = \frac{e^{-q(1+o(1))\xi}}{\gamma'(\gamma^{-1}(\xi))} \to 0, \quad x \to +\infty,$$

то $\Delta_\gamma(x;q)\varphi(\gamma^{-1}(x)) \to 0$ при $x \to +\infty$ для будь-якого $q \in (0,1)$. Звідси випливає, що ця ж умова є правильною і для функції $\beta\gamma(x)$. Наслідок 2.1 доведено.

Зазначимо також, що умова (2.5) не виконується для функції $\gamma(x) = \ln x$, але функція $\gamma(x) = \ln^{1+\alpha} x$, $\alpha > 0$, задовольняє (2.5).

Для рядів Діріхле (2.1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності теорема 2.1 має такий аналог.

Теорема 2.2. *Нехай $A = 0$, $\Phi \in \Omega(0)$, γ - невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція.*

Якщо коефіцієнти абсолютно збіжного у півплощині $\{s : Re\,\sigma < 0\}$ ряду Діріхле задовольняють умову $\ln|a_n| \geq -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geq n_0$, існує $q \in (0,1)$ таке, що $\Delta_\gamma(x;q) = O(1)$ при $x \to +\infty$, і виконується умова (2.2), то

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \frac{\ln M_1(\sigma, F) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \geq 1 - q > 0. \tag{2.6}$$

Доведення цієї теореми відрізняється від доведення теореми 2.1 тільки декількома деталями. Оскільки тепер функція $t\Psi(\varphi(t))$ спадна і $\sigma < 0$, то отримуємо наступну оцінку

$$\begin{aligned} M_1(\sigma, F) &\geq \sum_{k=m_j}^{k_j} \exp\{-\lambda_k^*\Psi(\varphi(\lambda_k^*)) + \sigma\lambda_k^*\} \geq \\ &\geq \sum_{k=m_j}^{k_j} \exp\{-\lambda_{m_j}^*\Psi(\varphi(\lambda_{m_j}^*)) + \sigma\lambda_{k_j}^*\} \geq \\ &\geq k_j^p \exp\{-\lambda_{m_j}^*\Psi(\varphi(\lambda_{m_j}^*)) + \sigma\lambda_{k_j}^*\}. \end{aligned}$$

Для $\sigma = \sigma_j = \varphi(\lambda_{m_j}^*) < 0$ з останньої нерівності маємо

$$\begin{aligned} \ln M_1(\sigma_j, F) &\geq p\ln k_j - \lambda_{m_j}^*\Psi(\varphi(\lambda_{m_j}^*)) + \lambda_{m_j}^*\varphi(\lambda_{m_j}^*) + (\lambda_{k_j}^* - \lambda_{m_j}^*)\varphi(\lambda_{m_j}^*) \geq \\ &\geq p\ln k_j + \Phi(\varphi(\lambda_{m_j}^*)) + \delta_j\varphi(\lambda_{m_j}^*), \end{aligned}$$

і, використовуючи такий же факт, те що,

$$\frac{\delta_j}{\ln k_j} \leq \Delta_\gamma(\ln k_j; q) = O(1), \quad j \to +\infty,$$

і $\varphi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ одержуємо

$$\begin{gathered}\ln M_1(\sigma_j, F) \geq (1+o(1))p \ln\, k_j + \Phi(\varphi(\lambda^*_{m_j})) \geq \\ \geq (1+o(1))p\gamma(\lambda^*_{k_j}) + \Phi(\varphi(\lambda^*_{m_j})) \geq \\ \geq (1+o(1))p\gamma(\lambda^*_{m_j}) + \Phi(\varphi(\lambda^*_{m_j})) = \\ = p(1+o(1))\gamma(\Phi'(\varphi(\lambda^*_{m_j}))) + \Phi(\varphi(\lambda^*_{m_j})) = \\ = p(1+o(1))\gamma(\Phi'(\sigma_j)) + \Phi(\sigma_j), \quad j \to +\infty,\end{gathered}$$

тобто справедлива нерівність (2.6). Доведення теореми 2.2 повністю завершено.

Зауважимо, що загальний випадок $A \in (-\infty, +\infty)$ зводиться до випадку $A = 0$ заміною σ на $\sigma - A$. Подібно, як у випадку цілих рядів Діріхле, отримуємо аналог наслідку 2.1 для рядів Діріхле абсолютно збіжних у півплощині.

Наслідок 2.2. *Нехай $A = 0$, $\Phi \in \Omega(0)$, γ - невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція, така, що виконується* (2.5).

Якщо коефіцієнти абсолютно збіжного у півплощині $\{s : Re\,\sigma < 0\}$ ряду Діріхле задовольняють умову $\ln\, |a_n| \geq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geq n_0$ і справедлива нерівність (2.4), *то оцінка* (2.6) *є правильною.*

2.2. Оцінки $\ln\, M_1(\sigma, F)$ зверху.

Тепер дослідимо умови на $\Phi \in \Omega(A)$ і γ, за яких з нерівності $\ln\, |a_n| \leq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geq n_0$ і рівності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\, n}{\gamma(\lambda_n)} = 0 \tag{2.7}$$

випливає нерівність

$$\varlimsup_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln\, M_1(\sigma, F) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \leq 0. \tag{2.8}$$

Почнемо з наступної теореми.

Теорема 2.3. *Нехай* $A = +\infty$ *або* $A = 0$, $F \in S(\Lambda, A)$, *а функція* $\Phi \in \Omega(A)$ *така, що функція* $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma))$ *при* $\sigma \uparrow A$. *Припустимо, що невід'ємна неперервна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція* γ *така, що функція* $\gamma(x)/x$ *незростаюча на* $[x_0, +\infty)$ *і* $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x)))$ *при* $x \to +\infty$. *Тоді, якщо* $\ln|a_n| \le -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n \ge n_0$, *то з* (2.7) *випливає* (2.8).

Доведення. Приймемо

$$\beta(\sigma) = \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}.$$

Тоді $\sigma + \beta(\sigma) < A$. Справді, у випадку, коли $A = +\infty$, ця нерівність є очевидною, а якщо $A = 0$, то

$$\sigma + \beta(\sigma) < \sigma + \frac{\Phi(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))} = \sigma + \Psi^{-1}(\sigma) - \Psi(\Psi^{-1}(\sigma)) = \Psi^{-1}(\sigma) < 0.$$

З нерівності $\sigma + \beta(\sigma) < A$ випливає, що функція $\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma))$ визначена на $(-\infty, A)$. Позначимо

$$g(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma + \beta(\sigma))),$$

і нехай $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$ - лічильна функція послідовності (λ_n). З умови (2.7) і незростання функції $\gamma(x)/x$ випливає, що $\ln n(t) = o(\gamma(t)) = o(t)$ при $t \to +\infty$, а

$$M_1(\sigma, F) = \left(\sum_{\lambda_n \le g(\sigma)} + \sum_{\lambda_n > g(\sigma)}\right) |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \le$$

$$\le \mu(\sigma, F) n(g(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > g(\sigma)} \exp\{-\lambda_n(\Psi(\varphi(\lambda_n)) - \sigma)\} \le$$

$$\le \mu(\sigma, F) n(g(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > g(\sigma)} \exp\{-\lambda_n(\Psi(\varphi(g(\sigma))) - \sigma)\} =$$

$$= \mu(\sigma, F) n(g(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > g(\sigma)} \exp\{-\lambda_n \beta(\sigma)\} \le$$

$$\le \mu(\sigma, F) n(g(\sigma)) + \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-\beta(\sigma) t\} dn(t) \le$$

$$\leq \mu(\sigma, F)n(g(\sigma)) + \beta(\sigma) \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} n(t)\exp\{-\beta(\sigma)t\}dt. \quad (2.9)$$

З умови $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x))))$, $x \to +\infty$, випливає, що

$$\frac{\gamma(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))} = O\left(\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}\right)$$

при $\sigma \uparrow A$, і з огляду на незростання функції $\gamma(x)/x$ маємо

$$\frac{\gamma(g(\sigma))}{g(\sigma)} \leq \frac{\gamma(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))} = O(\beta(\sigma)), \quad \sigma \uparrow A,$$

тобто

$$\gamma(g(\sigma)) \leq K\beta(\sigma)g(\sigma)$$

для деякого $K > 0$ і всіх $\sigma_1 \leq \sigma < A$. Тому для кожного $\varepsilon \in (0, 1/K)$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(\varepsilon), A)$

$$\beta(\sigma) \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} n(t)\exp\{-\beta(\sigma)t\}dt \leq \beta(\sigma) \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-\beta(\sigma)t + \varepsilon\gamma(t)\}dt =$$

$$= \beta(\sigma) \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-t\left(\beta(\sigma) - \varepsilon\frac{\gamma(t)}{t}\right)\right\} dt \leq$$

$$\leq \beta(\sigma) \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-t\left(\beta(\sigma) - \varepsilon\frac{\gamma(g(\sigma))}{g(\sigma)}\right)\right\} dt \leq$$

$$\leq \beta(\sigma) \int\limits_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-t\beta(\sigma)(1 - \varepsilon K)\}dt \leq \frac{1}{1 - \varepsilon K},$$

і з (2.9) отримуємо

$$\ln M_1(\sigma, F) \leq \ln \mu(\sigma, F) + \ln n(g(\sigma)) + o(1), \quad \sigma \uparrow A. \quad (2.10)$$

За теоремою 1.8 з умови $\ln |a_n| \leq -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geq n_0$ випливає, що $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, A)$. Тому з (2.10) отримуємо нерів- ність

$$\frac{\ln M_1(\sigma, F) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \leq \frac{\ln n(g(\sigma))}{\gamma(\Phi'(\sigma))} + o(1), \quad \sigma \uparrow A,$$

і з огляду на умову (2.7) залишилось довести, що

$$\gamma(g(\sigma)) = \gamma(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma+\beta(\sigma)))) = O(\gamma(\Phi'(\sigma))), \quad \sigma \uparrow A. \tag{2.11}$$

Оскільки функція $\gamma(t)/t$ незростає, то

$$\frac{\gamma(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma+\beta(\sigma))))}{\gamma(\Phi'(\sigma))} = \\ = \frac{\gamma(\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma+\beta(\sigma))))}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma+\beta(\sigma)))}\frac{\Phi'(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))}\frac{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma+\beta(\sigma)))}{\Phi'(\sigma)} \le \\ \le \frac{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma+\beta(\sigma)))}{\Phi'(\sigma)},$$

тобто треба довести, що

$$\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma+\beta(\sigma))) = O(\Phi'(\sigma)), \quad ,\sigma \uparrow A.$$

Остання оцінка є наслідком з нерівності $\sigma+\beta(\sigma) \le \Psi^{-1}(\sigma)$ і співвідношення

$$\Phi'(\Psi^{-1}(\Psi^{-1}(\sigma))) = O(\Phi'(\sigma), \quad \sigma \uparrow A,$$

яке випливає з умови $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$, $\sigma \uparrow A$. Теорему 2.3 доведено.

У випадку $A = +\infty$ умова $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$ при $\sigma \to +\infty$ не обмежує швидкість зростання функції Φ. Наприклад, функції з класу $\Omega(+\infty)$, які для всіх досить великих σ збігаються з функціями вигляду $\Phi(\sigma) = \exp_k\sigma$, де $k \ge 1$ (тут $\exp_1 x = e^x$ і $\exp_k x = \exp\{\exp_{k-1} x\}$), $\Phi(\sigma) = \sigma^p$ з $p > 1$ і $\Phi(\sigma) = \sigma\ln\sigma$, задовольняють цю умову. У випадку $A = 0$ і $\Phi(\sigma) = B\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)$ для всіх $\sigma < 0$ досить близьких до 0, зазначена умова передбачає, що B зростає не повільніше, ніж степенева функція. Повільно зростаючі функції, наприклад $B(x) = \ln x$ $(x \ge e)$, не задовольняють цієї умови.

Умови на функцію γ з'явилися в результаті використання методу доведення. З неспадання функції $\gamma(x)/x$ випливає, що $\gamma(2x) \le 2\gamma(x)$ для $x > 0$. Виникає питання: для яких $\Phi \in \Omega(+\infty)$ ця умова може бути замінена умовою $\gamma(2x) = O(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$? Наступна теорема показує, що така заміна можлива, коли Φ має степеневе зростання.

Теорема 2.4. *Нехай* $A = +\infty$, *функція* $\Phi \in \Omega(+\infty)$ *така, що* $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \geq h > 1$ *і* $\sigma\Phi''(\sigma)/\Phi'(\sigma) \leq H < +\infty$ *для всіх* $\sigma \geq \sigma_0$, *а невід'ємна неперервна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція* γ *задовольняє умови* $\gamma(2x) = O(\gamma(x))$ *і* $\gamma(x) = O(x\Psi(\varphi(x)))$ *при* $x \to +\infty$. *Тоді, якщо* $\ln |a_n| \leq -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n \geq n_0$, *то з* (2.7) *випливає* (2.8) *з* $A = +\infty$.

Доведення. Позначимо тепер $g(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma))$. Тоді, як вище,

$$M_1(\sigma, F) \leq \mu(\sigma, F)n(g(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > g(\sigma)} \exp\{-\lambda_n(\Psi(\varphi(\lambda_n)) - \sigma)\} \leq$$

$$\leq \mu(\sigma, F)n(g(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > g(\sigma)} \exp\{-\lambda_n(\Psi(\varphi(\lambda_n)) - \Psi(\varphi(\lambda_n))/2)\} \leq$$

$$\leq \mu(\sigma, F)n(g(\sigma)) + \int_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-t\Psi(\varphi(t))/2\}dn(t) \leq$$

$$\leq \mu(\sigma, F)n(g(\sigma)) + \frac{1}{2}\int_{g(\sigma)}^{\infty} n(t)\exp\{-t\Psi(\varphi(t))/2\}\varphi(t)dt. \quad (2.12)$$

Оскільки $\ln n(t) = o(\gamma(t)) = o(t\Psi(\varphi(t)))$ при $t \to +\infty$ і $(t\Psi(\varphi(t)))' = \varphi(t)$, то звідси для всіх досить великих σ отримуємо

$$M_1(\sigma, F) \leq \mu(\sigma, F)n(g(\sigma)) + \frac{1}{2}\int_{g(\sigma)}^{\infty} \exp\{-t\Psi(\varphi(t))/3\}\varphi(t)dt \leq$$

$$\leq \mu(\sigma, F)n(g(\sigma)) + \frac{3}{2},$$

звідки

$$\frac{\ln M_1(\sigma, F) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \leq \frac{\ln n(\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)))}{\gamma(\Phi'(\sigma))} =$$

$$= o\left(\frac{\gamma(\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)))}{\gamma(\Phi'(\sigma))}\right), \quad \sigma \to +\infty,$$

і з огляду на умову $\gamma(2x) = O(\gamma(x))$, $x \to +\infty$, залишилось довести, що

$$\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)) = O(\Phi'(\sigma)), \quad \sigma \to +\infty$$

.

З огляду на умови теореми для деякого $\xi = \xi(\sigma) \in [\Psi(\sigma),\, \sigma]$

$$\ln\, \Phi'(\sigma) - \ln\, \Phi'(\Psi(\sigma)) = \frac{\Phi''(\xi)}{\Phi'(\xi)}\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)} = \frac{\xi\Phi''(\xi)}{\Phi'(\xi)}\frac{\Phi(\sigma)}{\xi\Phi'(\sigma)} \le \frac{H\Phi(\sigma)}{\Psi(\sigma)\Phi'(\sigma)} =$$
$$= \frac{H\Phi(\sigma)}{\sigma\Phi'(\sigma) - \Phi(\sigma)} = \frac{H}{\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) - 1} \le \frac{H}{h-1},$$

для деякого $\eta = \eta(\sigma) \in [\sigma,\, 2\sigma]$

$$\ln\, \Phi'(2\sigma) - \ln\, \Phi'(\sigma) = \frac{\Phi''(\eta)}{\Phi'(\eta)}\sigma \le \frac{\Phi''(\eta)}{\Phi'(\eta)}\eta \le H.$$

Тому

$$\ln\, \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)) - \ln\, \Phi'(\sigma) \le \frac{H}{h-1} + H,$$

і теорему 2.4 доведено.

Зауважимо, що якщо $\Phi \in \Omega(+\infty)$, то $\Phi'(\sigma) \uparrow +\infty$ $(\sigma \to +\infty)$ і, отже, $\Phi(\sigma) = \sigma\alpha(\sigma)$, де $\alpha(\sigma) \to +\infty$ $(\sigma \to +\infty)$. Якщо α - повільно зростаюча функція, то $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \to 1$ $(\sigma \to +\infty)$ і тому одна з умов теореми 2.4 не виконується. Проте у цьому випадку правильна наступна теорема.

Теорема 2.5. *Нехай* $F \in S(\Lambda, +\infty)$, *функція* $\Phi \in \Omega(+\infty)$ *така, що* Φ' *є повільно зростаючою функцією і* $\Phi'(\sigma) = (1+o(1))\Phi'(\Psi(\sigma))$ *при* $\sigma \to +\infty$. *Припустимо, що невід'ємна неперервна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція* γ *задовольняє умову* $\gamma(x) = O(\varphi(x))$ *при* $x \to +\infty$ *і* γ^{-1} *є повільно зростаючою функцією. Тоді, якщо* $\ln\, |a_n| \le -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ *для всіх* $n \ge n_0$ *і*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\gamma^{-1}(\ln\, n(t))}{t} < 1, \tag{2.13}$$

то правильна нерівність (2.8) *з* $A = +\infty$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що якщо функція α повільно зростаюча, то $\alpha^{-1}(qx) = o(\alpha^{-1}(x))$ при $x \to +\infty$ для кожного $q \in (0,\, 1)$, бо якщо б $\alpha^{-1}(qx_k) \ge \tau\alpha^{-1}(x_k)$ для деяких числа $\tau \in (0, +\infty)$ і зростаючої до $+\infty$ послідовності (x_k), то, приймаючи $t_k = \alpha^{-1}(x_k)$, ми б мали $q\alpha(t_k) \ge \alpha(\tau t_k) = (1+o(1))\alpha(t_k)$ при $k \to \infty$, що неможливо.

Зауважимо також, що $(x\Psi(\varphi(x)))' = \varphi(x)$, звідки випливає, що

$$t\Psi(\varphi(t)) \geq \int\limits_{t(1+q)/2}^{t} \varphi(x)dx \geq \frac{t(1-q)}{2}\varphi\left(\frac{(1+q)t}{2}\right).$$

Нарешті, з умов (2.13) і $\gamma(x) = O(\varphi(x))$ $(x \to +\infty)$ випливає існування чисел $q \in (0,1)$ і $A \in (0,+\infty)$ таких, що $\ln n(t) \leq \gamma(qt) \leq A\varphi(qt)$ для всіх досить великих t і, отже,

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln n(t)}{t\Psi(\varphi(t))} \leq A\frac{2}{1-q} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\varphi(qt)}{t\varphi((1+q)t/2)} = 0.$$

Тому, приймаючи $g(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma))$, з (2.13), як вище, для всіх досить великих σ отримуємо

$$\frac{\ln M_1(\sigma, F) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \leq \frac{\ln n(\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma))) + o(1)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \leq$$
$$\leq \frac{\gamma(q\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)))}{\gamma(\Phi'(\sigma))} + o(1), \quad \sigma \to +\infty,$$

і з огляду на повільне зростання функції γ^{-1} залишилось довести, що $\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)) = (1 + o(1)\Phi'(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$. Останні співвідношення легко випливає з повільного зростання функції Φ' і умови $\Phi'(\sigma) = (1 + o(1))\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma \to +\infty$. Теорему 2.5 доведено.

Нарешті, у випадку, коли $A = 0$ і $\Phi(\sigma) = B(1/|\sigma|)$, де B – повільно зростаюча функція, корисною може бути наступна теорема.

Теорема 2.6. *Нехай $F \in S(\Lambda, 0)$, $\Phi \in \Omega(0)$ і невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція γ така, що $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(2\sigma)))$ і $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(|\sigma|\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))$ при $\sigma \uparrow 0$. Тоді, якщо $\ln |a_n| \leq -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geq n_0$ і*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\gamma(\Phi'(\Psi(\varphi(\lambda_n))))} = 0, \tag{2.14}$$

то правильна нерівність (2.8) *з* $A = 0$.

Доведення. Приймемо $g(\sigma) = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma/2))$. Тоді, як і вище,

$$M_1(\sigma,F)\le \mu(\sigma,F)n(g(\sigma))+\sum_{\lambda_n>g(\sigma)}\exp\{-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))+2\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))\}\le$$
$$\le \mu(\sigma,F)n(g(\sigma))+\sum_{\lambda_n>g(\sigma)}\exp\{-\lambda_n|\Psi(\varphi(\lambda_n))|\}.$$

Неважко перевірити, що з умов (2.14) і $\gamma(\Phi'(\sigma))=O(|\sigma|\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))$ $(\sigma\uparrow 0)$ випливає співвідношення $\ln n=o(\lambda_n|\Psi(\varphi(g(\lambda_n)))|$ $(n\to\infty)$. Тому з останньої оцінки з огляду на умову $\gamma(\Phi'(\sigma))=O(\gamma(\Phi'(2\sigma)))$ $(\sigma\uparrow 0)$ отримуємо

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln M_1(\sigma,F)-\Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))}\le\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln n(g(\sigma))}{\gamma(\Phi'(\sigma))}=\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\ln n(x)}{\gamma(\Phi'(\Psi(\varphi(x))))}=0,$$

що і треба було довести.

2.3. Зв'язок між зростанням максимуму модуля і максимального члена.

За нерівністю Коші з нерівності $\ln M(\sigma,F)\le\Phi(\sigma)$ випливає нерівність $\ln\mu(\sigma,F)\le\Phi(\sigma)$. Використовуючи теореми 2.1 -2.6, можна знайти умови, за яких з оцінки для $\ln\mu(\sigma,F)$ зверху випливає подібна оцінка для $\ln M(\sigma,F)$.

Наслідок 2.3. *Нехай $\Phi\in\Omega(+\infty)$ і $\Phi'(\sigma)=O(\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma\to+\infty$, а невід'ємна неперервно диференційовна зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція γ така, що функція $\gamma(x)/x$ незростаюча на $[x_0,+\infty)$, $\ln\gamma'(x)=o(\gamma(x))$, $\ln\varphi(x)=o(\gamma(x))$ і $\gamma(x)=O(\Phi(\Psi(\varphi(x)))$ при $x\to+\infty$.*

Тоді для того, щоб для кожної функції $F\in S(\Lambda,+\infty)$ з оцінки $\ln\mu(\sigma,F)\le\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma\ge\sigma_0$ випливала оцінка

$$\ln M(\sigma,F)\le\Phi(\sigma)+o(\gamma(\Phi'(\sigma))),\quad \sigma\to+\infty, \tag{2.15}$$

необхідно і досить, щоб виконувалась умова (2.7).

Доведення. Оскільки з оцінки $\ln\mu(\sigma,F)\le\Phi(\sigma)$ $(\sigma\ge\sigma_0)$ за теоремою 1.8 випливає, що $\ln|a_n|\le-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ $(n\ge n_0)$, то за теоремою 2.3 з (2.7) випливає (2.8) з $A = +\infty$, звідки з огляду на нерівність $M(\sigma, F) \leq M_1(\sigma, F)$ отримуємо (2.15). Достатність умови (2.7) доведено.

Припустимо тепер, що умова (2.7) не виконується, тобто правильна нерівність (2.6), і розглянемо ряд Діріхле $F \in S(\Lambda, +\infty)$ з коефіцієнтами $a_n = \exp\{-\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))\}$ $(n \geq n_0)$. Для цього ряду Діріхле $M(\sigma, F) = M_1(\sigma, F)$, за теоремою 1.8 $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ $(\sigma \geq \sigma_0)$ і за наслідком 2.1 правильна нерівність (2.3). З нерівності (2.3) для деякого числа $h > 0$ і зростаючої до $+\infty$ послідовності σ_k отримуємо нерівність

$$\ln M(\sigma_k, F) \geq \Phi(\sigma_k) + h\gamma(\Phi'(\sigma_k)),$$

тобто (2.15) не виконується. Необхідність умови (2.7), а з цим і наслідок 2.3 доведено.

Використовуючи теореми 1.8, 2.2 і 2.3 і наслідок 2.2, подібно доводиться наступне твердження.

Наслідок 2.4. *Нехай* $\Phi \in \Omega(0)$ *і* $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma))$ *при* $\sigma \uparrow 0$, *а невід'ємна неперервно диференційовна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція* γ *така, що функція* $\gamma(x)/x$ *незростаюча на* $[x_0, +\infty)$, $\ln \gamma'(x) = o(\gamma(x))$ *і* $\gamma(x) = O(\Phi(\Psi(\varphi(x)))$ *при* $x \to +\infty$.

Тоді для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda, 0)$ *з оцінки* $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ *випливала оцінка*

$$\ln M(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma) + o(\gamma(\Phi'(\sigma))), \quad \sigma \uparrow 0, \tag{2.16}$$

необхідно і досить, щоб виконувалась умова (2.7).

Для цілих рядів Діріхле степеневого зростання правильне наступне твердження, яке випливає з теорем 1.8, 2.1 і 2.4.

Наслідок 2.5. *Нехай функція* $\Phi \in \Omega(+\infty)$ *така, що* $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \geq h > 1$ *і* $\sigma\Phi''(\sigma)/\Phi'(\sigma) \leq H < +\infty$ *для всіх* $\sigma \geq \sigma_0$, *а невід'ємна неперервно диференційовна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0, +\infty)$ *функція* γ *задовольняє умови* $\gamma(2x) = O(\gamma(x))$, $\gamma(x) = O(x\Psi(\varphi(x)))$, $\ln \gamma'(x) = o(\gamma(x))$ *і* $\ln \varphi(x) = o(\gamma(x))$ *при* $x \to +\infty$ *при* $x \to +\infty$.

Тоді для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda, +\infty)$ з оцінки $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0$ випливала оцінка (2.15)*, необхідно і досить, щоб виконувалась умова* (2.7)*.*

Використовуючи теореми 1.8, 2.1 і 2.5, доведемо наступне твердження для цілих рядів Діріхле повільного зростання.

Наслідок 2.6. *Нехай функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ така, що Φ' є повільно зростаючою функцією і $\Phi'(\sigma) = (1+o(1))\Phi'(\Psi(\sigma))$ при $\sigma \to +\infty$. Припустимо, що невід'ємна неперервно диференційовна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція γ задовольняє умови $\gamma(x) = O(\varphi(x))$, $\ln \gamma'(x) = o(\gamma(x))$, $\ln \varphi(x) = o(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$ і γ^{-1} є повільно зростаючою функцією.*

Тоді для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda, +\infty)$ з оцінки $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \ge \sigma_0$ випливала оцінка (2.15)*, досить, щоб виконувалась умова* (2.13)*, і необхідно, щоб*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\gamma^{-1}(\ln\, n(t))}{t} \le 1. \tag{2.17}$$

Доведення. Якщо виконується умова (2.13), то існує $q \in (0, 1)$ таке, що $\ln n(t) \le \gamma(qt)$ для всіх $t \ge t(q)$. Тоді

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln n(t)}{\gamma(t)} \le \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\gamma(qt)}{\gamma(t)} = 0,$$

бо γ^{-1} є повільно зростаючою. Справді, якщо б $\gamma(qt_k) \ge a\gamma(t_k)$ для деяких числа $a > 0$ і послідовності $t_k \uparrow +\infty$, то ми мали б

$$qt_k \ge \gamma^{-1}(a)\gamma(t_k) = (1 + o(1))t_k, \quad k \to \infty,$$

що неможливо.

Отже з умови (2.13) випливає (2.7) і з огляду на теорему 2.3 достатність умови (2.13) доведено.

Для доведення необхідності умови (2.17) припустимо, що

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\gamma^{-1}(\ln\, n(t))}{t} > 1.$$

Тоді існує число $p > 1$ і зростаюча до $+\infty$ послідовність (t_k) такі, що $\ln\, n(t_k) \ge \gamma(pt_k) > \gamma(t_k)$, тобто послідовність Λ задовольняє умову (2.2), а звідси, як у доведенні наслідку 2.1, отримуємо існування функції $F \in S(\Lambda, +\infty)$, для якої оцінка (2.15) не є правильною.

Нарешті, використовуючи теореми 1.8, 2.2, 2.6 і наслідок 2.2, подібно доводиться наступне твердження.

Наслідок 2.7. *Нехай $\Phi \in \Omega(0)$, а невід'ємна неперервно диференційовна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція γ така, що $\ln \gamma'(x) = o(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$ і $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(2\sigma)))$ та $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(|\sigma|\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))$ при $\sigma \uparrow 0$.*

Тоді для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda, 0)$ з оцінки $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ випливала оцінка (2.16), *необхідно, щоб виконувалась умова* (2.7), *і досить, щоб виконувалась умова* (2.14).

Зауваження 2.1. З умови $\ln \gamma'(x) = o(\gamma(x))$ при $x \to +\infty$ випливає, що $\gamma(x)$ зростає швидше, ніж $\ln x$. Припустимо, що $\gamma(x) = \ln^{1+\alpha} x$ при $x \ge x_0$, де $\alpha > 0$, а $\Phi(\sigma) = \ln^{1+\beta}(1/|\sigma|)$, де $\beta \ge \alpha$, і покажемо, що у цьому випадку умови (2.7) і (2.14) є рівносильними. Справді,

$$\Phi'(\sigma) = \frac{1+\beta}{|\sigma|} \ln^{\beta} \frac{1}{|\sigma|}, \Psi(\sigma) = -\frac{(1+o(1))|\sigma|}{1+\beta} \ln^{\beta} \frac{1}{|\sigma|} (\sigma \uparrow 0)$$

і

$$\varphi(x) = -\frac{(1+o(1))(1+\beta)}{x} \ln^{\beta} x \quad (x \to +\infty).$$

Легко перевірити, що

$$\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(\gamma(\Phi'(2\sigma))) \quad (\sigma \uparrow 0),$$

а з огляду на нерівність $\beta \ge \alpha$ і $\gamma(\Phi'(\sigma)) = O(|\sigma|\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)))$ $(\sigma \uparrow 0)$. Далі, оскільки

$$\Phi'(\Psi(\varphi(x))) = \frac{(1+o(1))(1+\beta)x}{\ln x}$$

$(x \to +\infty)$ і $\gamma(x) = \ln^{1+\alpha} x$, то умови (2.7) і (2.14) є рівносильними. Отже, правильне наступне твердження: *якщо $\beta \ge \alpha > 0$, то для того, для кожної функції $F \in S(\Lambda, 0)$ з оцінки $\ln \mu(\sigma, F) \le \ln^{1+\beta}(1/|\sigma|)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ випливала оцінка*

$$\ln M(\sigma, F) \le \ln^{1+\beta}(1/|\sigma|) + o(\ln^{1+\alpha}(1/|\sigma|)) \quad (\sigma \uparrow 0),$$

необхідно і досить, щоб $\ln n = o(\ln^{1+\alpha} \lambda_n)$ $(n \to \infty)$.

