ВІДГУК ОФІЦІЙНОГО ОПОНЕНТА

на дисертаційну роботу Дільного Володимира Миколайовича **"Асимптотичні та апроксимаційні властивості функцій експоненціального типу та їх застосування"**, подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико–математичних наук зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз.

Актуальність роботи. Вивчення просторів Гарді займає важливе місце в сучасному аналізі. Ефекти, що виникають при цьому, важливі самі собою, цікавими є також багаті зв'язки просторів Гарді з іншими об'єктами аналізу, численні застосування у суміжних областях. Активні дослідження в цій тематиці пов'язані, зокрема, з роботами А. Бьорлінга та П. Лакса, зачіпають питання гіпер- і мультициклічних функцій та операторів у цих просторах. Істотний розвиток теорія просторів Гарді одержала в роботах петербурзької школи аналізу, створеної В. П. Хавіним.

Частково ці результати почали поширюватися на вагові простори Гарді, а також на простори Гарді в різних нестандартних областях. Тут знадобилися нові методи, зокрема при вивченні просторів з експоненціальною вагою природним виявилось застосування методів теорії Пелі-Вінера. Відзначимо, що властивості таких просторів істотно відрізняються від властивостей класичних просторів Гарді. До початку досліджень пошукувача про них було відомо не так багато. Тому детальне їх вивчення, яке робиться в даній роботі, а також знаходження всеможливих застосувань є актуальною задачею.

Опис результатів работи. Основним об'єктом досліджень є введений Б.В.Винницьким простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p \le \infty$, $\sigma \ge 0$, аналітичних функцій у правій півплощині з нормою

$$\|f\| = \sup_{-\pi/2<\varphi<\pi/2} \left\{ \int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \right\}. \tag{1}$$

Попередником його був добре відомий простір Вінера-Пелі W^p_σ цілих функцій експоненціального типу, що не перевищує σ, які належать на дійсній осі простору L^p. Останній можна також означити як множину цілих функцій з умовою скінченності (1), де sup береться за проміжком $[0, 2\pi]$.

Насамперед, автор, розглядаючи розклади функцій із класу W^1_σ вигляду

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k c_k \frac{\pi \sin \sigma z}{\sigma z - \pi k},$$

знаходить в термінах коефіцієнтів c_k необхідні і достатні умови, при яких f зображається у вигляді різниці двох цілих функцій $g \in B(0, \pi)$,

$h \in B(0, -\pi)$ або голоморфних у правій півплощині функцій $g \in B(0, \pi/2)$, $h \in B(0, -\pi/2)$, де

$$B(\alpha, \beta) = \left\{ f : \sup_{\alpha < \varphi < \beta} \int_0^\infty |f(re^{i\varphi}|dr < \infty \right\}.$$

Зокрема, ним одержано прості достатні умови, зручні для застосувань (теореми 2.1–2.4). Далі, В. Дільний переходить до вивчення просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і доводить еквівалентність норми (1) та спеціальної норми, що визначається поведінкою голоморфної в правій півплощині функції на всіх вертикальних прямих і горизонтальних півпрямих. При цьому він спирається на одержані ним нові теореми типу Фрагмена–Ліндельофа.

Далі автор досліджує знайдений Б.Винницьким аналог зображення Вінера–Пелі для функцій $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та знаходить необхідні і достатні умови на зображаючу функцію для того, щоб функція G мала ту чи іншу асимптотику на нескінченності, наприклад $\log |G(x)|/x \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

Після цього В. Дільний для функцій $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ вивчає зв'язок між їх асимптотиками на уявній осі і дійсній півосі. Окремо розглядаються випадки, коли функція G не має нулів і коли інтегральна гранична функція є сталою. Результати є точними, бо знайдені автором умови є еквівалентними між собою. Тут В. Дільний спирається на знайдені ним раніше спеціальні зображення типу Коші та Пуассона для функцій класу $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Хочу відзначити, що результати автора не мають аналогів для класичних просторів Гарді з $\sigma = 0$. Особливо цікавим є застосування одержаних результатів для знаходження критерію циклічності функції G, тобто повноти системи $\{G(z)e^{z\tau},\ \tau \le 0\}$ у просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Описано також замикання множини лінійних комбінацій системи у випадку, коли функція не циклічна. Розглянуто також аналог цих результатів для круга. Як наслідок одержується зв'язок між циклічністю функцій в цьому просторі і класичному просторі Гарді.

Цікавою є корисна в застосуваннях теорема про оцінку норми оператора

$$Tf = \int_0^{+\infty} \frac{uK(x-u)}{u^2 - x^2} f(u)du$$

з $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ в $L^1(0, \infty)$. Напевно, ця оцінка є точною чи близькою до точної, але, на жаль, автор цього не перевіряє.

Далі, позначимо $D_\sigma = \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| < \sigma, \Re z < 0\}$, $D^*_\sigma = \mathbb{C} \setminus D_\sigma$. Через $E^2(D_\sigma)$ позначається простір аналітичних в D_σ функцій g, для яких інтеграли $\int |g(z)|^2 |dz|$ рівномірно обмежені за всіма відрізками в D_σ, які є паралельними будь-якій з координатних осей. Аналогічно визначається простір $E(D^*_s)$. В роботі розглядається рівняння згортки

$$\int_{D_\sigma} f(\tau + w)g(w)dw = 0, \quad g \in E(D^*_\sigma)$$

відносно $f \in E(D_\sigma)$. З результатів Б. Винницького та вищезгаданого критерію циклічності випливає, що це рівняння має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли функція

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\partial D_\sigma} g(w) e^{-zw} dw$$

задовільняє хоча б одну з наступних умов

1) $G(z)$ має хоч один нуль в правій півплощині,

2) інтегральна гранична функція для G не є сталою,

3) $\limsup_{x\to+\infty} \left(\frac{\log|G(x)|}{x} + \frac{2\sigma \log x}{\pi}\right) < +\infty$.

