ВІДГУК

на дисертацію **Сокульської Наталії Богданівни** «Властивості мероморфних у півсмузі функцій», подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 математичний аналіз.

Актуальність теми дисертації.

Мероморфні функції відіграють важливу роль в аналізі та його застосуваннях тому що, по-перше, вони є часткою аналітичних функцій однієї змінної; по-друге, вони узагальнюють многочлени та раціональні функції. У передмові до перекладу монографії У. Хеймана «Мероморфні функції» А.А. Гольдберг пише:

«Цілі та мероморфні функції, які є безпосереднім узагальненням многочленів та раціональних функцій, представляють найбільш важливі та уживані класи аналітичних функцій. Їх теорія має довгу історію, і навіть спеціальним класам цих функцій присвячені великі монографії. Тому відкриття нових загальних закономірностей, справедливих для всього класу мероморфних функцій, чи для досить широких його підкласів, має загальноматематичне значення, а одержані результати, як правило, лежать досить глибоко».

Що ж стосується проблеми опису нулів і полюсів мероморфних функцій, якій в дисертації наділена значна увага, то вона є однією з центральних проблем як в загальній теорії функцій так і в теорії розподілу значень, основи якої були закладені у роботах фінського математика Рольфа Неванлінни.

Стосовно основного методу, яким автор дисертаційної роботи досліджує мероморфні у півсмузі функції, а саме, методу рядів Фур'є, то він бере свій початок з класичної формули Йенсена, який на зламі XIX та XX століть встановив зв'язок між інтегральним середнім $\log|f|$ на колах, де f голоморфна у деякому крузі, та кількістю її нулів у внутрішностях цих кіл. Цей зв'язок є формулою для нульового коефіцієнта Фур'є функції $\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|$ як функції від φ. Однак, кількість нулів не враховує їх розподіл за аргументами. Його враховують всі інші коефіцієнти Фур'є, формули для яких можна побачити в згаданій роботі Йенсена.

Базуючись на повній колекції таких зв'язків Л. Рубел, Б. Тейлор, Д. Майлз в 60-х – 70-х роках минулого століття ввели і глибоко вивчили класи цілих та мероморфних функцій з довільними обмеженнями на зростання. Пізніше їх результати були узагальнені і поширені на субгармонійні та δ-субгармонійні функції в $\mathbf{R}^m, m \geq 2$. Спираючись на доведену ним теорему типу Карлемана, А. Бридун поширив деякі з результатів теорії Неванлінни на класи функцій, мероморфних у півсмузі $R = \{z=x+iy,\ x>x_0,\ 0<y<\pi\}$, та довів критерій скінченності λ-типу для голоморфної в півсмузі функції. В 2005 році у Фінляндії відбулася велика наукова школа (workshop) присвячена методу рядів Фур'є для мероморфних і субгармонійних функцій.

Крім того, у дисертації розглядаються локсодромні мероморфні функції, які тісно пов'язані з еліптичними функціями, значення яких в різних розділах математики (наприклад, в теорії диференціальних рівнянь) добре відоме.

З огляду на викладене вище тему дисертації та проведені в ній дослідження вважаю **актуальними.**

Оцінка змісту дисертації, обґрунтування наукових положень, їх достовірності й новизни.

У вступі та розділі 1 дисертації обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі досліджень, коротко викладено зміст основної частини роботи, зроблено огляд літератури та обґрунтовано напрямки досліджень.

В розділі 2 вивчені мероморфні у замиканні півсмуги $S = \{s = \sigma + it: \sigma>0, 0< t<2\pi\}$ функції f такі, що $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$, $\sigma \ge 0$. Основним результатом в цьому розділі є формули для коефіцієнтів Фур'є $c_k(\sigma,f)$ функції f, мероморфної у замиканні прямокутника $R_\sigma = \{\eta + it : 0 < \eta < \sigma, 0 < t < 2\pi\}$ (**Лема 2.3**). Наведемо скорочений зміст цієї леми.

