МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

ФЛЮД ОКСАНА ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 517.956

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичної економіки та економетрії Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Кирилич Володимир Михайлович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
завідувач кафедри математичної економіки
та економетрії.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Ільків Володимир Степанович,
Національний університет
"Львівська політехніка",
кафедра вищої математики;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Самойленко Юлія Іванівна,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
механіко-математичний факультет.

Захист відбудеться "21" жовтня 2016 року о 15^{00} на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий "20" вересня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доцент Б. А. Остудін

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія сингулярно збурених диференціальних рівнянь є важливим розділом сучасної математики, оскільки такі рівняння часто використовують як математичні моделі у багатьох галузях сучасного природознавства та техніки і є цікавим об'єктом для дослідження. Наявність малого параметра при старших похідних чи частині старших похідних відображає певні специфічні фізичні властивості досліджуваних явищ і процесів, але за цього суттєво ускладнює їх вивчення.

Найбільш поширеними методами дослідження подібних задач є асимптотичні методи, які дають змогу будувати асимптотичні розв'язки згаданих задач, встановлювати оцінки точності отриманих наближених розв'язків та вивчати якісні властивості розв'язків досліджуваних рівнянь.

Теорія асимптотичних методів в останні два століття отримала бурхливий розвиток, результатом якого стало створення низки асимптотичних методів, які підтвердили свою ефективність під час вивчення багатьох різноманітних прикладних задач.

Серед класичних методів сучасного асимптотичного аналізу насамперед потрібно згадати метод усереднення М. М. Боголюбова і асимптотичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського, результати пріоритетного характеру з розвитку яких належать українським математикам (М. М. Боголюбов, Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко, О. Б.Ликова, І. О. Парасюк, М. О. Перестюк, В. Г. Самойленко та ін.). Ці методи виявилися дуже ефективними при розв'язанні низки важливих практичних задач з регулярним збуренням.

Сингулярно збурені задачі є більш складними, ніж задачі з регулярним збуренням. Тому під час вивчення таких задач значну увагу приділено дослідженню як лінійних задач із сингулярним збуренням, в розвиток асимптотичних методів аналізу яких значний вклад внесли С. О. Ломов, М. І.Шкіль, Н. В. Федорюк, А. М. Самойленко, С. Г. Крейн, В. П. Яковець, О. А. Бойчук, Г. С. Жукова, Л. Каранджулов, К. С. Чернишов та інші, так і нелінійних.

Аналіз літератури засвідчує, що найбільш дослідженими є сингулярно збурені крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь та систем, а також крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного і параболічного типів.

Серед асимптотичних методів, які найчастіше використовують для вивчення сингулярно збурених нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, варто виділити метод ВКБ та його узагальнення на нелінійні задачі (R. Miura, M. D. Kruskal, В. П. Маслов, С. Ю. Доброхотов, Г. О. Омельянов, В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко), метод Люстерника-Вішика (А. Б. Васильєва, В. Ф. Бутузов, В. А. Треногін та ін.), метод примежових функцій (А. Б. Васильєва, В. Ф. Бутузов, А. Д. Мишкіс, В. А. Треногін, К. А. Касімов, В. М. Цимбал та ін.).

Варто також згадати про те, що методи класичної теорії усереднення широко використовують для вивчення задач у перфорованих областях для диференціальних рівнянь з частинними похідними різного типу чи операторів зі швидкозмінними коефіцієнтами. Важливі результати у цьому напрямі отримали М. С. Бахвалов, Ю. Д. Головатий, В. В. Жиков, В. О. Марченко, Т. А. Мельник, С. О. Назаров, О. А. Олійник, А. Л. Пятницький, І. В. Скрипник, Є. Я. Хруслов, Г. А. Чєчкін, П. Донато, Ж.-Л. Ліонс, Е. Санчес-Паленсія та ін.

Огляд наукової літератури свідчить, що теорія гіперболічних рівнянь і систем та розвиток методів їх дослідження є актуальним розділом сучасної теорії диференціальних рівнянь і мають широку сферу застосувань. Зауважимо, що для гіперболічних систем достатньо детально вивчено питання існування глобальних гладких розв'язків, які є наслідками деяких інтегральних законів збереження, та певні властивості розв'язків таких задач.

Хоча дослідженню асимптотики розв'язків мішаних задач для гіперболічних рівнянь і систем з малим параметром приділено значну увагу – важливі результати з цього напряму отримали В. М. Бабич, В. Ф. Бутузов, А. Б. Васильєва, М. Г. Джавадов, А. Ф. Каращук, К. А. Касімов, Д. С. Лапін, В. Ю. Ляпідевський, А. Д. Мишкіс, О. А. Олійник, І. О. Рассказов, Ю. І. Самойленко, А. М. Філімонов, В. М. Цимбал, А. Джефрі, Т. Кавахара, Дж. Кеворкян та інші, однак до сьогодні залишалися ще не достатньо вивченими задачі для сингулярно збурених гіперболічних рівнянь у випадку, коли малий параметр міститься лише при частині старших похідних.

У цій роботі запропоновано єдиний підхід до дослідження мішаних задач для лінійних та нелінійних гіперболічних систем, у яких малий параметр ε у частині рівнянь системи є множником при похідних за t, а в решті рівнянь – за просторовою похідною, тобто вироджена задача має ортогональні до осей координат характеристики. Деякі часткові випадки подібних сингулярних задач розглядали А. Д. Мишкіс та О. Маулєнов, В. Ф. Бутузов та А. Ф. Каращук.

Тому вивчення згаданих вище сингулярно збурених гіперболічних задач є актуальною темою математичних досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано відповідно до плану наукових досліджень кафедри диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка в рамках науково-дослідної теми "Дослідження нелінійних задач для диференціальних операторів" (номер держреєстрації 0111U004540).

Мета і завдання дослідження. Головною метою дослідження є вивчення асимптотичної поведінки розв'язків сингулярно збурених мішаних задач для гіперболічних систем лінійних, напівлінійних та квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними та малим параметром при похідних за часовою і просторовою змінними.

Завданнями дисертаційного дослідження є:

1) визначити достатні умови глобальної класичної розв'язності мішаних задач для нелінійних гіперболічних систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними та ортогональними характеристиками;

2) побудувати асимптотику розв'язків зі встановленням оцінок залишкових членів мішаних задач з малим параметром при різних похідних для лінійних та напівлінійних гіперболічних систем рівнянь першого порядку;

3) побудувати асимптотичне наближення розв'язків мішаних задач для гіперболічних систем рівнянь першого порядку з різними характеристичними напрямами;

4) дослідити ефект примежового шару в нелінійних мішаних задачах для вироджених гіперболічних систем квазілінійних рівнянь першого порядку.

Об'єктом дослідження є сингулярно збурені мішані задачі для гіперболічних систем лінійних, напівлінійних та квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними.

Предмет дослідження – асимптотична поведінка розв'язків мішаних задач для гіперболічних систем рівнянь першого порядку з малим параметром при похідних за часовою та просторовою змінними.

Методи досліджень. Для розв'язання сформульованих задач дисертаційної роботи використано результати і методи асимптотичного аналізу дослідження рівнянь з частинними похідними, метод характеристик (при зведенні мішаних задач до еквівалентних систем інтегро-функціональних рівнянь), апріорних оцінок, метод примежових шарів.

Наукова новизна одержаних результатів. Для сингулярно збурених мішаних задач для гіперболічних систем рівнянь першого порядку з малим параметром при похідних за часовою та просторовою змінними отримано такі нові результати:

1) побудовано та обґрунтовано асимптотичне наближення розв'язку мішаної задачі для гіперболічної системи лінійних рівнянь першого порядку з малим параметром при похідних за часовою та просторовою змінними;

2) доведено теорему про глобальну узагальнену розв'язність задачі з ортогональними характеристиками для напівлінійної одновимірної гіперболічної системи рівнянь першого порядку;

3) побудовано та доведено коректність асимптотичного розвинення розв'язку сингулярно збуреної задачі для одновимірної напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з малим параметром при похідних;

4) побудовано та обґрунтовано оцінку залишку асимптотичного розвинення розв'язку задачі з малим параметром при похідних з різними нахилами характеристик у першій четверті та прямокутнику;

5) обґрунтовано ефект примежового шару для нелінійної мішаної задачі при переході від гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку до виродженої системи.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і є внеском в теорію сингулярно збурених задач із застосуванням у фізиці, механіці, хімічних процесах обміну, теорії транспортних потоків, розповсюдження паводкових хвиль тощо, а також можуть бути використані в теорії наближених обчислень.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації одержані автором самостійно. У роботі [6] співавторам належить аналіз та обговорення результатів на наукових семінарах.

Апробація результатів роботи. Результати дисертації апробовані на наукових семінарах та конференціях: семінарах кафедри математичної економіки та економетрії Львівського національного університетум імені Івана Франка "Некласичні задачі для гіперболічних систем" (керівники: проф. Кирилич В. М., доц. Андрусяк Р.В.); науково-дослідницькому семінарі з диференціальних рівнянь у Львівському національному університеті імені Івана Франка (керівники: проф. Бокало М. М., доц. Бугрій О. М., доц. Головатий Ю. Д.); Львівських міських семінарах із диференціальних рівнянь (керівники: член-кор. НАН України, проф. Пташник Б. Й., проф. Іванчов М. І., проф. Каленюк П. І.); Всеукраїнській науковій конференції "Застосування математичних методів в науці і техніці" (Луцьк, 2011); XIV Міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2012); International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 2012); Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 2012 року); Fourth International Conference for Young Mathematics on Differential Equation and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynskii (Donetsk, 2012); V Всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 2013); XV Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2014); Конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2015" (Львів, 2015 року); Міжнародній конференції молодих математиків Інституту математики НАН України (Київ, 2015); International V. Skorobohatko mathematical conference (Drohobych, 2015); Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвяченій 70-річчю академіка НАН України М. О. Перестюка (Ужгород, 2016).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 7 наукових працях у фахових періодичних виданнях, з них дві в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз та додатково висвітлені в 11 тезах матеріалів наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації охоплює 150 сторінок, з них список використаних джерел містить 15 сторінок і налічує 146 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, зазначено мету та завдання дослідження, наукову новизну, апробацію одержаних результатів та їх практичне застосування.

У першому розділі зроблено огляд літературних джерел з теорії сингулярних збурень та асимптотичних методів, що стосуються теми дисертації.

У підрозділі 2.1 другого розділу розглянуто початково-крайову задачу для гіперболічної системи $n+m$ сингулярно збурених лінійних рівнянь першого порядку на площині, причому малий параметр є множником при різних частинних похідних. Такі задачі слугують математичними моделями фізичних процесів або є проміжними при дослідженні, наприклад, багатовимірних задач.

В області $\Pi = \{(x,\,t):\ 0<x<l,\ 0<t<T\}$ розглянуто задачу

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t}+\dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x}=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_j^\varepsilon+\sum_{k=1}^{m}b_{ik}(x,t)v_k^\varepsilon+f_i(x,t;\varepsilon) \quad (i=\overline{1,n}),\\ \dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial t}+\varepsilon\dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial x}=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,t)u_j^\varepsilon+\sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(x,t)v_k^\varepsilon+g_s(x,t;\varepsilon) \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,0)=u_i^\varepsilon(0,t)=0, \quad x\in[0,l],\ t\in[0,T] \quad (i=\overline{1,n}),\\ v_s^\varepsilon(x,0)=v_s^\varepsilon(0,t)=0, \quad x\in[0,l],\ t\in[0,T] \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{2}$$

де ε – малий додатний параметр.

Досліджено асимптотику класичного розв'язку задачі (1),(2) за умов:

(H_1) функції $a_{ij}, b_{ik}, \gamma_{sj}, \sigma_{sk} : \overline{\Pi}\to\mathbb{R}$, f_i і $g_s : \overline{\Pi}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – достатньо гладкі в області свого визначення (порядок гладкості залежить від порядку асимптотики);

(H_2) виконуються умови погодження першого порядку ($\forall\varepsilon>0$)

$$f_i(0,0;\varepsilon)=0,\ (i=\overline{1,n}), \quad g_s(0,0;\varepsilon)=0,\ (s=\overline{1,m}).$$

Нехай $N > 0$ – довільне натуральне число. Виділимо в асимптотиці розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = (u_1^\varepsilon, \dots, u_n^\varepsilon, v_1^\varepsilon, \dots, v_m^\varepsilon)$ задачі (1),(2) частинну суму порядку N та позначено через $R_{iN}^\varepsilon u = R_{iN}^\varepsilon u(x,t)$ $(i = \overline{1,n})$, $R_{sN}^\varepsilon v = R_{sN}^\varepsilon v(x,t)$ $(s = \overline{1,m})$ залишки асимптотичних розвинень відповідних компонент розв'язку задачі (1),(2). Правильна теорема.