2.4. Багаточленні степеневі асимптотики рядів Діріхле.

Використовуючи результати попереднього підрозділу, можна встановити зв'язок між зростанням максимуму модуля і максимального члена в термінах багаточленних асимтотик. Почнемо зі степеневої асимптотики для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності.

Нехай $T_1 > 0$, $T_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $(2 \le j \le m)$, $0 < \varrho < \varrho_m < ... < \varrho_2 < \varrho_1$ і, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Згідно з нерівністю Коші з асимптотичної нерівності

$$\ln M(\sigma, F) \le \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|\varrho_j} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma \uparrow 0, \tag{2.18}$$

випливає асимптотична нерівність

$$\ln \mu(\sigma, F) \le \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma \uparrow 0. \tag{2.19}$$

Наступна теорема вказує умову на послідовність Λ, за якою співвідношення (2.18) і (2.19) є рівносильними.

Теорема 2.7. *Для того, щоб для кожної функції* $F \in S(\Lambda, 0)$ *співвідношення* (2.18) *і* (2.19) *були рівносильними, необхідно і досить, щоб* $\ln n(t) = o(t^{\varrho/(\varrho_1+1)})$ *при* $t \to +\infty$. *Ця умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей*

$$\ln M(\sigma, F) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma \uparrow 0, \tag{2.20}$$

і

$$\ln \mu(\sigma, F) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{(1+o(1))\tau}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma \uparrow 0. \tag{2.21}$$

Доведення. Виберемо функцію $\Phi \in \Omega(0)$ так, щоб

$$\Phi(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{\tau+\varepsilon}{|\sigma|^{\varrho}}, \quad \sigma_0 \le \sigma < 0 \tag{2.22}$$

де $\varepsilon > 0$. Тоді з огляду на (2.19) $\ln\,\mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$. Неважко перевірити, що

$$\Psi(\sigma) = (1 + o(1))\frac{\varrho_1 + 1}{\varrho_1}\sigma$$

і

$$\Phi'(\sigma) = (1 + o(1))\left(\frac{\varrho_1 + 1}{\varrho_1}\right)^{\varrho_1+1}\Phi'(\Psi(\sigma))$$

при $\sigma \uparrow 0$, а

$$\varphi(x) = (1 + o(1))\left(\frac{T_1\varrho_1}{x}\right)^{1/(\varrho_1+1)}$$

і

$$\Phi(\Psi(\varphi(x))) = (1 + o(1))\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1 + 1}\right)^{\varrho_1}\left(\frac{x}{T_1\varrho_1}\right)^{\varrho_1/(\varrho_1+1)}$$

при $x \to +\infty$. Тому, якщо приймемо $\gamma(x) = x^{\varrho/(\varrho_1+1)}$, то всі умови наслідку 2.4 будуть виконуватись і, отже, для того, щоб для кожної функцію $F \in S(\Lambda, 0)$ з оцінки $\ln\,\mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, 0)$ випливала оцінка (2.15), необхідно і досить, щоб виконувалась умова (2.7), тобто умова $\ln\,n(t) = o(t^{\varrho/(\varrho_1+1)})$ при $t \to +\infty$. Але

$$\gamma(\Phi'(\sigma)) = (1 + o(1))(T_1\varrho_1)^{\varrho/(\varrho_1+1)}|\sigma|^{-\varrho}$$

при $\sigma \uparrow 0$. Тому співвідношення (2.15) рівносильне асимптотичній нерівності

$$\ln\,M(\sigma, F) \le \frac{T_1}{|\sigma|^{\varrho_1}} + \sum_{j=2}^{m}\frac{T_j}{|\sigma|^{\varrho_j}} + \frac{\tau + \varepsilon}{|\sigma|^{\varrho}} + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\varrho}}\right), \quad \sigma \uparrow 0,$$

і з огляду на довільність ε маємо (2.18). Першу частину теореми 2.7 доведено.

Щоб довести достатність умови $\ln\,n(t) = o(t^{\varrho/(\varrho_1+1)})$ при $t \to +\infty$ для еквівалентності рівностей (2.20) і (2.21) зауважимо, що за цієї умови нерівність (2.10) згідно з вибором (2.22) функції Φ має вигляд

$$\ln\,\mu(\sigma, F) \le \ln\,M(\sigma, F) \le \ln\,\mu(\sigma, F) + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\varrho}}\right), \quad \sigma \uparrow 0,$$

звідки, завдяки довільності ε легко випливає еквівалентність (2.20) і (2.21). Теорему 2.7 повністю доведено.

Перейдемо до цілих рядів Діріхле. В [76] доведено наступну теорему про багаточленну показникову асмптотику.

Теорема 2.8. *Нехай* $m \geq 3$, $0 < \varrho_m < \cdots < \varrho_2 < \varrho_1 < +\infty$, $T_1 > 0$, $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(2 \leq j \leq m-1)$ *і* $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Для того, щоб для кожного ряду Діріхле з $S(\Lambda; +\infty)$ *асимптотичні нерівності*

$$\ln M(\sigma, F) \leq \sum_{j=1}^{m-1} T_j \exp\{\varrho_j \sigma\} + (1 + o(1)\tau \exp\{\varrho_m \sigma\}, \quad \sigma \to +\infty, \quad (2.23)$$

і

$$\ln M(\sigma, F) \leq \sum_{j=1}^{m-1} T_j \exp\{\varrho_j \sigma\} + (1 + o(1)\tau \exp\{\varrho_m \sigma\}, \quad \sigma \to +\infty, \quad (2.24)$$

були рівносильними, досить, а у випадку, коли $\varrho_m + \varrho_1 > 2\varrho_2$, *і небхідно, щоб*

$$\ln n = o(\lambda_n^{\varrho_m/\varrho_1}), \quad n \to \infty. \quad (2.25)$$

Покажемо, що умова $\varrho_m + \varrho_1 > 2\varrho_2$ в цій теоремі є зайвою. Справді, нехай функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ така, що

$$\Phi(\sigma) = \sum_{j=1}^{m-1} T_j \exp\{\varrho_j \sigma\} + \tau \exp\{\varrho_m \sigma\}$$

для $\sigma \geq \sigma_0$, φ - функція, обернена до Φ', а Ψ - функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Приймемо $a_n = \exp\{-\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))\}$ для всіх $n \geq 0$. Тоді за теоремою 1.8 $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх σ, тобто правильна нерівність (2.23).

Якщо ж умова (2.25) не виконується, то існує число $\alpha > 0$ таке, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n^{\varrho_m/\varrho_1}} > \alpha,$$

тобто виконується умова (2.11) з $\gamma(x) = \alpha x^{\varrho_m/\varrho_1}$, а оскільки $M(\sigma, F) = M_1(\sigma, F)$, то за теоремою 2.1

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln M_1(\sigma, F) - \Phi(\sigma)}{\alpha(\Phi'(\sigma))^{\varrho_m/\varrho_1}} = \beta > 0.$$

Але $\Phi'(\sigma) = (1 + o(1))T_1 \varrho_1 \exp\{\varrho_1 \sigma\}$ при $\sigma \to +\infty$. Тому існує зростаюча до $+\infty$ послідовність (σ_s), для якої

$$\ln\, M(\sigma_s, F) \geq \sum_{j=1}^{m-1} T_j \exp\{\varrho_j \sigma_s\} +$$
$$+ (1 + o(1)(\tau + \alpha\beta(T_1\varrho_1)^{\varrho_m/\varrho_1}) \exp\{\varrho_m \sigma_s\}, \quad s \to \infty,$$

тобто (2.24) не виконується.

Розглянемо ще багаточленну степеневу асимптотику для цілих рядів Діріхле. Нехай T_j і τ такі, як вище, а $p_1 > 1$ і $0 < p < p_m < \cdots < p_2 < p_1$. Правильний наступний аналог теореми 2.7.

Теорема 2.9. *Для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda, +\infty)$ співвідношення*

$$\ln\, M(\sigma, F) \leq T_1\sigma^{p_1} + \sum_{j=2}^{m} T_j \sigma^{p_j} + (1 + o(1))\tau\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty, \tag{2.26}$$

і

$$\ln\, \mu(\sigma, F) \leq T_1\sigma^{p_1} + \sum_{j=2}^{m} T_j \sigma^{p_j} + (1 + o(1))\tau\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty, \tag{2.27}$$

були рівносильними, необхідно і досить, щоб $\ln n(t) = o(t^{p/(p_1-1)})$ при $t \to +\infty$. Ця умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей

$$\ln\, M(\sigma, F) = T_1\sigma^{p_1} + \sum_{j=2}^{m} T_j \sigma^{p_j} + (1 + o(1))\tau\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty, \tag{2.28}$$

і

$$\ln\, \mu(\sigma, F) = T_1\sigma^{p_1} + \sum_{j=2}^{m} T_j \sigma^{p_j} + (1 + o(1))\tau\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty. \tag{2.29}$$

Доведення. З огляду на нерівність Коші треба довести, що умова $\ln n(t) = o(t^{p/(p_1-1)})$, $t \to +\infty$, є необхідною і достатньою для того, щоб з (2.27) випливало (2.26). Виберемо функцію $\Phi \in \Omega(+\infty)$ так, щоб

$$\Phi(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + \sum_{j=1}^{m} T_j \sigma^{p_j} + (\tau + \varepsilon)\sigma^p, \quad \sigma \geq \sigma_0.$$

Тоді з огляду на (2.27) $\ln\mu(\sigma,F)\le\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma\ge\sigma_0$. Неважко перевірити, що $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)=p_1+o(1)$ і $\sigma\Phi''(\sigma)/\Phi'(\sigma)=p_1-1+o(1)$ при $\sigma\to+\infty$, тобто з огляду на умову $p_1>1$ функція Φ задовольняє умови наслідку 2.3. Далі,

$$\Psi(\sigma)=(1+o(1))\frac{\sigma(p_1-1)}{p_1},\quad \sigma\to+\infty,$$

а

$$\varphi(x)=(1+o(1))\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{1/(p_1-1)}$$

і

$$x\Psi(\varphi(x))=(1+o(1))T_1(p_1-1)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{p_1/(p_1-1)}$$

при $x\to+\infty$. Тому, якщо приймемо $\gamma(x)=x^{p/(p_1-1)}$, то і функція γ задовольняє умови наслідку 2.3. За цим наслідком для того, щоб для кожної функції $F\in S(\Lambda,+\infty)$ з оцінки $\ln\mu(\sigma,F)\le\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma\ge\sigma_0$ випливала оцінка (2.15), необхідно і досить, щоб виконувалась умова (2.7), тобто умова $\ln n(t)=o(t^{p/(p_1-1)})$ при $t\to+\infty$. Але

$$\gamma(\Phi'(\sigma))=(1+o(1))(T_1p_1)^{p/(p_1-1)}\sigma^p$$

при $\sigma\to+\infty$. Тому співвідношення (2.15) рівносильне асимптотичній нерівності

$$\ln M(\sigma,F)\le T_1\sigma^{p_1}+\sum_{j=2}^{m}T_j\sigma^{p_j}+(\tau+\varepsilon)\sigma^p+o(\sigma^p),\quad \sigma\to+\infty,$$

і з огляду на довільність ε маємо (2.26). Першу частину теореми 2.9 доведено.

Доведення достатності умови $\ln n(t)=o(t^{p/(p_1-1)})$ при $t\to+\infty$ для еквівалентності рівностей (2.28) і (2.29) таке ж, як доведення другої частини теореми 2.7.

Зауваження 2.2. В [14] помилково стверджується, що необхідною і достатньою для еквівалентності співвідношень (2.28) і (2.29) є умова $\ln n(t)=o(t^{p/p_1})$ при $t\to+\infty$. Насправді в [70] доведено тільки, що ця умова є достатньою, а необхідною є умова $\ln n(t) = o(t^{p/(p_1-1)})$ при $t \to +\infty$. В [15] цю недоречність дещо виправлено. Показано, що умова $\ln n(t) = o(t^{p/(p_1-1)})$ при $t \to +\infty$ є достатньою для для еквівалентності співвідношень (2.28) та (2.29) і необхідною для еквівалентності співвідношень (2.26) та (2.27).

Зауваження 2.3. В [79] О.М.Сумик застосувала результати підрозділу 2.3 до вивчення загальної двочленної асимптотики цілих рядів Діріхле, в означеній Шереметою [70] шкалі зростання.

2.5. Висновки.

Для функції F, зображеної рядом Діріхле з коефіцієнтами a_n, невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками λ_n і абсцисою абсолютної збіжності $A \in (-\infty, +\infty]$ отримано оцінки знизу і зверху функції

$$M_1(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\}.$$

Припускаючи, що додатна і опукла на $(-\infty, A)$ функція Φ така, що Φ' на $(-\infty, A)$ є додатною, неперервно диференційованою і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, A)$, приймемо $\Psi(\sigma) = \sigma - \dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ - функцію, асоційовану з Φ за Ньютоном і через φ позначимо функцію, обернену до Φ.

Основними результатами другого розділу є теореми, які з одного боку вказують на умови на додатну зростаючу до $+\infty$ функцію γ за яких з нерівностей $\ln|a_n| \geq -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))(n \geq n_0)$ і $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)} > 1$ випливає нерівність

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln M_1(\sigma, F) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} > 0,$$

а з іншого боку з нерівності $\ln|a_n| \leq -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))(n \geq n_0)$ і умови $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\gamma(\lambda_n)} = 0$ випливає нерівність

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln M_1(\sigma, F) - \Phi(\sigma)}{\gamma(\Phi'(\sigma))} \leq 0.$$

Використовуючи ці теореми, отримано нові зв'язки між зростанням максимуму модуля функції на вертикальній прямій і максимального члена ряду Діріхле, зокрема, у термінах багаточленних асимптотик.

РОЗДІЛ 3

БАГАТОЧЛЕННА СТЕПЕНЕВА АСИМПТОТИКА РЯДУ ДІРІХЛЕ З НУЛЬОВОЮ АБСЦИСОЮ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ

У цьому розділі будуть знайдені умови на показники та коефіцієнти абсолютно збіжного у півплощині $\{s : Res < 0\}$ ряду Діріхле (2.1), за яких правильна асимптотична рівність (2.21). Згідно з теоремою 2.7 ця рівність за умови $\ln\, n(t) = o(t^{\varrho/(\varrho_1+1)})$ рівносильна до асимптотичної рівності (2.20). Основним у цьому розділі є дослідження багаточленної асимптотики логарифма максимального члена.

3.1. Багаточленна степенева асимптотика логарифма максимального члена ряду Діріхле, абсолютно збіжного у півплощині.

Отже, нехай $\Phi \in \Omega(0)$ - така функція, що

$$\Phi(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{\tau}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma_0 \le \sigma < 0. \tag{3.1}$$

де $T_1 > 0$ $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, j = \overline{2, n-1}, \quad \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad 0 < \rho_n < ... < \rho_2 < \rho_1 \quad i \quad \dfrac{\rho_1 + \rho_n}{2} > \rho_2$.

Для функції (3.1) асимптотику оберненої функції φ описує наступна лема.

Лема 3.1. *Якщо функція $\Phi \in \Omega(0)$ така, що виконується* (3.1), *то для функції φ при $x \to +\infty$ правильна наступна асимптотична рівність*

$$\varphi(x) = -\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}} - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\rho_j T_j}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}} - \\ - \frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}.$$

Доведення. Оскільки

$$\Phi'(\sigma) = \frac{T_1\rho_1}{|\sigma|^{\rho_1+1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j\rho_j}{|\sigma|^{\rho_j+1}} + \frac{\tau\rho_n}{|\sigma|^{\rho_n+1}},$$

то для знаходження асимптотики функції φ треба розв'язати рівняння

$$\frac{T_1\rho_1}{|\sigma|^{\rho_1+1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j\rho_j}{|\sigma|^{\rho_j+1}} + \frac{\tau\rho_n}{|\sigma|^{\rho_n+1}} = x. \tag{3.2}$$

Легко побачити, що розв'язок $\sigma = \sigma(x)$ цього рівняння задовольняє умову

$$\frac{T_1\rho_1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}(1+o(1)) = x \quad (x \to +\infty),$$

і тому будемо шукати його у вигляді

$$|\sigma| = \left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}} + \alpha(x), \tag{3.3}$$

де

$$\alpha = \alpha(x) = o(x^{-\frac{1}{\rho_1+1}}) \quad (x \to +\infty).$$

Підставляючи (3.3) в (3.2), дістанемо

$$\frac{T_1\rho_1}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}} + \alpha(x)\right)^{\rho_1+1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j\rho_j}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}} + \alpha(x)\right)^{\rho_j+1}} + \\ \frac{\tau\rho_n}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}} + \alpha(x)\right)^{\rho_n+1}} = x,$$

тобто

$$\frac{x}{\left(1+\alpha(x)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{\rho_1+1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j\rho_j}{\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{\rho_j+1}{\rho_1+1}}\left(1+\alpha(x)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{\rho_j+1}} +$$

$$+\frac{\tau\rho_n}{\left(\dfrac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{\rho_n+1}{\rho_1+1}}\left(1+\alpha(x)\left(\dfrac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{\rho_n+1}}=x,$$

звідки

$$\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(\rho_1+1)}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(\rho_j+1)}+$$

$$+\frac{\tau\rho_n}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(\rho_n+1)}=1.$$

Звідси при $x\to+\infty$ отримуємо

$$1-(\rho_1+1)\alpha\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+O\left(\alpha^2x^{\frac{2}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\rho_jT_j}{\rho_1T_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1-(\rho_j+1)\alpha\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+O\left(\alpha^2x^{\frac{2}{\rho_1+1}}\right)\right)+$$

$$+\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}=1,$$

тобто

$$\alpha=\sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{\rho_jT_j}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-\frac{\rho_jT_j(\rho_j+1)}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}\alpha+\right.$$

$$\left.+O\left(\alpha^2x^{\frac{\rho_j-\rho_1+1}{\rho_1+1}}\right)\right)+\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+O\left(\alpha^2x^{\frac{2}{\rho_1+1}}\right),\quad x\to+\infty. \tag{3.4}$$

Оскільки $\alpha(x)x^{\frac{1}{\rho_1+1}}\to 0\quad(x\to+\infty)$, то звідси

$$\alpha=\frac{\rho_2T_2(1+o(1))}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}=\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta, \tag{3.5}$$

де

$$\beta=\beta(x)=o(x^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}),\quad x\to+\infty,$$

і, отже, з (3.4) отримуємо

$$\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta=$$

$$=\sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{\rho_j T_j}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-\frac{\rho_j T_j(\rho_j+1)}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta\right)+O\left(x^{\frac{2\rho_2-3\rho_1+\rho_j-1}{\rho_1+1}}\right)\right)+$$

$$+\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+O\left(x^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\right),\quad x\to+\infty,$$

звідки легко випливає, що при $x\to+\infty$

$$\beta(x)=\sum_{j=3}^{n-1}\frac{\rho_j T_j}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-$$

$$-(1+o(1))\sum_{j=2}^{n-1}\frac{\rho_j T_j(\rho_j+1)}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j+\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+O\left(x^{\frac{2\rho_2-3\rho_1+\rho_j-1}{\rho_1+1}}\right)+\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+O\left(x^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\right),\quad (3.6)$$

Оскільки $\rho_n>2\rho_2-\rho_1$, то

$\rho_n-\rho_1-1>2(\rho_j-\rho_1)-1>3(\rho_j-\rho_1)-1>...>m(\rho_j-\rho_1)-1,\quad j=\overline{2,n-1}$

і з (3.6) отримуємо

$$\beta(x)=\frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=3}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}},\quad x\to+\infty,$$

Тому з (3.3) і (3.5) випливає твердження леми 3.1.

Використовуючи лему 3.1, знайдемо асимтотичні формули для $\Phi(\varphi(x))$ і $x\Psi(\varphi(x))$, де $\Psi(\sigma)=\sigma-\dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$.

Лема 3.2. *Якщо функція $\Phi\in\Omega(0)$ така, що виконується (3.1), то при $x\to+\infty$ правильні наступні асимптотичні рівності*

$$x\Psi(\varphi(x))=-T_1(\rho_1+1)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-$$

$$- (\tau + o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} \quad (3.7)$$

і

$$\Phi(\varphi(x)) = T_1\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \sum_{j=2}^{n-1} T_j\left(1 - \frac{\rho_j}{\rho_1+1}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} +$$
$$+ \frac{(\tau + o(1))(\rho_1 - \rho_n + 1)}{\rho_1+1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}. \quad (3.8)$$

Доведення. Оскільки $x\Psi(\varphi(x)) = \int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt + const$, то при $x \to +\infty$

$$x\Psi(\varphi(x)) = -\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\int_{x_0}^{x} x^{-\frac{1}{\rho_1+1}} -$$
$$- \sum_{j=2}^{n-1}\frac{\rho_j T_j}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\int_{x_0}^{x} x^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}} -$$
$$- \frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\int_{x_0}^{x} x^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}} + const =$$
$$= -\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\frac{\rho_1+1}{\rho_1}x^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - \sum_{j=2}^{n-1}\frac{\rho_j T_j}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{\rho_1+1}{\rho_j}x^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} -$$
$$- \frac{\tau\rho_n(1+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{\rho_1+1}{\rho_n}x^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} + const =$$
$$= -T_1(\rho_1+1)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - \sum_{j=2}^{n-1} T_j\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} - (\tau + o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}},$$

тобто отримуємо асимптотичну рівність (3.7).

Використовуючи рівність $\Phi(\varphi(x)) = x\varphi(x) - x\Psi(\varphi(x))$ отримуємо асимптотичну рівність (3.8).

Для функції $\Phi \in \Omega(0)$ нехай, як вище,

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi) = \frac{t_k t_{k+1}}{t_{k+1} - t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt, \quad (3.9)$$

де $0 < t_k \uparrow +\infty \quad (k \to \infty)$. З (3.8) випливає, що

$$G_1(t_k,t_{k+1},\Phi)=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\times$$

$$\times\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(T_1\left(\frac{t}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(1-\frac{\rho_j}{\rho_1+1}\right)\left(\frac{t}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\tau+o(1))(\rho_1-\rho_n+1)}{\rho_1+1}\left(\frac{t}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\right)\frac{t^2}{dt}=$$

$$=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\left(T_1\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}t^{\frac{-\rho_1-2}{\rho_1+1}}dt+\right.$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(1-\frac{\rho_j}{\rho_1+1}\right)\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}t^{\frac{\rho_j-2\rho_1-2}{\rho_1+1}}dt+$$

$$\left.+\frac{(\tau+o(1))(\rho_1-\rho_n+1)}{\rho_1+1}\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}t^{\frac{\rho_n-2\rho_1-2}{\rho_1+1}}dt\right)=$$

$$=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\left\{T_1(\rho_1+1)\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(t_k^{\frac{-1}{\rho_1+1}}-t_{k+1}^{\frac{-1}{\rho_1+1}}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\left(t_k^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-t_{k+1}^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$\left.+(\tau+o(1))\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\left(t_k^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-t_{k+1}^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)\right\},\quad k\to\infty.$$

Припустимо, що $t_{k+1}=t_k(1+\theta_k)$, де $\theta_k>0$. Тоді при $k\to\infty$ маємо

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=\frac{t_k(1+\theta_k)}{\theta_k}\left(T_1(\rho_1+1)\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}t_k^{\frac{-1}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{-1}{\rho_1+1}}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}t_k^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$\left.+(\tau+o(1))\left(\frac{1}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}t_k^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)\right)=$$

$$=\frac{(1+\theta_k)}{\theta_k}\left(T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{-1}{\rho_1+1}}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$+ (\tau + o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\left(1 - (1+\theta_k)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)\Bigg). \quad (3.10)$$

Звідси легко випливають дві наступні леми.

Лема 3.3. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to +\infty$ при $j \to \infty$, то для цієї послідовності за умови леми 3.1 при $j \to \infty$*

$$G_1(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) = (1+o(1))T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}.$$

Лема 3.4. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \theta \in (0, +\infty)$ при $j \to \infty$, то для цієї послідовності за умови леми 3.1 при $j \to \infty$*

$$G_1(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) = (1+o(1))T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta}{\theta}\left(1-(1+\theta)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\right).$$

Припустимо тепер, що $\theta_k \to 0 \quad (k \to \infty)$. Тоді з огляду на (3.10)

$$G_1(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) = T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\times$$
$$\times\left(1 - \left(1 - \frac{\theta_k}{\rho_1+1} + \frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2} - \frac{(\rho_1+2)(2\rho_1+3)\theta_k^3}{6(\rho_1+1)^3} + O(\theta_k^4)\right)\right) +$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1} T_j\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\times$$
$$\left(1 - \left(1 + \frac{(\rho_j-\rho_1-1)\theta_k}{\rho_1+1} + \frac{(\rho_j-2\rho_1-2)(\rho_j-\rho_1-1)\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2} + O(\theta_k^3)\right)\right) +$$
$$+ (\tau + o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left(1 - \left(1 + \frac{(\rho_n-\rho_1-1)\theta_k}{\rho_1+1} + O(\theta_k^2)\right)\right)\Bigg) =$$
$$= T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}(1+\theta_k)\left(1 - \frac{(\rho_1+2)\theta_k}{2(\rho_1+1)} - \frac{(\rho_1+2)(2\rho_1+3)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2} + O(\theta_k^3)\right) -$$
$$-\sum_{j=2}^{n-1}\left(T_j\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}(1+\theta_k)\left(\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(\rho_j-2\rho_1-2)(\rho_j-\rho_1-1)\theta_k}{2(\rho_1+1)^2} + O(\theta_k^2)\right)\right) -$$

$$-\frac{(\tau+o(1))(\rho_n-\rho_1-1)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}, \quad k\to\infty.$$

Звідси випливає наступна лема.

Лема 3.5. *Нехай функція* $\Phi\in\Omega(0)$ *така, що виконується* (3.1), *а* $\theta_k\to 0\quad(k\to\infty)$. *Тоді при* $k\to\infty$

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{T_1\rho_1(\rho_1+2)}{6(\rho_1+1)^2}\theta_k^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j(\rho_1+1-\rho_j)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)}{2(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\theta_k+\frac{(\tau+o(1))(\rho_1+1-\rho_n)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}+$$
$$+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2).$$

Для того, щоб отримати асимптотичне поводження величини

$$G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)=\Phi\left(\frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)dt\right) \tag{3.11}$$

дослідимо спочатку поводження величини

$$\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)=\frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)dt. \tag{3.12}$$

За умови леми 3.1, як видно з доведення рівності (3.7), маємо

$$|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|=\frac{\rho_1+1}{\rho_1}(T_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\frac{t_{k+1}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}}{(t_{k+1}-t_k)}+$$
$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}}\frac{t_{k+1}^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}}{(t_{k+1}-t_k)}+\frac{(\tau+o(1))}{(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}}\frac{t_{k+1}^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}}{(t_{k+1}-t_k)}.$$

Якщо $t_{k+1}=t_k(1+\theta_k)$, де $\theta_k>0$, то при $k\to\infty$ отримуємо

$$|\varkappa(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)|=\frac{\rho_1+1}{\rho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\frac{((1+\theta_k)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1)}{\theta_k}+$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{T_1\rho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{((1+\theta_k)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-1)}{\theta_k}+$$
$$+\frac{(\tau+o(1))}{T_1\rho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{((1+\theta_k)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}-1)}{\theta_k}. \quad (3.13)$$

Припустимо, що існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j}\to+\infty\quad(j\to\infty)$. Для цієї послідовності з огляду на (3.13) при $j\to\infty$ маємо

$$|\varkappa(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)|=\frac{\rho_1+1}{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\theta_{k_j}^{-\frac{1}{\rho_1+1}}(1+o(1)),$$

і оскільки

$$G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)=\Phi(\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi))=\frac{T_1(1+o(1))}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_1}},\quad k\to\infty,$$

то звідси легко отримуємо наступну лему.

Лема 3.6. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j}\to+\infty$ при $j\to\infty$, то для цієї послідовності за умови леми 3.1*

$$G_2(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=(1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_{k_j}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\quad(j\to\infty).$$

Подібно доводиться наступна лема.

Лема 3.7. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j}\to\theta\in(0,+\infty)$ при $j\to\infty$, то для цієї послідовності за умови леми 3.1 при $j\to\infty$*

$$G_2(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=$$
$$=(1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(\frac{((1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1)}{\theta}\right)^{-\rho_1}.$$

Припустимо тепер, що $\theta_k\to0\quad(k\to\infty)$. Тоді з огляду на (3.10) отримаємо

$$
|\varkappa(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)|=\frac{\rho_1+1}{\rho_1\theta_k}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\Bigg(1+\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\theta_k-\frac{\rho_1\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2}+
$$

$$
+\frac{\rho_1(\rho_1+2)\theta_k^3}{6(\rho_1+1)^3}+O(\theta_k^4)-1\Bigg)+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{T_1\rho_1\theta_k}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\Bigg(1+\frac{\rho_j}{\rho_1+1}\theta_k-
$$

$$
-\frac{\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^3)-1\Bigg)+\frac{(\tau+o(1))}{T_1\rho_1\theta_k}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\times
$$

$$
\times\left(1+\frac{\rho_n}{\rho_1+1}\theta_k+O(\theta_k^2)-1\right)=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}-
$$

$$
-\frac{\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}+O(\theta_k^3t_k^{-\frac{1}{\rho_1+1}})+
$$

$$
+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+
$$

$$
+O(\theta_k^2t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}})\Bigg)+\frac{\rho_n(\tau+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1-1}{\rho_1+1}}=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\Bigg(1-\frac{\theta_k}{2(\rho_1+1)}+
$$

$$
+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}-
$$

$$
-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{\rho_n(\tau+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}+
$$

$$
+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\Bigg),\quad k\to\infty. \quad (3.14)
$$

Через $B(t_k,\theta_k)$ позначимо наступну величину

$$
B(t_k,\theta_k)=-\frac{\theta_k}{2(\rho_1+1)}+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}-
$$

$$
-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{\rho_n(\tau+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}.
$$

Тому при $k\to\infty$

$$
|\varkappa(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)|=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\Bigg(1+B(t_k,\theta_k)+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\Bigg).
$$

Оскільки $B(t_k,\theta_k)\to 0 \quad (k\to\infty)$, то для $p>0$ з (3.14) отримуємо

$$\frac{1}{|\varkappa(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)|^p}=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\left\{1+B(t_k,\theta_k)+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\right\}^{-p}=$$

$$=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\left\{1-pB(t_k,\theta_k)+\frac{p(p+1)}{2}B^2(t_k,\theta_k)+O\left(B^3(t_k,\theta_k)\right)+O(\theta_k^3)+\right.$$

$$\left.+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\right\}=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\left\{1+\frac{p\theta_k}{2(\rho_1+1)}-\frac{p(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}-\right.$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{pT_j\rho_j}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{pT_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{p\rho_n(\tau+o(1))}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{p(p+1)}{2}\frac{\theta_k^2}{4(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3)+$$

$$\left.+O(\theta_k t_k^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}})\right\},\quad k\to\infty,$$

а оскільки

$$G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)=\Phi(\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi))=$$

$$=\frac{T_1}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_j}}+\frac{\tau}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_n}}\quad (k\ge k_0),$$

то звідси одержуємо

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+\tau\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}-$$

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j}{(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+\frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)\theta_k}{2(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}-\frac{T_1\rho_1(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{T_1\rho_1\theta_k^2}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{\tau\rho_n}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+$$

$$+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2),\quad k\to\infty.$$

Отже, доведемо наступний аналог леми 3.5.

Лема 3.8. *Нехай функція* $\Phi \in \Omega(0)$ *така, що виконується* (3.1), *а* $\theta_k \to 0 \quad (k \to \infty)$. *Тоді*

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} -$$
$$- \frac{T_1\rho_1(\rho_1+5)}{24(\rho_1+1)^2}\theta_k^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j(\rho_1+1-\rho_j)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} +$$
$$+ \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j\rho_j(\rho_1+1-\rho_j)}{2(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}\theta_k +$$
$$+ \frac{(\rho_1+1-\rho_n)(\tau+o(1))}{\rho_1+1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}} + O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3) + O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2), \quad k \to \infty,$$

З лем 3.5 і 3.8 отримуємо наступну лему.

Лема 3.9. *Нехай функція* $\Phi \in \Omega(0)$ *така, що виконується* (3.1), *а* $\theta_k \to 0 (k \to \infty)$. *Тоді*

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) - G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = \frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2 +$$
$$+ O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}) + o\left(t_k^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\right), \quad k \to \infty,$$

Використовуючи леми 3.3 - 3.9, доведемо ще таку лему.

Лема 3.10. *Нехай*

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{\tau-\varepsilon}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma_0 \le \sigma < 0,$$

$$\Phi_2(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{\tau+\varepsilon}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma_0 \le \sigma < 0.$$

Припустимо, що $t_{k+1} = (1+\theta_k)t_k$ *і для всіх* $k \ge k_0$

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) \ge \Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)). \tag{3.15}$$

Тоді $\theta_k \to 0$ *і*

$$\theta_k^2 \le \frac{16(\rho_1+1)}{T_1\rho_1}(\varepsilon+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}} + o\left(t_k^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}\right), \quad k \to \infty.$$

Доведення. Оскільки $\Phi_1(\sigma) = \Phi_2(\sigma) - \dfrac{2\varepsilon}{|\sigma|^{\rho_n}}$, $\Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)) =$ $= G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)$, то з (3.15) маємо

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) \geq G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) - \frac{2\varepsilon}{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^{\rho_n}}. \qquad (3.16)$$

Припустимо, що $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \theta_k = +\infty$. Тоді існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \infty \quad (j \to \infty)$, а для цієї послідовності за лемами 3.3 і 3.6 маємо

$$T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} \geq (1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_{k_j}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad j\to\infty,$$

що неможливо.

Якщо $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \theta_k = \theta \in (0, +\infty)$, то існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \theta (j \to \infty)$, а для цієї послідовності з огляду на леми 3.4 і 3.7 правильна асимптотична нерівність

$$T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta}{\theta}\left(1-(1+\theta)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\right) \geq$$
$$(1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(\frac{\theta}{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1}\right)^{\rho_1}, \quad j\to\infty,$$

звідки випливає, що

$$(\rho_1+1)\frac{1+\theta}{\theta}\left(1-(1+\theta)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\right) \geq \left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{\theta}{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1}\right)^{\rho_1}.$$

Подібно, використовуючи нерівність $G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) < G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)$ і леми 3.4 та 3.7, отримаємо протилежну нерівність. Тому θ задовольняє рівняння

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}}{\theta^{\rho_1+1}}\left((1+\theta)^{\frac{1}{\rho_1+1}}-1\right)\left((1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1\right)^{\rho_1} = \frac{\rho_1^{\rho_1}}{(\rho_1+1)^{\rho_1+1}}. \qquad (3.17)$$

Легко перевірити, що $\theta = 0$ є розв'язком рівняння (3.17) і як вказано в [75] це рівняння не має додатних коренів.

Отже, $\theta_k \to 0 \quad (k \to \infty)$, а у цьому випадку, наприклад, за умови леми 3.9 з огляду на (3.16)

$$\frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2 \le \frac{2\varepsilon}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi_2)|^{\rho_n}} + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\right)+$$
$$+O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+o\left(t_k^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}\right)$$

при $k\to\infty$. Але з (3.14) випливає, що $|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi_2)|^{\rho_n}=(1+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}$ $(k\to\infty)$. Тому

$$\frac{T_1\rho_1\theta_k^2}{8(\rho_1+1)} \le 2\varepsilon\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}} + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\right)+$$
$$+O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+o\left(t_k^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}\right) \quad (k\to\infty),$$

звідки випливає твердження леми 3.10.

Використовуючи леми 3.2, 3.9, 3.10, доведемо тепер теорему, яка у термінах багаточленної степеневої асимптотики, вкаже на зв'язок між зростанням максимального члена і коефіцієнтів.

Теорема 3.1. *Якщо $\rho_n > 2\rho_2-\rho_1$, то для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma)=\frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}}+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}}+\frac{\tau+o(1)}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma\uparrow 0, \tag{3.18}$$

необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n\ge n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n|\le T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+(\tau+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}; \tag{3.19}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k\ge k_0$

$$\ln|a_{n_k}|\ge T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\sum_{j=2}^{n-1}T_j\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}}+(\tau-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}; \tag{3.20}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_n+\rho_1+2}{2(\rho_1+1)}}\Big) \quad k \to \infty. \tag{3.21}$$

Доведення. Почнемо з необхідності. З (3.18) випливає, що для кожного

$\varepsilon \in (0, |\tau|)$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(\varepsilon), 0)$ маємо

$$\frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau-\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho_n}} \le \ln \mu(\sigma, F) \le \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau+\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho_n}},$$

тобто виконується умова (1.2) теореми 1.9 з

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau-\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho_n}}$$

і

$$\Phi_2(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau+\varepsilon)}{|\sigma|^{\rho_n}}.$$

За цією теоремою правильні нерівності (1.3) - (1.5). Але за лемою 3.2

$$\lambda_n \Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) = -T_1(\rho_1+1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - \sum_{j=2}^{n-1} T_j \Big(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} -$$
$$- (\tau+\varepsilon+o(1))\Big(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}, \quad n \to \infty,$$

$$\lambda_{n_k} \Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) = -T_1(\rho_1+1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - \sum_{j=2}^{n-1} T_j \Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_j}{\rho_1+1}} -$$
$$- (\tau-\varepsilon+o(1))\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}, \quad k \to \infty,$$

а за умовами леми 3.10 з нерівності (1.5) випливає

$$\Big(\frac{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\Big)^2 = \theta_k^2 \le \frac{16(\rho_1+1)}{T_1\rho_1}(\varepsilon+o(1))\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\Big)^{\frac{\rho_n-\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad k \to \infty,$$

тобто

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} \le 4\sqrt{\rho_1+1}(\sqrt{\varepsilon}+o(1))(T_1\rho_1)^{\frac{-\rho_n-1}{2(\rho_1+1)}} \lambda_{n_k}^{\frac{\rho_n+\rho_1+2}{2(\rho_1+1)}}, \quad k \to \infty.$$

Завдяки довільності ε з цих співвідношень випливають співвідношення (3.19) - (3.21).

Доведемо достатність умов (3.19) - (3.21). Використовуючи теорему 1.10 і лему 3.2, неважко показати, що з огляду на довільність ε з умови (3.20) випливає асимптотична нерівність

$$\ln \mu(\sigma) \le \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma \uparrow 0. \tag{3.22}$$

Далі за теоремою 1.6 і лемою 3.9 з нерівності (3.20) для всіх $\sigma \in [\varphi_1(\lambda_{n_k}), \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k \ge k_0$ маємо

$$\ln \mu(\sigma) \ge \Phi_1(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi) - G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)) = \Phi_1(\sigma) -$$
$$- \frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2 + O(\theta_k^2\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}) + o(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}), \quad k \to \infty, \tag{3.23}$$

де з огляду на умову (3.21)

$$\theta_k = \frac{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_n - \rho_1}{2(\rho_1+1)}}\right), \quad k \to \infty.$$

Оскільки $\varphi_1(\lambda_{n_k}) \le \sigma \le \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})$, то $\lambda_{n_k} \le \Phi_1'(\sigma) \le \lambda_{n_{k+1}}$ і з (3.21) маємо

$$\ln \mu(\sigma) \ge \Phi_1(\sigma) + o((\Phi_1'(\sigma))^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}) = \Phi_1(\sigma) + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}\right)^{\frac{\rho_n}{\rho_1+1}}) =$$
$$= \Phi_1(\sigma) + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\rho_n}}\right), \quad \sigma \uparrow 0,$$

звідки, завдяки довільності δ, отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln \mu(\sigma) \ge \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma \uparrow 0. \tag{3.24}$$

З (3.22) і (3.24) випливає (3.18). Теорему 3.1 доведено.

Об'єднуючи теорему 3.1 з теоремою 2.7, отримаємо таке твердження.

Наслідок 3.1. *Нехай показники абсолютно збіжного в* $\{s : Res < 0\}$ *ряду Діріхле (2.1) задовольняють умову при* $\ln n = o(\lambda_n^{\frac{\rho}{\rho_1+1}})$ *при* $n \to \infty$. *Тоді для того, щоб правильною була асимптотична рівність (2.21), необхідно і досить, щоб для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *виконувались умови 1) і 2) теореми 3.1.*

Наскільки умова $2\rho_2 < \rho_1 + \rho_n$ у теоремі 3.1 є істотною, буде видно з результатів, отриманих у наступному підрозділі, де детальніше вивчатимемо випадок $n = 3$.

3.2. Тричленна степенева асимптотика логарифма максимального члена ряду Діріхле з нульовою абсцисою абслютної збіжності.

Нехай тепер $\Phi \in \Omega(0)$ - така функція, що

$$\Phi(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{\tau}{|\sigma|^{\rho}} + \frac{\delta}{|\sigma|^{s}}, \quad \sigma_0 \le \sigma < 0. \tag{3.25}$$

де $T_1 > 0$, $T_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \rho < \rho_2 < \rho_1$, $\quad s \le \rho$, а φ - функція, обернена до Φ'.

3.2.1. Асимтотика функції φ.

Позначимо

$$U(x) = \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}} + \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}. \tag{3.26}$$

Асимптотику функції φ описує наступна лема.

Лема 3.11. *Якщо функція* $\Phi \in \Omega(0)$ *така, що виконуеться* (3.25), *то для функції* φ *при* $x \to +\infty$ *правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s = \varrho > 2\rho_2 - \rho_1$ *і* $\tau + \delta \neq 0$, *то*

$$\varphi(x) = -U(x) - \frac{(\tau + \delta + o(1))\rho}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

2) якщо $s=\rho<2\rho_2-\rho_1$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)+\frac{2\rho_2-\rho_1+o(1)}{2}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

3) якщо $s=\rho=2\rho_2-\rho_1$, $\tau\neq\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $\tau+\delta\neq\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)-\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\tau+\delta-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

4) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=3\rho_2-2\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)\neq0$, $\delta\neq\dfrac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)+\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-\right.$$
$$\left.-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-3\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

5) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)-\frac{\rho_1}{3\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\right.$$
$$\left.-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-4\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

6) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1-1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, $\rho_1\neq4$, *то*

$$\varphi(x)=-U(x)-\frac{\rho_1-4}{3\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\right.$$
$$\left.-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-4\rho_1-1}{\rho_1+1}};$$

7) якщо $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$, $s = 5\rho_2 - 4\rho_1$, $\rho_1 = 4$, $\tau = \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2 - 2\rho_1 - 1 = 0$, *то*

$$\varphi(x) = -U(x) + \frac{1}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-5\rho_1-1}{\rho_1+1}}.$$

Доведення. Оскільки

$$\Phi'(\sigma) = \frac{T_1\rho_1}{|\sigma|^{\rho_1+1}} + \frac{T_2\rho_2}{|\sigma|^{\rho_2+1}} + \frac{\tau\rho}{|\sigma|^{\rho}+1} + \frac{\delta s}{|\sigma|^{s+1}},$$

то для знаходження асимптотики функції φ треба розв'язати рівняння

$$\frac{T_1\rho_1}{|\sigma|^{\rho_1+1}} + \frac{T_2\rho_2}{|\sigma|^{\rho_2+1}} + \frac{\tau\rho}{|\sigma|^{\rho}+1} + \frac{\delta s}{|\sigma|^{s+1}} = x, \tag{3.27}$$

Як у доведенні леми 3.1, розв'язок $\sigma = \sigma(x)$ цього рівняння шукаємо у вигляді (3.3).

Підставляючи (3.3) в (3.26) дістанемо

$$\frac{T_1\rho_1}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}} + \alpha(x)\right)^{\rho_1+1}} + \frac{T_2\rho_2}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}} + \alpha(x)\right)^{\rho_2+1}} +$$

$$\frac{\tau\rho}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}} + \alpha(x)\right)^{\rho+1}} + \frac{\delta s}{\left(\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}} + \alpha(x)\right)^{s+1}} = x,$$

тобто

$$\frac{x}{\left(1+\alpha(x)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{\rho_1+1}} + \frac{T_2\rho_2}{\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{\rho_2+1}{\rho_1+1}}\left(1+\alpha(x)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{\rho_2+1}} +$$

$$+\frac{\tau\rho}{\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{\rho+1}{\rho_1+1}}\left(1+\alpha(x)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{\rho+1}} +$$

$$+\frac{\delta s}{\left(\frac{T_1\rho_1}{x}\right)^{\frac{s+1}{\rho_1+1}}\left(1+\alpha(x)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)^{s+1}} = x,$$

звідки

$$\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(\rho_1+1)} + \frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(\rho_2+1)} +$$

$$+\frac{\tau\rho}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(\rho+1)}+$$
$$+\frac{\delta\ s}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1+\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\alpha\right)^{-(s+1)}=1.$$

Використовуючи асимптотичні рівності

$$(1+t)^\gamma=1+\gamma t+\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}t^2+\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{6}t^3+\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3)}{24}t^4+$$
$$+\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3)(\gamma-4)}{120}t^5+O(t^6)=$$
$$=1+\gamma t+\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}t^2+\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{6}t^3+\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3)}{24}t^4+O(t^5)=$$
$$=1+\gamma t+\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}t^2+\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{6}t^3+O(t^4)=$$
$$=1+\gamma t+\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}t^2+O(t^3)=1+\gamma t+O(t^2),\quad t\to 0,\quad (3.28)$$

звідси при $x\to+\infty$ отримуємо

$$1-(\rho_1+1)\alpha\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+\frac{(\rho_1+1)(\rho_1+2)}{2}\alpha^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{(\rho_1+1)(\rho_1+2)(\rho_1+3)}{6}\alpha^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{(\rho_1+1)(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)}{24}\alpha^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{(\rho_1+1)(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)(\rho_1+5)}{120}\alpha^5\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5}{\rho_1+1}}+O\left(\alpha^6x^{\frac{6}{\rho_1+1}}\right)+$$
$$+\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1-(\rho_2+1)\alpha\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+\right.$$
$$+\frac{(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{2}\alpha^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2}{\rho_1+1}}-\frac{(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{6}\alpha^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3}{\rho_1+1}}+$$
$$\left.+\frac{(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)(\rho_2+4)}{24}\alpha^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4}{\rho_1+1}}+O\left(\alpha^5x^{\frac{5}{\rho_1+1}}\right)\right)+$$
$$+\frac{\tau\rho}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1-(\rho+1)\alpha\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}+\frac{(\rho+1)(\rho+2)}{2}\alpha^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2}{\rho_1+1}}-\right.$$

$$-\frac{(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)}{6}\alpha^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3}{\rho_1+1}}+O\left(\alpha^4x^{\frac{4}{\rho_1+1}}\right)\Bigg)+$$

$$+\frac{\delta\ s}{T_1\rho_1}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1+O\left(\alpha\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\right)\right)=1,$$

тобто

$$\alpha=\frac{(\rho_1+2)}{2}\alpha^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}}-\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)}{6}\alpha^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)}{24}\alpha^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)(\rho_1+5)}{120}\alpha^5\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4}{\rho_1+1}}+O\left(\alpha^6x^{\frac{5}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$+\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-\frac{\rho_2T_2(\rho_2+1)}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\alpha+$$

$$+\frac{\rho_2T_2(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1+1}{\rho_1+1}}\alpha^2-$$

$$-\frac{\rho_2T_2(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{6\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1+2}{\rho_1+1}}\alpha^3+$$

$$+\frac{\rho_2T_2(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)(\rho_2+4)}{24\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1+3}{\rho_1+1}}\alpha^4+O\left(\alpha^5x^{\frac{\rho_2-\rho_1+4}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$+\frac{\tau\rho}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-\frac{\tau\rho(\rho+1)}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1}{\rho_1+1}}\alpha+$$

$$+\frac{\tau\rho(\rho+1)(\rho+2)}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1+1}{\rho_1+1}}\alpha^2-$$

$$-\frac{\tau\rho(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)}{6T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1+2}{\rho_1+1}}\alpha^3+O\left(\alpha^4x^{\frac{\rho-\rho_1+3}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$+\frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}},\quad x\to+\infty. \quad (3.29)$$

Оскільки $\alpha(x)x^{\frac{1}{\rho_1+1}}\to\infty(x\to\infty)$, то звідси

$$\alpha=\frac{\rho_2T_2(1+o(1))}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}=\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta, \quad (3.30)$$

де

$$\beta = \beta(x) = o(x^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}), \quad x \to \infty.$$

Тому з (3.29) отримуємо

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}} + \beta = \\
&= \frac{(\rho_1+2)}{2}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}} + \beta\right)^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1+1}} - \\
&- \frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)}{6}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}} + \beta\right)^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2}{\rho_1+1}} + \\
&+ \frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)}{24}\Bigg)\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}} + \beta\right)^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3}{\rho_1+1}} - \\
&- \frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)(\rho_1+5)}{120}\times \\
&\times\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}} + \beta\right)^5\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4}{\rho_1+1}} + \\
&+ O\left(x^{\frac{6\rho_2-6\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right) + \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}} - \\
&- \frac{\rho_2 T_2(\rho_2+1)}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}} + \beta\right) + \\
&+ \frac{\rho_2 T_2(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1+1}{\rho_1+1}}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}} + \beta\right)^2 - \\
&- \frac{\rho_2 T_2(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{6\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1+2}{\rho_1+1}}\times \\
&\times\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}} + \beta\right)^3 + \\
&+ \frac{\rho_2 T_2(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)(\rho_2+4)}{24\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1+3}{\rho_1+1}}\times \\
&\times\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}} + \beta\right)^4 + \\
&+ \frac{\tau\rho}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1-1}{\rho_1+1}} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{\tau\rho(\rho+1)}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1}{\rho_1+1}}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta\right)+$$

$$+\frac{\tau\rho(\rho+1)(\rho+2)}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1+1}{\rho_1+1}}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta\right)^2-$$

$$-\frac{\tau\rho(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)}{6T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1+2}{\rho_1+1}}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\beta\right)^3+$$

$$+O\left(x^{\frac{4\rho_2-5\rho_1+\rho-1}{\rho_1+1}}\right)+\frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}},\quad x\to+\infty,$$

звідки легко випливає, що при $x\to+\infty$

$$(1+o(1))\beta(x)=\frac{\rho_1+2}{2}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)}{6}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-3\rho_1-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)}{24}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-4\rho_1-1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)(\rho_1+5)}{120}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^5\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-5\rho_1-1}{\rho_1+1}}-$$

$$-(\rho_2+1)\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{2}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-3\rho_1-1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{6}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-4\rho_1-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)(\rho_2+4)}{24}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^5\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-5\rho_1-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{\tau\rho}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-\frac{\tau\rho(\rho+1)\rho_2T_2}{(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2+\rho-2\rho_1-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{\tau\rho(\rho+1)(\rho+2)}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2+\rho-3\rho_1-1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{\tau\rho(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)}{6\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2+\rho-4\rho_1-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+O\left(x^{\frac{6\rho_2-6\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)+O\left(x^{\frac{4\rho_2-5\rho_1+\rho-1}{\rho_1+1}}\right)+\frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}},$$

тобто при $x\to+\infty$

$$(1+o(1))\beta(x)=\frac{\rho_1-2\rho_2}{2}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)-3(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{6}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-3\rho_1-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)-4(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{24}\times$$

$$\times\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-4\rho_1-1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)(\rho_1+5)-5(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)(\rho_2+4)}{120}\times$$

$$\times\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^5\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-5\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\frac{\tau\rho}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{\tau\rho(\rho+1)\rho_2T_2}{(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-2\rho_1+\rho-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{\tau\rho(\rho+1)(\rho+2)(\rho_2T_2)^2}{2(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-3\rho_1+\rho-1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{\tau\rho(\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^4}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-4\rho_1+\rho-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+O\left(x^{\frac{6\rho_2-6\rho_1-1}{\rho_1+1}}\right)+O\left(x^{\frac{4\rho_2-5\rho_1+\rho-1}{\rho_1+1}}\right). \quad (3.31)$$

Якщо $s=\rho>2\rho_2-\rho_1$, то
$\rho-\rho_1-1>2(\rho_2-\rho_1)-1>3(\rho_2-\rho_1)-1>...>6(\rho_2-\rho_1)-1$
і з (3.31) отримуємо

$$\beta(x)=\frac{\tau\rho}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+\frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}},\quad x\to+\infty,$$

і за умов $s=\rho$ і $\tau+\delta\neq0$

$$(1+(1))\beta(x)=\frac{(\tau+\delta+o(1))\rho}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho-\rho_1-1}{\rho_1+1}},\quad x\to+\infty. \quad (3.32)$$

З (3.26), (3.3), (3.30) і (3.32) легко випливає твердження 1) леми 3.11.

Якщо ж $0 < s = \rho < 2\rho_2 - \rho_1$, то отримуємо асимтотичну рівність

$$\beta(x) = -(1+o(1))\frac{2\rho_2-\rho_1}{2}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}$$

тобто з огляду на (3.24), (3.2) (3.28) і (3.29) правильне твердження 2) леми 3.11.

Припустимо тепер, що $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$. Тоді рівність (3.31) при $x \to +\infty$ має вигляд

$$\begin{gathered}
(1+o(1))\beta(x) = \frac{2\rho_2-\rho_1}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\tau - \frac{(T_2\rho_2)^2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}} - \\
-\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)-3(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{6}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3 + \right. \\
\left. + \frac{\tau(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)T_2\rho_2}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^2}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}} + \\
+\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)-4(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{24}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4 + \right. \\
\left. + \frac{\tau(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)(2\rho_2-\rho_1+2)(T_2\rho_2)^2}{2(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}} - \\
-\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)(\rho_1+5)-5(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)(\rho_2+4)}{120}\times \right. \\
\times\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^5 + \\
+\frac{\tau(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)(2\rho_2-\rho_1+2)(2\rho_2-\rho_1+3)(T_2\rho_2)^3}{6(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4}\times \\
\left.\times\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\right) + O\left(x^{\frac{6(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\right) + \frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\Bigg). \quad (3.33)
\end{gathered}$$

Якщо тепер $\tau \neq \dfrac{(T_2\rho_2)^2}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}$, то з (3.33) випливає, що

$$(1+o(1))\beta(x) = \frac{2\rho_2-\rho_1}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\tau - \frac{(T_2\rho_2)^2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}} +$$

$$+\frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}}, \quad x\to+\infty,$$

тобто за умов $s=\rho$ і $\tau+\delta\neq\dfrac{(T_2\rho_2)^2}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}$ маємо

$$\beta(x)=\frac{2\rho_2-\rho_1}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\tau+\delta-\frac{(T_2\rho_2)^2}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}, \quad x\to\infty,$$

і з огляду на (3.24), (3.2) (3.28) і (3.29) твердження 3) леми 3.11 доведено.

Якщо ж $\tau=\dfrac{T_2\rho_2}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}$, то (3.33) перепишеться у вигляді

$$(1+o(1))\beta(x)=-\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)-3(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{6}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)}{2}\right)\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}+$$
$$+\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)-4(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{24}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)(2\rho_2-\rho_1+2)}{4}\right)\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)(\rho_1+5)-5(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)(\rho_2+4)}{120}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)(2\rho_2-\rho_1+2)(2\rho_2-\rho_1+3)}{12}\right)\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^5\times$$
$$\times\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}+O\left(x^{\frac{6(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\right)+\frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\Bigg), \quad x\to\infty,$$

тобто

$$(1+o(1))\beta(x)=-\frac{(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)}{6}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}+$$
$$+\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)-4(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{24}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)(2\rho_2-\rho_1+2)}{4}\right)\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)(\rho_1+5)-5(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)(\rho_2+4)}{120}+\right.$$

$$+\frac{(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)(2\rho_2-\rho_1+2)(2\rho_2-\rho_1+3)}{12}\Bigg)\times$$

$$\times\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^5\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+O\left(x^{\frac{6(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\right)+\frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\Bigg),\quad x\to+\infty. \quad (3.34)$$

За умови $(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)\neq 0$ з (3.34) отримуємо

$$(1+o(1))\beta(x)=-\frac{(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)}{6}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}},\quad x\to+\infty,$$

і якщо $s=3\rho_2-2\rho_1$ і $\delta\neq\dfrac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(T_2\rho_2)^3}{6(T_1\rho_1(\rho_1+1))^2}$ при $x\to+\infty$, то

$$\beta(x)=\frac{3\rho_2-2\rho_1}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\delta-\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(T_2\rho_2)^3}{6(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}},$$

тобто з огляду на (3.24), (3.2) (3.28) і (3.29) отримуємо твердження 4) леми 3.11 доведено.

Якщо $(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)=0$, то з (3.34) отримуємо

$$(1+o(1))\beta(x)=\Bigg(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)-4(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{24}+$$

$$+\frac{(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)(2\rho_2-\rho_1+2)}{4}\Bigg)\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\Bigg(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)(\rho_1+5)-5(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)(\rho_2+4)}{120}+$$

$$+\frac{(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)(2\rho_2-\rho_1+2)(2\rho_2-\rho_1+3)}{12}\Bigg)\times$$

$$\times\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^5\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}+$$

$$+O\left(x^{\frac{6(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\right)+\frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}},\quad x\to+\infty. \quad (3.35)$$

Припустимо спочатку, що $3\rho_2-2\rho_1=0$. Тоді $\rho_2=\dfrac{2\rho_1}{3}$ і $2\rho_2-\rho_1=\dfrac{\rho_1}{3}$. Тому з (3.33) випливає, що

$$(1+o(1))\beta(x)=\frac{\rho_1(\rho_1+3)(\rho_1+6)}{648}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{\rho_1(\rho_1+3)(11\rho_1^2+81\rho_1+198)}{9720}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^5\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}+$$
$$+O\left(x^{\frac{6(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\right)+\frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}},\quad x\to+\infty,$$

і отже, за умов $s=4\rho_2-3\rho_1$ і $\delta\neq\dfrac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(T_2\rho_2)^4}{216(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}$ при $x\to+\infty$ маємо

$$\beta(x)=\frac{\rho_1}{3T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(T_2\rho_2)^4}{216(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}},$$

тобто з огляду на (3.24), (3.2), (3.28) і (3.29) отримуємо твердження 5) леми 3.11 доведено.

Нарешті, нехай $3\rho_2-2\rho_1-1=0$. Тоді $\rho_2=\dfrac{2\rho_1+1}{3}$ і $2\rho_2-\rho_1=\dfrac{\rho_1+2}{3}$ тому з (3.35) отримуємо

$$(1+o(1))\beta(x)=\frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_1-4)}{648}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{(\rho_1+2)(11\rho_1^2-88\rho_1+377)}{9720}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^5\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}+$$
$$+O\left(x^{\frac{6(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}}\right)+\frac{(1+o(1))\delta s}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1-1}{\rho_1+1}},\quad x\to+\infty.\quad(3.36)$$

Якщо $(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_1-4)\neq0$, $s=4\rho_2-3\rho_1$ і $\delta\neq\dfrac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(T_2\rho_2)^4}{216(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}$, то з (3.36) дістаємо

$$\beta(x)=\frac{\rho_1-4}{3T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)}{216}\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}-\delta+o(1)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}},\quad x\to+\infty,$$

Зауважимо, що $(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_1-4)\neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $\rho_1\neq 4$, бо якби $\rho_1=1$, то $\rho_1=\rho_2=1$, що неможливо. Тому звідси отримуємо твердження 6) леми 3.11.

Залишилось розглянути випадок, коли $\rho_1=4$. У цьому випадку з (3.36) за умови $s=5\rho_2-4\rho_1=-1$ одержуємо

$$\beta(x)=-\frac{1}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)-1}{\rho_1+1}},\quad x\to+\infty.$$

звідси випливає твердження 7). Лему 3.11 повністю доведено.

Використовуючи лему 3.11, знайдемо асимтотичні формули для $\Phi(\varphi(x))$ і $x\Psi(\varphi(x))$. Для цього позначимо

$$V(x)=T_1\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+T_2\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1+1}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} \tag{3.37}$$

і

$$W(x)=T_1(\rho_1+1)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+T_2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}. \tag{3.38}$$

Лема 3.12. *Якщо функція $\Phi\in\Omega(0)$ така, що виконуєтьcя (3.25), то при $x\to+\infty$ правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s=\varrho>2\rho_2-\rho_1$ і $\tau+\delta\neq 0$, то

$$\Phi(\varphi(x))=V(x)+\left(\frac{(\tau+\delta)(\rho_1-\rho+1)}{\rho_1+1}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}$$

і

$$x\Psi(\varphi(x))=-W(x)-(\tau+\delta+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}};$$

2) якщо $s=\rho<2\rho_2-\rho_1$, то

$$\Phi(\varphi(x))=V(x)+\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}\left(\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$x\Psi(\varphi(x))=-W(x)+\left(\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}};$$

3) якщо $s=\rho=2\rho_2-\rho_1$, $\tau\neq\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $\tau+\delta\neq\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, *то*

$$\Phi(\varphi(x))=V(x)-\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}\left(\tau+\delta-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$x\Psi(\varphi(x))=-W(x)-\left(\tau+\delta-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}};$$

4) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=3\rho_2-2\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)\neq0$, $\delta\neq\dfrac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}$, *то*

$$\Phi(\varphi(x))=V(x)+\frac{3\rho_2-3\rho_1-1}{\rho_1+1}\left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-\right.$$
$$\left.-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$x\Psi(\varphi(x))=-W(x)+\left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}};$$

5) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, *то*

$$\Phi(\varphi(x))=V(x)+\frac{(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-\frac{4\rho_1+3}{3(\rho_1+1)}\times$$
$$\left(\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$x\Psi(\varphi(x))=-W(x)-\frac{(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}+$$

$$+\left(\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}};$$

6) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1-1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, $\rho_1\neq 4$, *то*

$$\Phi(\varphi(x))=V(x)-\frac{2\rho_1+7}{3(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$x\Psi(\varphi(x))=-W(x)+\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}};$$

7) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=5\rho_2-4\rho_1$, $\rho_1=4$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1-1=0$, *то*

$$\Phi(\varphi(x))=V(x)-\frac{1}{12}\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}-$$
$$-\frac{\rho_1}{(\rho_1+1)}\left(\frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$x\Psi(\varphi(x))=-W(x)+\frac{1}{12}\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}+$$
$$+\left(\frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}.$$

Доведення. З доведення леми 3.11 видно, що за умов будь-якого з її тверджень для $\varphi(x)$ правильне зображення

$$|\varphi(x)|=\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{-1}{\rho_1+1}}+\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}+$$
$$+(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1-1}{\rho_1+1}},\quad x\to\infty,\quad (3.39)$$

де $Q \neq 0$ і $q < \rho_2$. Тому з огляду на (3.28) при $x \to +\infty$ маємо

$$\frac{1}{|\varphi(x)|^{\rho_1}} = \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1 + \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} + \right.$$

$$\left. +(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)^{-\rho_1} =$$

$$= \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1 - \rho_1\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} + (Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + \right.$$

$$+\frac{\rho_1(\rho_1+1)}{2}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} + (Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)^2 -$$

$$-\frac{\rho_1(\rho_1+1)(\rho_1+2)}{6}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} + (Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)^3 +$$

$$+\frac{\rho_1(\rho_1+1)(\rho_1+2)(\rho_1+3)}{24}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} + \right.$$

$$\left. +(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)^4 -$$

$$-\frac{\rho_1(\rho_1+1)(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)}{120}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} + \right.$$

$$\left.\left. +(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)^5 + O\left(x^{\frac{6(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(1 - \rho_1\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} - \right.$$

$$-\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}} + \frac{\rho_1(\rho_1+1)}{2}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}} -$$

$$-\frac{\rho_1(\rho_1+1)(\rho_1+2)}{6}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}} +$$

$$+\frac{\rho_1(\rho_1+1)(\rho_1+2)(\rho_1+3)}{24}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}} -$$

$$-\frac{\rho_1(\rho_1+1)(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)}{120}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^5\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}} +$$

$$\left. +O\left(x^{\frac{6(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)\right), \quad x \to +\infty,$$

звідки

$$\frac{1}{|\varphi(x)|^{\rho_1}} = \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} -$$
$$- \rho_1 \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \rho_1(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}} +$$
$$+ \frac{\rho_1(\rho_1+1)}{2}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} -$$
$$- \frac{\rho_1(\rho_1+1)(\rho_1+2)}{6}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+ \frac{\rho_1(\rho_1+1)(\rho_1+2)(\rho_1+3)}{24}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} -$$
$$- \frac{\rho_1(\rho_1+1)(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)}{120}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^5\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+ O\left(x^{\frac{6\rho_2-5\rho_1}{\rho_1+1}}\right), \quad x \to +\infty. \quad (3.40)$$

Подібно

$$\frac{1}{|\varphi(x)|^{\rho_2}} = \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\left(1 + \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} +\right.$$
$$\left. +(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)^{-\rho_2} =$$
$$= \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\left(1 - \rho_2\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} + (Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+\right.$$
$$+\frac{\rho_2(\rho_2+1)}{2}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} + (Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)^2 -$$
$$-\frac{\rho_2(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{6}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} + (Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)^3 +$$
$$+\frac{\rho_2(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{24}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} +\right.$$
$$\left.\left. +(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)^4 + O\left(x^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} \left(1 - \rho_2 \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)} \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} + \right.$$
$$+ \frac{\rho_2(\rho_2+1)}{2} \left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^2 \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}} -$$
$$- \frac{\rho_2(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{6} \left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^3 \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}} +$$
$$+ \frac{\rho_2(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{24} \left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^4 \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}} +$$
$$\left. + O\left(x^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)\right), \quad x \to +\infty,$$

тобто

$$\frac{1}{|\varphi(x)|^{\rho_2}} = \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \rho_2 \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)} \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+ \frac{\rho_2(\rho_2+1)}{2} \left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^2 \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}} -$$
$$- \frac{\rho_2(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{6} \left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^3 \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+ \frac{\rho_2(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{24} \left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^4 \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+ O\left(x^{\frac{6\rho_2-5\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + o(x^{\frac{q}{\rho_1+1}}), \quad x \to +\infty. \quad (3.41)$$

Аналогічно неважко показати, що

$$\frac{1}{|\varphi(x)|^{\rho}} = \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}} - \rho \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)} \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+ \frac{\rho(\rho+1)}{2} \left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^2 \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}} -$$
$$- \frac{\rho(\rho+1)(\rho+2)}{6} \left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^3 \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}} +$$
$$+ O\left(x^{\frac{\rho+4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right) + o(x^{\frac{q}{\rho_1+1}}), \quad x \to +\infty. \quad (3.42)$$

Нарешті,

$$\frac{1}{|\varphi(x)|^s} = \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}} + O\left(x^{\frac{s+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + o(x^{\frac{q}{\rho_1+1}}), \quad x \to +\infty. \tag{3.43}$$

Використовуючи асимптотичні рівності (3.40) - (3.42), з (3.43) отримуємо

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi(x)) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{\tau}{|\sigma|^{\rho}} + \frac{\delta}{|\sigma|^s} = T_1\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \\
+ T_2\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1+1}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} - \\
- \frac{(\rho_2T_2)^3}{(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{(\rho_1+2)-3(\rho_2+1)}{6}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}} + \\
+ \frac{(\rho_2T_2)^4}{(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)-4(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{24}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} - \\
- \frac{(\rho_2T_2)^5}{(\rho_1T_1(\rho_1+1))^4}\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)-5(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{120}\right)\times \\
\times\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}} + \tau\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}} - \tau\rho\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} + \\
+ \frac{\tau\rho(\rho+1)}{2}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}} - \\
- \frac{\tau\rho(\rho+1)(\rho+2)}{6}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}} - \\
- T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}} + \delta\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}} + \\
+ O\left(x^{\frac{s+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + O\left(x^{\frac{\rho+4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right) + O\left(x^{\frac{6\rho_2-5\rho_1}{\rho_1+1}}\right), \quad x \to +\infty. \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Якщо $s = \rho > 2\rho_2 - \rho_1$ і $\tau + \delta \neq 0$, то з (3.44) отримуємо

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi(x)) = V(x) + \tau\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}} + \delta\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}} - \\
- T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}}, \quad x \to +\infty,
\end{aligned}$$

де за твердженням 1) леми 3.11 $Q = \dfrac{(\tau+\delta)\rho}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}$ і $q=\rho$, і отже,

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) + \left(\frac{(\tau+\delta)(\rho_1-\rho+1)}{\rho_1+1} + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}, \quad x\to\infty,$$

тобто отримуємо першу асимптотичну рівність з твердження 1) леми 3.12.

Оскільки, $x\Psi(\varphi(x)) = x\varphi(x) - \Phi(\varphi(x))$ то звідси і з твердження 1) леми 1 випливає друга асимптотична рівність з твердження 1) леми 3.12.

Якщо ж $0 < s = \rho < 2\rho_2 - \rho_1$, то з (3.42) маємо

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) - \frac{1+o(1)}{2}\frac{(\rho_2T_2)^2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} - \\ - T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}}, \quad x\to+\infty,$$

де за твердженням 2) леми 3.11 $Q = -\dfrac{2\rho_2-\rho_1}{2}\left(\dfrac{(\rho_2T_2)}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^2$ і $q = 2\rho_2-\rho_1$. Тому при $x\to+\infty$

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) + \frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}\left(\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}},$$

тобто першу асимптотичну рівність з твердження 2) леми 3.12 доведено. Доведення другої асимптотичної рівності з цього твердження подібне до доведення твердження 1) леми 3.12.

Припустимо тепер, що $\rho = 2\rho_2-\rho_1$. Тоді з (3.44) одержуємо

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) + \left(\tau - \frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} + \\ + \left(\frac{(3\rho_2-\rho_1+1}{6}\frac{(\rho_2T_2)^3}{(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2} - \tau(2\rho_2-\rho_1)\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}} + \\ + \left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)-4(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{24}\frac{(\rho_2T_2)^4}{(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3} + \right. \\ \left. + \frac{\tau(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)}{2}\left(\frac{\rho_2T_2}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^2\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} + \\ + \left(\frac{5(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)-(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)}{120}\frac{(\rho_2T_2)^5}{(\rho_1T_1(\rho_1+1))^4} - \right.$$

$$-\frac{\tau(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)(2\rho_2-\rho_1+2)}{6}\left(\frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)^3\Bigg)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}}+$$

$$+\delta\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}}+O\left(x^{\frac{s+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+O\left(x^{\frac{6\rho_2-5\rho_1}{\rho_1+1}}\right),\quad x\to+\infty. \quad (3.45)$$

Якщо тепер $\tau \neq \frac{(T_2\rho_2)^2}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}$, то з (3.45) маємо

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x)+\left(\tau-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}}+\delta\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}}+$$

$$+O\left(x^{\frac{s+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+O\left(x^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}\right),\quad x\to+\infty,$$

а за умов $s=\rho=2\rho_2-\rho_1$ і $\tau+\delta\neq\frac{(T_2\rho_2)^2}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}$ і твердження 3) леми 3.11 випливає, що $Q=\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\tau+\delta-\frac{(T_2\rho_2)^2}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)$ і $q=2\rho_2-\rho_1$. Тому при $x\to+\infty$

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x)-\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}\Bigg(\tau+\delta-$$

$$-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\Bigg)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}},$$

тобто першу асимптотичну рівність з твердження 3) леми 3.12 доведено. Друга асимптотична рівність з цього твердження доводиться звичайним способом.

Нехай тепер $\tau=\frac{(T_2\rho_2)^2}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}$. Тоді (3.45) має вигляд

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x)+\frac{2\rho_1-3\rho_2+1}{6}\frac{(\rho_2T_2)^3}{(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)-4(\rho_2+1)(\rho_2+2)+6(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)}{24}\times$$

$$\frac{(\rho_2 T_2)^4}{(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\Bigg(\frac{5(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)-(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)}{120}-$$

$$-\frac{10(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)(2\rho_2-\rho_1+2)}{120}\frac{(\rho_2 T_2)^5}{(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^4}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}}+\delta\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}}+$$

$$+O\left(x^{\frac{s+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+O\left(x^{\frac{6\rho_2-5\rho_1}{\rho_1+1}}\right),\quad x\to+\infty. \quad (3.46)$$

За умови $(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)\neq 0$ з (3.45) отримуємо

$$\Phi(\varphi(x))=V(x)-\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)}{6}\frac{(\rho_2 T_2)^3}{(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\delta\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}}-T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}}+$$

$$+O\left(x^{\frac{s+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+O\left(x^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}\right),\quad x\to+\infty,$$

і за умов $s=3\rho_2-2\rho_1$ і $\delta\neq\dfrac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(T_2\rho_2)^3}{6(T_1\rho_1(\rho_1+1))^2}$ з твердження 4) леми 3.11 випливає, що $Q=-\dfrac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\dfrac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2 T_2)^3}{(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^2}-\delta\right)$ і $q=3\rho_2-2\rho_1$. Тому при $x\to+\infty$

$$\Phi(\varphi(x))=V(x)+\frac{3\rho_2-3\rho_1-1}{\rho_1+1}\Bigg(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2 T_2)^3}{(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^2}-$$

$$-\delta+o(1)\Bigg)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}},$$

тобто першу асимптотичну рівність з твердження 4) леми 3.12 доведено. Друга асимптотична рівність з цього твердження доводиться відомим способом.

Якщо $3\rho_2-2\rho_1=0$, то $\rho_2=\dfrac{2\rho_1}{3}$ і $2\rho_2-\rho_1=\dfrac{\rho_1}{3}$ і з (3.44) випливає, що

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) + \frac{(\rho_2 T_2)^3}{6(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^2} - \frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)}{216}\left(\frac{(\rho_2 T_2)}{(\rho_1 T_1(\rho_1+1))}\right)^4 \times$$
$$\times \left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} - T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}} +$$
$$+\delta\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}} + O\left(x^{\frac{s+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + O\left(x^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + o(x^{\frac{q}{\rho_1+1}}), \quad x\to+\infty,$$

а за умов $s = 4\rho_2 - 3\rho_1$ і $\delta \neq \dfrac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(T_2\rho_2)^4}{216(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}$ з твердження 5) леми 3.11 випливає, що $Q = \dfrac{\rho_1}{3\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\dfrac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3} - \delta\right)$ і $q = 4\rho_2 - 3\rho_1$. Тому

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) + \frac{(\rho_2 T_2)^3}{6(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^2} - \frac{4\rho_1+3}{3(\rho_1+1)}\times$$
$$\left(\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad x\to+\infty,$$

тобто першу асимптотичну рівність з твердження 5) леми 3.12 доведено. Звідси і з твердження 5) леми 3.11 випливає друга асимптотична рівність з твердження 5) леми 3.12.

Нарешті, нехай $3\rho_2 - 2\rho_1 - 1 = 0$. Тоді $\rho_2 = \dfrac{2\rho_1+1}{3}$ і $2\rho_2 - \rho_1 = \dfrac{\rho_1+2}{3}$, $\tau = \dfrac{(T_2\rho_2)^2}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}$. Тому з (3.46) отримуємо

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) - \frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)}{216}(\frac{T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+\frac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_1+8)}{1080}\frac{(T_2\rho_2)^5}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}} -$$
$$- T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}} +$$
$$+\delta\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}} + O\left(x^{\frac{s+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + O\left(x^{\frac{6\rho_2-5\rho_1}{\rho_1+1}}\right), \quad x\to+\infty. \quad (3.47)$$

Якщо $\rho_1 - 4 \neq 0$, $s = 4\rho_2 - 3\rho_1$ і $\delta \neq \dfrac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(T_2\rho_2)^4}{216(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}$, з твердження 6) леми 3.11 випливає, що $Q = \dfrac{(\rho_1-4)}{3\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\dfrac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3} - \delta\right)$

і $q = 4\rho_2 - 3\rho_1$. Тому при $x \to +\infty$

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) - \frac{2\rho_1+7}{3(\rho_1+1)}\biggl(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3} - \\ - \delta + o(1)\biggr)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}},$$

тобто правильна перша асимтотична рівність твердження 6) леми 3.12. Друга асимптотична рівність з цього твердження доводиться звичайним способом.

Залишилось розглянути випадок, коли $3\rho_2 - 2\rho_1 - 1 = 0$ і $\rho_1 = 4$. У цьому випадку з (3.46) за умови $s = 5\rho_2 - 4\rho_1 = -1$ і з твердження 7) леми 3.11 випливає, що $Q = -\dfrac{1}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\dfrac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4} - \delta\right)$ і $q = 5\rho_2 - 4\rho_1$. Неважко отримати

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) - \frac{1}{12}\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3} - \\ - \frac{\rho_1}{(\rho_1+1)}\left(\frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad x \to +\infty.$$

Звідси випливає твердження 7) леми 3.12. Друга асимптотична рівність доводиться подібно до попередніх випадків. Лему 3.12 повністю доведено.

3.2.2. Асимптотичне поводження величин $G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi)$ і $G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi)$.

Почнемо з дослідження асимптотичного поводження величини $G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi)$, визначеної рівністю (3.9). З леми 3.12 випливає, що за умов будь-якого з тверджень 1) - 7) леми 3.12 для функції Φ, визначеної рівністю (3.25), правильна асимптотична рівність

$$\Phi(\varphi(t)) = V(t) + K + (P + o(1))\left(\frac{t}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}, \quad t \to +\infty,$$

де функція V визначена рівністю (3.37), а K, P, p сталі, причому $P \neq 0$ і $p \leq \rho$.

Тому

$$G_1(t_k,t_{k+1},\Phi)=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{V(t)}{t^2}dt+K\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{dt}{t^2}+$$
$$+(P+o(1))\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\frac{dt}{t^2}=$$
$$=A(t_k,t_{k+1})+K+\frac{(P+o(1))(\rho_1+1)}{(\rho_1+1-p)}\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\frac{t_{k+1}^{\frac{p-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{p-\rho_1-1}{\rho_1+1}}}{(T_1\rho_1)^{\frac{p}{\rho_1+1}}},$$

де

$$A(t_k,t_{k+1})=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\left(T_1(\rho_1+1)\frac{t_k^{-\frac{1}{\rho_1+1}}-t_{k+1}^{-\frac{1}{\rho_1+1}}}{(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}}+T_2\frac{t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-t_{k+1}^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}}{(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}}\right).$$

Припустимо, що $t_{k+1}=t_k(1+\theta_k)$, де $\theta_k>0$. Тоді при $k\to\infty$ маємо

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=A(t_k,t_k(1+\theta_k))+K+$$
$$+\frac{(P+o(1))(\rho_1+1)}{(\rho_1+1-p)}\frac{t_k(1+\theta_k)}{\theta_k}\frac{t_k^{\frac{p-\rho_1-1}{\rho_1+1}}((1+\theta_k)^{\frac{p-\rho_1-1}{\rho_1+1}}-1)}{(T_1\rho_1)^{\frac{p}{\rho_1+1}}},\quad (3.48)$$

де

$$A(t_k,t_k(1+\theta_k))=\frac{T_1(\rho_1+1)(1+\theta_k)}{\theta_k}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}(1-(1+\theta_k)^{-\frac{1}{\rho_1+1}})+$$
$$+\frac{T_2(1+\theta_k)}{\theta_k}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}(1-(1+\theta_k)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}).\quad (3.49)$$

Звідси легко випливають дві наступні леми.

Лема 3.13. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j}\to\infty$ при $j\to\infty$, то для цієї послідовності за умов будь-якого з тверджень 1) - 7) леми 3.11*

$$G_1(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=(1+o(1))T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\quad (j\to\infty).$$

Лема 3.14. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j}\to\theta\in(0,+\infty)$ при $j\to\infty$, то для цієї послідовності за умов будь-якого з тверджень 1) - 7) леми 3.11 при $j\to\infty$*

$$G_1(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=(1+o(1))T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta}{\theta}(1-(1+\theta)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}).$$

Припустимо тепер, що $\theta_k \to 0 \quad (k \to \infty)$, тоді з огляду на (3.49)

$$A(t_k, t_k(1+\theta_k) = T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\times$$
$$\times\left(1-\left(1-\frac{\theta_k}{\rho_1+1}+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2}-\frac{(\rho_1+2)(2\rho_1+3)\theta_k^3}{6(\rho_1+1)^3}+O(\theta_k^4)\right)\right)+$$
$$+T_2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\times$$
$$\left(1-\left(1+\frac{(\rho_2-\rho_1-1)\theta_k}{\rho_1+1}+\frac{(\rho_2-2\rho_1-2)(\rho_2-\rho_1-1)\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^3)\right)\right)=$$
$$=T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}(1+\theta_k)\left(1-\frac{(\rho_1+2)\theta_k}{2(\rho_1+1)}-\frac{(\rho_1+2)(2\rho_1+3)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^3)\right)-$$
$$-T_2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}(1+\theta_k)\left(\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\rho_2-2\rho_1-2)(\rho_2-\rho_1-1)\theta_k}{2(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^2)\right)=$$
$$=T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}-\frac{T_1\rho_1(\rho_1+2)}{6(\rho_1+1)^2}\theta_k^2+$$
$$+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+\frac{T_2(\rho_1+1-\rho_2)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{T_2\rho_2(\rho_1+1-\rho_2)}{2(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2),\quad k\to\infty. \quad (3.50)$$

Подібно,

$$(P+o(1))\frac{\rho_1+1}{\rho_1+1-p}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\left(1-(1+\theta_k^{\frac{p-\rho_1-1}{\rho_1+1}})\right)=$$
$$=(P+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}},\quad k\to\infty. \quad (3.51)$$

З (3.48), (3.50), (3.51) отримуємо

$$G_1(t_k, t_k(1+\theta_k),\Phi)=A^*(t_k,\theta_k)+K+(P+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}+$$
$$+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2),\quad k\to\infty, \quad (3.52)$$

де

$$A^*(t_k,\theta_k)=T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{T_1\rho_1(\rho_1+2)}{6(\rho_1+1)^2}\theta_k^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{T_2(\rho_1+1-\rho_2)}{\rho_1+1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{T_2\rho_2(\rho_1+1-\rho_2)}{2(\rho_1+1}\Big)^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k. \quad (3.53)$$

Використовуючи асимптотичну рівність (3.52) і лему 3.12 з відповідним вибором сталих K, P і p, неважко довести наступну лему.

Лема 3.15. *Нехай функція* $\Phi\in\Omega(0)$ *така, що виконується* (3.25), *а* $\theta_k\to 0 \quad (k\to\infty)$. *Тоді при* $k\to\infty$

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi) = A^*(t_k,\theta_k)+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2)+g_1(t_k,\theta_k), \quad (3.54)$$

де $A^*(t_k,\theta_k)$ *величина визначена рівністю* (3.53), *а для* $g_1(t_k,\theta_k)$ *правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s=\varrho>2\rho_2-\rho_1$ *і* $\tau+\delta\neq 0$, *то*

$$g_1(t_k,\theta_k)=\frac{\rho_1-\rho+1}{\rho_1+1}\Big(\tau+\delta+o(1)\Big)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}};$$

2) якщо $s=\rho<2\rho_2-\rho_1$, *то*

$$g_1(t_k,\theta_k)=\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}\left(\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}};$$

3) якщо $s=\rho=2\rho_2-\rho_1$, $\tau\neq\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $\tau+\delta\neq\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, *то*

$$g_1(t_k,\theta_k)=-\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}\left(\tau+\delta-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}};$$

4) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=3\rho_2-2\rho_1$, $\tau=\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)\neq 0$, $\delta\neq\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}$, *то*

$$g_1(t_k,\theta_k)=\frac{3\rho_2-3\rho_1-1}{\rho_1+1}\left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}};$$

5) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, *то*

$$g_1(t_k,\theta_k)=\frac{(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-\frac{4\rho_1+3}{3(\rho_1+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}};$$

6) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1-1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, $\rho_1\neq4$, *то*

$$g_1(t_k,\theta_k)=-\frac{2\rho_1+7}{3(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}};$$

7) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=5\rho_2-4\rho_1$, $\rho_1=4$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1-1=0$, *то*

$$g_1(t_k,\theta_k)=-\frac{1}{12}\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}-\frac{\rho_1}{(\rho_1+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}.$$

Для того, щоб отримати асимптотичне поводження величини $G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)$, визначеної рівністю (3.11), дослідимо спочатку поводження величини (3.12).

За умов будь-якого з тверджень 1) - 7) леми 3.11 маємо асимптотичну рівність (3.39), і тому

$$|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|=\frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{tk+1}\varphi(t)dt=\frac{\rho_1+1}{\rho_1}(T_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1+1}}\frac{t_{k+1}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}}{(t_{k+1}-t_k)}-$$

$$-\frac{T_2}{(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}}\frac{t_{k+1}^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}}{(t_{k+1}-t_k)}+\frac{(Q+o(1))(\rho_1+1)}{q}(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_1+1-q}{\rho_1+1}}\frac{t_{k+1}^{\frac{q}{\rho_1+1}}-t_k^{\frac{q}{\rho_1+1}}}{(t_{k+1}-t_k)}.$$

Якщо $t_{k+1}=t_k(1+\theta_k)$, де $\theta_k>0$, то при $k\to\infty$ отримуємо

$$\begin{aligned}|\varkappa(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)|&=\frac{\rho_1+1}{\rho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\frac{((1+\theta_k)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1)}{\theta_k}+\\&+\frac{T_2}{(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{((1+\theta_k)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}-1)}{\theta_k}+\\&+\frac{(Q+o(1))(\rho_1+1)}{q}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{((1+\theta_k)^{\frac{q}{\rho_1+1}}-1)}{\theta_k}.\end{aligned}\tag{3.55}$$

Припустимо, що існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j}\to+\infty (j\to\infty)$. Для цієї послідовності з огляду на (3.55) при $j\to\infty$ маємо

$$|\varkappa(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)|=\frac{\rho_1+1}{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\theta_{k_j}^{-\frac{1}{\rho_1+1}}(1+o(1)),$$

і оскільки

$$G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)=\Phi(\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi))=\frac{T_1(1+o(1))}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_1}},\quad k\to\infty,$$

то звідси легко отримуємо наступну лему.

Лема 3.16. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j}\to+\infty$ при $j\to\infty$, то для цієї послідовності за умов будь-якого з тверджень 1) - 7) леми 3.11*

$$G_2(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=(1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_{k_j}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\quad(j\to\infty).$$

Подібно доводиться наступна лема.