Лема 2.3. Справедливі наступні співвідношення:

$$c_k(\sigma, f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\log|f(\sigma+it)|\,dt = \frac{e^{k\sigma}}{2k}\alpha_k(f) - \frac{e^{-k\sigma}}{2k}\overline{\alpha_{-k}}(f) +$$

$$\frac{1}{2k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma}}\right)^k\right] - \frac{1}{2k}\sum_{p_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^{\sigma}}{e^{p_j}}\right)^k - \left(\frac{e^{\overline{p_j}}}{e^{\sigma}}\right)^k\right],$$

$$c_{-k}(\sigma, f) = \overline{c_k(\sigma, f)},\ k \in \mathbf{N},$$

де $\{s_j\}$ – множина нулів, а $\{p_j\}$ – множина полюсів функції f в R_σ.

У третьому розділі доведено критерій належності функції f, голоморфної у $\overline{S}$ такої, що $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$, до класу функцій скінченного λ-типу, який визначається деякою функцією зростання λ, описано послідовність нулів таких функцій, а також описано послідовність нулів і полюсів мероморфної, скінченного λ-типу у $\overline{S}$ функції f такої, що $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$. Центральною теоремою цього розділу є Теорема 3.1.

Теорема 3.1. Нехай функція f голоморфна в $\overline{S}$ і така, що $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$, а $\lambda(\sigma)$ – функція зростання така, що $\sigma = O(\lambda(\sigma))$. Тоді наступні твердження еквівалентні.

(i) f – функція скінченного λ-типу;

(ii) $|c_k(\sigma,f)| \le A\lambda(\sigma+B)$ для всіх $\sigma>\sigma_0$ і деяких A, $B>0$, $k\in\mathbf{Z}$;

(iii) $|c_k(\sigma,f)| \le A\lambda(\sigma+B)/(|k|+1)$ для всіх $\sigma>\sigma_0$ і деяких A, $B>0$, $k\in\mathbf{Z}$.

Тут $c_k(\sigma,f)$ – коефіцієнти Фур'є функції f.

У четвертому розділі досліджені зовні одиничного круга функції. Для таких функцій отримано: 1) аналог теореми Йенсена для мероморфної в зовнішності одиничного круга функції та встановлено співвідношення для коефіцієнтів Фур'є такої функції; 2) отримано критерій скінченності λ-типу голоморфних в зовнішності одиничного круга функцій F в термінах коефіцієнтів Фур'є функції $\log|F|$; 3) описано послідовності нулів голоморфних і нулів та полюсів мероморфних функцій скінченного λ-типу в зовнішності одиничного круга.

П'ятий розділ є центральним розділом дисертації. Він присвячений вивченню характеристик зростання локсодромних функцій (**Теорема 5.1**), які тісно пов'язані з еліптичними функціями, та розподілу значень функцій класу $\mathcal{M}_q$ мультиплікативно періодичних мероморфних у проколеному замиканні верхньої півплощини $\mathcal{H}^* = \{z\colon \operatorname{Im} z\ge 0\}\setminus\{0\}$:

Теорема 5.2. Нехай $f\in\mathcal{M}_q$, $f\ne\text{const}$ і $f\ne 0,\infty$ на $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Тоді

1) сума приростів $\arg f$ вздовж відрізків $[qt, t]$ та $[-t, -qt]$ не залежить від t і дорівнює $2\pi(n_0(f)-n_\infty(f))$, де $n_0(f)$, $n_\infty(f)$ – кількості нулів та полюсів функції f в $\{z\colon \operatorname{Im} z\ge 0,\ q<|z|\le 1\}$ відповідно;

2) нехай $z_n=r_ne^{i\alpha_n}$ – a-точки функції f, та $w_n=\rho_ne^{i\beta_n}$ – полюси f в $\{z\colon \operatorname{Im} z\ge 0,\ qt<|z|\le t\}$. Тоді

$$\int_{qr}^{r}\sum_{qt<r_n\le t}\left(\frac{q}{r_n}-\frac{r_n}{t^2}\right)\sin\alpha_n\,dt=\int_{qr}^{r}\sum_{qt<\rho_n\le t}\left(\frac{q}{\rho_n}-\frac{\rho_n}{t^2}\right)\sin\beta_n\,dt=$$

для всіх $r>0$.