Теорема 2.1. *Нехай* N *– довільне натуральне число і виконуються умови* (H_1) *і* (H_2). *Тоді розв'язок задачі* (1),(2) *в області* Π *допускає асимптотичне розвинення*

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau) + Q_{ih}u(\xi,t)\big] + R_{iN}^\varepsilon u(x,t) \quad (i = \overline{1,n}), \\ v_s^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau) + Q_{sh}v(\xi,t)\big] + R_{sN}^\varepsilon v(x,t) \quad (s = \overline{1,m}), \end{cases}$$

де $\tau = t/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$ *– регуляризуючі перетворення, а функції* $(\bar{u}_h, \bar{v}_h)$ *регулярної частини асимптотики, функції примежових шарів* $(P_h u,\ P_h v)$ *в околі* $t = 0$ *та функції примежових шарів* $(Q_h u,\ Q_h v)$ *в околі* $x = 0$ *– відомі розв'язки відповідних задач. Для залишкового члена* $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$ *асимптотичного розвинення правильні оцінки*

$$|R_{iN}^\varepsilon u(x,t)| \leqslant C_{1i}\varepsilon^{N+1}, \quad |R_{sN}^\varepsilon v(x,t)| \leqslant C_{2s}\varepsilon^{N+1}, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Pi},$$

C_{1i} $(i = \overline{1,n})$, C_{2s} $(s = \overline{1,m})$ *– незалежні від* ε *сталі.*

У підрозділі 2.2 другого розділу доведено глобальну узагальнену розв'язність мішаної задачі для напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку. В області Π розглянуто систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u,v,w), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(x,t,u,v,w), \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = h(x,t,u,v,w), \end{cases} \tag{3}$$

де $u = (u_1, \dots, u_k)$, $v = (v_1, \dots, v_m)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$, $f = (f_1, \dots, f_k)$, $g = (g_1, \dots, g_m)$, $h = (h_1, \dots, h_n)$, $\Lambda(x,t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(x,t), \dots, \lambda_k(x,t))$.

Для системи (3) задано початкові умови при $0 \leqslant x \leqslant l$:

$$u_i(x,0) = q_i(x), \quad i \in \{1,\dots,k\}, \qquad w_s(x,0) = r_s(x), \quad s \in \{1,\dots,n\} \tag{4}$$

та нелінійні крайові умови при $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$\begin{aligned} u_i(0,t) &= \gamma_i^0\Big(t, (u_j(0,t))_{j\in I_l}, w(x,t)\Big), \ \ i \in I_0, \\ u_i(l,t) &= \gamma_i^l\Big(t, (u_j(l,t))_{j\in I_0}, w(x,t)\Big), \ \ i \in I_l, \\ v_j(0,t) &= \psi_j\Big(t, (u_j(0,t))_{j\in I_l}, w(x,t)\Big), \ \ j \in \{1,\dots,m\}, \end{aligned} \tag{5}$$

де $I_0 = \{i \in \{1,\dots,k\} : \lambda_i(0,t) > 0\}$, $I_l = \{i \in \{1,\dots,k\} : \lambda_i(l,t) < 0\}$.

Нехай множини I_0, I_l містять r_0 та r_l елементів, відповідно. Крім того, всі задані функції $f : \overline{\Pi} \times \mathbb{R}^{k+m+n} \to \mathbb{R}^k$, $g : \overline{\Pi} \times \mathbb{R}^{k+m+n} \to \mathbb{R}^m$, $h : \overline{\Pi} \times \mathbb{R}^{k+m+n} \to \mathbb{R}^n$, $\lambda_i : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^k$, $\gamma^0 : [0,T] \times \mathbb{R}^{r_l} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_0}$, $\gamma^l : [0,T] \times \mathbb{R}^{r_0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_l}$, $\psi : [0,T] \times \mathbb{R}^{r_l} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – неперервні, а функції λ_i – задовольняють умову Ліпшиця за змінною x, а також $\operatorname{sign}(\lambda_i(0,t)) = \mathrm{const}$, $\operatorname{sign}(\lambda_i(l,t)) = \mathrm{const}$ $\forall i \in \{1,\dots,k\}$.

Означення 2.1. *Узагальненим розв'язком задачі* (3)–(5) *називаємо набір функцій* (u,v,w), *компоненти яких належать простору* $C(\overline{\Pi})$ *і задовольняють системи інтегро-операторних рівнянь, отриманих інтегруванням рівнянь системи* (3) *вздовж відповідних характеристик.*

Доведена теорема.

Теорема 2.2 *Нехай виконуються умови:*

1) *функція* Λ *є неперервною на множині* $\overline{\Pi}$ *та ліпшицевою за змінною* x;
2) f, g, h, q, r, γ^0, γ^l, ψ *є неперервними функціями на відповідних множинах визначення;*
3) *функції* f, g, h, γ^0, γ^l, ψ *є ліпшицевими за змінними* u, v, w *на відповідних множинах визначення;*
4) $q_i(0) = \gamma_i^0(0,(q_j(0))_{j\in I_l}, r(0))$ $(i \in I_0)$, $q_i(l) = \gamma_i^l(0,(q_j(l))_{j\in I_0}, r(l))$ $(i \in I_l)$, $v_j(0,0) = \psi_j(0,(q_s(0))_{s\in I_l}, r(0))$ $(j \in \{1,\dots,m\})$ *(умови погодження нульового порядку).*

Тоді в $\overline{\Pi}$ *існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (3)–(5).*

У підрозділі 2.3 другого розділу в області Π для розв'язку мішаної сингулярно збуреної задачі для одновимірної напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+\dfrac{\partial u_i}{\partial x}=F_i(x,t,u,v;\varepsilon) \quad (i=\overline{1,n}),\\ \dfrac{\partial v_s}{\partial t}+\varepsilon\dfrac{\partial v_s}{\partial x}=G_s(x,t,u,v;\varepsilon) \quad (s=\overline{1,m}),\end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} u_i(x,0;\varepsilon)=u_i(0,t;\varepsilon)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T\ \ (i=\overline{1,n}),\\ v_s(x,0;\varepsilon)=v_s(0,t;\varepsilon)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T\ \ (s=\overline{1,m}),\end{cases} \tag{7}$$

за виконання умов:

($\tilde{\mathrm{H}}_1$) $F_i(0,0,0,0;\varepsilon)=0 \quad (i=\overline{1,n}), \qquad G_s(0,0,0,0;\varepsilon)=0 \quad (s=\overline{1,m})$;

($\tilde{\mathrm{H}}_2$) функції F_i і $G_s:\overline{\Pi}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, є $N+2$ рази неперервно диференційовні в $\overline{\Pi}$ за всіма змінними, побудовано асимптотику класичного розв'язку задачі (6),(7) у вигляді

$$\begin{cases} u_i(x,t;\varepsilon)=\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty}\varepsilon^h[\bar{u}_{ih}(x,t)+P^u_{ih}(x,\tau)+Q^u_{ih}(\xi,t)] \quad (i=\overline{1,n}),\\ v_s(x,t;\varepsilon)=\displaystyle\sum_{h=0}^{\infty}\varepsilon^h[\bar{v}_{sh}(x,t)+P^v_{sh}(x,\tau)+Q^v_{sh}(\xi,t)] \quad (s=\overline{1,m}).\end{cases} \tag{8}$$

Тут $\tau=t/\varepsilon$, $\xi=x/\varepsilon$ – регуляризуючі змінні; $\bar{u}_{ih}$, $\bar{v}_{sh}$ – функції регулярної частини асимптотики; P^u_{ih}, P^v_{sh} – примежові шари в околі межі $t=0$; Q^u_{ih}, Q^v_{sh} – примежові шари в околі межі $x=0$. Отриманий результат сформульовано у вигляді теореми.

Теорема 2.3. *Якщо виконуються умови* ($\tilde{\mathrm{H}}_1$), ($\tilde{\mathrm{H}}_2$)*, то класичний розв'язок задачі* (6),(7) *допускає асимптотичне розвинення* (8)*, для якого* $U_i^N(x,t,\varepsilon)$ *та* $V_s^N(x,t,\varepsilon)$ ($\forall N\in\mathbb{N}$) *є рівномірні асимптотичні наближення з точністю* $O(\varepsilon^{N+1})$ *в області* $\overline{\Pi}$*, тобто*

$$\max_{\overline{\Pi}}\left|u_i-U_i^N\right|=O\left(\varepsilon^{N+1}\right)\ \ (i=\overline{1,n}), \quad \max_{\overline{\Pi}}\left|v_s-V_s^N\right|=O\left(\varepsilon^{N+1}\right)\ \ (s=\overline{1,m}).$$

У третьому розділі розглянуто мішані задачі для гіперболічної системи лінійних рівнянь першого порядку з малим параметром при різних похідних з додатними та від'ємним напрямками характеристик у першій чверті та прямокутнику.

У підрозділі 3.1 в області $\Omega = \{(x,\, t):\ 0 < x, t < \infty\}$ досліджено мішану задачу для гіперболічної системи $n+m$ рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j^\varepsilon + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)v_k^\varepsilon + f_i(x,t;\varepsilon) \quad (i=\overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon\dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)u_j^\varepsilon + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)v_k^\varepsilon + g_s(x,t;\varepsilon) \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,0) = u_i^\varepsilon(0,t) = 0, & x \geqslant 0,\ t \geqslant 0 \quad (i=\overline{1,n}), \\ v_s^\varepsilon(x,0) = 0, & x \geqslant 0 \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{10}$$

де ε – малий додатний параметр. Доведено теорему.

Теорема 3.1. *Нехай для довільного натурального числа N виконуються умови:*
$(\widehat{\mathrm{H}}_1)$ a_{ij}, b_{ik}, γ_{sj}, $\sigma_{sk} \in C^{(N+2)}(\overline{\Omega}$, f_i, $g_s \in C^{(N+2)}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$ $(i,j=\overline{1,n}$, $s,k=\overline{1,m})$*;*
$(\widehat{\mathrm{H}}_2)$ $f_i(0,0;\varepsilon)=0$ $(i=\overline{1,n})$, $g_s(0,0;\varepsilon)=0$ $(s=\overline{1,m})$.
Тоді розв'язок задачі (9),(10) *в області* Ω *допускає асимптотичне розвинення*

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) = \displaystyle\sum_{h=0}^{N}\varepsilon^h\big[\bar u_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau)\big] + R_{iN}^\varepsilon u(x,t) \quad (i=\overline{1,n}), \\ v_s^\varepsilon(x,t) = \displaystyle\sum_{h=0}^{N}\varepsilon^h\big[\bar v_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau)\big] + R_{sN}^\varepsilon v(x,t) \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases}$$

де функції $(\bar u_h, \bar v_h)$ регулярної частини асимптотики та функції примежового шару $(P_h u, P_h v)$ в околі $t=0$ є відомими розв'язками відповідних задач. Для залишкового члена $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$ асимптотичного розвинення правильні оцінки

$$\left|R_{iN}^\varepsilon u(x,t)\right| \leqslant C_{1i}\varepsilon^{N+1}, \left|R_{sN}^\varepsilon v(x,t)\right| \leqslant C_{2s}\varepsilon^{N+1},$$

для всіх $(x,t)\in\Omega$, з незалежними від ε сталими C_{1i}, C_{2s} $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$.

У підрозділі 3.2 в прямокутнику $\Pi_T = \{(t,x):\ 0<t<T,\ 0<x<1\}$ досліджено випадок гіперболічної системи, у якої кутові коефіцієнти характеристик мають різні знаки

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} = a_{11}u^\varepsilon(t,x) + a_{12}v^\varepsilon(t,x) + f(t,x), \\ \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial x} = a_{21}u^\varepsilon(t,x) + a_{22}v^\varepsilon(t,x) + g(t,x), \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} u^\varepsilon(0,x) = \varphi(x),\ \ v^\varepsilon(0,x) = \psi(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u^\varepsilon(t,0) = \mu(t), \quad v^\varepsilon(t,1) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{12}$$

де a_{ij} $(i,j=1,2)$ – сталі коефіцієнти системи. Побудовано асимптотичне розвинення за степенями малого параметра ε класичного розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (11),(12) за таких припущень:

$(\widetilde{\mathrm{H}}_1)$ функції f, g належать до класу $C^\infty(\Pi_T)$; $\varphi,\ \psi \in C^\infty([0,1])$; $\mu,\ \nu \in C^\infty([0,T])$ (порядок гладкості залежить від порядку асимптотики розв'язку);

$(\widetilde{\mathrm{H}}_2)$ виконуються умови погодження нульового та першого порядків даних задачі (11),(12)

$$\varphi(0) = \mu(0), \quad \psi(1) = \nu(0), \quad \mu'(0) = 0, \quad \psi'(1) = 0,$$
$$\varphi'(0) = a_{11}\varphi(0) + a_{12}\psi(0) + f(0,0), \quad \nu'(0) = a_{21}\varphi(1) + a_{22}\psi(1) + g(0,1).$$

Для побудови розвинення розв'язку досліджуваної задачі використано регуляризуючі змінні

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon},\ \ \xi = \frac{x-1}{\varepsilon},\ \ \varsigma = \frac{x-1}{\varepsilon^2} = \frac{\xi}{\varepsilon}.$$

Теорема 3.2. *За виконання умов припущень* $(\widetilde{H}_1)$, $(\widetilde{H}_2)$ *розв'язок задачі* (11),(12) *допускає асимптотичне розвинення:*

$$u^\varepsilon(x,t) = U_0(t,x) + u_0^{(0)}(\tau,x) + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon^k \Big(U_k(t,x) + u_k^{(0)}(\tau,x) + u_k^{(1)}(t,\xi) + u_k^{(2)}(\tau,\varsigma) \Big) + u_3^{(2)}(\tau,\varsigma) + R^u(t,x;\varepsilon),$$

$$v^\varepsilon(x,t) = V_0(t,x) + v_0^{(1)}(t,\xi) + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon^k \Big(V_k(t,x) + v_k^{(0)}(\tau,x) + v_k^{(1)}(t,\xi) + v_k^{(2)}(\tau,\varsigma) \Big) + R^v(t,x;\varepsilon),$$

в якому залишкові члени задовольняють оцінки

$$|R^u(x,t;\varepsilon)| \leqslant C_1\varepsilon^2, \quad |R^v(x,t;\varepsilon)| \leqslant C_2\varepsilon^2,$$

C_1, C_2 *– не залежні від* ε *сталі.*

Зауваження 3.1. Для задачі (11),(12) описано та обґрунтовано асимптотичне розвинення другого порядку класичного розв'язку. Однак, використовуючи запропонований алгоритм побудови асимптотичних наближень розв'язку досліджуваної задачі, можна побудувати асимптотику розв'язку довільного порядку за виконання припущень $(\widetilde{\mathrm{H}}_1)$ та $(\widetilde{\mathrm{H}}_2)$.

У четвертому розділі вивчено зв'язок між розв'язками мішаної задачі для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з однією просторовою змінною, записаної в інваріантах Рімана, та розв'язками відповідної задачі для виродженої системи, тобто системи, у якої відсутні похідні за часовою змінною.

У підрозділі 4.1 у прямокутнику Π досліджено систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \check{u}_i}{\partial t} + \check{\lambda}_i(x,t,\check{u},\check{v})\dfrac{\partial \check{u}_i}{\partial x} = \check{f}_i(x,t,\check{u}(x,t),\check{v}(x,t)), & i \in I, \\ \check{\mu}_j(x,t,\check{u},\check{v})\dfrac{\partial \check{v}_j}{\partial t} + \dfrac{\partial \check{v}_j}{\partial x} = \check{g}_j(x,t,\check{u}(x,t),\check{v}(x,t)), & j \in J, \end{cases} \tag{13}$$

розв'язок якої $(\check{u},\check{v})$ задовольняє умови

$$\begin{cases} \check{u}_i(x,0) = \check{\alpha}_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, & i \in I, \\ \check{u}_i(0,t) = \check{\gamma}_i^0(t,\check{u}(0,t),\check{v}(0,t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, & i \in I_+, \\ \check{u}_i(l,t) = \check{\gamma}_i^l(t,\check{u}(l,t),\check{v}(l,t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, & i \in I_-, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \check{v}_j(x,0) = \check{p}_j(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad j \in J, \\ \check{v}_j(0,t) = \check{\beta}_j(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad j \in J, \end{cases} \tag{15}$$

де $I = \{1,2,\dots,m\}$, $J = \{1,2,\dots,n\}$, $I_+ = \{i:\ \mathrm{sign}(\check{\lambda}_i(0,0,0,0)) = 1\}$, $I_- = \{i:\ \mathrm{sign}(\check{\lambda}_i(l,0,0,0)) = -1\}$, $\check{u}(x,t) = (\check{u}_1(x,t),\dots,\check{u}_m(x,t))$, $\check{v}(x,t) = (\check{v}_1(x,t),\dots,\check{v}_n(x,t))$.

Поряд із задачею (13)–(15) в Π розглянуто задачу для системи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u,v)\dfrac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u(x,t),v(x,t)), & i \in I, \\ \dfrac{\partial v_j}{\partial x} = g_j(x,t,u(x,t),v(x,t)), & j \in J, \end{cases} \tag{16}$$

із початковими і крайовими умовами

$$\begin{cases} u_i(x,0)=\alpha_i(x), & 0\leqslant x\leqslant l, \quad i\in I,\\ u_i(0,t)=\gamma_i^0(t,u(0,t),v(0,t)), & 0\leqslant t\leqslant T, \quad i\in I_+,\\ u_i(l,t)=\gamma_i^l(t,u(l,t),v(l,t)), & 0\leqslant t\leqslant T, \quad i\in I_-,\\ v_j(0,t)=\beta_j(t), & 0\leqslant t\leqslant T, \quad j\in J. \end{cases} \tag{17}$$

Позначимо розв'язок задачі Коші $d\tau/d\xi=\check{\mu}_j(\xi;x,t,\check{\omega})$, $\tau(x)=t$ $(j\in J)$ через $\check{\psi}_j(\xi;x,t,\check{\omega})$ і будемо називати його характеристикою j-го сімейства, що відповідає функції $\check{\omega}=(\check{u},\check{v})$. Через $\varphi_i(\tau;x,t,\omega)$ позначимо характеристики задачі $d\xi/d\tau=\lambda_i(x,t,\omega)$, $\xi(t)=x$ $i\in I$, де $\omega=(u,v)$.