Розв'язки у випадках 1) і 2) були одержані у попередніх роботах, а в дисертації описана повна множина розв'язків для істотно складнішого випадку 3).

Також автор переносить частину описаних вище результатів на функції у випуклих необмежених многокутниках, що лежать у куті розхилом менше π.

Результати дисертації мають цікаві застосування. Так, наведемо наступне еквівалентне формулювання гіпотези Рімана про нулі ζ-функції:

Наслідок 7.2. Гіпотеза Рімана справедлива тоді і тільки тоді, коли функція $\frac{z-1/2}{(z+1/2)^2}\zeta(z+1/2)$ є циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}^+)$ для якого-небудь $\sigma \geq 0$.

При $\sigma = 0$ це відомий результат Ж.Бурноля.

Як застосування одержано також наступний критерій повноти системи функцій $v_k(t) = \cos\rho_k t + \rho_k t \sin\rho_k t, k \in \mathbb{N}$ у просторі $L^2(0,1)$: ця система при умові $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$, $k \neq m$ неповна тоді і тільки тоді, коли всі ρ_k є нулями деякої парної цілої функції $G(w)$ експоненціального типу не вище 1 такої, що $G(0) = 0$, $G(x)/x^2 \in L^1(0,\infty)$, $x\int_x^\infty G(t)/t^2 dt \in L^2(0,\infty)$, $\int_{-\infty}^\infty G(t)/t^2 dt = 0$.

Зауваження

с.6 – список позначень вартувало б доповнити, там відсутні необхідні означення просторів Гарді-Смірнова, D_σ, D^*_σ, $T^2(D^-_\times)$, $D_\times$, $\mathbb{C}(\alpha_n, \beta_n)$, тоді як присутні дуже спеціальні означення, які майже не зустрічаються P_f, S_f, K_f.

Розділ 1

с.21 Нечітко сказано про авторство теореми 1.2. Треба сказати, що означення 1.1 і 1.3 еквівалентні.

с.24. Недоречно в одній формулі писати $\Im z$ і y.

с.42 Автор для одного і того ж об'єкту пише то $E^2_*[D_\sigma]$, то $E^2[D^*_\sigma]$.

с.52 Незрозуміло, що таке випадок 3).

Розділ 2

с.63 Пропущена дужка в першому рядку, в третьому слід замінити (2.4) на (2.2).

с.64 Помилкове посилання на теорему А3.16.

с.66, 1 рядок знизу - пропущено π.

с.70 Описка в останньому рядку (треба $h_2 h_2^*$)

с.83 Лема 2.8. Доведення проходить тільки при $\alpha = -\beta$, але до цього випадку зводиться загальний випадок з допомогою повороту системи координат.

Розділ 3

с.97 Замінити оцінку $|g(z)| \le c/\sqrt{\Re z}$ на $|g(z)| \le c/\sqrt{\Re z + 1}$.

Розділ 4

с.121 Запис $e^{cz}e^{x\kappa(x)}$ беззмістовний, по-перше не z а x, а по-друге, c можна забрати, включивши в $\kappa(x)$.

с. 127 Замінити $h(t)$ на $h_G(t)$.

с. 135 Замінити $p \ge \infty$ на $p \le \infty$.

Розділ 5

с.204 Описка в оцінці норми оператора $\pi/2$.

Розділ 6

с.235 Помилкове посилання на А3.16.

Розділ 7

с.258 Одне з ν слід замінити на n, інакше однією буквою позначаються різні параметри.

с. 268-269 Теореми 7.7 і 7.8. В умовах достатньо 3-х променів, але щоб вони розбивали площину на кути $< \pi$. Далі, нерівності для $T(z)$ виконуються не для всіх z, а тільки на променях, і тільки тоді застосовується теорема типу Фрагмена-Ліндельофа.

Зрозуміло, ці неточності не впливають на мою високу оцінку дисертації.

Заключна частина і висновки. З опису результатів дисертації випливає, що майже всі вони одержані В. Дільним для об'єктів, що активно вивчалися раніше іншими авторами, але при цьому дисертант не займається уточненням чужих результатів, а знаходить нові ефекти або поширює відомі раніше на новий чи істотно ширший клас функцій, використовуючи для цього нові методи і конструкції. На мій погляд, це є великим достоїнством роботи.

Більшість результатів носить критеріальний характер, має закінчений вигляд. Їх достовірність не викликає сумнівів, оскільки вони доповідалися на 17 наукових конференціях, представлені в 20 українських фахових журналах, а також 5 журналах, що мають імпакт-фактор Math-Net.Ru. Всі доведення, висновки і рекомендації є обгрунтованими.

Дана дисертація вносить вагомий вклад в теорію просторів Гарді і буде корисною в тих розділах математики, які дотикаються з цією теорією. Результати є цікавими для спеціалістів, що працюють у Львівському, Харківському, Київському університетах, київському Інституті математики. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Все сказане дозволяє зробити висновок, що за обсягом проведених наукових досліджень, їх науковим рівнем, актуальністю, науковою новизною, значимістю та завершеністю отриманих результатів, кількістю публікацій дана робота повністю задовольняє усі вимоги законодавства України щодо дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, а її автор заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри фундаментальної математики
Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна С. Ю. Фаворов

20.05.2016

Підпис проф. С. Ю. Фаворова завіряю
Учений секретар Харківського
національного університету
імені В. Н. Каразіна Н. А. Вінникова

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ * КОД 02071205 * ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА