МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

ФЛЮД ОКСАНА ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 517.956

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник :
Кирилич Володимир Михайлович
доктор фіз.-мат. наук, професор

Львів 2016

Зміст

Перелік умовних позначень

$\mathbb{R}$	–	множина дійсних чисел;
$\mathbb{R}_-$	=	$\{x \in \mathbb{R}:\ x \leqslant 0\}$;
$\mathbb{R}_{--}$	=	$\{x \in \mathbb{R}:\ x < 0\}$;
$\mathbb{R}_+$	=	$\{x \in \mathbb{R}:\ x \geqslant 0\}$;
$\mathbb{R}_{++}$	=	$\{x \in \mathbb{R}:\ x > 0\}$;
$\|\| \cdot \|\|$	–	норма в просторі $\mathbb{R}^n$ у сенсі максимумів компонент;
$C(\Omega)$	–	простір неперервних функцій на множині Ω;
$C^1(\Omega)$	–	простір неперервно диференційовних функцій на множині Ω;
$\mathrm{Lip}(\Omega)$	–	простір функцій ліпшицевих за всіма аргументами на множині Ω;
ε	–	додатний малий параметр;
ξ	–	регуляризуюча змінна в околі межі $x = 0$ області Ω;
τ	–	регуляризуюча змінна в околі межі $t = 0$ області Ω;
ω	=	(u, v) – вектор з компонентами u і v;
$\psi_j[\omega](\xi)$	=	$\psi_j(\xi; x, t, \omega)$ – характеристика, яка розглядається як функція змінної ξ;
$\varphi_i[\omega](\tau)$	=	$\varphi_i(\tau; x, t, \omega)$ – характеристика, яка розглядається як функція змінної τ;
$\chi_i(\omega)$	=	$\chi_i(x, t, \omega)$ – ордината точки перетину характеристики з межею області;
$P_h u(x, \tau)$	–	функція примежового шару в околі $t = 0$;
$Q_h u(\xi, t)$	–	функція примежового шару в околі $x = 0$;
$U^N(x, t; \varepsilon)$	–	частинна сума асимптотики розв'язку порядку N;
$R_N^\varepsilon(x, t)$	–	залишок асимптотичного розвинення розв'язку;
$\sim$	–	наближення розв'язку скінченою сумою членів асимптотичного розвинення;
$\square$	–	кінець доведення твердження (леми, теореми);

У роботі використовується подвійна нумерація формул відповідно до кожного розділу, де перша цифра означає номер розділу, а після крапки –

порядкова формула у даному розділі. Крім того, при посиланні на деякі рівняння системи чи умови задачі, використано потрійну нумерацію – після порядкового номера формули буквою позначається рівняння системи. Причому, посилання без букви означає посилання на систему в цілому. Наприклад, посилання на задачу (2.57) означає посилання на рівняння (2.57a) при умовах (2.57b).

Вступ

Актуальність теми. Теорія сингулярно збурених диференціальних рівнянь є важливим розділом сучасної математики, оскільки такі рівняння часто використовують як математичні моделі у багатьох галузях сучасного природознавства та техніки і є цікавим об'єктом для дослідження. Наявність малого параметра при старших похідних чи частині старших похідних відображає певні специфічні фізичні властивості досліджуваних явищ і процесів, але за цього суттєво ускладнює їх вивчення.

Найбільш поширеними методами дослідження подібних задач є асимптотичні методи, які дають змогу будувати асимптотичні розв'язки згаданих задач, встановлювати оцінки точності отриманих наближених розв'язків та вивчати якісні властивості розв'язків досліджуваних рівнянь.

Теорія асимптотичних методів в останні два століття отримала бурхливий розвиток, результатом якого стало створення низки асимптотичних методів, які підтвердили свою ефективність під час вивчення багатьох різноманітних прикладних задач.

Серед класичних методів сучасного асимптотичного аналізу насамперед потрібно згадати метод усереднення М. М. Боголюбова і асимптотичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського, результати пріоритетного характеру з розвитку яких належать українським математикам (М. М. Боголюбов, Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко, О. Б. Ликова, І. О. Парасюк, М. О. Перестюк, В. Г. Самойленко та ін.). Ці методи виявилися дуже ефективними при розв'язанні низки важливих практичних задач з регулярним збуренням.