Внесені до дисертації результати автора, які сформульовані у **Лемі 2.3, Теоремі 3.1, Теоремі 5.1,** та **Теоремі 5.2** є новими. Всі основні твердження обґрунтовані строгими доведеннями, достовірність яких не викликає сумніву. Окрім того, в першому розділі подано огляд наукових праць, проблематика яких тісно пов'язана з дослідженнями автора дисертації.

Значимість для науки результатів дисертації, повнота викладу у наукових виданнях, рекомендації щодо їх використання та відповідність змісту автореферату її основним положенням.

У дисертації дістав свій подальший розвиток метод рядів Фур'є для мероморфних у півсмузі функцій. Цим методом розв'язано низку проблем, що стосуються зростання таких функцій та розподілу пов'язаних з ними нулів та полюсів. Результати дисертаційної роботи можуть знайти застосування у подальших дослідженнях з теорії цілих, мероморфних та субгармонійних функцій, в теорії потенціалу. Результати дисертації з достатньою повнотою відображені 5 статтями, опублікованими у фахових виданнях, 3 з яких без співавторів, доповідались на кількох міжнародних конференціях.

Автореферат дисертації достовірно та повно відображає її зміст.

Зауваження:

1. Число розділів п'ять можна скоротити до чотирьох, об'єднавши розділи три і чотири.

2. Стор. 11, 3-я стрічка знизу. Після «А.А. Гольдберга» потрібно «і».

3. Стор. 12, 12-а і 13-а стрічки зверху. Застосовуються терміни γ–тип та (γ,ε)–тип, хоча повсюди у дисертації функція зростання позначається через λ.

4. Стор. 13, 11-а стрічка знизу. Замість фрази «і таких, що $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi)$, адже при виконанні умови $F(z) = f(\log z)$, де $z = e^s$, отримуємо мероморфну у

зовнішності одиничного круга $\{z: |z|\geq 1\}$ функцію», краще писати «і таких, що $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi)$, так як при $z = e^s$ отримуємо мероморфну у зовнішності одиничного круга $\{z: |z|\geq 1\}$ функцію $F(z) = f(\log z)$».

5. В означенні 5.1 локсодромної функції треба відмовиться від класичного обмеження на q: $0<|q|<1$. Достатньо обмеження $0<|q|$, тому що, якщо виконується умова $f(qz) = f(z)$, $|q|>1$, $z\in \boldsymbol{C}^*$, то і виконується умова $f\left(\frac{1}{q}z\right) = f(z)$, $|q|>1$, $z\in \boldsymbol{C}^*$.

6. Доведення деяких теорем, наприклад, теореми 4.2 можливо оптимізувати, застосовуючи результати Неванлінни, Матевосяна, Рубела і Кондратюка.

Однак, це не зменшує заслуги автора. Не завжди початкове доведення результату є оптимальним. Наприклад, піонерське доведення Карлесона проблеми інтерполяції в $\boldsymbol{H}^\infty$ займає 10 сторінок в Amer. J. Math. (1958). В подальшому були знайдені більш оптимальні розв'язки цієї проблеми. Доведення Джонса міститься на одній сторінці журнального тексту в Ann. Math. (1980). Деякі доведення, здаючись, на перший погляд, занадто «роздутими», містять в собі оригінальні ідеї, які відкривають нові шляхи в розвиненні цього напрямку. Загалом же, дисертація оформлена добре, а кілька висловлених зауважень мають технічний характер.

Висновок. В дисертаційній роботі досліджені мероморфні у замиканні півсмуги функції f такі, що $f(\sigma)=f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq 0$, функції, мероморфні в околі істотно особливої точки, локсодромні функції та мультиплікативно періодичні мероморфні функції у проколеному замиканні верхньої півплощини, що є важливим внеском в теорію мероморфних функцій. При цьому авторові вдалось подолати значні технічні труднощі.

Вважаю, що робота відповідає вимогам, що ставляться до кандидатських дисертацій, а її автор Сокульська Наталія Богданівна заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 математичний аналіз.

Доктор фіз.-мат. наук, професор,

професор кафедри вищої математики

Південно-Західного державного

університету (м. Курськ, Росія) К.Г. Малютін

Подпись

Удостоверяю

Начальник отдела кадров