Лема 3.17. *Якщо існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j}\to\theta\in(0,+\infty)$ при $j\to\infty$, то для цієї послідовності за умов будь-якого з тверджень 1) - 7) леми 3.11 при $j\to\infty$*

$$G_2(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) =$$
$$= (1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(\frac{((1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1)}{\theta}\right)^{-\rho_1}.$$

Припустимо тепер, що $\theta_k \to 0 \quad (k\to\infty)$. Тоді з огляду на (3.55)

$$|\varkappa(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi)| = \frac{\rho_1+1}{\rho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\left(1+\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\theta_k - \frac{\rho_1\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\rho_1(\rho_1+2)\theta_k^3}{6(\rho_1+1)^3}+O(\theta_k^4)-1\right)+\frac{T_2}{T_1\rho_1}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{1}{\theta_k}\left(1+\frac{\rho_2}{\rho_1+1}\theta_k-\right.$$
$$\left.-\frac{(\rho_1+1-\rho_2)\theta_k^2}{2(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^3)-1\right)+\frac{(Q+o(1))(\rho_1+1)}{q}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\frac{1}{\theta_k}\times$$
$$\times\left(1+\frac{q}{\rho_1+1}\theta_k+O(\theta_k^2)-1\right)=$$
$$=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\left(1-\frac{\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}+O(\theta_k^3)\right)+$$
$$+\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1-1}{\rho_1+1}}\left(1-\frac{(\rho_1+1-\rho_2)\theta_k}{2(\rho_1+1)}+O(\theta_k^2)\right)+$$
$$+(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1-1}{\rho_1+1}}=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\left(1+B(t_k,\theta_k)+\right.$$
$$\left.+(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\right),\quad k\to\infty, \quad (3.56)$$

де

$$B(t_k,\theta_k)=\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}-\frac{T_2\rho_2(\rho_1+1-\rho_2)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{\theta_k}{2(\rho_1+1)}+\frac{(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}.$$

Легко перевірити, що при $k\to\infty$

$$B^2(t_k,\theta_k)=\frac{\theta_k^2}{4(\rho_1+1)^2}+\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{T_2\rho_2\theta_k}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2\frac{(\rho_1+1-\rho_2)\theta_k}{(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}),$$

$$B^3(t_k,\theta_k)=\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{3\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$
$$-\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3\frac{3(\rho_1+1-\rho_2)\theta_k}{(2\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}+$$
$$+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}),\quad k\to\infty,$$

$$B^4(t_k,\theta_k)=\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{2\theta_k}{\rho_1+1}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{2(\rho_1+1-\rho_2)}{\rho_1+1}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}),\quad k\to\infty,$$

$$B^5(t_k,\theta_k)=\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^5\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{5\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}+$$
$$+O(\theta_k^3)+O\left(\theta_k t_k^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\quad k\to\infty,$$

$$B^6(t_k,\theta_k)=O\left(t_k^{\frac{6(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}),\quad k\to\infty.$$

Оскільки $B(t_k,\theta_k)\to 0\quad(k\to\infty)$, то для $p>0$ з (3.56) отримуємо

$$\frac{1}{|\varkappa(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)|^p}=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\Bigg\{1+B(t_k,\theta_k)+(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\Bigg)\Bigg\}^{-p}=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\Bigg\{1-pB(t_k,\theta_k)-$$

$$-p(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{p(p+1)}{2}B^2(t_k,\theta_k)-\frac{p(p+1)(p+2)}{6}B^3(t_k,\theta_k)+$$

$$+\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{24}B^4(t_k,\theta_k)-\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{120}B^5(t_k,\theta_k)+$$

$$+O\left(B^6(t_k,\theta_k)\right)+O(\theta_k^3)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})\Bigg\}=$$

$$=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\Bigg\{1+\frac{p\theta_k}{2(\rho_1+1)}-\frac{p(\rho_1+2)\theta_k^2}{6(\rho_1+1)^2}-\frac{pT_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{pT_2\rho_2(\rho_1+1-\rho_2)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}+\frac{p(p+1)}{2}\frac{\theta_k^2}{4(\rho_1+1)^2}+$$

$$+\frac{p(p+1)}{2}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{p(p+1)}{2}\frac{T_2\rho_2\theta_k}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{p(p+1)}{2}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2\frac{(\rho_1+1-\rho_2)\theta_k}{(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{p(p+1)(p+2)}{6}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{p(p+1)(p+2)}{6}\frac{3\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{p(p+1)(p+2)}{6}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3\frac{3(\rho_1+1-\rho_2)\theta_k}{(2\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{24}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{24}\frac{2\theta_k}{\rho_1+1}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{24}\frac{2(\rho_1+1-\rho_2)}{\rho_1+1}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{120}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^5\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{120}\frac{5\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}+$$
$$+O\left(\theta_k t_k^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)-p(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+O\left(t_k^{\frac{6(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3)\Bigg\}=$$
$$=\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{p}{\rho_1+1}}\Bigg\{1-\frac{pT_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{p(p+1)}{2}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{p(p+1)(p+2)}{6}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{24}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{120}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^5\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{p\theta_k}{2(\rho_1+1)}+\frac{pT_2\rho_2(\rho_1-\rho_2-p)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{p(p+1)(2\rho_1-2\rho_2-p)\theta_k}{4(\rho_1+1)}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{p(p+1)(p+2)(3\rho_1-3\rho_2-p)\theta_k}{12(\rho_1+1)}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(4\rho_1-4\rho_2-p)\theta_k}{48(\rho_1+1)}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^4\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{p(4\rho_1-3p+5)\theta_k^2}{24(\rho_1+1)^2}-p(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q-\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+O\left(t_k^{\frac{6(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3)+O\left(\theta_k t_k^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)\Bigg\},\quad k\to\infty.$$

Оскільки

$$G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)=\Phi(\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi))=\frac{T_1}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_1}}+\frac{T_2}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho_2}}+$$

$$+\frac{\tau}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{\rho}}+\frac{\delta}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|^{s}}\quad (k\ge k_0),$$

то звідси отримуємо

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=T_1\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-\frac{T_2\rho_2}{(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{(T_2\rho_2)^2}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}-\frac{(\rho_1+2)}{6}\frac{(T_2\rho_2)^3}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)}{24}\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)}{120}\frac{(T_2\rho_2)^5}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-\frac{T_2\rho_2^2\theta_k}{2(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{(\rho_1-2\rho_2)\theta_k}{4}\frac{(T_2\rho_2)^2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{(\rho_1+2)(2\rho_1-3\rho_2)\theta_k}{12}\frac{(T_2\rho_2)^3}{(T_1\rho_1)^2(\rho_1+1)^3}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(3\rho_1-4\rho_2)\theta_k}{48}\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1)^3(\rho_1+1)^4}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{T_1\rho_1(\rho_1+5)\theta_k^2}{24(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}}+$$
$$+O\left(t_k^{\frac{6\rho_2-5\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+O(\theta_k^2t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}})+O\left(\theta_kt_k^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+$$
$$+T_2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}-\frac{(T_2\rho_2)^2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{(\rho_2+1)}{2}\frac{(T_2\rho_2)^3}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{(\rho_2+1)(\rho_2+2)}{6}\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{T_2\rho_2\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}+\frac{(T_2\rho_2)^2\theta_k}{2T_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$- \frac{(\rho_2+1)(2\rho_1-3\rho_2)\theta_k}{4(\rho_1+1)} \frac{(T_2\rho_2)^3}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^2} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}} +$$

$$+ \frac{(\rho_2+1)(\rho_2+2)(3\rho_1-4\rho_2)\theta_k}{12(\rho_1+1)} \frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} +$$

$$+ \tau \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}} - \frac{\tau\rho T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} +$$

$$+ \frac{\tau\rho(\rho+1)}{2} \left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2 \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+2\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}} -$$

$$- \frac{\tau\rho(\rho+1)(\rho+2)}{6} \left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3 \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+3\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} +$$

$$+ \frac{\tau\rho\theta_k}{2(\rho_1+1)} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}} + \frac{\tau\rho T_2\rho_2(\rho_1-\rho_2-\rho)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} -$$

$$- \frac{\tau\rho(\rho+1)(2\rho_1-2\rho_2-\rho)\theta_k}{4(\rho_1+1)} \left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2 \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+2\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}} +$$

$$+ O\left(t_k^{\frac{\rho+4\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + O\left(\theta_k t_k^{\frac{\rho+3\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + \delta(1+o(1)) \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}}, \quad k \to \infty.$$

Якщо приймемо

$$B^*(t_k,\theta_k) = T_1 \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + \frac{T_1\rho_1\theta_k}{2(\rho_1+1)} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} -$$
$$- \frac{T_1\rho_1(\rho_1+5)}{24(\rho_1+1)^2}\theta_k^2 \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+ \frac{T_2(\rho_1+1-\rho_2)}{\rho_1+1} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + \frac{T_2\rho_2(\rho_1+1-\rho_2)}{2(\rho_1+1)^2} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} \theta_k, \quad (3.57)$$

то з останньої рівності отримуємо

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B^*(t_k,\theta_k) - \frac{(T_2\rho_2)^2}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+ \frac{(\rho_1+2\rho_2)\theta_k}{4} \frac{(T_2\rho_2)^2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)^2} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} -$$
$$- \frac{(\rho_1-3\rho_2-1)}{6} \frac{(T_2\rho_2)^3}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^2} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}} +$$

$$+\frac{(\rho_1-3\rho_2-1)(2\rho_1-3\rho_2)\theta_k}{12(\rho_1+1)}\frac{(T_2\rho_2)^3}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{4(\rho_2+1)(\rho_2+2)-(\rho_1+2)(\rho_1+3)}{24}\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{((\rho_2+1)(\rho_2+2)-4(\rho_1+2)(\rho_1+3))(3\rho_1-4\rho_2)\theta_k}{48(\rho_1+1)}\times$$

$$\times\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)}{120}\frac{(T_2\rho_2)^5}{(T_1\rho_1(\rho_1+1)^4}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\tau\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}-\frac{\tau\rho T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{\tau\rho(\rho+1)}{2}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+2\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{\tau\rho(\rho+1)(\rho+2)}{6}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^3\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+3\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+\frac{\tau\rho\theta_k}{2(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}+\frac{\tau\rho T_2\rho_2(\rho_1-\rho_2-\rho)\theta_k}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-\frac{\tau\rho(\rho+1)(2\rho_1-2\rho_2-\rho)\theta_k}{4(\rho_1+1)}\left(\frac{T_2\rho_2}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)^2\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho+2\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}}+$$

$$+O(\theta_k^2t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}})+O\left(\theta_kt_k^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+O\left(t_k^{\frac{\rho+4\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+$$

$$+O\left(t_k^{\frac{6\rho_2-5\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+O\left(\theta_kt_k^{\frac{\rho+3\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+\delta(1+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}}\quad(3.58)$$

Тепер можемо довести наступний аналог леми 3.15.

Лема 3.18. *Нехай функція* $\Phi\in\Omega(0)$ *така, що виконуєтьcя* (3.25), *а* $\theta_k\to 0\quad(k\to+\infty)$. *Тоді*

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=B^*(t_k,\theta_k)+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+$$
$$+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2)+g_2(t_k,\theta_k),\quad k\to\infty,\quad(3.59)$$

де $B^*(t_k,\theta_k)$ *- величина, визначена рівністю* (3.57)*, а для* $g_2(t_k,\theta_k)$ *правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s=\varrho>2\rho_2-\rho_1$ *і* $\tau+\delta\neq 0$*, то*

$$g_2(t_k,\theta_k)=\frac{\rho_1-\rho+1}{\rho_1+1}\Big(\tau+\delta+o(1)\Big)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}};$$

2) якщо $s=\rho<2\rho_2-\rho_1$*, то*

$$g_2(t_k,\theta_k)=\frac{2\rho_2-2\rho_1-1}{\rho_1+1}\left(\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}};$$

3) якщо $s=\rho=2\rho_2-\rho_1$, $\tau\neq\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $\tau+\delta\neq\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, *то*

$$g_2(t_k,\theta_k)=\frac{2\rho_1-2\rho_2+1}{\rho_1+1}\left(\tau+\delta-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}};$$

4) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=3\rho_2-2\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)\neq 0$, $\delta\neq\dfrac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}$, *то*

$$g_2(t_k,\theta_k)=\frac{3\rho_2-3\rho_1-1}{\rho_1+1}\left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}};$$

5) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, *то*

$$g_2(t_k,\theta_k)=\frac{(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-$$
$$-\frac{4\rho_1+3}{3(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}};$$

6) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1-1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, $\rho_1\neq 4$, *то*

$$g_2(t_k,\theta_k)=-\frac{2\rho_1+7}{3(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}};$$

7) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=5\rho_2-4\rho_1$, $\rho_1=4$, $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1-1=0$, *то*

$$g_2(t_k,\theta_k)=-\frac{1}{12}\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}-$$
$$-\frac{\rho_1}{(\rho_1+1)}\left(\frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}.$$

Доведення. Якщо $s=\varrho>2\rho_2-\rho_1$ і $\tau+\delta\neq0$, то з (3.58) маємо

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=B^*(t_k,\theta_k)+\tau\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}-T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}}+$$
$$+(1+o(1))\delta\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2),\quad k\to\infty.$$

Але за твердженням 1) леми 3.11 $Q=\dfrac{(\tau+\delta)\rho}{T_1\rho_1(\rho_1+1)}$ і $q=\rho$. Тому звідси випливає твердження 1) леми 3.18.

Якщо $s=\rho<2\rho_2-\rho_1$, то з (3.58) випливає, що

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=B^*(t_k,\theta_k)-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}(1+o(1))-$$
$$-T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}}+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2),\quad k\to\infty,$$

де за твердженням 2) леми 3.11 $Q=-\dfrac{2\rho_2-\rho_1}{2}\left(\dfrac{(\rho_2T_2)}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)^2$ і $q=2\rho_2-\rho_1$. Звідси легко отримуємо твердження 2) леми 3.18.

Якщо $s=\rho=2\rho_2-\rho_1,\tau\neq\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$ і $\tau+\delta\neq\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, то з (3.58) одержуємо

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=B^*(t_k,\theta_k)-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}(1+o(1))+$$
$$+\tau\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}+(1+o(1))\delta\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}-$$

$$-T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}}+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2),\quad k\to\infty,$$

і оскільки за твердженням 3) леми 3.11 $Q=\dfrac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\tau+\delta-\dfrac{(T_2\rho_2)^2}{2T_1\rho_1(\rho_1+1)}\right)$ і $q=2\rho_2-\rho_1$, то

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=B^*(t_k,\theta_k)+\frac{2\rho_1-2\rho_2+1}{\rho_1+1}\Bigg(\tau+\delta-$$
$$-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\Bigg)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2),\quad k\to\infty,$$

тобто твердження 3) леми 3.18 доведено.

Припустимо тепер, що $s=\rho=2\rho_2-\rho_1$ і $\tau=\dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$. Тоді (3.58) перепишеться у вигляді

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=B^*(t_k,\theta_k)+$$
$$+\frac{2\rho_1-3\rho_2+1}{6}\frac{(T_2\rho_2)^3}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)-4(\rho_2+1)(\rho_2+2)+6(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)}{24}\times$$
$$\times\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\Bigg(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1+3)(\rho_1+4)-5(\rho_2+1)(\rho_2+2)(\rho_2+3)}{120}+$$
$$+\frac{10(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1)(2\rho_2-\rho_1+2)}{120}\Bigg)\frac{(T_2\rho_2)^5}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{(2\rho_1-3\rho_2)(2\rho_1-3\rho_2+1)\theta_k}{12(\rho_1+1)}\frac{(T_2\rho_2)^3}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\Bigg(\frac{((\rho_1+2)(\rho_1+3)-4(\rho_2+1)(\rho_2+2))(3\rho_1-4\rho_2)}{48(\rho_1+1)}+$$
$$+\frac{(6(2\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1+1))(3\rho_1-4\rho_2)}{48(\rho_1+1)}\Bigg)\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}}+(1+o(1))\delta\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}}+$$

$$+O\left(t_k^{\frac{6\rho_2-5\rho_1}{\rho_1+1}}\right)+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}})+O\left(\theta_k t_k^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}\right),\quad k\to\infty. \quad (3.60)$$

Якщо тепер $s=3\rho_2-2\rho_1$, $(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)\neq 0$ і $\delta\neq \dfrac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}$, то за твердженням 4) леми 3.11 $Q=-\dfrac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1T_1(\rho_1+1)}\times \times\left(\dfrac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-\delta\right)$ і $q=3\rho_2-2\rho_1$, а з (3.60) отримуємо

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=B^*(t_k,\theta_k)-\frac{3\rho_2-2\rho_1+1}{6}\frac{(T_2\rho_2)^3}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}\left(\delta-\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}\right)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+(1+o(1))\delta\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2)=B^*(t_k,\theta_k)+$$
$$+\frac{3\rho_2-3\rho_1-1}{\rho_1+1}\left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+O(t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^3)+O(t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\theta_k^2),\quad k\to\infty,$$

тобто твердження 4) леми 3.18 доведено.

Якщо $s=4\rho_2-3\rho_1$, $3\rho_2-2\rho_1=0$, $\delta\neq\dfrac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, то за твердженням 5) леми 3.11 $Q=\dfrac{\rho_1}{3\rho_1T_1(\rho_1+1)}\left(\dfrac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\delta\right)$ і $q=4\rho_2-3\rho_1$, а з (3.60) отримуємо

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=B^*(t_k,\theta_k)+\frac{1}{6}\frac{(T_2\rho_2)^3}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^2}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)}{216}\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}+(1+o(1))\delta\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}-$$
$$-\frac{\rho_1}{3(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\delta\right)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}+$$
$$+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}})=B^*(t_k,\theta_k)+\frac{(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-$$
$$-\frac{4\rho_1+3}{3(\rho_1+1)}\left(\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}+$$

$$+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}), \quad k \to \infty,$$

тобто твердження 5) леми 3.18 доведено.

За умови $3\rho_2 - 2\rho_1 - 1 = 0$ з (3.58) одержуємо

$$\begin{aligned} G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B^*(t_k, \theta_k) - \\ - \frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)}{216} \frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} + \\ + \frac{(\rho_1+2)(\rho_1+8)(\rho_1-1)}{1080} \frac{(T_2\rho_2)^5}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}} + \\ + \frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(4\rho_2-3\rho_1)\theta_k}{432(\rho_1+1)} \frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} - \\ - T_1\rho_1(Q+o(1)) \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}} + (1+o(1))\delta \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}} + O\left(t_k^{\frac{6\rho_2-5\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + \\ + O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}) + O\left(\theta_k t_k^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}\right), \quad k \to \infty. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Тому, якщо $s = 4\rho_2 - 3\rho_1$, $\delta \neq \dfrac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3}$, $\rho_1 \neq 4$, то за твердженням 6) леми 3.11 $Q = \dfrac{(\rho_1-4)}{3\rho_1 T_1(\rho_1+1)} \left(\dfrac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3} - \delta\right)$ і $q = 4\rho_2 - 3\rho_1$ і, отже,

$$\begin{aligned} G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B^*(t_k, \theta_k) - \\ - \frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)}{216} \frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3} \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} + \\ + \frac{(\rho_1-4)}{3(\rho_1+1)} \left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3} - \delta\right) \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} + \\ + \delta(1+o(1)) \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} + O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}) = \\ = -\frac{2\rho_1+7}{3(\rho_1+1)} \left(\frac{(\rho_1+2)(\rho_1-1)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3} - \delta + o(1)\right) \left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} + \\ + O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}), \quad k \to \infty, \end{aligned}$$

тобто твердження 6) леми 3.18 доведено.

Нарешті, якщо $\rho_1 = 4$, то $3\rho_1 - 4\rho_2 = 0$ і з (3.61) маємо

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B^*(t_k, \theta_k) - \frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+ \frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}} - T_1\rho_1(Q+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{q}{\rho_1+1}} +$$
$$+ (1+o(1))\delta\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}} + O\left(t_k^{\frac{6\rho_2-5\rho_1}{\rho_1+1}}\right) +$$
$$+ O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}) + O\left(\theta_k t_k^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}\right), \quad k \to \infty.$$

Тому, якщо $s = 5\rho_2 - 4\rho_1$ і $\delta \neq \frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4}$, то за твердженням 7) леми 3.11 $Q = -\frac{1}{\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\left(\frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4} - \delta\right)$ і $q = 5\rho_2 - 4\rho_1$ і, отже,

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B^*(t_k, \theta_k) - \frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}} -$$
$$- \frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+ \frac{1}{\rho_1+1}\left(\frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4} - \delta\right)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+ (1+o(1))\delta\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s}{\rho_1+1}} + O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}) =$$
$$= -\frac{1}{12}\frac{(T_2\rho_2)^4}{(T_1\rho_1(\rho_1+1))^3} -$$
$$- \frac{\rho_1}{(\rho_1+1)}\left(\frac{(T_2\rho_2)^5}{5(T_1\rho_1(\rho_1+1))^4} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}} +$$
$$+ O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}), \quad k \to \infty.$$

Твердження 7) леми 3.18 і, отже, лему 3.18 повністю доведено.

Оскільки з огляду на (3.53) і (3.57)

$$B^*(t_k, \theta_k) - A^*(t_k, \theta_k) = \frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} \theta_k^2,$$

то з (3.52) і (3.57) отримуємо

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)-G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=\frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2+$$
$$+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}})+g_2(t_k,\theta_k)-g_1(t_k,\theta_k),\quad k\to\infty.$$

Тому з лем 3.15 і 3.18 отримуємо наступну лему.

Лема 3.19. *Нехай функція* $\Phi\in\Omega(0)$ *така, що виконується* (3.25), *а* $\theta_k\to 0\quad(k\to\infty)$. *Тоді*

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)-G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=\frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2+$$
$$+O(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}})+g(t_k,\theta_k),\quad k\to\infty,$$

і для $g(t_k,\theta_k)$ *при* $k\to\infty$ *правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s=\varrho>2\rho_2-\rho_1$ *і* $\tau+\delta\neq 0$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}\right)$

2) якщо $s=\rho<2\rho_2-\rho_1$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)$

3) якщо $s=\rho=2\rho_2-\rho_1$, $\tau\neq\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $\tau+\delta\neq\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)$

4) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=3\rho_2-2\rho_1$, $\tau=\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $(3\rho_2-2\rho_1)(3\rho_2-2\rho_1-1)\neq 0$, $\delta\neq\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}\right)$

5) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1=0$, $\delta\neq\frac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}\right)$

6) якщо $\rho=2\rho_2-\rho_1$, $s=4\rho_2-3\rho_1$, $\tau=\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2-2\rho_1-1=0$, $\delta\neq\frac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}$, $\rho_1\neq 4$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{\frac{4\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}\right)$

7) якщо $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$, $s = 5\rho_2 - 4\rho_1$, $\rho_1 = 4$, $\tau = \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2 - 2\rho_1 - 1 = 0$, *то* $g(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{5\rho_2-4\rho_1}{\rho_1+1}}\right)$

Використовуючи леми 3.13 - 3.19, доведемо ще наступну лему.

Лема 3.20. *Нехай*

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{\tau}{|\sigma|^{\rho}} - \frac{\delta}{|\sigma|^{s}}, \quad \sigma_0 \le \sigma < 0,$$

$$\Phi_2(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{\tau}{|\sigma|^{\rho}} + \frac{\delta}{|\sigma|^{s}}, \quad \sigma_0 \le \sigma < 0,$$

де $\delta > 0$ *і* $s \le \rho$. *Припустимо, що* $t_{k+1} = (1+\theta_k)t_k$ *і для всіх* $k \ge k_0$

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) \ge \Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)). \tag{3.62}$$

Тоді $\theta_k \to 0 \quad (k \to \infty)$ *і*

$$\theta_k^2 \le \frac{16(\rho_1+1)}{T_1\rho_1}(\delta + o(1))\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1}{\rho_1+1}} + g^*(t_k, \theta_k),$$

де при $k \to \infty$ *правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s = \varrho > 2\rho_2 - \rho_1$ *і* $\tau \pm \delta \ne 0$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{\rho-\rho_1}{\rho_1+1}}\right)$

2) якщо $s = \rho < 2\rho_2 - \rho_1$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)$

3) якщо $s = \rho = 2\rho_2 - \rho_1$, $\tau \ne \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$, $\tau + \delta \ne \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)$

4) якщо $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$, $s = 3\rho_2 - 2\rho_1$, $\tau = \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$, $(3\rho_2 - 2\rho_1)(3\rho_2 - 2\rho_1 - 1) \ne 0$, $\delta \ne \dfrac{(3\rho_2 - 2\rho_1 - 1)(\rho_2 T_2)^3}{6(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^2}$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)$

5) якщо $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$, $s = 4\rho_2 - 3\rho_1$, $\tau = \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2 - 2\rho_1 = 0$, $\delta \ne \dfrac{(\rho_1+3)(\rho_1+6)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3}$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)$

6) якщо $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$, $s = 4\rho_2 - 3\rho_1$, $\tau = \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2 - 2\rho_1 - 1 = 0$, $\delta \neq \dfrac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3}$, $\rho_1 \neq 4$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)$

7) якщо $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$, $s = 5\rho_2 - 4\rho_1$, $\rho_1 = 4$, $\tau = \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$, $3\rho_2 - 2\rho_1 - 1 = 0$, *то* $g^*(t_k, \theta_k) = o\left(t_k^{\frac{5(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+1}}\right)$

Доведення. Оскільки $\Phi_1(\sigma) = \Phi_2(\sigma) - \dfrac{2\delta}{|\sigma|^s}$, $\Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)) = = G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)$, то з (3.53) маємо

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) \geq G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) - \frac{2\delta}{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^s}. \tag{3.63}$$

Припустимо, що $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \theta_k = +\infty$. Тоді існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \infty (j \to \infty)$, а для цієї послідовності і асимптотики $|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^s = (1 + o(1))(\frac{\rho_1+1}{\rho_1})^s \cdot (\frac{t_k}{T_1\rho_1})^{-\frac{s}{\rho_1+1}} \cdot \theta_k^{-\frac{s}{\rho_1+1}}$ $(k \to +\infty)$ за лемами 3.13 і 3.16 маємо

$$T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} \geq (1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_{k_j}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad j \to \infty,$$

що неможливо.

Якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \theta_k = \theta \in (0, +\infty)$, то існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \theta (j \to \infty)$, а для цієї послідовності і асимптотики $|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^s = (1 + o(1))(\frac{\rho_1+1}{\rho_1})^s \cdot (\frac{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1}{\theta})^s \cdot (\frac{t_k}{T_1\rho_1})^{-\frac{s}{\rho_1+1}}$ $(k \to +\infty)$ з огляду на леми 3.14 і 3.17 правильна асимптотична нерівність

$$T_1(\rho_1+1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\frac{1+\theta}{\theta}\left(1-(1+\theta)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\right) \geq$$
$$(1+o(1))T_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\left(\frac{\theta}{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1}\right)^{\rho_1}, \quad j \to \infty,$$

звідки випливає, що

$$(\rho_1+1)\frac{1+\theta}{\theta}\left(1-(1+\theta)^{-\frac{1}{\rho_1+1}}\right) \geq \left(\frac{\rho_1}{\rho_1+1}\right)^{\rho_1}\left(\frac{\theta}{(1+\theta)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-1}\right)^{\rho_1}.$$

Подібно, використовуючи нерівність $G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) < G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)$ і леми 3.14 та 3.17, отримаємо протилежну нерівність. Тому θ задовольняє рівняння (3.17) і, отже, як у доведенні леми 3.10, $\theta_k \to 0 \quad (k \to \infty)$, а у цьому випадку, наприклад, за твердженням 1) леми 3.19 з огляду на (3.62)

$$\frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2 \leq \frac{2\delta}{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^s} + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\right) + \\ + O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + o\left(t_k^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}\right)$$

при $k \to \infty$. Але з (3.62) випливає, що $|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)|^s = (1+o(1))\left(\dfrac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{-\frac{s}{\rho_1+1}}$ $(k \to \infty)$. Тому, якщо $s = \rho$, то

$$\frac{T_1\rho_1\theta_k^2}{8(\rho_1+1)} \leq 2\delta\left(\frac{t_k}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{s-\rho_1}{\rho_1+1}} + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}\right) + \\ + O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\right) + o\left(t_k^{\frac{\rho-\rho_1}{\rho_1+1}}\right) \quad (k \to \infty),$$

звідки випливає твердження 1) леми 3.20. Решта тверджень цієї леми доводяться подібно.

3.2.3. Зв'язок між зростанням максимального члена і коефіцієнтів.

Використовуючи леми 3.12, 3.19, 3.20, доведемо тепер теореми, які у термінах тричленної степеневої асимптотики вкажуть на зв'язок між зростанням максимального члена і коефіцієнтів. З теореми 3.1 випливає наступна теорема.

Теорема 3.2. *Якщо $\rho > 2\rho_2 - \rho_1$, то для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho}}, \quad \sigma \uparrow 0$$

необхідно і досить, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + (\tau+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + (\tau-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho+\rho_1+2}{2(\rho_1+1)}}\right), \quad k \to \infty.$$

Теорема 3.3. *Якщо $\rho < 2\rho_2 - \rho_1$, то для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \left(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}},$$

необхідно, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \\ - \left(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} - \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}; \quad (3.64)$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \\ - \left(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} + \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} \quad (3.65)$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2+1}{\rho_1+1}}\right), \quad k \to \infty.$$

Доведення. Як у доведенні теореми 3.1, з (3.65) бачимо, що умова (1.2) теореми 1.9 виконується для кожного $\delta \in (0, |\tau|)$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(\delta), 0)$

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau-\delta)}{|\sigma|^{\rho}}, \quad \Phi_2(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau+\delta)}{|\sigma|^{\rho}}.$$

Тому за цією теоремою правильні нерівності (1.3) - (1.5). Але за твердженням 2) леми 3.12 з $s=\rho$ тепер маємо

$$\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) = -T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + \\ + \left(\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad n\to\infty,$$

$$\lambda_n\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) = -T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \\ - \left(\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad k\to\infty,$$

а за твердженням 2) леми 3.19 з нерівності (1.5), як у доведенні теореми 3.2, отримуємо

$$\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^2 = \theta_k^2 \le \frac{16(\rho_1+1)}{T_1\rho_1}(\delta+o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad k\to\infty.$$

Завдяки довільності δ, з цих співвідношень випливають співвідношення (3.64) - (3.65). Теорему 3.3 доведено.

Наступні дві теореми стосуються випадку, коли $\rho = 2\rho_2-\rho_1$.

Теорема 3.4. *Нехай* $\rho=2\rho_2-\rho_1$ *і* $\tau \ne \dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$. *Тоді для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau+o(1))}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}}, \quad \sigma\uparrow 0, \tag{3.66}$$

необхідно і досить, щоб для будь якого $\varepsilon>0$*:*

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$*, що для всіх* $n\ge n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \le T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + \\ + \left(\tau+\varepsilon-\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}; \tag{3.67}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + \\ + \left(\tau - \varepsilon - \frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} \qquad (3.68)$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2+1}{\rho_1+1}}\right), \quad k \to \infty. \qquad (3.69)$$

Доведення. Почнемо з необхідності. З (3.66) випливає, що для кожного $0 < \delta < \min\left\{|\tau|, |\tau - \frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}|\right\}$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(\delta), 0)$ отримуємо з теореми 1.9 нерівність (1.2) з

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau-\delta)}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}}, \quad \Phi_2(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau+\delta)}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}}.$$

Тому за теоремою 1.9 правильні нерівності (1.3) - (1.5). Але за твердженням 3) леми 3.12 з $s = \rho = 2\rho_2 - \rho_1$

$$\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) = -T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \\ - \left(\tau + \delta - \frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad n \to \infty, \qquad (3.70)$$

$$\lambda_n\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) = -T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \\ - \left(\tau - \delta - \frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}, k \to \infty, \qquad (3.71)$$

а за твердженням 3) леми 3.20 і з нерівності (1.5) випливає, що

$$\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^2 = \theta_k^2 \leq \frac{16(\rho_1+1)}{T_1\rho_1}(\delta + o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}, \quad k \to \infty,$$

тобто

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} \le 4\sqrt{\rho_1+1}(\sqrt{\delta}+o(1))(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_1-2\rho_2-1}{2(\rho_1+1)}}\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2+1}{\rho_1+1}}, \quad k\to\infty. \tag{3.72}$$

Завдяки довільності δ з цих співвідношень випливають співвідношення (3.67) - (3.69).

Доведемо достатність умов (3.67) - (3.69). Використовуючи теорему 1.8 і твердження 3) леми 3.12 з $s=\rho=2\rho_2-\rho_1$, неважко показати, що з огляду на довільність ε з умови (3.67) випливає асимптотична нерівність

$$\ln\mu(\sigma) \le \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau+o(1))}{|\sigma|^{\rho}}, \quad \sigma\uparrow 0. \tag{3.73}$$

Далі за теоремою 1.10 і твердженням 3) леми 3.19 з $s=\rho=2\rho_2-\rho_1$ з огляду на умову (3.68) для всіх $\sigma\in[\varphi_1(\lambda_{n_k}),\varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k\ge k_0$ маємо

$$\ln\mu(\sigma) \ge \Phi_1(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi) - G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)) = \Phi_1(\sigma) -$$
$$-\frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2 + O(\theta_k^2\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}) + O(\theta_k^3\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}) + o(\lambda_{n_k}^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}) =$$
$$= \Phi_1(\sigma) + o(\lambda_{n_k}^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}), \quad k\to\infty,$$

і, отже,

$$\ln\mu(\sigma) \ge \Phi_1(\sigma) + o((\Phi_1'(\sigma))^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}) = \Phi_1(\sigma) + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} =$$
$$= \Phi_1(\sigma) + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}}\right), \quad \sigma\uparrow 0,$$

звідки, завдяки довільності δ , отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma) \ge \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau+o(1))}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}}, \quad \sigma\uparrow 0. \tag{3.74}$$

З (3.73) і (3.74) випливає (3.66). Теорему 3.4 доведено.

У випадку, коли $\tau = \dfrac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}$, правильною є наступна теорема.

Теорема 3.5. *Для того, щоб при $\sigma\uparrow 0$*

$$\ln\mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \left(\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}}, \tag{3.75}$$

необхідно і досить, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + \varepsilon\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}}; \quad (3.76)$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \varepsilon\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_1+1}} \quad (3.77)$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2+1}{\rho_1+1}}\right), \quad k \to \infty.$$

Доведення. Почнемо з необхідності. Нехай τ і δ - довільні додатні числа, такі, що $0 < \tau - \delta < \tau < \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} < \tau + \delta$. Тоді з (3.76) для всіх $\sigma \in [\sigma_0(\tau,\delta), 0)$ отримуємо нерівність (1.2) з теореми 1.9 з

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau-\delta)}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}}, \quad \Phi_2(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau+\delta)}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}}.$$

Тому за теоремою 1.9 правильні нерівності (1.3) - (1.5). Але за твердженням 3) леми 3.12 з $s = \rho$, як видно з доведення теореми 3.3, правильні співвідношення (3.70) і (3.71), а за твердженням 3) леми 3.20 з нерівності (1.5) випливає нерівність (3.72). Оскільки можемо вибрати τ як завгодно близьким до $\dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$, а δ досить малим, з асимптотичних нерівностей (3.70) і (3.71) випливають співвідношення (3.76) і (3.77).

Доведемо достатність умов (3.76) і (3.77). Оскільки, завдяки довільності ε, нерівності (3.76) і (3.77) можна записати у вигляді (3.67) і (3.71) для досить близьких до $\dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$ значень τ, то з доведення достатності у теоремі 3.4 випливає, що правильною є асимптотична рівність (3.66), звідки з огляду на довільність τ отримуємо (3.75). Теорему 3.5 доведено.

Об'єднаємо твердження теорем 3.2 - 3.5 у наступну теорему. Для цього приймемо

$$\tau^* = \tau I_{\{\rho:\rho\geq 2\rho_2-\rho_1\}}(\rho) - \frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} I_{\{\rho:\rho\leq 2\rho_2-\rho_1\}}(\rho),$$

де $I_E(\rho)$ - характеристична функція множини E, тобто, $I_E(\rho) = 1$, коли $\rho \in E$, $I_E(\rho) = 0$, коли $\rho \notin E$.

Основний результат підрозділу 3.2 містить наступна теорема.

Теорема 3.6. *Для того, щоб при $\sigma \uparrow 0$*

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho}},$$

необхідно, а у випадку, коли $\rho \geq 2\rho_2 - \rho_1$, і досить, щоб для кожного $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + (\tau^*+\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\max\{\rho, 2\rho_2-\rho_1\}}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} + (\tau^*-\varepsilon)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\max\{\rho, 2\rho_2-\rho_1\}}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1+\max\{\rho,2\rho_2-\rho_1\}+2}{2(\rho_1+1)}}\right), \quad k \to \infty.$$

Зауважимо, що якщо $\rho = 2\rho_2 - \rho_1$, $\tau = \dfrac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)}$, а третій член асимптотики

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho}},$$

має вигляд

$$\frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho}} = \frac{\tau}{|\sigma|^{\rho}} + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{s}}\right) \quad \sigma \uparrow 0,$$

де $s < \rho$ то теорему 3.6 можна уточнити. Правильна наступна теорема.

Теорема 3.7. *Якщо $2\rho_2 - \rho_1 > 0$ і $(3\rho_2 - 2\rho_1)(3\rho_2 - 2\rho_1 - 1) \neq 0$, то для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \left(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}} + \\ + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{3\rho_2-2\rho_1}}\right), \quad \sigma \uparrow 0 \quad (3.78)$$

необхідно і досить, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln |a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \\ - \left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2} - \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln |a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \\ - \left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2} + \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{3\rho_2-2\rho_1+2}{2(\rho_1+1)}}\right), \quad k \to \infty.$$

Доведення. Нехай $0 < \delta < \dfrac{|(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3|}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}$. Тоді з (3.78) для $\sigma \in [\sigma_0(\delta), 0)$ маємо (1.2) з теореми 1.9 з

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}} - \frac{\delta}{|\sigma|^{3\rho_2-2\rho_1}}$$

і

$$\Phi_2(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}} + \frac{\delta}{|\sigma|^{3\rho_2-2\rho_1}}.$$

Тому за теоремою 1.9 правильні нерівності (1.3) - (1.5). Але за твердженням 4) леми 3.12 з

$$\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) = -T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} - T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} +$$

$$+\left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}},\quad n\to\infty,$$

$$\lambda_n\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k}))=-T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}}+$$
$$+\left(\frac{(3\rho_2-2\rho_1-1)(\rho_2T_2)^3}{6(\rho_1T_1(\rho_1+1))^2}+\delta+o(1)\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}},\quad k\to\infty,$$

а за твердженням 3) леми 3.20 з нерівності (1.5) випливає

$$\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^2=\theta_k^2\le\frac{16(\rho_1+1)}{T_1\rho_1}(\delta+o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{3\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}},\quad k\to\infty,$$

тобто

$$\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}\le4\sqrt{\rho_1+1}(\sqrt{\delta}+o(1))(T_1\rho_1)^{\frac{2\rho_1-3\rho_2-1}{2(\rho_1+1)}}\lambda_{n_k}^{\frac{3\rho_2-2\rho_1+2}{\rho_1+1}},\quad k\to\infty.$$

Завдяки довільності δ з цих співвідношень випливає необхідність умов 1) і 2) в теоремі 3.7. Навпаки з умов 1) і 2), за теоремою 1.8 і твердженням 4) леми 3.12, як звичайно, отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma)\le\frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}}+\frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}}+\left(\frac{(\rho_2T_2)^2}{2\rho_1T_1(\rho_1+1)}+o(1)\right)\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}}+$$
$$+o\left(\frac{1}{|\sigma|^{3\rho_2-2\rho_1}}\right),\quad\sigma\uparrow0.\quad(3.79)$$

Далі за теоремою 1.10 і твердженням 4) леми 3.19 за умови 2) для всіх $\sigma\in[\varphi_1(\lambda_{n_k}),\varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k\ge k_0$ маємо

$$\ln\mu(\sigma)\ge\Phi_1(\sigma)-\frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2+O(\theta_k^2\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}})+O(\theta_k^3\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}})+$$
$$+o(\lambda_{n_k}^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}})=\Phi_1(\sigma)+o(\lambda_{n_k}^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}),\quad k\to\infty,\quad(3.80)$$

бо $\theta_k=\lambda_{n_k}^{\frac{3\rho_2-3\rho_1}{\rho_1+1}}$ $(k\to\infty)$. Оскільки $\varphi_1(\lambda_{n_k})\le\sigma\le\varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})$, то $\lambda_{n_k}\le\Phi_1'(\sigma)\le\lambda_{n_{k+1}}$ і з (3.78) отримуємо

$$\ln\mu(\sigma)\ge\Phi_1(\sigma)+o((\Phi_1'(\sigma))^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}})=\Phi_1(\sigma)+o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}\right)^{\frac{3\rho_2-2\rho_1}{\rho_1+1}}=$$

$$= \Phi_1(\sigma) + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{3\rho_2-2\rho_1}}\right), \quad \sigma \uparrow 0,$$

звідки, завдяки довільності δ , отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma) \geq \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \left(\frac{(\rho_2 T_2)^2}{2\rho_1 T_1(\rho_1+1)} + o(1)\right)\frac{1}{|\sigma|^{2\rho_2-\rho_1}} + \\ + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{3\rho_2-2\rho_1}}\right), \quad \sigma \uparrow 0. \quad (3.81)$$

З (3.79) і (3.81) випливає (3.78). Теорему 3.7 доведено.

Теорема 3.8. *Якщо $\rho_1 \neq 4$, то для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\frac{2\rho_1+1}{3}}} + \frac{(T_2(2\rho_1+1))^2}{18\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\frac{1}{|\sigma|^{\frac{\rho_1+2}{3}}} + o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\frac{-\rho_1+4}{3}}}\right), \quad \sigma \uparrow 0 \quad (3.82)$$

необхідно і досить, щоб для будь якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \leq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_1+1}{3(\rho_1+1)}} - \\ - \left(\frac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3} - \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{-(\rho_1-4)}{3(\rho_1+1)}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \geq T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}} + T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_2}{\rho_1+1}} - \\ - \left(\frac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3} + \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{-(\rho_1-4)}{3(\rho_1+1)}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1+5}{3(\rho_1+1)}}\right), \quad k \to \infty.$$

Доведення. Нехай $0 < \delta < \left|\frac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2 T_2)^4}{216(\rho_1 T_1(\rho_1+1))^3}\right|$. Тоді з (3.82) для всіх $\sigma \in [\sigma_0(\delta), 0)$ отримаємо нерівність (1.2) з

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\frac{2\rho_1+1}{3}}} + \frac{(T_2(2\rho_1+1))^2}{18\rho_1 T_1(\rho_1+1)}\frac{1}{|\sigma|^{\frac{\rho_1+2}{3}}} - \frac{\delta}{|\sigma|^{\frac{-\rho_1+4}{3}}}$$

і

$$\Phi_2(\sigma)=\frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}}+\frac{T_2}{|\sigma|^{\frac{2\rho_1+1}{3}}}+\frac{(T_2(2\rho_1+1))^2}{18\rho_1T_1(\rho_1+1)}\frac{1}{|\sigma|^{\frac{\rho_1+2}{3}}}+\frac{\delta}{|\sigma|^{\frac{-\rho_1+4}{3}}}.$$

Звідси за теоремою 1.9 правильні нерівності (1.3) - (1.5), але за твердженням 6) леми 3.12 з

$$\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n))=-T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-T_2\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_1+1}{3(\rho_1+1)}}+$$
$$+\left(\frac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{-(\rho_1-4)}{3(\rho_1+1)}},\quad n\to\infty,$$

$$\lambda_{n_k}\Psi_2(\varphi_2(\lambda_{n_k}))=-T_1(\rho_1+1)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}-T_2\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{2\rho_1+1}{3(\rho_1+1)}}+$$
$$+\left(\frac{(\rho_1-1)(\rho_1+2)(\rho_2T_2)^4}{216(\rho_1T_1(\rho_1+1))^3}+\delta+o(1)\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{-(\rho_1-4)}{3(\rho_1+1)}},\quad k\to\infty,$$

а за твердженням 6) леми 3.20 з нерівності (1.5) випливає

$$\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^2=\theta_k^2\le\frac{16(\rho_1+1)}{T_1\rho_1}(\delta+o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{-4\rho_1+4}{\rho_1+1}},\quad k\to\infty,$$

тобто

$$\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}\le4\sqrt{\rho_1+1}(\sqrt{\delta}+o(1))(T_1\rho_1)^{\frac{\rho_1-7}{6(\rho_1+1)}}\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1+5}{3(\rho_1+1)}},\quad k\to\infty.$$

Завдяки довільності δ з цих співвідношень випливає необхідність умов 1) і 2) в теоремі 3.8. Навпаки з умов 1) і 2), за теоремою 1.8 і твердженням 6) леми 3.12, як звичайно, отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma)\le\frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}}+\frac{T_2}{|\sigma|^{\frac{2\rho_1+1}{3}}}+\frac{(T_2(2\rho_1+1))^2}{18\rho_1T_1(\rho_1+1)}\frac{1}{|\sigma|^{\frac{\rho_1+2}{3}}}+o\left(\frac{1}{|\sigma|^{\frac{-\rho_1+4}{3}}}\right),\quad\sigma\uparrow0 \tag{3.83}$$

Використовуючи теорему 1.10 і твердження 6) леми 3.19 за умови 2) для всіх $\sigma\in[\varphi_1(\lambda_{n_k}),\varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k\ge k_0$ маємо

$$\ln\mu(\sigma)\ge\Phi_1(\sigma)-\frac{T_1\rho_1}{8(\rho_1+1)}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}}\theta_k^2+O(\theta_k^2\lambda_{n_k}^{\frac{2\rho_1+1}{3(\rho_1+1)}})+O(\theta_k^3\lambda_{n_k}^{\frac{\rho_1}{\rho_1+1}})+$$

$$+ o(\lambda_{n_k}^{\frac{-\rho_1+4}{3(\rho_1+1)}}) = \Phi_1(\sigma) + o(\lambda_{n_k}^{\frac{-\rho_1+4}{3(\rho_1+1)}}), \quad k \to \infty, \quad (3.84)$$

тому, що $\theta_k = \lambda_{n_k}^{\frac{-4\rho_1+4}{3(\rho_1+1)}} (k \to \infty)$. Оскільки $\varphi_1(\lambda_{n_k}) \le \sigma \le \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})$, то $\lambda_{n_k} \le \Phi_1'(\sigma) \le \lambda_{n_{k+1}}$ і з (3.84) отримуємо

$$\ln \mu(\sigma) \ge \Phi_1(\sigma) + o((\Phi_1'(\sigma))^{\frac{-\rho_1+4}{3(\rho_1+1)}}) = \Phi_1(\sigma) + o\biggl(\frac{1}{|\sigma|^{\rho_1+1}}\biggr)^{\frac{-\rho_1+4}{3(\rho_1+1)}} =$$

$$= \Phi_1(\sigma) + o\biggl(\frac{1}{|\sigma|^{\frac{-\rho_1+4}{3}}}\biggr), \quad \sigma \uparrow 0,$$

звідки, завдяки довільності δ , отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln \mu(\sigma) \ge \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\frac{2\rho_1+1}{3}}} + \frac{(T_2(2\rho_1+1))^2}{18\rho_1 T_1(\rho_1+1)} \frac{1}{|\sigma|^{\frac{\rho_1+2}{3}}} + o\biggl(\frac{1}{|\sigma|^{\frac{-\rho_1+4}{3}}}\biggr), \quad \sigma \uparrow 0. \quad (3.85)$$

З (3.84) і (3.85) випливає (3.82). Теорему 3.8 доведено.

3.2.4. Максимум модуля і коефіцієнти.

Як у підрозділі 3.1 використовуючи теорему 2.7 і теореми, отримані вище у підрозділі 3.2, можемо тепер встановити зв'язок між зростанням функції $\ln M(\sigma, F)$ і коефіцієнтів a_n ряду (2.1). З огляду на подібність зупинимось тільки на твердженні, яке випливає з основної теореми 3.6.

Наслідок 3.2. *Нехай показники абсолютно збіжного в* $\{s : Res < 0\}$ *ряду Діріхле (2.1) задовольняють умову* $\ln n = o(\lambda_n^{\frac{\rho}{\rho_1+1}})$ *при* $n \to \infty$. *Тоді для того, щоб правильною була асимптотична рівність*

$$\ln M(\sigma, F) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \frac{T_2}{|\sigma|^{\rho_2}} + \frac{(\tau + o(1))}{|\sigma|^{\rho}}, \quad \sigma \uparrow 0,$$

необхідно, а у випадку $\rho \ge 2\rho_2 - \rho_1$ *і досить, щоб виконувались умови 1) і 2) теореми 3.6.*

3.3. Висновки.

У третьому розділі досліджено умови на показники і коефіцієнти абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле (2.1), за яких для його максимального члена правильна наступна асимптотична рівність

$$\ln \mu(\sigma, F) = \frac{T_1}{|\sigma|^{\rho_1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{T_j}{|\sigma|^{\rho_j}} + \frac{\tau}{|\sigma|^{\rho_n}}, \quad \sigma_0 \leq \sigma < 0.$$

де $T_1 > 0$ $T_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, j = \overline{2, n-1}, \quad \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad 0 < \rho_n < ... < \rho_2 < \rho_1$. У випадку, коли $\rho_n > 2\rho_2 - \rho_1$, отриманий результат має критеріальний характер.

Істотність умови $\rho_n \geq 2\rho_2 - \rho_1$ досліджено у випадку, коли $n = 3$. Зв'язок між зростанням логарифма максимального члена та коефіцієнтів абсолютно збіжного у півплощині $\{s : Res < 0\}$ ряду Діріхле (2.1) у термінах тричленної степеневої асимптотики отримано в ряді теорем у підрозділі 3.2.

Об'єднуючи результати розділів 2 і 3, одержано зв'язок між зростанням логарифма максимуму модуля і коефіцієнтів.

РОЗДІЛ 4

АБСОЛЮТНО ЗБІЖНІ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДИ ДІРІХЛЕ СКІНЧЕННОГО R-ПОРЯДКУ

У теорії рядів Діріхле важливим є клас абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле (2.1) скінченного R-порядку за А. Гайсиним [5], тобто для яких

$$\varrho_R^0 = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F) < +\infty.$$

Для таких рядів Діріхле R-тип, за умови $0 < \varrho_R^0 < +\infty$, вводиться [56] за формулою

$$T_R^0 = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{ -\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\} \ln\ M(\sigma, F)$$

Тут ми доповнимо результати робіт [56] і [34], досліджуючи умови, за яких $\ln M(\sigma, F)$ має регулярне зростання, і встановимо зв'язок між R-порядком і нижнім R-порядком.

4.1. Регулярність зростання

Основною метою цього підрозділу є знаходження умов на (λ_n) і (a_n), за яких

$$\ln M(\sigma, F) = T_R(1 + o(1)) \exp\left\{\frac{\varrho_R}{|\sigma|}\right\}, \quad \sigma \uparrow 0. \tag{4.1}$$

Оскільки $(x\Psi(\varphi(x)))' = \varphi(x)$, то, як видно з леми 1.1 і теорем 1.8, 1.9, 1.10, важливою є наступна лема.

Лема 4.1. *Нехай* $\Phi(\sigma) = T \exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$, *де* $T > 0, \varrho > 0$. *Тоді*

$$\varphi(x) = -\varrho\left(\frac{1}{\ln x} + \frac{2\ln\ln x}{\ln^2 x} + \frac{1}{\ln^2 x} \ln \frac{(1 + o(1))T}{\varrho}\right), \quad x \to +\infty.$$

Доведення. Оскільки $\Phi'(\sigma) = \dfrac{T\varrho}{|\sigma|^2}\exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$, то для знаходження асимптотики функції φ треба розв'язати рівняння

$$\frac{\varrho}{|\sigma|} + 2\ln\frac{1}{|\sigma|} = \ln\frac{x}{T\varrho}. \tag{4.2}$$

Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді

$$\frac{1}{|\sigma|} = \frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho} - \alpha(x), \tag{4.3}$$

де $\alpha(x) = o(\ln x), \quad x \to +\infty$. Підставляючи (4.3) в (4.2) , при $x \to +\infty$ маємо

$$\varrho\alpha(x) = 2\ln\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho} - \alpha(x)\right) = 2\ln\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right) + 2\ln\left(1 - \frac{\varrho\alpha(x)}{\ln\dfrac{x}{T\varrho}}\right) =$$

$$= 2\ln\ln x - 2\ln\varrho + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) + O\left(\frac{\alpha(x)}{\ln x}\right) = 2\ln\ln x - 2\ln\varrho + O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

Тому з (4.3) випливає, що

$$\frac{1}{|\varphi(x)|} = \frac{1}{\varrho}\left(\ln x - 2\ln\ln x - \ln\frac{T}{\varrho} + O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)\right), \quad x \to +\infty, \tag{4.4}$$

і отже,

$$|\varphi(x)| = \frac{\varrho}{\ln x}\frac{1}{1 - \dfrac{2\ln\ln x}{\ln x} - \dfrac{\ln T/\varrho}{\ln x} + O\left(\dfrac{\ln\ln x}{\ln^2 x}\right)} =$$

$$= \frac{\varrho}{\ln x}\left(1 + \frac{2\ln\ln x}{\ln x} + \frac{\ln T/\varrho}{\ln x} + O\left(\frac{\ln\ln x}{\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{\ln^2\ln x}{\ln^2 x}\right)\right) =$$

$$= \frac{\varrho}{\ln x} + \frac{2\varrho\ln\ln x}{\ln^2 x} + \frac{\varrho\ln T/\varrho}{\ln^2 x}(1 + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Оскільки для додатної сталої q правильна асимптотична рівність

$$(1 + o(1))\ln q = \ln(1 + o(1))q, \quad x \to +\infty,$$

то лему 4.1 доведено.

Неважко перевірити, що $\Psi(\sigma) = -\left(|\sigma| + \dfrac{|\sigma|^2}{\varrho}\right)$. Тому за лемою 4.1

$$x\Psi(\varphi(x)) = -x\biggl(|\varphi(x)| + \frac{|\varphi(x)|^2}{\varrho}\biggr) =$$
$$= -x\biggl(\frac{\varrho}{\ln x} + \frac{2\varrho\ln\ln x}{\ln^2 x} + \frac{\varrho\ln(T(1+o(1))/\varrho)}{\ln^2 x} + +\frac{\varrho^2}{\ln^2 x} + O\biggl(\frac{\ln\ln x}{\ln^3 x}\biggr)\biggr) =$$
$$= -\frac{x\varrho}{\ln^2 x}\biggl(\ln x + 2\ln\ln x + \ln\left(\frac{T(1+o(1))}{\varrho}\right)\biggr), \quad x\to+\infty, \quad (4.5)$$

За теоремою 1.8

$$\ln\mu(\sigma,F) \le (1+o(1))T\exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}, \quad \sigma\uparrow 0,$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\ln|a_n| \le \frac{\lambda_n\varrho}{\ln^2\lambda_n}\ln\left(\frac{(1+o(1))Te}{\varrho}\lambda_n\ln^2\lambda_n\right), \quad n\to\infty. \quad (4.6)$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}\exp\left\{-\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}\ln\mu(\sigma,F) = \frac{\varrho}{e}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n\ln^2\lambda_n}|a_n|^{\ln^2\lambda_n/\varrho\lambda_n} \quad (4.7)$$

Зауваження 4.1. З (4.4) випливає також, що

$$|\varphi(x)| = \frac{\varrho}{\ln(x\ln^{-2}x)}\left(1 + \frac{(1+o(1))(\ln T/\varrho)}{\ln x}\right),$$

$$|\varphi(x)|^2/\varrho = (1+o(1))\varrho\ln^{-2}x$$

і, отже,

$$x\Psi(\varphi(x)) = -\frac{x\varrho}{\ln(x\ln^{-2}x)}\left(1 + (1+o(1))\frac{\ln Te/\varrho}{\ln x}\right)$$

при $x\to+\infty$, звідки, вважаючи $T = T_R^0$ і $\varrho = \varrho_R^0$, за теоремою 1.8 отримуємо (1.9) з $\ln\mu(\sigma,F)$ замість $\ln M(\sigma,F)$, тобто формула (1.9) з $\ln\mu(\sigma,F)$ замість $\ln M(\sigma,F)$ збігається з формулою (4.7).

Перейдемо до дослідження асимтотики величин $G_j(t_k,t_{k+1},\Phi), j = 1,2$, де (t_k) - зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел і $t_{k+1} = (1+\theta_k)t_k$. З огляду на означення $G_1(t_k,t_{k+1},\Phi)$ і асимтотичну рівність (4.4) при $k\to\infty$ маємо

$$G_1(t_k,t_{k+1},\Phi)=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{T}{t^2}\exp\left\{\frac{\varrho}{|\varphi(t)|}\right\}dt=$$
$$=\frac{t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{(1+o(1))T\varrho t}{Tt^2\ln^2 t}=\frac{(1+o(1))\varrho t_kt_{k+1}}{t_{k+1}-t_k}\left(\frac{1}{\ln t_k}-\frac{1}{\ln t_{k+1}}\right)=$$
$$=\frac{(1+o(1))\varrho t_k(1+\theta_k)}{\theta_k}\frac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k(\ln t_k-\ln(1+\theta_k))}.$$

Якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\theta_k=+\infty$, то звідси для відповідної послідовності (k_j) натуральних чисел випливає, що

$$G_1(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=\frac{(1+o(1))\varrho t_{k_j}\ln(1+\theta_{k_j})}{\ln t_{k_j}(\ln t_{k_j}-\ln(1+\theta_{k_j}))},\quad j\to\infty. \tag{4.8}$$

Якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\theta_k=\theta\in(0,+\infty)$, то для відповідної послідовності (k_j) натуральних чисел

$$G_1(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=\frac{(1+o(1))\varrho t_{k_j}(1+\theta)\ln(1+\theta)}{\theta\ln^2 t_{k_j}},\quad j\to\infty. \tag{4.9}$$

Нарешті, якщо $\theta_k\to 0$ при $k\to\infty$, то

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=\frac{(1+o(1))\varrho t_k}{\ln^2 t_k},\quad k\to\infty. \tag{4.10}$$

Приймемо тепер $\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)=\dfrac{1}{t_{k+1}-t_k}\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)dt$. Тоді за лемою 4.1 при $k\to\infty$ маємо

$$\frac{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|}{\varrho}(t_{k+1}-t_k)=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{dt}{\ln t}+2\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\ln\ln t}{\ln^2 t}dt+$$
$$+(1+o(1))\ln\frac{T}{\varrho}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{dt}{\ln^2 t}. \tag{4.11}$$

Якщо через $I_k^{(1)},I_k^{(2)},I_k^{(3)}$ позначимо інтеграли у правій частині рівності (4.11), то $I_k^{(2)}=o(I_k^{(1)}),I_k^{(3)}=o(I_k^{(2)})$ при $k\to\infty$, $I_k^{(1)}=\dfrac{t_{k+1}}{\ln t_{k+1}}-\dfrac{t_k}{\ln t_k}+I_k^{(3)}$, $I_k^{(2)}=\dfrac{t_{k+1}\ln\ln t_{k+1}}{\ln^2 t_{k+1}}-\dfrac{t_k\ln\ln t_k}{\ln^2 t_k}+o(I_k^{(3)})$, $\quad I_k^{(3)}=\dfrac{t_{k+1}}{\ln^2 t_{k+1}}-\dfrac{t_k}{\ln^2 t_k}+o(I_k^{(3)})$ при $k\to\infty$. Звідси випливає, що

$$\frac{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|}{\varrho}=A_k+2B_k+(1+o(1))C_k\ln\frac{eT}{\varrho},\quad k\to\infty,$$

де
$$A_k = \frac{t_{k+1}\ln t_k - t_k \ln t_{k+1}}{(t_{k+1}-t_k)\ln t_k \ln t_{k+1}}, \tag{4.12}$$
$$B_k = \frac{t_{k+1}\ln^2 t_k \ln\ln t_{k+1} - t_k \ln^2 t_{k+1}\ln\ln t_k}{(t_{k+1}-t_k)\ln^2 t_k \ln^2 t_{k+1}} = o(A_k) \tag{4.13}$$
і
$$C_k = \frac{t_{k+1}\ln^2 t_k - t_k \ln^2 t_{k+1}}{(t_{k+1}-t_k)\ln^2 t_k \ln^2 t_{k+1}} = o(A_k), \quad k\to\infty. \tag{4.14}$$
Тому при $k\to\infty$

$$\ln G_2(t_k,t_{k+1},\Phi) = \ln\Phi(\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)) = \ln T + \frac{\varrho}{|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)|} =$$
$$= \ln T + \frac{1}{A_k\left(1+2\dfrac{B_k}{A_k}+(1+o(1))\dfrac{C_k}{A_k}\ln\dfrac{eT}{\varrho}\right)} =$$
$$= \ln T + \frac{1}{A_k}\left(1 - 2\frac{2B_k}{A_k} - (1+o(1))\frac{C_k}{A_k}\ln\frac{eT}{\varrho} + \right.$$
$$\left. + (1+o(1))\left(2\frac{B_k}{A_k} - (1+o(1))\frac{C_k}{A_k}\ln\frac{eT}{\varrho}\right)^2\right) =$$
$$= \ln T + \frac{1}{A_k} - \frac{2B_k}{A_k^2} - (1+o(1))\frac{C_k}{A_k^2}\ln\frac{eT}{\varrho} + 4(1+o(1))\frac{B_k^2}{A_k^3}. \tag{4.15}$$

Але
$$\frac{1}{A_k} = \frac{(t_{k+1}-t_k)\ln t_k \ln t_{k+1}}{t_{k+1}\ln t_{k+1} - t_k \ln t_k} = \frac{\theta_k \ln t_k(\ln t_k + \ln(1+\theta_k))}{\theta_k \ln t_k - \ln(1+\theta_k)} =$$
$$= \frac{\ln t_k + \ln(1+\theta_k)}{1-\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k \ln t_k}} = (\ln t_k + \ln(1+\theta_k))\left(1+\frac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k\ln t_k} + O\left(\frac{\ln^2(1+\theta_k)}{\theta_k^2 \ln^2 t_k}\right)\right) =$$
$$= \ln t_k + \ln(1+\theta_k) + \frac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k} + o(1), \quad k\to\infty,$$

$$\frac{B_k}{A_k^2} = \frac{(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}\ln^2 t_k \ln\ln t_{k+1} - t_k\ln^2 t_{k+1}\ln\ln t_k)}{(t_{k+1}\ln t_k - t_k \ln t_{k+1})^2} =$$
$$= \theta_k \frac{(1+\theta_k)\ln^2 t_k\left(\ln\ln t_k + \ln\left(1+\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)\right)}{(\theta_k \ln t_k - \ln(1+\theta_k))^2} -$$

$$-\frac{\theta_k(\ln t_k+\ln(1+\theta_k))^2\ln\ln t_k}{(\theta_k\ln t_k-\ln(1+\theta_k))^2}=$$

$$=\frac{\ln\ln t_k+\dfrac{1+\theta_k}{\theta_k}\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)}{\left(1-\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k\ln t_k}\right)^2}-$$

$$-\frac{\dfrac{2\ln(1+\theta_k)\ln\ln t_k}{\theta_k\ln t_k}+\dfrac{\ln^2(1+\theta_k)\ln\ln t_k}{\theta_k\ln^2 t_k}}{\left(1-\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k\ln t_k}\right)^2}=$$

$$=\left(\ln\ln t_k+\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\ln\left(1+\frac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)+o(1)\right)\left(1+(1+o(1))\frac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k\ln t_k}\right)\Bigg)=$$

$$=\ln\ln t_k+\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\ln\left(1+\frac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)+o(1),\quad k\to\infty,$$

і, подібно,

$$\frac{C_k}{A_k^2}=\frac{(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}\ln^2 t_k-t_k\ln t_{k+1}^2)}{(t_{k+1}\ln t_k-t_k\ln t_{k+1})^2}=\frac{1-\dfrac{2\ln(1+\theta_k)}{\theta_k\ln t_k}-\dfrac{\ln^2(1+\theta_k)}{\theta_k\ln^2 t_k}}{\left(1-\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k\ln t_k}\right)^2}=$$

$$=1+o(1),\quad k\to\infty,$$

а якщо $\theta_k\to 0$ при $k\to\infty$, то

$$\frac{B_k}{A_k}=\frac{(1+\theta_k)\left(\ln\ln t_k+\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)\right)-\left(1+\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)^2\ln\ln t_k}{\left(1+\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)(\theta_k\ln t_k-\ln(1+\theta_k))}=$$

$$=\frac{\ln\ln t_k+\dfrac{1+\theta_k}{\theta_k}\ln\left(1+\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)}{\left(1+\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)\left(1-\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k\ln t_k}\right)\ln t_k}-$$

$$-\frac{2\dfrac{\ln\ln t_k}{\ln t_k}\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k}+\dfrac{\ln\ln t_k}{\ln^2 t_k}\dfrac{\ln^2(1+\theta_k)}{\theta_k}}{\left(1+\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right)\left(1-\dfrac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k\ln t_k}\right)\ln t_k}=(1+o(1))\frac{\ln\ln t_k}{\ln t_k},\quad k\to\infty,$$

і, отже,

$$\frac{B_k^2}{A_k^3} = (1+o(1))\frac{\ln^2\ln t_k}{\ln t_k} = o(1), \quad k\to\infty.$$

Тому, якщо $\theta_k \to 0$ при $k\to\infty$, то з огляду на (4.12)

$$\ln G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = \ln\varrho + \ln t_k - 2\ln\ln t_k + o(1), \quad k\to\infty. \tag{4.16}$$

Якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\theta_k = +\infty$, то для відповідної послідовності (k_j) натуральних чисел випливає, що

$$\begin{gathered}\ln G_2(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) \geq \ln T + \frac{1}{A_k} - \frac{2B_k}{A_k^2} - (1+o(1))\frac{C_k}{A_k^2}\ln\frac{eT}{\varrho} = \\ = \ln T + \ln t_k + \ln(1+\theta_k) + \frac{\ln(1+\theta_k)}{\theta_k} - \\ - 2\ln\ln t_k - 2\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\ln\left(1+\frac{\ln(1+\theta_k)}{\ln t_k}\right) - \ln\frac{Te}{\varrho} + o(1) = \\ = \ln\varrho + \ln t_{k_j} + \ln(1+\theta_{k_j}) - \\ - 2\ln\ln t_{k_j} - 2\frac{1+\theta_{k_j}}{\theta_{k_j}}\ln\left(1+\frac{\ln(1+\theta_{k_j})}{\ln t_{k_j}}\right) - 1 + o(1), \quad j\to\infty. \quad (4.17)\end{gathered}$$

Якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\theta_k = \theta \in (0,+\infty)$, то для відповідної послідовності (k_j) натуральних чисел

$$\begin{gathered}\ln G_2(t_{k_j}, t_{k_j}(1+\theta_{k_j}), \Phi) \geq \ln\varrho + \ln t_{k_j} + \ln(1+\theta) - 2\ln\ln t_{k_j} + \\ + \frac{\ln(1+\theta)}{\theta} - 1 + o(1), \quad j\to\infty. \quad (4.18)\end{gathered}$$

Використовуючи отримані вище результати, доведемо тепер теорему про регулярне зростання логарифма максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле скінченного R-порядку.