Сингулярно збурені задачі є більш складними, ніж задачі з регулярним збуренням. Тому під час вивчення таких задач значну увагу приділено дослідженню як лінійних задач із сингулярним збуренням, в розвиток асимптотичних методів аналізу яких значний вклад внесли С. О. Ломов, М. І.Шкіль, Н. В. Федорюк, А. М. Самойленко, С. Г. Крейн, В. П. Яковець, О. А. Бойчук, Г. С. Жукова, Л. Каранджулов, К. С. Чернишов та інші, так і нелінійних.

Аналіз літератури засвідчує, що найбільш дослідженими є сингулярно збурені крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь та систем, а також крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного і параболічного типів.

Серед асимптотичних методів, які найчастіше використовують для вивчення сингулярно збурених нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, варто виділити метод ВКБ та його узагальнення на нелінійні задачі (R. Miura, M. D. Kruskal, В. П. Маслов, С. Ю. Доброхотов, Г. О. Омельянов, В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко), метод Люстерника-Вішика (А. Б. Васильєва, В. Ф. Бутузов, В. А. Треногін та ін.), метод примежових функцій (А. Б. Васильєва, В. Ф. Бутузов, А. Д. Мишкіс, В. А. Треногін, К. А. Касімов, В. М. Цимбал та ін.).

Варто також згадати про те, що методи класичної теорії усереднення широко використовують для вивчення задач у перфорованих областях для диференціальних рівнянь з частинними похідними різного типу чи операторів зі швидкозмінними коефіцієнтами. Важливі результати у цьому напрямі отримали М. С. Бахвалов, Ю. Д. Головатий, В. В. Жиков, В. О. Марченко, Т. А. Мельник, С. О. Назаров, О. А. Олійник, А. Л. Пятницький, І. В. Скрипник, Є. Я. Хруслов, Г. А. Чєчкін, П. Донато, Ж.-Л. Ліонс, Е. Санчес-Паленсія та ін.

Огляд наукової літератури свідчить, що теорія гіперболічних рівнянь і систем та розвиток методів їх дослідження є актуальним розділом сучасної теорії диференціальних рівнянь і мають широку сферу застосувань. Зауважимо, що для гіперболічних систем достатньо детально вивчено питання існування глобальних гладких розв'язків, які є наслідками деяких інтегральних законів збереження, та певні властивості розв'язків таких задач.

Хоча дослідженню асимптотики розв'язків мішаних задач для гіперболічних рівнянь і систем з малим параметром приділено значну увагу – важливі результати з цього напряму отримали В. М. Бабич, В. Ф. Бутузов, А. Б. Васильєва, М. Г. Джавадов, А. Ф. Каращук, К. А. Касімов, Д. С. Лапін, В. Ю. Ляпідевський, А. Д. Мишкіс, О. А. Олійник, І. О. Рассказов, Ю. І. Самойленко, А. М. Філімонов, В. М. Цимбал, А. Джефрі, Т. Кавахара, Дж. Кеворкян та інші, однак до сьогодні залишалися ще не достатньо вивченими задачі для сингулярно збурених гіперболічних рівнянь у випадку, коли малий параметр міститься лише при частині старших похідних.

У цій роботі запропоновано єдиний підхід до дослідження мішаних задач для лінійних та нелінійних гіперболічних систем, у яких малий параметр

ε у частині рівнянь системи є множником при похідних за t, а в решти рівнянь – за просторовою похідною, тобто вироджена задача має ортогональні до осей координат характеристики. Деякі часткові випадки подібних сингулярних задач розглядали А. Д. Мишкіс та О. Маулєнов, В. Ф. Бутузов та А. Ф. Каращук.

Тому вивчення згаданих вище сингулярно збурених гіперболічних задач є актуальною темою математичних досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано відповідно до плану наукових досліджень кафедри диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка в рамках науково-дослідної теми "Дослідження нелінійних задач для диференціальних операторів" (номер держреєстрації 0111U004540).

Мета і завдання дослідження. Головною метою дослідження є вивчення асимптотичної поведінки розв'язків сингулярно збурених мішаних задач для гіперболічних систем лінійних, напівлінійних та квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними та малим параметром при похідних за часовою і просторовою змінними.

Завданнями дисертаційного дослідження є:

1) визначити достатні умови глобальної класичної розв'язності мішаних задач для нелінійних гіперболічних систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними та ортогональними характеристиками;

2) побудувати асимптотику розв'язків зі встановленням оцінок залишкових членів мішаних задач з малим параметром при різних похідних для лінійних та напівлінійних гіперболічних систем рівнянь першого порядку;

3) побудувати асимптотичне наближення розв'язків мішаних задач для гіперболічних систем рівнянь першого порядку з різними характеристичними напрямами;

4) дослідити ефект примежового шару в нелінійних мішаних задачах для вироджених гіперболічних систем квазілінійних рівнянь першого порядку.

Об'єктом дослідження є сингулярно збурені мішані задачі для гіперболічних систем лінійних, напівлінійних та квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними.

Предмет дослідження – асимптотична поведінка розв'язків мішаних задач для гіперболічних систем рівнянь першого порядку з малим параметром при похідних за часовою та просторовою змінними.

Методи досліджень. Для розв'язання сформульованих задач дисертаційної роботи використано результати і методи асимптотичного аналізу дослідження рівнянь з частинними похідними, метод характеристик (при зведенні мішаних задач до еквівалентних систем інтегро-функціональних рівнянь), апріорних оцінок, метод примежових шарів.

Наукова новизна одержаних результатів. Для сингулярно збурених мішаних задач для гіперболічних систем рівнянь першого порядку з малим параметром при похідних за часовою та просторовою змінними отримано такі нові результати:

1) побудовано та обґрунтовано асимптотичне наближення розв'язку мішаної задачі для гіперболічної системи лінійних рівнянь першого порядку з малим параметром при похідних за часовою та просторовою змінними;

2) доведено теорему про глобальну узагальнену розв'язність задачі з ортогональними характеристиками для напівлінійної одновимірної гіперболічної системи рівнянь першого порядку;

3) побудовано та доведено коректність асимптотичного розвинення розв'язку сингулярно збуреної задачі для одновимірної напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з малим параметром при похідних;

4) побудовано та обґрунтовано оцінку залишку асимптотичного розвинення розв'язку задачі з малим параметром при похідних з різними нахилами характеристик у першій четверті та прямокутнику;

5) обґрунтовано ефект примежового шару для нелінійної мішаної задачі при переході від гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку до виродженої системи.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і є внеском в теорію сингулярно збурених задач із застосуванням у фізиці, механіці, хімічних процесах обміну, теорії транспортних потоків, розповсюдження паводкових хвиль тощо, а також можуть бути використані в теорії наближених обчислень.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації одержані автором самостійно. У роботі [103] співавторам належить аналіз та обговорення результатів на наукових семінарах.

Апробація результатів роботи. Результати дисертації апробовані на наукових семінарах та конференціях:

– семінарах кафедри математичної економіки та економетрії Львського національного університету імені Івана Франка ”Некласичні задачі для гіперболічних систем” (керівники: проф. Кирилич В. М., доц. Андрусяк Р.В.);

– науково-дослідницькому семінарі з диференціальних рівнянь у Львівському національному університеті імені Івана Франка (керівник: проф. Бокало М. М., доц. Бугрій О. М., доц. Головатий Ю. Д.);

– Львівських міських семінарах із диференціальних рівнянь (керівники: член-кор. НАН України, проф. Пташник Б. Й., проф. Іванчов М. І., проф. Каленюк П. І.);

– Всеукраїнській науковій конференції ”Застосування математичних методів в науці і техніці”, Луцьк, 25-26 листопада 2011 року;

– XIV Міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 19-21 квітня 2012 року;

– International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, Lviv, 17-21 September 2012;

– Міжнародній науковій конференції ”Диференціальні рівняння та їх застосування”, Ужгород, 27-29 вересня, 2012 року;

– Fourth International Conference for Young Mathematics on Differential Equation and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynskii, Donetsk, 14-17 November 2012;

– V Всеукраїнській науковій конференції ”Нелінійні проблеми аналізу”, Івано-Франківськ, 19-21 вересня 2013 року;

– XV Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 15-17 травня 2014 року;

– Конференції молодих учених ”Підстригачівські читання – 2015”, Львів, 26-28 травня 2015 року;

– Міжнародній конференції молодих математиків Інституту математики НАН України, Київ, 3-6 червня 2015 року;

– International V. Skorobohatko mathematical conference, Drohobych, 25-28, August, 2015;

– Міжнародній науковій конференції ”Диференціальні рівняння та їх застосування”, присвяченій 70-річчю академіка НАН України М. О. Перестюка, Ужгород, 19-21 травня 2016 року.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 7 наукових працях у фахових періодичних виданнях, з них дві в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз та додатково висвітлені в 11 тезах матеріалів наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації охоплює 150 сторінок, з них список використаних джерел містить 15 сторінок і налічує 146 найменувань.

Розділ 1

Огляд літератури

1.1. Сингулярно збурені мішані задачі для рівнянь із частинними похідними

Предметом дослідження даної роботи є мішані задачі для сингулярно збурених лінійних та нелінійних гіперболічних систем. А саме, задачі для гіперболічних систем лінійних та квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними у різних областях, початково-крайові задачі з малим параметром при різних похідних для лінійних та напівлінійних гіперболічних систем рівнянь першого порядку, зокрема, з різними характеристичними напрямками, одновимірні гіперболічні систем в прямокутнику та секторі, нелінійні мішані задачі для вироджених квазілінійних гіперболічних систем рівнянь першого порядку.

Багато прикладних задач фізики, механіки, техніки, хімії та біології моделюють за допомогою диференціальних рівнянь, які містять малі або великі параметри і називають їх збуреними рівняннями. Залежно від характеру збурення такі задачі розділяють на регулярно збурені й сингулярно збурені. Математичні основи регулярної теорії збурень підсумовані, наприклад, у монографії Т. Като [32].

Дослідження сингулярно збурених задач в порівнянні з регулярно збуреними задачами є значно складнішим. У таких випадках вироджена задача належить до іншого типу, ніж вихідна, із значно іншими якісними властивостями [18].

Фундаментальні роботи А. Т. Тихонова [80], В. А. Треногіна [82], А. Найфе [64], А. В. Васильєвої та В. Ф. Бутузова [18], присвячені теорії нелінійних звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром дали потужний імпульс інтенсивному розвиткові теорії сингулярних збурень для рівнянь з частинними похідними першого порядку, які мають численні застосування.

Наприклад, гіперболічна система [142]

$$\begin{cases} \varepsilon\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+a\,u+b\,v=f(x,\,t), \\ \varepsilon\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+c\,u+d\,v=g(x,\,t), \end{cases}$$

із початковими умовами $u(x,\,0;\varepsilon)=u_0(x)$, $v(x,\,0;\varepsilon)=v_0(x)$, $(-\infty<x<+\infty)$, де ε – малий додатний параметр, $f(x,\,t)$, $g(x,\,t)$, $u_0(x)$, $v_0(x)$ – відомі достатньо гладкі функції, a, b, c, d – деякі сталі, за певних умов на коефіцієнти та праві частини системи в різних випадках описує коливання струни у сильно в'язкій рідині, проходження струму в провіднику із великим опором, поширення випромінювання через сильно абсорбне середовище.

Розглянемо електричний замкнутий контур, що складається із опору, ємності та зовнішнього джерела, яке з'єднано паралельно з конденсатором. Приймемо, що довжина провідника між опором та ємністю, дорівнює 1. Якщо через $u(x,t)$ позначити силу струму в момент часу t у точці x на контурі, а через $v(x,t)$ – різницю потенціалів у момент часу t у точці x на двох паралельних провідниках контура, тоді відомо [104], що u та v задовольняють телеграфну систему рівнянь виду

$$\begin{cases} Lu_t+v_x+ru=E(x,t), \\ Cv_t+u_x+gv=0, \end{cases}$$

де r, g, L, C означають, відповідно, опір, електропровідність, індуктивність та електроємність на одиницю довжини, в той час як E є напруга на одиничному відрізку, індукована в послідовно замкнутому контурі. Не зменшуючи загальності, покладемо $C=1$, а L перепозначимо через ε, вважаючи, електроємність малим додатним параметром, який прямує до нуля. Відомо, що ємність у контурі є малою, якщо, відповідно, частота є малою. Додаючи до описаної системи початкові та крайові умови, одержимо крайову задачу із малим параметром при похідній у рівнянні гіперболічної системи. Розглядаючи різні крайові умови, матимемо інші різні моделі електричних кіл із малою ємністю, що описуються за допомогою сингулярно збуреної системи гіперболічного типу [104], тобто у $D_T=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2;\ 0<x<1,\ 0<t<T\}$

маємо телеграфну систему рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon u_t + v_x + ru = f_1(x,t), \\ v_t + u_x + gv = f_2(x,t) \end{cases} \tag{1.1}$$

із початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{1.2}$$

та нелінійними крайовими умовами

$$\begin{cases} r_0 u(0,t) + v(0,t) = 0, \\ u(1,t) - kv_t(1,t) = f_0(v(1,t)) + e(t), \quad 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{1.3}$$

Задача (1.1)-(1.3) є моделлю проходження струму в електричному замкнутому контурі.

Поширення тепла в пористих тілах описує гіперболічне рівняння теплопровідності [28, 49, 50]

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

де τ_r – час релаксації, є малим параметром.

У роботі Дж. Уізема [83] розглянуто рівняння із сталими коефіцієнтами, малим параметром в якому виступає $\eta > 0$

$$\eta \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi + \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = 0,$$

що може з точністю до позначень описувати транспортні потоки, паводкові хвилі, хімічні процеси обміну тощо.

Математичні моделі багатьох прикладних проблем часто приводять до сингулярно збурених рівнянь з частинними похідними, зокрема, в задачах Нав'є-Стокса при малій в'язкості середовища [60], в задачах хімічної кінетики [11], або гідродинаміці [68] (сингулярно збурена мішана задача гіперболічного типу).

Багато інших прикладних задач, які зводяться до сингулярно збурених рівнянь та систем гіперболічного типу досліджено також у [9, 16, 18, 23, 24, 33, 41–46, 59, 69, 76, 83, 84, 101, 112, 116, 125, 130, 131, 134, 145].

Задачі, що одержані із сингулярно збурених при спрямуванні малого параметра до нуля тут і надалі називатимемо також виродженими задачами.

Дослідженням сингулярно збурених крайових задач займалось чимало вітчизняних та зарубіжних учених. Ці задачі досліджувалися різними підходами та різноманітними методами, наприклад, побудова асимптотики розв'язку задачі, знаходження умов при яких розв'язок вихідної задачі прямує до розв'язку виродженої задачі при спрямуванні малого параметра до нуля тощо.

Зокрема, робота Б.Н. Панайоті [66] є однією з перших робіт, у яких досліджувався зв'язок між сингулярно збуреною гіперболічною задачею та відповідною їй виродженою задачею. Поведінка розв'язку початкових задач для деяких сингулярно збурених задач при малому значенні параметра вивчалися у працях [24, 108].

Асимптотичний зв'язок між задачею для сингулярно збуреного нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку та відповідним параболічним виродженням, одержаного при спрямуванні малого параметра до нуля у вихідній задачі, досліджено у праці [129]. Сингулярно збурена гіперболічна система чотирьох рівнянь першого порядку з параболічним виродженням розглядається в роботі [135].

Двовимірним та багатовимірним подібним рівнянням гіперболічного типу присвячені роботи [61, 67, 109, 138, 146].

Випадок виродження гіперболічного рівняння другого порядку з двома і більше незалежних змінних у рівняння гіперболічного типу першого порядку розглядала Л. Блондель у своїх працях [106,107]. За умови, що характеристика гіперболічного рівняння першого порядку, випущена з деякої точки на межу задання початкових умов, лежить між характеристиками оператора другого порядку, випущених з тієї ж точки на ту ж межу, встановлено що розв'язки вихідної задачі та виродженої збігаються при спрямуванні малого параметра до нуля.

У випадку параболічного виродження і виродження у звичайне диференціальне рівняння субхарактеристика (характеристика виродженого рівняння) є функцією часу [42, 122, 126]. Нелінійний випадок такого виродження розглядався у роботі [123].

Задача Коші для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами досліджувалася у роботах Д. Сміта та Дж. Пальмера [141, 142]. Нелінійний випадок розглядали А. К. Касімов та Е. У. Медеуов у праці [31].