Нехай

$$\begin{aligned}\Theta=\max\Big\{&\max_{i\in I}\max_{[0,l]}|\alpha_i(x)-\check{\alpha}_i(x)|,\max_{i\in I_+}\max_{D^1(T,P_0)}|\gamma_i^0(t,\omega)-\check{\gamma}_i^0(t,\check{\omega})|,\\ &\max_{i\in I_-}\max_{D^1(T,P_0)}|\gamma_i^l(t,\omega)-\check{\gamma}_i^l(t,\check{\omega})|,\max_{i\in I}\max_{D^1(T,P_0)}|f_i(t,\omega)-\check{f}_i(t,\check{\omega})|,\\ &\max_{i\in I}\max_{D(T,P_0)}|\lambda_i(x,t,\omega)-\check{\lambda}_i(x,t,\check{\omega})|,\max_{j\in J}\max_{D(T,P_0)}|g_j(x,t,\omega)-\check{g}_j(x,t,\check{\omega})|,\\ &\max_{j\in J}\max_{D^1(T,P_0)}|\beta_j(t)-\check{\beta}_j(t)|,\max_{j\in J}\max_{D(T,P_0)}|\check{\mu}_j(x,t,\check{\omega})|\Big\}.\end{aligned}$$

Тут $D(T,P_0)$ та $D^1(T,P_0)$ – області визначення відповідних функцій. Для всіх $j\in J$ уведено множини:

$$\begin{aligned}&\Pi_j^I=\{(x,t)\in\Pi:0\leqslant x\leqslant l,\Theta l\leqslant t\leqslant T\};\\ &\Pi_j^{II}=\{(x,t)\in\Pi:0\leqslant x\leqslant l,\max_j\check{\psi}_j(x;0,0,\check{\omega})\leqslant t\leqslant\Theta l\};\\ &\Pi_j^{III}=\{(x,t)\in\Pi:0\leqslant x\leqslant l,0\leqslant t\leqslant\check{\psi}_j(x;0,0,\check{\omega})\};\\ &\Pi_j^{IV}=\{(x,t)\in\Pi:0\leqslant x\leqslant l,\check{\psi}_j(x;0,0,\check{\omega})\leqslant t\leqslant\max_j\check{\psi}_j(x;0,0,\check{\omega})\}.\end{aligned}$$

Правильна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай* $\check{\omega}(x,t)$ *і* $\omega(x,t)$ *– узагальнені розв'язки задач* (13)–(15) *і* (16)–(17), *відповідно, тоді в* Π *правильні оцінки:*

$$\begin{aligned}&1)\quad \|u(x,t)-\check{u}(x,t)\|\leqslant b_1\Theta, && (x,t)\in\Pi,\\ &2)\quad \max_{\Pi_j^I(\check{\omega})}|v(x,t)-\check{v}(x,t)|\leqslant b_2\Theta\exp^{b_3(T-x)}, && (x,t)\in\Pi_j^I,\\ &3)\quad \max_{\Pi_j^{II}(\check{\omega})}|v(x,t)-\check{v}(x,t)|\leqslant b_4\Theta, && (x,t)\in\Pi_j^{II},\end{aligned}$$

$b_i=\mathrm{const}$ $(i=\overline{1,4})$.

Зауваження 4.4. У загальному випадку теорема 4.1 не покриває область Π_j^{IV}. Однак, якщо зробити зміни:

а) $\Pi_j^{II} = \{(x,t) \in \Pi:\ 0 \leqslant x \leqslant l;\ \check{\psi}_j(x;0,0,\check{\omega}) \leqslant t \leqslant \Theta l\}$;

б) множина Π_j^{IV} – пуста,

то отримаємо, що нова область Π_j^{II} поглинає Π_j^{IV}.

Отже розв'язок $u(x,t)$ і $\check{u}(x,t)$ задач (13)–(15) і (16)–(17) буде близьким у всьому прямокутнику Π. Щодо розв'язків $v(x,t)$ і $\check{v}(x,t)$, то для цих функцій існує область Π_j^{III}, яка зменшується зі зменшенням Θ, тобто для цих функцій маємо ефект примежового шару.

У підрозділі 4.4 доведено теорему про неперервну залежність розв'язку нелінійної крайової задачі від вихідних даних для системи $m+n$ рівнянь $(n \geqslant 0,\ m \geqslant 0,\ n+m \geqslant 1)$ у секторі $S = \{(x,t):\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ -kt \leqslant x \leqslant kt\}$ $(T>0,\ k>0$ – сталі)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \lambda(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u(x,t),v(x,t)), \\ \mu(x,t)\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(x,t,u(x,t),v(x,t)), \end{cases} \tag{18}$$

де $u(x,t) = (u_1(x,t),u_2(x,t),\dots,u_m(x,t))$, $v(x,t) = (v_1(x,t),\dots,v_n(x,t))$, $f(x,t,u(x,t),v(x,t)) = (f_1(x,t,u(x,t),v(x,t)),\ \dots\ ,f_m(x,t,u(x,t),v(x,t)))$, $g(x,t,u(x,t),v(x,t)) = (g_1(x,t,u(x,t),v(x,t)),\ \dots\ ,g_n(x,t,u(x,t),v(x,t)))$, $\lambda(x,t) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(x,t),\dots,\lambda_m(x,t)\}$, $\mu(x,t) = \mathrm{diag}\{\mu_1(x,t),\dots,\mu_n(x,t)\}$, причому $\lambda_i(x,t) \neq 0$, $(\lambda_i(-kt,t)+k)(\lambda_i(kt,t)-k) \neq 0$ для всіх $i \in I$, $0 \leqslant \mu_j(x,t) < 1/k$ для всіх $j \in J$, $(x,t) \in S$, де $I = \{1,2,\dots,m\}$, $J = \{1,2,\dots,n\}$.

Для формулювання крайових умов уведено множини індексів, які містять r_1, r_2, r_3 елементів, відповідно: $I_1 = \{i \in I:\ \lambda_i(0,0) < -k\}$, $I_2 = \{i \in I:\ \lambda_i(0,0) > k\}$, $I_3 = \{i \in I:\ -k < \lambda_i(0,0) < k\}$.