Теорема 4.1. *Нехай $T>0$ і $\varrho>0$. Для того, щоб для ряду Діріхле (2.1)*

$$\ln\mu(\sigma, F) = T(1+o(1))\exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}, \quad \sigma\uparrow 0 \tag{4.19}$$

необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon\in(0,T)$:

1) існувало таке число $n_0(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n| \leq \frac{\lambda_n \varrho}{\ln^2 \lambda_n} \ln\left(\frac{(T+\varepsilon)e}{\varrho} \lambda_n \ln^2 \lambda_n\right); \tag{4.20}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k \geq k_0$

$$\ln|a_{n_k}| \geq \frac{\lambda_{n_k} \varrho}{\ln^2 \lambda_{n_k}} \ln\left(\frac{(T-\varepsilon)e}{\varrho} \lambda_{n_k} \ln^2 \lambda_{n_k}\right) \tag{4.21}$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} = 1. \tag{4.22}$$

Доведення. Почнемо з необхідності. З (4.19) випливає, що для кожного $\delta \in (0, T)$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(\delta), 0)$

$$(T-\delta)\exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\} = \Phi_1(\sigma) \leq \ln\mu(\sigma, F) \leq \Phi_2(\sigma) = (T+\delta)\exp\left\{\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$$

Тому за теоремою 1.9 з огляду на (4.5)

$$\ln|a_n| \leq \frac{\lambda_n \varrho}{\ln^2 \lambda_n} \ln\left(\frac{(T+\delta)(1+o(1))e}{\varrho} \lambda_n \ln^2 \lambda_n\right), \quad n \to \infty,$$

$$\ln|a_{n_k}| \geq \frac{\lambda_n \varrho}{\ln^2 \lambda_{n_k}} \ln\left(\frac{(T-\delta)(1+o(1))e}{\varrho} \lambda_{n_k} \ln^2 \lambda_{n_k}\right), \quad k \to \infty,$$

для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел такої, що $\ln G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \geq \ln \Phi_1(\varkappa(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2))$. Звідси з огляду на довільність δ випливають нерівності (4.20) і (4.21). Оскільки $\ln\Phi_1(\sigma) = \ln\Phi_2(\sigma) - \ln\dfrac{T+\delta}{T-\delta}$, то послідовність (n_k) задовольняє умову

$$\ln G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}(1+\theta_k), \Phi_2) \geq \ln G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}(1+\theta_k), \Phi_2) - \ln\frac{T+\delta}{T-\delta}, \tag{4.23}$$

де $\theta_k = \dfrac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} - 1$. Якби $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \theta_k = +\infty$, то з (4.23), (4.8), (4.17) для відповідної зростаючої до $+\infty$ послідовності (θ_{k_j}) випливало б, що

$$\ln\ln(1+\theta_{k_j}) - \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\theta_{k_j})}{\ln t_{k_j}}\right) \geq$$

$$\geq \ln(1+\theta_{k_j})-2\frac{1+\theta_{k_j}}{\theta_{k_j}}\ln\left(1+\frac{\ln(1+\theta_{k_j})}{\ln t_{k_j}}\right)-1-\ln\frac{T+\delta}{T-\delta}+o(1), \quad j\to\infty,$$

тобто

$$\ln\ln(1+\theta_{k_j}) \geq \ln(1+\theta_{k_j})-2\frac{1+\theta_{k_j}}{\theta_{k_j}}\ln\left(1+\frac{\ln(1+\theta_{k_j})}{\ln t_{k_j}}\right)+1+\ln\frac{T+\delta}{T-\delta}+o(1) =$$
$$= (1+o(1))\ln(1+\theta_{k_j}), \quad j\to\infty,$$

що неможливо. Якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\theta_k = \theta \in (0,+\infty)$, то з (4.23), (4.9), (4.18) для відповідної послідовності (θ_{k_j}), яка прямує до θ, випливає, що

$$\ln\frac{\ln(1+\theta)}{\theta} \geq \frac{\ln(1+\theta)}{\theta}-1-\ln\frac{T+\delta}{T-\delta}+o(1), \quad j\to\infty,$$

тобто, завдяки довільності δ, отримуємо нерівність

$$\ln\frac{\ln(1+\theta)}{\theta} \geq \frac{\ln(1+\theta)}{\theta}-1,$$

яка є можливою тільки для $\theta = 0$. Отже, $\dfrac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} - 1 = \theta_k \to 0 (k\to\infty)$, тобто правильна рівність (4.22). Необхідність умов 1) і 2) доведено.

Доведемо їх достатність. З умови (4.20), завдяки рівності (4.5) і довільності ε, за теоремою 1.8 легко отримуємо асимптотичну нерівність $\ln\mu(\sigma,F) \leq T(1+o(1))\exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}, \sigma\uparrow 0$. З іншого боку, з умови (4.22) з огляду на рівності (4.10), (4.16) випливає, що $G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi) = (1+o(1))G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)$ при $k\to\infty$, і отже, за лемою 4.3 з умови (4.21) з огляду на (4.5) і довільність ε одержуємо асимптотичну нерівність $\ln\mu(\sigma,F) \geq T(1+o(1))\exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}, \sigma\uparrow 0$. Теорему 4.1 повністю доведено.

Встановимо тепер зв'язок між зростанням $\mu(\sigma,F)$ і $M(\sigma,F)$. Для цього використаємо наступний результат з [71].

Лема 4.2. *Нехай $S(\Lambda,0)$ – клас рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності і заданою послідовністю $\Lambda = (\lambda_n)$ показників, а функція $\Phi\in\Omega(0)$ така, що $\dfrac{\Phi'(\sigma)}{\Phi(\sigma)} \nearrow +\infty$ і $\ln\Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$ при $\sigma\uparrow 0$. Тоді для того, щоб для кожної функції $F\in S(\Lambda,0)$ асимптотичні нерівності $\ln\mu(\sigma,F) \leq (1+o(1))\Phi(\sigma)$ і $\ln M(\sigma,F) \leq (1+o(1))\Phi(\sigma)$ були рівносильними* *при* $\sigma \uparrow 0$, *необхідно і досить, щоб* $\ln n = o(\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_n))))$ *при* $n \to \infty$, *причому остання умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей* $\ln \mu(\sigma, F) = (1+o(1))\Phi(\sigma)$ *і* $\ln M(\sigma, F) = (1+o(1))\Phi(\sigma)$ *при* $\sigma \uparrow 0$.

Легко перевірити, що функція $\Phi(\sigma) = T\exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$ задовольняє умови леми 4.2 і з огляду на (4.4)

$$\Phi(\Psi(\varphi(x))) = T\exp\left\{\frac{\varrho}{|\Psi(\varphi(x))|}\right\} = T\exp\left\{\frac{\varrho}{|\varphi(x)|(1+\frac{|\varphi(x)|}{\varrho})}\right\} =$$

$$= T\exp\left\{\frac{\varrho}{|\varphi(x)|}\left(1 - \frac{(1+o(1))|\varphi(x)|}{\varrho}\right)\right\} = T\exp\left\{\frac{\varrho}{|\varphi(x)| - 1 + o(1)}\right\} =$$

$$= T\exp\{\ln x - 2\ln\ln x - \ln T + \ln\varrho - 1 + o(1)\} = \frac{(1+o(1))\varrho x}{e\ln^2 x}, \quad x \to +\infty.$$

Тому за лемою 4.2 для того, щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda, 0)$ асимптотичні нерівності $\ln \mu(\sigma, F) \le (1+o(1))\exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$ і $\ln M(\sigma, F) \le (1+o(1))\exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$ були рівносильними при $\sigma \uparrow 0$, необхідно і досить, щоб $\ln n = o(\lambda_n \ln^{-2}\lambda_n)$ при $n \to \infty$, причому остання умова є достатньою для еквівалентності асимптотичних рівностей $\ln \mu(\sigma, F) = (1+o(1))\exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$ і $\ln M(\sigma, F) = (1+o(1))\exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$ при $\sigma \uparrow 0$. Звідси з огляду на (4.7) і теорему 4.1 випливає наступна теорема.

Теорема 4.2. *Нехай* $\ln n = o(\lambda_n \ln^{-2}\lambda_n)$ *при* $n \to \infty$. *Тоді*

$$T_R^0 = \frac{\varrho_R^0}{e} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_n \ln^2\lambda_n} |a_n|^{\ln^2\lambda_n/\varrho_R^0\lambda_n} \tag{4.24}$$

і для того, щоб асимптотична рівність (4.1) *була правильною, необхідно і досить, щоб для кожного* $\varepsilon \in (0, T)$ *виконувались умови 1) і 2) теореми 4.1 з* $T = T_R^0$ *і* $\varrho = \varrho_R^0$.

Зауваження 4.2. Як було зазначено вище, формула (4.24) збігається з формулою (1.9), але за теоремою 4.2 вона правильна за слабшої, ніж (1.8), умови $\ln n = o(\lambda_n \ln^{-2}\lambda_n)$, $n \to \infty$.

Тепер ми знайдемо умови на коефіцієнти і показники ряду Діріхле (2.1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, за яких

$$\ln\ln M(\sigma,F)=\frac{(1+o(1))\varrho_R^0}{|\sigma|},\quad \sigma\uparrow 0, \tag{4.25}$$

і, як вище, почнемо з доведення наступної теореми.

Теорема 4.3. *Нехай $\varrho>0$. Для того, щоб*

$$\ln\ln \mu(\sigma,F)=\frac{(1+o(1))\varrho}{|\sigma|},\quad \sigma\uparrow 0, \tag{4.26}$$

необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon\in(0,\varrho)$:

1) існувало число $n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n\ge n_0(\varepsilon)$

$$\ln|a_n|\le\frac{(\varrho+\varepsilon)\lambda_n}{\ln\lambda_n}; \tag{4.27}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що для всіх $k\ge k_0$

$$\ln|a_{n_k}|\ge\frac{(\varrho-\varepsilon)\lambda_{n_k}}{\ln\lambda_{n_k}} \tag{4.28}$$

і

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\lambda_{n_{k+1}}}{\ln\lambda_{n_k}}=1. \tag{4.29}$$

Доведення. Зрозуміло, що тепер досить вибрати $\Phi(\sigma)=\exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$ і обмежитись асимптотикою відповідних функцій з точністю $\varrho(1+o(1))$. Тоді за лемою 4.1 $\varphi(x)=\dfrac{-\varrho(1+o(1))}{\ln x}$, а з огляду на (4.5) $x\Psi(\varphi(x))=\dfrac{-x\varrho(1+o(1))}{\ln x}$ при $x\to\infty$. Оскільки $\Phi(\varphi(x))=\exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\varphi(x)|}\right\}<x^{1+\varepsilon}$ для кожного $\varepsilon>0$ і всіх досить великих x, то для всіх досить великих k

$$G_1(t_k,t_{k+1},\Phi)\le\frac{t_kt_{k+1}(t_{k+1}^{\varepsilon}-t_k^{\varepsilon})}{\varepsilon(t_{k+1}-t_k)}.$$

З іншого боку,

$$|\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi))|=\varrho(1+o(1))A_k=\varrho(1+o(1))\frac{t_{k+1}\ln t_{k+1}-t_k\ln t_k}{(t_{k+1}-t_k)\ln t_k\ln t_{k+1}}$$

і, отже,

$$\ln G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi) = \frac{\varrho}{|\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi))|} =$$
$$= (1+o(1))\frac{(t_{k+1}-t_k)\ln t_k \ln t_{k+1}}{t_{k+1}\ln t_k - t_k \ln t_{k+1}}, \quad k \to \infty.$$

Припустимо тепер, що виконується асимптотична рівність (4.26). Тоді для кожного $\delta \in (0, \varrho/2)$ і всіх $\sigma \in (\sigma_0(\delta), 0)$

$$\exp\left\{\frac{\varrho-\delta}{|\sigma|}\right\} = \Phi_1(\sigma) \le \ln\mu(\sigma, F) \le \Phi_2(\sigma) = \exp\left\{\frac{\varrho+\delta}{|\sigma|}\right\}$$

Звідси за теоремою 1.9, як у доведенні теореми 4.1, отримуємо нерівність (4.27) для всіх $n > n_0(\varepsilon)$ і нерівність (4.28) для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел такої, що

$$\ln G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \ge \ln G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) - (\ln\Phi_2(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)) -$$
$$\ln\Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2))) = \ln G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) - \frac{2\delta}{\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)},$$

тобто

$$\ln\frac{\lambda_{n_k}\lambda_{n_{k+1}}(\lambda_{n_{k+1}}^{\varepsilon} - \lambda_{n_k}^{\varepsilon})}{\varepsilon(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})} \ge \frac{\varrho-\delta}{|\varkappa(\lambda_{n_{k+1}}, \lambda_{n_k}, \Phi_2)}| =$$
$$= \frac{\varrho-\delta}{\varrho+\delta}\frac{(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})\ln\lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_{k+1}}\ln\lambda_{n_k} - \lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_{k+1}}}, \quad k\to\infty. \quad (4.30)$$

Припустимо, що $\lambda_{n_{k+1}} = \lambda_{n_k}^{1+\eta}$ і $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,\eta_k = \eta > 0$. Тоді існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\eta_{k_j} \to \eta, \lambda_{n_{k_j}} = o(\lambda_{n_{k_j+1}})$ і, отже, $\lambda_{n_{k_j}}\ln\lambda_{n_{k_j+1}} = o(\lambda_{n_{k_j+1}}\ln\lambda_{n_{k_j}})$ при $j\to\infty$. Тому з (4.30) отримуємо

$$(1+\varepsilon(1+\eta_{k_j}))\ln\lambda_{n_{k_j}} - \ln\varepsilon + o(1) + \ln T \ge \frac{\varrho-\delta}{\varrho+\delta}(1+o(1))(1+\eta_{k_j}))\ln\lambda_{n_{k_j}}, j\to\infty,$$

звідки

$$1+\varepsilon(1+\eta_{k_j}) \ge (1+o(1))\frac{\varrho-\delta}{\varrho+\delta}(1+\eta_{k_j}),$$

що неможливо з огляду на довільність ε і δ . Отже, $\eta_k \to 0$ $(k\to\infty)$ і правильна рівність (4.29). Необхідність умов 1) і 2) доведено.

Доведемо достатність. З огляду на довільність ε з умови 1) за теоремою 1.5 випливає асимтотична нерівність $\ln\ln\mu(\sigma, F) \leq \dfrac{(1+o(1))\varrho}{|\sigma|}(\sigma\uparrow 0)$. Для доведення оберненої асимптотичної нерівності нам будуть потрібні дві наступні леми.

Лема 4.3 ([58]). *Нехай $\Phi\in\Omega(0)$ і $\ln|a_{n_k}|\geq -\lambda_{n_k}\Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$ для зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел. Тоді для всіх $\sigma\in[\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}]$ і всіх $k\geq k_0$*

$$\ln\mu(\sigma, F)\geq \Phi(\sigma)\frac{G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)}{G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi)},\quad \Phi^{-1}(\ln\mu(\sigma, F))\geq \sigma\frac{\Phi^{-1}(G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi))}{\Phi^{-1}(G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi))}.$$

Лема 4.4 ([61]). *Нехай $\Phi\in\Omega(0)$, а функція g - додатна, неперервна, зростаюча до $+\infty$ на $(0,+\infty)$ і $g(x)>x$. Припустимо, що (t_k) – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел і $t_{k+1}\leq g(t_k)$. Тоді*

$$\frac{\Phi^{-1}(G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi))}{\Phi^{-1}(G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi))}\geq \frac{\Phi^{-1}(G_1(t_k, g(t_k), \Phi))}{\Phi^{-1}(G_2(t_k, g(t_k), \Phi))}.$$

З (4.29) випливає, що $\lambda_{n_{k+1}}\leq \lambda_{n_k}^{1+\eta}$ для кожного $\eta>0$ і всіх $k\geq k_0(\eta)$. Тому за лемою 4.3 і лемою 4.4 з $g(x)=x^{1+\eta}$ маємо

$$\Phi^{-1}(\ln\mu(\sigma, F))\geq \sigma\frac{\Phi^{-1}(G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}^{1+\eta}, \Phi))}{\Phi^{-1}(G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}^{1+\eta}, \Phi))}\tag{4.31}$$

для всіх $\sigma\in[\varphi(\lambda_{n_k}), \varphi(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх досить великих k. Оскільки $\Phi(\varphi(x)) = \exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\varphi(x)|}\right\} > x^{1-\varepsilon}$ для кожного $\varepsilon\in(0,1)$ і всіх досить великих x і $\Phi^{-1}(x)=\dfrac{-\varrho}{\ln x}$, то при $k\to\infty$

$$\Phi^{-1}(G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}^{1+\eta}, \Phi))\geq \frac{-\varrho}{\ln\left(\dfrac{\lambda_{n_k}^{1+\eta}\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}^{1+\eta}-\lambda_{n_k}}\dfrac{\lambda_{n_k}^{-\varepsilon}-\lambda_{n_k}^{-\varepsilon(1+\eta)}}{\varepsilon}\right)} = \frac{-\varrho}{(1-\varepsilon)\ln\lambda_{n_k}-\ln\varepsilon+o(1)}.$$

З іншого боку,

$$\Phi^{-1}(G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}^{1+\eta}, \Phi)) = \varkappa(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_k}^{1+\eta}, \Phi) = -\varrho(1+o(1))A_k =$$

$$= -\varrho(1+o(1))\frac{\lambda_{n_k}^{1+\eta}\ln\lambda_{n_k} - \lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_k}^{1+\eta}}{(\lambda_{n_k}^{1+\eta} - \lambda_{n_k})\ln\lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_k}^{1+\eta}} = \frac{-\varrho(1+o(1))}{(1+\eta)\ln\lambda_{n_k}}, \quad k\to\infty.$$

Тому з (4.31) отримуємо $\Phi^{-1}(\ln\mu(\sigma,F)) \geq \sigma\dfrac{1+\eta}{1-\varepsilon}(1+o(1))$ при $\sigma\uparrow 0$, звідки з огляду на довільність ε і η одержуємо нерівність $\ln\ln\mu(\sigma,F) \leq \dfrac{(1+o(1))\varrho}{|\sigma|}(\sigma\uparrow 0)$. Теорему 4.3 повністю доведено.

Позначимо через $S^*(\Lambda,0)$ клас формальних рядів Діріхле (2.1) таких, що $|a_n|e^{\sigma\lambda_n} \to 0$, $n\to\infty$, для кожного $\sigma<0$ і будемо говорити, що такий ряд належить до класу $S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda,0)$, якщо $\ln\mu(\sigma,F) \leq (\Phi(1+o(1))\sigma)$, і належить до класу $S^*_{M,\Phi}(\Lambda,0)$, якщо $\ln M(\sigma,F) \leq \Phi((1+o(1))\sigma)$ при $\sigma\uparrow 0$. З огляду на нерівність Коші $\mu(\sigma,F)\leq M(\sigma,F)$ маємо $S^*_{M,\Phi}(\Lambda,0)\subset S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda,0)$. З іншого боку, якщо $\Phi\in\Omega(0)$, $|\sigma|\Phi'(\sigma)\Phi(\sigma)\nearrow+\infty$ і $\ln\Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$ при $\sigma\uparrow 0$, то за доведенною у [61] теоремою для того, щоб $S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda,0)\subset S^*_{M,\Phi}(\Lambda,0)$ досить, щоб $\varlimsup\limits_{n\to\infty}|\varphi(\lambda_n)|/|\Phi^{-1}(\ln n)| < 1$, і необхідно, щоб $\varlimsup\limits_{n\to\infty}|\varphi(\lambda_n)|/|\Phi^{-1}(\ln n)| \geq 1$. Як видно, з доведення цієї теореми, за умови $\varlimsup\limits_{n\to\infty}|\varphi(\lambda_n)|/|\Phi^{-1}(\ln n)| < 1$ з огляду на нерівність Коші рівносильними є асимптотичні рівності $\ln\mu(\sigma,F) = \Phi((1+o(1))\sigma)$ і $\ln M(\sigma,F) = \Phi((1+o(1))\sigma)$ при $\sigma\uparrow 0$. Легко перевірити, що функція $\Phi(\sigma) = \exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$ задовольняє умови цього твердження, а умова $\varlimsup\limits_{n\to\infty}|\varphi(\lambda_n)|/|\Phi^{-1}(\ln n)| < 1$ у даному випадку рівносильна умові (1.8). Тому з теореми 4.3 випливає наступна теорема.

Теорема 4.4. *Нехай виконується умова (1.8). Для того, щоб асимптотична рівність* (4.25) *була правильною, необхідно і досить, щоб для кожного* $\varepsilon\in(0,\varrho)$ *виконувались умови 1) і 2) теореми 4.3 з* $\varrho=\varrho_R^0$.

4.2. Нижній R-порядок ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності. Аналоги нерівності Уіттекера.

Крім R-порядку ϱ_R^0 для характеристики зростання ряду Діріхле (2.1) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності введемо нижній R-порядок

$$\lambda_R^0 = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln M(\sigma, F).$$

Аналогом теореми Уіттекера є наступна теорема.

Теорема 4.5. *Якщо* $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln\lambda_n}\right)$ *при* $n\to\infty$, *то* $\lambda_R^0 \le \varrho_R^0 \beta$, $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\lambda_n}{\ln\lambda_{n+1}}$.

Для доведення цієї теореми нам будуть потрібними дві наступні леми.

Лема 4.5. *Якщо* $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln\lambda_n}\right)$ *при* $n\to\infty$, *то*

$$\varrho_R^0 = \varrho^* =: \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln \mu(\sigma, F), \quad \lambda_R^0 = \lambda^* =: \varliminf_{\sigma\uparrow 0} |\sigma| \ln\ln \mu(\sigma, F).$$

Доведення. Справді, з огляду на нерівність Коші $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F)$ маємо $\lambda^* \le \lambda_R^0$ і $\varrho^* \le \varrho_R^0$. З іншого боку, з умови $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln\lambda_n}\right)$, $n\to\infty$, випливає, що $\ln n(t) \le \dfrac{\varepsilon^2 t}{\ln t}$ для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $t \ge t_0(\varepsilon)$, де $n(t) = \sum_{\lambda_n \le 1} 1$ - лічильна функція послідовності (λ_n). Тому

$$\frac{M(\sigma, F)}{\mu(\sigma/(1+\varepsilon), F)} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n/(1+\varepsilon)\}}{\mu(\sigma/(1+\varepsilon), F)} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|\lambda_n}{1+\varepsilon}\right\} \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|\lambda_n}{1+\varepsilon}\right\} \le \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma| t}{1+\varepsilon}\right\} dn(t) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} \int_0^{\infty} n(t) \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma| t}{1+\varepsilon}\right\} dt \le$$

$$\le \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} \left(\int_0^{t_0} n(t)dt + \int_{t_0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon} t + \frac{\varepsilon^2 t}{\ln t}\right\} dt \right) =$$

$$= \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\int_0^{\infty} \exp\left\{ -\varepsilon t\left(\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\ln t}\right)\right\}dt + o(1), \quad \sigma\uparrow 0.$$

Приймемо $t(\sigma) = \exp\left\{\dfrac{2\varepsilon(1+\varepsilon)}{|\sigma|}\right\}$. Тоді $t(\sigma)\to +\infty$ при $\sigma\uparrow 0$ і

$$\int_0^{t(\sigma)} \exp\left\{ -\varepsilon t\left(\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\ln t}\right)\right\}dt \le \int_0^{t(\sigma)} \exp\left\{\frac{\varepsilon^2 t}{\ln t}\right\}dt \le$$
$$\le t(\sigma)\exp\left\{\frac{\varepsilon^2 t(\sigma)}{\ln t(\sigma)}\right\} = \exp\left\{\frac{\varepsilon^2 t(\sigma)}{\ln t(\sigma)} + \ln t(\sigma)\right\} =$$
$$= \exp\left\{\frac{(1+o(1))\varepsilon^2 t(\sigma)}{\ln t(\sigma)}\right\} \le \exp\{t(\sigma)\},$$

а

$$\int_{t(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{ -\varepsilon t\left(\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\ln t}\right)\right\}dt \le$$
$$\le \int_{t(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{ -\varepsilon t\left(\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\ln t(\sigma)}\right)\right\}dt =$$
$$= \int_{t(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{\varepsilon|\sigma|t}{2(1+\varepsilon)}\right\}dt \le \frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon|\sigma|}.$$

Тому

$$\frac{M(\sigma,F)}{\mu(\sigma/(1+\varepsilon),F)} \le \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\exp\{t(\sigma)\} + 2 + o(1), \quad \sigma\uparrow 0,$$

звідки легко випливає, що

$$|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F) \le |\sigma|\ln\mu(\sigma/(1+\varepsilon),F) + |\sigma|\ln t(\sigma) + o(1) =$$
$$= (1+\varepsilon)\frac{|\sigma|}{1+\varepsilon}\ln\mu(\sigma/(1+\varepsilon),F) + 2\varepsilon(1+\varepsilon) + o(1), \quad \sigma\uparrow 0.$$

Переходячи до границі при $\sigma\uparrow 0$, отримуємо нерівності $\lambda_R^0 \le (1+\varepsilon)\lambda^* + 2\varepsilon(1+\varepsilon)$ і $\varrho_R^0 \le (1+\varepsilon)\varrho^* + 2\varepsilon(1+\varepsilon)$, тобто з огляду на довільність ε правильні нерівності $\lambda_R^0 \le \lambda^*$ і $\varrho_R^0 \le \varrho^*$. Лему 4.4 доведено.

Лема 4.6. *Нехай ряд Діріхле (2.1) має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$, $\Phi\in\Omega(0)$ і $\ln\mu(\sigma,F)\le\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma\in[\sigma_0,0)$. Тоді*

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)} \le \varliminf_{n\to\infty}\frac{G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}{G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}, \tag{4.32}$$

а якщо, крім того,

$$\left(\frac{\Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)}{(\Phi'(\sigma))^2}-1\right)\ln\Phi(\sigma)\ge q>-\infty,\quad \sigma\in[\sigma_0,0),\tag{4.33}$$

то

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln\ln\mu(\sigma,F)}{\ln\Phi(\sigma)}\le \varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}{\ln G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}.\tag{4.34}$$

Тепер можемо довести теорему 4.5. Для цього розглянемо функцію $\Phi(\sigma)=T\exp\left\{\dfrac{\varrho}{|\sigma|}\right\}$, де $T>0$ і $\varrho>0$. Тоді, як показано вище, при $n\to\infty$

$$G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=\frac{(1+o(1)\lambda_n\lambda_{n+1})\varrho}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\left(\frac{1}{\ln\lambda_n}-\frac{1}{\ln\lambda_{n+1}}\right),\tag{4.35}$$

а

$$G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=T\exp\left\{\frac{\varrho}{|\varkappa(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)|}\right\},$$

$$\frac{|\varkappa(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)|}{\varrho}=A_n+2B_n+(1+o(1))C_n\ln\frac{eT}{\varrho},\quad n\to\infty,$$

де

$$A_n=\frac{\lambda_{n+1}\ln\lambda_n-\lambda_n\ln\lambda_{n+1}}{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln t_n\ln\lambda_{n+1}},$$

а $B_n=o(A_n)$ і $C_n=o(A_n)$ при $n\to\infty$. Тому

$$\ln G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=(1+o(1))\frac{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln\lambda_n\ln\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}\ln\lambda_n-\lambda_n\ln\lambda_{n+1}},\quad n\to\infty,$$

а

$$\ln G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=\ln\frac{\lambda_n\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}+\ln\left(\frac{1}{\ln\lambda_n}-\frac{1}{\ln\lambda_{n+1}}\right)+O(1),\quad n\to\infty,$$

Легко перевірити, що

$$\left(\frac{\Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)^2}-1\right)\ln\Phi(\sigma)=2+\frac{2|\sigma|}{\varrho}>2.$$

Тому, використовуючи леми 4.4 - 4.5 і вибираючи $\varrho=\varrho_R+\varepsilon$ і $T=1$, отримуємо

$$\lambda_R^0=\varliminf_{\sigma\uparrow 0}|\sigma|\ln\ln M(\sigma,F)\le\varlimsup_{\sigma\uparrow 0}(\varrho_R^0+\varepsilon)|\sigma|\ln\ln\mu(\sigma,F)\le$$

$$\leq (\varrho_R^0 + \varepsilon) \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln \dfrac{\lambda_n \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}}{\dfrac{(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \ln \lambda_n \ln \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} \ln \lambda_n - \lambda_n \ln \lambda_{n+1}}} \tag{4.36}$$

Припустимо, що $\beta < 1$. Тоді існують число $\beta^* \in (\beta, 1)$ і зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел такі, що $\ln \lambda_{n_k} \leq \beta^* \ln \lambda_{n_k+1}$, тобто $\lambda_{n_k} \leq \lambda_{n_k+1}^{\beta^*} = o(\lambda_{n_k+1})$, $k \to \infty$. Тому з (4.36) з огляду на довільність ε отримаємо

$$\lambda_R^0 \leq \varrho_R^0 \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln \lambda_{n_k}}{\ln \lambda_{n_k+1}} \left(1 - \frac{\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k+1} \ln \lambda_{n_k}} \right) \leq \varrho_R^0 \beta^*,$$

бо $\dfrac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k+1}} = o\left(\dfrac{\ln \lambda_{n_k}}{\ln \lambda_{n_k+1}} \right)$ при $k \to \infty$. З огляду на довільність $\beta^* < \beta$ нерівність $\lambda_R^0 \leq \beta \varrho_R^0$ доведено. Для $\beta = 1$ ця нерівність очевидна. Теорему 4.5 доведено.

Подібно до нижнього R-порядку, введемо нижній R-тип $t_R^0 = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{ -\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|} \right\} \ln\ M(\sigma, F)$ і отримаємо аналог теореми 4.5. Для цього доведемо спочатку таку лему.

Лема 4.7. *Якщо* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} < 1$ *і* $T_R^0 < \infty$, *то*

$$t_R^0 = t^* =: \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{ -\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|} \right\} \ln\ \mu(\sigma, F)$$

і

$$T_R^0 = T^* =: \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \exp\left\{ -\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|} \right\} \ln\ \mu(\sigma, F).$$

Справді, за нерівністю Коші $t^* \leq t_R^0$ і $T^* \leq T_R^0$, а в [17,с.16] доведено, що для кожного $\sigma < 0$ і $\varepsilon \in (0, |\sigma|)$

$$\frac{M(\sigma, F)}{\mu(\sigma, F)} \leq n(2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon)}) + \frac{\varepsilon}{2} \int_{2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon)}}^{\infty} n(t) \exp\left\{ -\frac{\varepsilon t}{2} \right\} dt,$$

де $\nu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma \lambda_n\} = \mu(\sigma, F)\}$ - центральний індекс ряду (2.1), а оскільки $\ln n(t) \leq t^\alpha$ для деякого $\alpha \in (0, 1)$ і всіх $t \geq t(\alpha)$, то [17, с.21]

$$n(2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon)}) \leq \exp\left\{ \left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^\alpha \ln^\alpha \frac{\mu(\sigma + \varepsilon)}{\mu(\sigma + \varepsilon/2)} \right\}$$

і [17, с.22]

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_{2\lambda_{\nu(\sigma+\varepsilon)}}^{\infty} n(t)\exp\left\{-\frac{\varepsilon t}{2}\right\}dt \le \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\exp\left\{\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1-\varepsilon}}\right\}+1=K(\varepsilon).$$

Звідси випливає, що

$$\ln\ M(\sigma,F)\le \ln\ \mu(\sigma,F)+\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\alpha}\ln^{\alpha}\mu(\sigma+\varepsilon)+o(1)\le$$
$$\le \ln\ \mu(\sigma,F)+\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\alpha}(T^*+\delta)^{\alpha}\exp\left\{\frac{\alpha\varrho_R^0}{|\sigma+\varepsilon|}\right\}+o(1),\quad \sigma\uparrow 0.$$

Тому, якщо виберемо $\varepsilon=\dfrac{(1-\alpha)}{2}|\sigma|$, то $\sigma+\varepsilon=\dfrac{1+\alpha}{2}\sigma$ і

$$\exp\left\{-\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ M(\sigma,F)\le \exp\left\{-\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ \mu(\sigma,F)+$$
$$+\left(\frac{8(T^*+\delta)}{(1-\alpha)|\sigma|}\right)^{\alpha}\exp\left\{-\varrho_R^0\left(\frac{1}{|\sigma|}-\frac{2\alpha}{(1+\alpha)|\sigma|}\right)\right\}+o(1)=$$
$$=\exp\left\{-\frac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}\ln\ \mu(\sigma,F)+o(1),\quad \sigma\uparrow 0.$$

Звідси випливає, що $T_R^0\le T^*$ і $t_R^0\le t^*$. Лему 4.6 доведено.

Нам буде потрібною також наступна лема [30] .

Лема 4.8. *Функція* $\dfrac{G_1(x,b,\Phi)}{G_2(x,b,\Phi)}$ *є зростаючою на* $(0,b)$.

Використовуючи леми 4.6 і 4.7, доведемо наступну теорему.

Теорема 4.6. *Якщо* $T_R^0<\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\ln\ln n}{\ln\lambda_n}<1$ *і* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}=\gamma$, *то*

$$t_R^0\le T_R^0 g(\gamma),\quad g(\gamma)=\frac{\ln(1/\gamma)}{1-\gamma}\exp\left\{1+\frac{\ln\gamma}{1-\gamma}\right\}\tag{4.37}$$

Доведення. Припустимо, що $\gamma<1$. Тоді існують число $\gamma^*\in(\gamma,1)$ і зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел такі, що $\lambda_{n_k}\le\gamma^*\lambda_{n_k+1}$. За лемами 4.5 і 4.7 маємо

$$\underline{\lim_{\sigma\uparrow 0}}\frac{\ln\ \mu(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)}\le \underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_k+1},\Phi)}{G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_k+1},\Phi)}\le$$

$$\le \varliminf_{k\to\infty} \frac{G_1(\gamma^*\lambda_{n_k+1}, \lambda_{n_k+1}, \Phi)}{G_2(\gamma^*\lambda_{n_k+1}, \lambda_{n_k+1}, \Phi)}.$$

Позначимо $\theta = \dfrac{1}{\gamma^*} - 1$ і $t_k = \gamma^*\lambda_{n_k+1}$. Тоді $\lambda_{n_k+1} = (1+\theta)t_k$ і, отже,

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0} \frac{\ln\ \mu(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)} \le \varliminf_{k\to\infty} \frac{G_1(t_k, (1+\theta)t_k, \Phi)}{G_2(t_k, (1+\theta)t_k, \Phi)}.$$

Для функції $\Phi(\sigma) = T\exp\left\{\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}$ правильні співвідношення (4.9) і (4.18) Тому

$$t_R^0 = \varliminf_{\sigma\uparrow 0} \frac{\ln\ \mu(\sigma, F)}{\exp\left\{\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}} \le$$

$$\le T_R^0 \varliminf_{k\to\infty} \exp\{\ln G_1(t_k, (1+\theta)t_k, \Phi) - \ln G_2(t_k, (1+\theta)t_k), \Phi)\} =$$

$$= T_R^0 \varliminf_{k\to\infty} \exp\left\{\ln \frac{(1+\theta)\ln(1+\theta)}{\theta} - \ln(1+\theta) - \frac{\ln(1+\theta)}{\theta} + 1 + o(1)\right\} =$$

$$= T_R^0 \exp\left\{\frac{\ln(1+\theta)}{\theta(1+\theta)^{1/\theta}}\right\} = T_R^0 \frac{\ln(1/\gamma^*)}{1-\gamma^*} \exp\left\{1 + \frac{\ln\gamma^*}{1-\gamma^*}\right\}.$$

З огляду на довільність γ^* нерівність (4.37) для $\gamma < 1$ доведено.

Оскільки $\lim\limits_{\gamma\uparrow 1} g(\gamma) = 1$, то нерівність (4.37) при $\gamma = 1$ є очевидною. Теорему 4.6 доведено.

4.3. Висновки.

Для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності скінченного R-порядку ϱ_R^0 за А. Гайсиним встановлено умови на коефіцієнти та показники, за яких правильні наступні асимптотичні рівності $\ln M(\sigma, F) = T_R^0(1+o(1))\exp\left\{\dfrac{\varrho_R^0}{|\sigma|}\right\}$ і $\ln\ln M(\sigma, F) = \dfrac{(1+o(1))\varrho_R^0}{|\sigma|}$ при $\sigma \uparrow 0$.

Для нижнього R-порядку λ_R^0 такого ряду за умови $\ln n = o\left(\dfrac{\lambda_n}{\ln\lambda_n}\right)$ $(n\to\infty)$ отримано оцінку $\lambda_R^0 \le \varrho_R^0 \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\lambda_n}{\ln\lambda_{n+1}}$. Подібна оцінка правильна для нижнього R-типу t_R^0 через R-тип T_R^0.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано ряд актуальних задач з теорії рядів Діріхле з невід'ємними показниками, які стосуються асимптотичного поводження максимуму модуля суми ряду Діріхле та його максимального члена.

Для ряду Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності і додатними коефіцієнтами знайдено нові оцінки як знизу, так і зверху його суми. Отримані оцінки застосовано до досліджень зв'язку між зростанням логарифмів максимуму модуля і зростанням максимального члена у термінах функції порівняння та багаточленних показникових та степеневих асимптотик.

У термінах багаточленної(зокрема тричленної) степеневої асимптотики встановлено зв'язок між зростанням логарифма максимального члена і поводженням коефіцієнтів ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності.

Для абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле скінченного R-порядку за А.Гайсиним досліджено умови на показники та коефіцієнти, за яких його сума має регулярне зростання, тобто отримано аналог класичної теореми Е.Ліндельофа. Встановлено аналог нерівності Дж. Уіттекера для нижнього R-порядку і R-порядку ряду Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності.

Основні результати дисертації мають критеріальний характер і доповнюють відповідні результати М.М. Шеремети, М.В. Заболоцького, О.М. Сумик і Л.Л. Лугової. При доведенні використовуються сучасні методи теорії рядів Діріхле.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агранович П.З. *Аналог теоремы Валирона-Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей* / П.З Агранович, В.Н. Логвиненко // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. 26, № 5. – С. 3–19.

2. Бойчук В.С. *О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле* / В.С. Бойчук // Матем. сб. К.: Наукова думка, 1976, – С. 238—240.

3. Гайсин А.М. *Рост функции, представленной рядом Дирихле, на луче* / А.М. Гайсин // Исследования по теории аппроксимации функций – Уфа.: БФАН СССР. – 1984. С. 20–29.

4. Гайсин А.М. *Поведение суммы ряда Дирихле в полуполосах* / А.М. Гайсин // Мат. заметки. – 1987. – Т. 42, № 5. – С. 660 – 669.

5. Гайсин А.М. *Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуплоскости* / А.М. Гайсин // Матем. сб. – 1982. – Т. 117 (159), № 3. – С. 412–424.

6. Гайсин А.М. *Асимптотика логарифма максимального члена измененного ряда Дирихле* / А.М. Гайсин, И.Д. Латыпов // Изв. вузов. Матем. – 2002. – № 9 (484). – С. 15–24.

7. Галь Ю.М. *О росте аналитических в полуплоскости функций, заданных рядами Дирихле* / Ю.М. Галь, М.Н. Шеремета // ДАН УССР, сер. А.– 1978. – № 12. – С. 1065–1067.

8. Говоров Н.В. *О связи между ростом функции, аналитической в круге, и коэффициентами ее степенного разложения* / Н.В. Говоров // Труды Новочеркасского политехн. ин-та. – 1959. – Т. 100. – С. 101–115.

9. Говоров Н.В. *О признаках полной регулярности роста некоторых классов целых функций экспоненциального типа, представленных интегралами Бореля, рядами Ньютона, Дирихле и степенными рядами*

/ Н.В. Говоров, Н.М. Черных. // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 249, № 6. – С. 1295-1299.

10. Гриців М.М. *Тричленна показникова асимптотика логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле* / М.М. Гриців , М.М. Шеремета // Мат. студії. - 2011. - Т.35, N 1. -С. 37-49.

11. Заболоцький М.В. *Узагальнення теореми Ліндельофа* / М.В. Заболоцький, М.М. Шеремета // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, Вып. 9. – С. 1177–1192.

12. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряди експонент* / А.Ф. Леонтьев. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

13. Лугова Л.Л. *Про тричленну степеневу асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле* / Л.Л. Лугова // Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех-мат. – 2007. – Т. 67. – С. 191–199.

14. Лугова Л.Л. *Про тричленну степеневу асимптотику цілого ряду Діріхле* / Л.Л. Лугова, М.М. Шеремета // Мат. студії. – 2007. – Т. 28, № 1. – С. 37–40.

15. Лугова Л.Л. *Тричленна степенева асимптотика цілих рядів Діріхле* / Л.Л. Лугова // Авт. дис. канд. фіз.-мат. наук – Львів, 2010.

16. Мак-Лейн Г. *Асимптотические значения голоморфных функций* / Г. Мак-Лейн – М.: Мир, 1966. – 104 с.

17. Притула Я.Я. *Зростання рядів Діріхле* / Я.Я. Притула, С.І. Фединяк, М.М. Шеремета. – Львів: ІППММ ім. Я. Підстригача НАН України, 1995. – 30 с. – (Препринт / НАН України, ІППММ ім. Я. Підстригача; №18–95).

18. Притула Я.Я. *Максимум модуля и максимальный член одного класса рядов Дирихле* / Я.Я. Притула, М.Н. Шеремета // Изв. вузов. Матем. – 1998. – № 2. – С. 77–83.

19. Скаскив О.Б. *О поведении максимального члена целого ряда Дирихле* / О.Б. Скаскив // Деп. В УкрНИИНТИ. – 1983, № 368Ук-Д83. – 39 с.

20. Скаскив О.Б. *Максимум модуля и максимальный член целого ряда Дирихле* / О.Б. Скаскив // Деп в УкрНИИНТИ. – 1983, № 464Ук-Д83. – 23 с.

21. Скасків О.Б. *Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле* / О.Б. Скаскив // Доп. АН України, сер. А. – 1984. – № 11. – С. 22–24.

22. Скаскив О.Б. *О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* / О.Б. Скаскив // Мат. заметки. – 1999. – Т. 66, № 2. – С. 282–292.

23. Скаскив О.Б. *О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию* / О.Б. Скаскив // Мат. заметки. – 1985. – Т. 37, № 1. – С. 41–47.

24. Скаскив О.Б. *Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле* / О.Б. Скаскив, М.Н. Шеремета // Матем. сб. – 1986. Т. 131, № 3(11). – С. 385–402.

25. Скасків О.Б. *Про поведінку максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле* / О.Б. Скасків // Доп. АН України, сер. А. – 1988. – № 8. – С. 19–21.

26. Сорокивский В.М. *О росте аналитических функций, представленных рядами Дирихле* / В.М. Сорокивский // Укр. мат. журн. – 1984. – Т. 36, № 4. – С. 524–528.

27. Сорокивский В.М. *О росте на горизонтальных лучах аналитических функций, представленных рядами Дирихле* / В.М. Сорокивский, О.Б. Скаскив // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, № 1. – С. 102–110.

28. Сумик О.М. *Оцінки максимального члена ряду Діріхле знизу* / О.М. Сумик // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1999. – Т. 53. – С.

40–44.

29. Сумык О.М. *О функциях, двойственных по Юнгу, и поведении максимальных членов производных ряда Дирихле* / О.М. Сумык, Я.В. Микитюк, М.Н. Шеремета // Мат. заметки. – 2001. – Т. 69, № 1. – С. 74–81.

30. Сумык О.М. *Оценки снизу максимального члена ряда Дирихле* / О.М. Сумык, М.Н. Шеремета // Изв. вузов. Матем. – 2001. – № 4. – С. 84–89.

31. Тарасюк Р.І. *Про двочленну асимптотику цілих функцій, представлених степеневими рядами* / Р.І. Тарасюк //Волинський математичний вісник. – 1995. – № 2. – С. 162–164.

32. Фединяк С.І. *Оцінки похідних рядів Діріхле* / С.І.Фединяк, М.М. Шеремета // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1998. – Т. 49. – С. 80–83.

33. Філевич П.В. *Співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом для випадкових цілих функцій* / П.В. Філевич // Мат. студії. – 1997. – Т. 7, № 2. – С. 165–174.

34. Філевич П.В. *Про одну теорему Л. Сонс та асимптотичне поводження рядів Діріхле* /П.В. Філевич , М.М. Шеремета // Укр. матем. вісник - 2006. - Т.3, № 2. - С. 187-198.

35. Филевич П.В. *К теореме Валирона о соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* / П.В. Филевич // Изв. вузов. Матем. – 2004. – 194 4 (503). – С. 66–72.

36. Філевич П.В. *Про одне співвідношення між максимумом модуля, максимумом модуля похідної і центральним індексом для цілих функцій* / П.В. Філевич, С.І. Фединяк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48, 194 4. – С. 88–94.

37. Шеремета М.Н. *О целых функциях, представленных рядами Дирихле* / М.Н. Шеремета // Изв. вузов. Матем. – 1978. – № 3. – С.90–98.

38. Шеремета М.Н. *Метод Вимана-Валирона для рядов Дирихле* / М.Н. Шеремета // Укр. мат. журн. – 1978. – Т. 30, № 4. – С. 488–497.

39. Шеремета М.Н. *Аналоги теоремы Вимана для рядов Дирихле* / М.Н. Шеремета // Мат. сборник. – 1979. – Т. 110, № 1. – С. 102–116.

40. Шеремета М.Н. *О свойствах целых функций, заданных рядами Дирихле, и их производных* / М.Н. Шеремета // ДАН УССР, сер. А. – 1979. – № 12. – С. 992–995.

41. Шеремета М.Н. *Асимптотические свойства целых функций, заданных рядами Дирихле, и их производных* / М.Н. Шеремета // Укр. мат. журн. – 1979. – Т. 31, № 6. – С. 723–730.

42. Шеремета М.Н. *О максимальном члене и центральном индексе степенного разложения аналитической в круге функции* / М.Н. Шеремета // Укр. мат. журн. – 1981. – Т. 33, № 6. – С. 846–848.

43. Шеремета М.Н. *Асимптотика целых функций, заданных рядами Дирихле и удовлетворяющих дифференциальному уравнению первого порядка с экспоненциальными коэффициентами* / М.Н. Шеремета // Диф. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 6. – С. 1139–1142.

44. Шеремета М.М. *Про зростання аналітичних функцій* / М.М. Шеремета // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1982. – Вип. 20. – С. 11–13.

45. Шеремета М.Н. *О максимальном члене абсолютно сходящегося в полуплоскости ряда Дирихле* / М.Н. Шеремета // Изв. вузов. Матем. – 1986. – № 4. – С. 64–67.

46. Шеремета М.Н. *Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле* / М.Н. Шеремета // Мат. заметки. – 1987. – Т. 42, № 2. – С. 215–226.

47. Шеремета М.Н. *Эквивалентность логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле* / М.Н. Шеремета // Актуальные вопросы теории функций. – Ростов-на-Дону: Изд. Рост. ун-та. – 1987. – С. 39–43.

48. Шеремета М.Н. *О производной целого ряда Дирихле* / М.Н. Шеремета // Мат. сборник. – 1988. – Т. 137, № 1. – С. 128–139.

49. Шеремета М.Н. *О полной эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле* / М.Н. Шеремета // Мат. заметки. – 1990. – Т. 47, № 6. – С. 119–123.

50. Шеремета М.Н. *Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле* / М.Н. Шеремета // Теория функций, функциональный анализ и их приложения (Харьков) – 1990. – Вып. 54. – С. 16–25.

51. Шеремета М.М. *Про одне співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом цілого ряду Діріхле* / М.М. Шеремета // Мат. студії. – 1994. – Вип. 3. – С. 61–66.

52. Шеремета М.Н. *О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества* / М.Н. Шеремета // Мат. заметки. – 1995. – Т. 57, № 2. – С. 283–296.

53. Шеремета М.Н. *О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества.* / М.Н. Шеремета // Мат. заметки. – 1995. – Т. 57. – № 2. – С. 283–296.

54. Шеремета М.Н. *О последовательностях максимальных членов и центральных показателей производных рядов Дирихле* / М.Н. Шеремета // Мат. заметки. – 1998. – Т. 63, № 3. – С. 457–467.

55. Шеремета М.Н. *О максимальном члене производной ряда Дирихле* / М.Н. Шеремета // Изв. вузов. Матем. – 1998. – № 5. – С. 68–72.

56. Шеремета М.Н. *О производной ряда Дирихле* / М.Н. Шеремета, С.И. Федыняк // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39. – № 1. – С. 206–223.

57. Шеремета М.М. *Про зростання цілого ряду Діріхле* / М.М. Шеремета // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 8. – С. 1149–1153.

58. Шеремета М.М. *Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій* / М.М. Шеремета, О.М. Сумик // Мат. студії. – 1999. – Т. 11, № 1. – С. 41–47.

59. Шеремета М.М. *Про максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле повільного зростання* / М.М. Шеремета // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2000. – Т. 57. – С. 57–61.

60. Шеремета М.М. *Про двочленну асимптотику цілого ряду Діріхле* / М.М. Шеремета // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 4. – С. 542–549.

61. Шеремета М.М. *Про асимптотичне поводження логарифмів максимуму модуля і максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле* / М.М. Шеремета, М.М. Зеліско // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. - 2006. - Т. 66. - С. 70-74.

62. Lindelöf E. *Sur la determination de la croissance des fonctions entiere definies par un developpement de Taylor* / E. Lindelöf // Bull. Soc. Math. – 1903. – V. 27, № 1. – P. 1–62.

63. Miller S.S. *On the maximum terms a maximum modulus analytic functions represented by Dirichlet series* / S.S. Miller // Complex Anal. Proc. S.U.N.Y. Brockport Conf., New York - Basel, 1978, P. 167-177.

64. Nandan K. *On the maximum terms a maximum modulus analytic functions represented by Dirichlet series* / K. Nandan // Ann. Polon. Math. – 1973. – V. 28. – P. 213–222.

65. Nandan K. *On the lower order of analytic functions represented by Dirichlet series* / K. Nandan // Rev. roum. math, pures et appl. – 1976. – V. 21, № 10. – P. 1361–1368.

66. Prytula Ya.Ya. *On the Lindelöf theorem* / Ya.Ya. Prytula // Mat. Stud.- 1997. - V.8, № 1. - P. 31-42.

67. Ritt J.F. *On certain points in the theory of Dirichlet series* / Ritt J.F. // Amer. Math. J. - 1928. - V.50 - P. 78-83.

68. Sheremeta M.M. *On the second term of asymptotic behaviour of entire Dirichlet series* / M.M. Sheremeta // J. Analysis. – 1995. – V. 3. – P. 213–218.

69. Sheremeta M.M. *On asymptotic of entire functions of finite logarithmic order* / M.M. Sheremeta, R.I. Tarasyuk, M.V. Zabolotskyi // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1996. – Т. 3, № 1/2. – С. 146–163.

70. Sheremeta M.M. *Estimates of the maximal term of entire Dirichlet series in terms of two-member asymptotic* / M.M. Sheremeta // Mat. Stud. – 2000. – V. 14, No. 2. – P. 159–164.

71. Sheremeta M.M. *On the maximum of modulus and the maximal term of Dirichlet series* / M.M. Sheremeta // Mat. zametki. – 2003. – T. 73, № 3. – P. 437–443.

72. Sons L.R. *Regularity of growth and gaps* / L.R. Sons // J. Math. Anal. and Appl. - 1968. - V.24 - P. 296-306.

73. Sumyk O.M. *On two member exponential-power asymptotics of maximal term of entire Dirichlet series* / O.M. Sumyk // Mat. Stud. – 2000. – V. 14, № 1. – P. 29–34.

74. Sumyk O.M. *On n-member asymptotics for logarithm of maximal term of entire Dirichlet series* / O.M. Sumyk // Mat. Stud. – 2001. – V. 15, № 2. – P. 200–208.

75. Sumyk O.M. *A connection between the growth of Young conjugate function* /O.M. Sumyk, M.M. Sheremeta // Nonlinear boundary problems. Sbornik nauch. trudov. – 2001. – V.11. – P. 197–201.

76. Sumyk O.M. *On connection between the growth of maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in terms of m-termed asymptotics*

/ O.M. Sumyk, M.M. Sheremeta // Mat. Stud. – 2003. – V. 19, № 1. – P. 83–88.

77. Whittaker J.M. *The lower order of integral functions* /J.M. Whittaker , M.M. Sheremeta // J. London Math. Soc. - 1933. - V.8.- P. 20-27.

78. Шеремета М.М. *Про регулярне зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле* / М.М. Шеремета, Ю.В. Стець // Укр. мат. журн. - 2011. - Т.63, № 5. - С. 686-698.

79. Sheremeta M.M. *Estimates of a sum of Dirichlet series* / M.M. Sheremeta, Yu.V. Stets, O.M. Sumyk // Ukrainian Matem. visnyk. – 2013. – V.10. – P. 234–253.

80. Sheremeta M.M. *Estimates of a sum of Dirichlet series* / M.M. Sheremeta, Yu.V. Stets, O.M. Sumyk // Journal of Math. Science. – 2013. – V.194, № 5. – P. 557–572.

81. Stets Yu.V. *On logarithm of maximal term of Dirichlet series converging in a half-plane: three- term power asymptotics* / Yu.V. Stets, M.M. Sheremeta // Mat. Stud. – 2014. – V.41, № 1. – P. 28–44.

82. Стець Ю. В. *Про R-порядок і нижній R-порядок рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності* /Ю. В. Стець // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2014. – Т.79. - С. 206-210.

83. Стець Ю. В. *Багаточленна степенева асимптотика логарифма максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле* / Ю. В. Стець, М.М. Шеремета // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2015. – Т.80. - С. 145-160.

84. Stets Yu. V. *On regular growth of Dirichlet series absolute convergent in the halfplane.* / Yu. V. Stets, M. M. Sheremeta // International V. Skorobohatko mathematical conference : Abstracts.-International conf. (September 19-23, 2011, Drogobych, Ukraine) - P.195.

85. Stets Yu.V. *Three-term power asymptotic for a Dirichlet series absolute convergent in the halfplane.* / Yu. V. Stets, M. M. Sheremeta // International conference dedicated to the anniversary of Stefan Banach: Abstracts.- International conf. (Lviv, September 17-21, 2012). – Lviv, 2012. - P.161.

86. Sheremeta M.M. *Estimates of a sum of Dirichlet series* / M.M. Sheremeta, Yu.V. Stets, O.M. Sumyk // International conference "Complex Analysis and Related Topics": Abstracts.- International conf. (Lviv, September 23-28, 2013). – Lviv, 2013. - P.74.

87. Stets Yu.V. *Multi-term power asymptotic for the logarithm of maximal term of a Dirichlet series with null abscissa of absolute convergence* / Yu. V. Stets, M. M. Sheremeta // International conference "Complex Analysis and Related Topics": Abstracts.- International conf. (Lviv, September 23-28, 2013). – Lviv, 2013. - P.82.

88. Kulyavets' L.V. *Many-term power asymptotics of entire Dirichlet series and characteristic functions of probability laws.* / L.V. Kulyavets', Yu. V. Stets, M. M. Sheremeta // Наукова конференція присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці 1-4 липня, 2015): Тези доповідей. - Чернівці, 2015.- С.139-140.

89. Stets Yu. V. *On R-order and lower R-order of Dirichlet series absolutely convergent in the halfplane* / Yu. V. Stets, M. M. Sheremeta // International V. Skorobohatko mathematical conference : Abstracts.-International conf.(August 25-28, 2015, Drogobych, Ukraine) - P.158.