При вивчені сингулярно збурених початкових гіперболічних задач крім дослідження питання граничного переходу у [125], досліджується, наприклад, побудова повного асимптотичного розвинення розв'язку задачі Коші для одного сингулярно збуреного рівняння, що вироджується у рівняння теплопровідності. Асимптотичне розвинення деякої початкової задачі для двовимірного гіперболічного рівняння з малим параметром, що вироджується у параболічне, Н.М. Кабацій і І.І. Маркуш дослідили в замітці [29].

Багатовимірні початкові задачі для сингулярно збурених гіперболічних рівнянь, коефіцієнти яких залежали від однієї змінної із параболічним виродженням, досліджували М. Зламал [146] та Й. Недома [138].

С. А. Ломов і А. Г. Єлісєєв [48] запропонували метод регуляризації сингулярно збурених задач з допомогою переходу в простір більшої розмірності та зміни вихідного сингулярно збуреного оператора на регулярний оператор. Метод С. А. Ломова застосовують для широкого класу задач для рівнянь з частинними похідними.

Випадок квазілінійних, слабо нелінійних і нелінійних гіперболічних рівнянь з малим параметром при другій похідній за часом розглянуто в працях Ж. Хзіао і Р. Вейнахта [125]. У роботах [131–133] розглядалися гіперболічні задачі з малим параметром у початкових умовах.

Окремо наголосимо на вивчені асимптотичних розв'язків регулярно та сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза [128, 136], відповідно,

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = \varepsilon f(u)$$

та

$$u_t + uu_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0,$$

для яких клас точних розв'язків побудовано у явному вигляді методом оберненої задачі розсіювання [65]. Задачі про побудову асимптотичних розв'язків для нелінійних сингулярно збурених рівнянь з частинними похідними досліджувалися у багатьох працях, використовуючи методику В. П. Маслова, описану, наприклад, у праці [51]. Грунтовне дослідження побудови асимптотичних солітоноподібних розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза та обширний огляд літературних джерел із цієї тематики наведено в роботах Ю. І. Самойленко [78].

Дослідження періодичних розв'язків та їх експоненціально орбітальної стійкості для збурених малим параметром рівнянь з частинними похідними другого порядку та їх застосування для періодичних режимів систем із запізненням і рівнянь спінового горіння присвячені праці І. І. Клевчука [39,40].

Асимптотичні методи для регулярно і сингулярно збурених функціональних рівнянь розглядались також в роботах [71,100].

1.2. Метод примежового та кутового шарів побудови асимптотичного розвинення розв'язку сингулярно збурених мішаних задач для рівнянь та систем із частинними похідними

Однією із складних проблем в теорії сингулярно збурених задач для рівнянь з частинними похідними є побудова асимптотичних розвинень за малим параметром розв'язків вказаних задач. Розв'язки асимптотично збурених задач для диференціальних рівнянь з малим параметром при старших похідних залежить від параметру як регулярним, так і сингулярним чином.

Сутність асимптотичного методу малого параметру полягає в тому, щоб відділити ці залежності одна від іншої, побудувати рівномірні асимптотичні наближення.

Серед асимптотичних методів, створених для застосування до сингулярно збурених задач з примежовим характером розв'язків, потрібно відзначити досить афективний метод примежових функцій, запропонований М. І. Вішиком і Л. А. Люстерником [21,22] для сингулярно збурених лінійних диференціальних рівнянь, який далі розвинули А. Б. Васильєва та В. Ф. Бутузов [17,18], М. І. Іманалієв [27], В. А. Треногін [81,82] та ін. В. Ф. Бутузов [11] розробив метод кутових примежових функцій, який став суттєвим узагальненням і розвитком методу примежових функцій. Цей метод можна застосовувати до сингулярно збурених задач з двома і більше дотичними крайовими межами для рівнянь з частинними похідними.

При вивчені мішаних задач для рівнянь чи систем вищого порядку, коли швидкі змінні або похідні від повільних змінних на лінії задання початкових умов є наближеними при $\varepsilon \to 0$, дослідження сингулярно збурених задач не піддається наведеному вище методу Люстерника-Вішика. Характерною особливістю таких задач є те, що розв'язок невиродженої задачі при $\varepsilon \to 0$ прямує до розв'язку виродженого рівняння, але вже із зміненою початковою умовою, тобто має місце явище початкового стрибка. Найбільш загальні випадки такого типу задач для гіперболічних рівнянь і систем одержав К. А. Касімов [31] та Б. М. Кадикенов [30].

Серед сингулярно збурених мішаних задач для гіперболічних систем особливий теоретичний інтерес мають задачі з двома і більше дотичними межами, для яких метод розроблений для задач з однією межею не працює. У працях В. Ф. Бутузова [10–12, 18] досліджено сингулярно збурені мішані задачі з двома і більше дотичних границь для рівнянь з частинними похідними усіх типів за допомогою названого ним методу кутових примежових функцій. Розширення та узагальнення методу кутових примежових функцій знайшло у роботах К. А. Касімова і Б. М. Кадикенова [30, 31].

Багато сингулярно збурених мішаних гіперболічних задач розглядають в областях з кутовими точками [22, 49]. В околі точки дотику двох меж виникає явище кутового примежового шару, для якісного опису якого не достатньо методу примежових функцій. Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків таких задач в околах кутових точок вимагає методу, суть якого полягає в тому, що для розгляду примежового шару в околах кутових межових точок вводяться спеціальні функції, які називають кутовими примежовими функціями і відіграють суттєву роль при асимптотичному представлені розв'язку в околах цих кутових точок [22].

Одними з перших робіт, присвячених гіперболічним змішаним сингулярно збуреним задачам, розв'язки яких мають примежовий шар, були [10, 79, 82]. Зазначимо, що для подібних задач для параболічних і еліптичних рівнянь є значно більше літературних джерел.

Спираючись на результати В. Ф. Бутузова [10], покажемо використання методу побудови асимптотики розв'язку із застосуванням кутових примежових функцій для деяких задач для сингулярно збурених гіперболічних рівнянь першого порядку.

Розглянемо, як приклад, задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+a(x,t)u=f(x,t),\quad (0<x\leqslant l,\ 0<t\leqslant T),\tag{1.4}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad v(0,t)=\omega(t).\tag{1.5}$$

Нехай $\varepsilon>0, a(x,t)>0, a(x,t), f(x,t), \varphi(x), \omega(t)$ – достатньо гладкі функції та виконані умови погодження

$$\varphi(0)=\omega(0),\quad \varphi'(0)+\omega'(0)=0,\quad a(0,0)\varphi(0)=f(0,0).\tag{1.6}$$

Тоді існує єдиний розв'язок $u(x,t,\varepsilon)$ задачі (1.4)–(1.5), який має неперервні частинні перші похідні. Для такого розв'язку можна побудувати асимптотичне розвинення

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i [\bar{u}_i(x,t) + \Pi_i(x,\tau) + Q_i(\xi,t) + P_i(\xi,\tau)],$$

де $t = \varepsilon\tau, \quad x = \varepsilon\xi, \quad \Pi_i, Q_i$ – звичайні, а P_i – кутові примежові функції.

Рівняння для головних членів асимптотики мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&a(x,t)\bar{u}_0 = f(x,t);\\
&\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} + a(x,0)\Pi_0 = 0, \quad \Pi_0(x,0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x,0);\\
&\frac{\partial Q_0}{\partial \xi} + a(0,t)Q_0 = 0, \quad Q_0(0,t) = \omega(t) - \bar{u}_0(0,t);\\
&\frac{\partial P_0}{\partial \xi} + \frac{\partial P_0}{\partial \tau} + a(0,0)P_0 = 0, \quad P_0(\xi,0) = -Q_0(\xi,0), P_0(0,\tau) = -\Pi_0(0,\tau).
\end{aligned}$$

Розв'язки цих рівнянь, а також рівнянь для наступних членів асимптотики легко можна виписати у явному вигляді [6, 10]. При цьому кутові примежові функції $P_i(\xi,\tau)$ задовольняють відповідні умови погодження виду (1.6), які забезпечують існування розв'язків з неперервними першими похідними. Очевидно, що $P_0(\xi,\tau) \equiv 0$, але вже $P_1(\xi,\tau) \neq 0$. Всі функції Π_i, Q_i, P_i – експоненціально спадають за змінними ξ і τ, з оцінкою, наприклад, для Pi:

$$|P_i(\xi,\tau)| \leqslant \begin{cases} M(\xi)e^{-\varkappa\xi}, \ \xi \geqslant \tau, \\ M(\tau)e^{\lambda\tau}, \ \xi \leqslant \tau, \end{cases}$$

де M – деякі многочлени за своїми змінними з додатними коефіцієнтами, а $\varkappa$ і λ відповідні відомі сталі.