Задамо нелінійні крайові умови

$$\begin{cases} u_i(-kt,t) = \gamma_i^-\left(t,(u_s(-kt,t))_{s\in I_1}\right), & i \in I_2 \cup I_3, \\ u_i(kt,t) = \gamma_i^+\left(t,(u_s(kt,t))_{s\in I_2}\right), & i \in I_1 \cup I_3, \\ v_j(-kt,t) = \gamma_j\left(t,(u_s(-kt,t))_{s\in I_1}\right), & j \in J. \end{cases} \tag{19}$$

Припустимо, що функції λ_i, $\mu_j:\ S \to \mathbb{R}$; $f_i,\ g_j : S \times \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, $\gamma_i^+, \gamma:$

$[0,T]\times\mathbb{R}^{r_1}\to\mathbb{R}$, $\gamma_i^-:[0,T]\times\mathbb{R}^{r_2}\to\mathbb{R}$ – неперервні; функції λ_i задовольняють умову Ліпшиця за змінною x, а μ_j – за t; функції f_i, g_j, γ_i^+, γ_i^- мають за (u,v) ріст не більший ніж лінійний; система рівнянь відносно r_1+r_2 невідомих

$$\begin{cases}\alpha_i^0=\gamma_i^-(0,(\alpha_s^0)_{s\in I_1}), & i\in I_2,\\ \alpha_i^0=\gamma_i^+(0,(\alpha_s^0)_{s\in I_2}), & i\in I_1\end{cases}$$

має єдиний розв'язок α_i^0, $i\in I_1\cup I_2$; виконується умова погодження нульового порядку $\gamma_i^-(0,(\alpha_s^0)_{s\in I_1})=\gamma_i^+(0,(\alpha_s^0)_{s\in I_2})$, $i\in I_3$.

Теорема 4.2. *Якщо* $w=(u,v)$ *узагальнений розв'язок задачі* (18)–(19) *і виконуються сформульовані вище умови, то для довільного* $0<M<1$, *такого що*

$$||\lambda||\leqslant M,\quad \max\{||f||,||g||\}\leqslant M(1+|u|+|v|),$$
$$\max\{||\gamma^-||,||\gamma^+||,||\gamma||\}\leqslant M(1+|u|),$$

правильна оцінка $||w||\leqslant K$, *де* $K>0$.

Зауваження 4.6. Одержані оцінки розв'язку задачі (18)–(19) можна використати для побудови асимптотичних розвинень розв'язків сингулярно збурених гіперболічних задач в областях типу криволінійних секторів.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено вивченню сингулярно збурених задач для гіперболічних систем рівнянь із частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними. Задачі для таких систем описують різноманітні математичні моделі природознавства, техніки, економіки, теорії біопопуляцій, оптимального керування тощо.

У роботі одержано такі основні результати:

– встановлено достатні умови глобальної розв'язності сингулярних задач для гіперболічних систем лінійних, напівлінійних та квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними в різних областях;

– побудовано асимптотику розв'язків зі встановленням оцінок залишкових членів мішаних задач із малим параметром за різних похідних для лінійних та напівлінійних гіперболічних систем рівнянь першого порядку;

– побудовано асимптотичне наближення розв'язків мішаних задач для гіперболічних систем рівнянь першого порядку з різними характеристичними напрямками;

– одержано апріорні оцінки розв'язків нелінійних сингулярних задач для одновимірних гіперболічних систем у прямокутнику та секторі;

– доведено теорему про існування ефекту примежового шару в нелінійних мішаних задачах для квазілінійних гіперболічних систем рівнянь першого порядку при переході до вироджених систем.

Ці результати мають теоретичний характер, їх можна використати в теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними, а також під час дослідження прикладних проблем.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Флюд О.* Задача з малим параметром при похідних у гіперболічній системі рівнянь першого порядку / О. Флюд // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2013. – Вип. 78. – С. 135–149.
2. *Флюд О.* Апріорна оцінка розв'язку крайової задачі для виродженої напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку в секторі / О. Флюд // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2013. – Вип. 11. – С. 188–192.
3. *Флюд О. В.* Ефект примежового шару в крайових задачах для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку / О. В. Флюд // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2013. – Вип. 24. – № 2. – С. 214–217.
4. *Флюд О. В.* Задача з малим параметром при похідних у гіперболічній системі лінійних рівнянь першого порядку / О. В. Флюд // Буковинський матем. журнал. – 2014. – Т. 2. – № 1. – С. 130–138.
5. *Флюд О. В.* Задача з малим параметром при похідних у напівлінійній гіперболічній системі рівнянь першого порядку / О. В. Флюд // Буковинський матем. журнал. – 2015. – Т. 3. – № 2. – С. 102–115.
6. *Andrusyak R.* The Two-Phase Problem for One Quasilinear Hyperbolic System / R. Andrusyak, I. Andrusyak, O. Pelyushkevych, O. Flyud // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 5. – № 2. – P. 61–77.
7. *Flyud O.* On a Singularly Perturbed System of First-Order Partial Differential Equations / O. Flyud // Open Sciense Journal of Mathematics and Aplication. – 2015. – Vol. 3. – № 3. – P. 58–65.
8. *Кирилич В. М.* Ефект примежового шару для сингулярних гіперболічних систем / В. М. Кирилич, О. В. Флюд // Всеукр. наук. конф. "Застосування математичних методів в науці і техніці" : зб. тез доп., Луцьк,

25–26 листопада 2011 р. – Луцьк, 2011. – С. 36–37.

9. *Флюд О.* Про одну задачу з малим параметром при похідних у гіперболічній системі / О. Флюд // Чотирнадцята міжн. наук. конф. імені академіка М. Кравчука : матер. конф., Київ, 19–21 квітня 2012 р. – К. : НТУУ "КПІ", 2012. – С. 424.
10. *Flyud O.* Singularly Perturbed Mixed Boundary Value Problem For the System of Hyperbolic Equation of the First Order / O. Flyud // Intern. Conf. dedicated to the 120th Anniversary of Stefan Banach: Abstracts of Reports, 17–21 September 2012, Lviv. – Lviv, 2012. – P. 191.
11. *Флюд О.* Асимптотика розв'язку напівлінійної гіперболічної системи рівнянь з малим параметром / О. Флюд // Міжн. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування" : матер. конф., Ужгород, 27-29 вересня, 2012 р. – Ужгород, 2012. – С. 81.
12. *Флюд О.* Задача з малим параметром при похідних гіперболічної системи напівлінійних рівнянь / О. Флюд // Fourth Intern. Conf. for Young Mathematics on Diff. Eq. and Appl. dedicated to Ya. B. Lopatynskii : Book of abstracts, November 14–17, 2012, Donetsk, Ukraine. – Donetsk, 2012. – P. 86.
13. *Флюд О. В.* Мішана задача для напівлінійної гіперболічної системи в секторі з малим параметром при похідних по часу / О. В. Флюд // V всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу" : тези доп., Івано-Франківськ, 19–21 вересня 2013 р. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 77.
14. *Флюд О. В.* Задача з малим параметром при похідних у гіперболічній системі лінійних рівнянь першого порядку у півсмузі / О. В. Флюд // П'ятнадцята міжн. наук. конф. імені академіка М. Кравчука : матер. конф., Київ, 15–17 травня 2014 р. – К. : НТУУ КПІ, 2014. – С. 318.
15. *Флюд О. В.* Примежовий шар у мішаній задачі для виродженої гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку / О. В Флюд // Міжн. конф. молодих математиків, 3–6 червня 2015 р., Київ – Інститут математики НАН України, 2015. – С. 172.
16. *Флюд О. В.* Примежовий шар у мішаних задачах для вироджених гіперболічних систем квазілінійних рівнянь першого порядку / О. В Флюд // Конф. молодих учених "Підстригачівські читання – 2015", Львів, 26–28

травня 2015 р. – Львів, 2015. – С. 318.

17. *Flyud O. V.* Singularly Perturbed Mixed Boundary Value Problem for the Semilinear System of Hyperbolic Equations of the First Order / O. V. Flyud // International V. Skorobohatko mathematical conference, August 25–28, 2015, Drohobych, Ukraine. – P. 43.
18. *Флюд О. В.* Асимптотика розв'язку напівлінійної гіперболічної системи рівнянь з малим параметром / О. В. Флюд // Міжн. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування" присвячена 70-річчю академіка НАН України М. О. Перестюка, Ужгород, 19–21 травня 2016 р. – Ужгород : Вид-во УжНУ "Говерла", 2016. – С. 126.

АНОТАЦІЯ

Флюд О. В. Мішана задача для сингулярно збурених гіперболічних систем рівнянь першого порядку. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.– Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2016.

У дисертаційній роботі розглянуто сингулярно збурені мішані задачі для гіперболічних систем лінійних, напівлінійних та квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними, у яких малий параметр присутній при похідних за часовою та просторовою змінними.

Побудовано асимптотичне наближення розв'язку мішаної задачі для гіперболічної системи лінійних рівнянь першого порядку з малим параметром при похідних за просторовою та часовою змінними. Доведено теорему про глобальну класичну розв'язність задачі з ортогональними характеристиками для напівлінійної одновимірної гіперболічної системи рівнянь першого порядку. Побудовано асимптотичне розвинення розв'язку сингулярно збуреної задачі для одновимірної напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з малим параметром при похідних. Також побудовано асимптотичне розвинення розв'язку задачі з малим параметром при похідних з різними нахилами характеристик у першій четверті та прямокутнику. Для побудованих асимптотичних розвинень розв'язків досліджуваних мішаних задач доведено їх коректність. Обґрунтовано ефект примежового шару для нелінійної міша-

ної задачі у випадку переходу від гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку до виродженої системи.

Ключові слова: гіперболічна система, сингулярно збурена мішана задача, асимптотичне розвинення розв'язку, примежовий шар.

АННОТАЦИЯ

Флюд О. В. Смешанные задачи для сингулярно возмущенных гиперболических систем уравнений первого порядка. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2016.

В диссертации рассмотрены сингулярно возмущенные смешанные задачи для гиперболических систем линейных, полулинейных и квазилинейных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными, в которых малый параметр присутствует при производных по временной и пространственной переменных.

Построено асимптотическое приближение решения смешанной задачи для гиперболической системы линейных уравнений первого порядка с малым параметром при производных по пространственной и временной переменных. Доказана теорема о глобальной обобщенной разрешимости задачи с ортогональными характеристиками для полулинейной одномерной гиперболической системы уравнений первого порядка. Построено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи для полулинейной гиперболической системы уравнений первого порядка с малым параметром при производных. Также построено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи с разными наклонами характеристик в первой четверти и прямоугольнике. Для построенных асимптотических разложений решений исследованных смешанных задач доказана их корректность. Доказана теорема об оценках разности обобщенного решения смешанной задачи в прямоугольнике для гиперболической системы квазилинейных уравнений первого порядка и соответствующей вырожденной задачи для системы, у которой отсутствует производная по времени. Обосновано эффект пограничного слоя для нелинейной смешанной задачи для гиперболической системы квазилинейных уравнений первого порядка при переходе к вырожденным. Доказана теорема о непрерывной зависимости обобщенного решения нелинейной смешанной задачи для гиперболической системы в секторе. Полученный результат может быть использован при построении асимптотического разложения решений смешанных задач для гиперболических систем в секторальных областях.

Ключевые слова: гиперболическая система, сингулярно возмущенная смешанная задача, асимптотическое разложение решения, пограничный слой.

SUMMARY

Flyud O. V. Mixed Problem for Singularly Perturbed Hyperbolic Equations of the First Order. – Manuscript.

The dissertation for the Doctor's Degree of Sciences in Physics and Mathematics by specialty 01.01.02 – Differential Equations. – Ivan Franko National University of Lviv, 2016.

The thesis enlightens mixed singularly perturbed problems for hyperbolic systems of linear, semilinear and quasilinear equations of the first order with two independent variables with a small parameter in the derivatives in time and space variables. We construct asymptotic approximation solution for the mixed problem for a hyperbolic system of linear equations of the first order with a small parameter in the derivatives of the spatial and temporal variables. The theorem on global solvability of classic problem with orthogonal characteristics for semi one-dimensional hyperbolic system of equations of the first order is proved. We construct the asymptotic expansion of the resolving problems for singularly perturbed one-dimensional semilinear hyperbolic system of equations of the first order with a small parameter in the derivatives. The asymptotic expansions is also constructed and the error term solution of the problem with a small parameter in the derivatives with different characteristic tendencies in the in the first quarter and a rectangle is estimated. The boundary layer effect for nonlinear mixed problem for hyperbolic systems degenerate quasi-linear equations of the first order is grounded.

Keywords: Hyperbolic System, Boundary Value Problem, Singular Perturbed, Asymptotic Expansions, Boundary Layer Function.