Для різниці між $u(x,t,\varepsilon)$ і частковою сумою U_n асимптотичного розвинення справедлива рівномірна за x і t оцінка $|u - U_n| = O(\varepsilon^{n+1})$.

Часто в теорії оптимального керування виникають задачі із сингулярними збуреннями [136], в яких властивості збурених задач якісно відрізняються від властивостей вироджених задач, що одержуються із вихідних при нульових значеннях параметрів. Для цього класу задач важливою є роль асимптотичних методів, які дають можливість одержати якісну картину розв'язку, що також може бути використано при побудові і аналізі числових алгоритмів таких задач.

Найбільш поширеним методом опису асимптотики розв'язків початкових і крайових задач для диференціальних рівнянь з малим параметром при похідних, або задач оптимального керування із сингулярними збуреннями є метод примежових функцій [18, 21] та теорія експоненціальних складних примежових шарів [8, 25].

У багатьох роботах метод примежових функцій використовують для побудови асимптотичних розвинень розв'язків систем крайової задачі принципу максимуму Л. С. Понтрягіна [19, 25].

Наявність малих збурень в задачах оптимального керування може бути пов'язано з малістю компонент в математичній моделі, що описує динаміку процесів (малі часові сталі, моменти інерції, маси тощо), так і з методами дослідження задач керування (параметри регуляризації, апроксимації імпульсів, дисконтування тощо).

1.3. Задачі для вироджених гіперболічних систем квазілінійних рівнянь з однією просторовою змінною

Фундаментальні питання теорії гіперболічних рівнянь розглянуто, зокрема, в працях Б. Рімана [75], Й. Шаудера [139], І. Г. Петровського [70], В. Е. Аболіні та А. Д. Мишкіса [1], Б. Л. Рождєственського і М. М. Янєнка [76], П. Д. Лакса [45]. Пізніше різноманітні підходи для розв'язності мішаних задач для одновимірних гіперболічних систем досліджували Р. Курант і П. Лакс [44, 113], Ю. О. Митропольський [59], А. Д. Мишкіс і А. М. Філімонов [63], З. О. Мельник [55–58], Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, В. М. Кирилич [33–37], І. Я. Кміть [41, 73], Р. В. Андрусяк [4, 5], О. В. Пелюшкевич [69], Лі Та-Тцін (Li Ta-Tsien) [131–133], Я. Туро [144] та ін.

До класу недостатньо вивчених задач можна віднести і задачі для гіперболічних систем рівнянь з двома незалежними змінними та ортогональними (вертикальними і/або горизонтальними) до осей координат характеристиками. Системи рівнянь з такими характеристиками в літературі також називають виродженими (сингулярними) гіперболічними системами диференціальних рівнянь [33, 47, 52, 63, 73].

Тематиці вироджених такого типу гіперболічних систем присвячено дослідження О. В. Пелюшкевич [69]. Ортогональні до осей координат характеристики з фізичних міркувань означають, що частина коливних збурень у середовищі може поширюватися із необмеженою швидкістю [33, 47, 63, 83, 84].

Задачі з такими характеристиками для гіперболічних систем виникають також як проміжні при дослідженні їхніх багатовимірних варіантів [23, 127]. Зокрема, ортогональність характеристик до осей координат виникає при граничному переході від випадку характеристик з не вертикальним (не горизонтальним) розміщенням щодо осей [13, 14, 47, 52].

Саме у фізиці твердого тіла, зазвичай, виникають гіперболічні системи квазілінійних рівнянь, частина сім'ї характеристик яких також є перпендикулярна до осі часу [20, 23, 76, 121].

Для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь питання про коректну розв'язність задачі у випадку, коли частина сім'ї характеристик є ортогональна до просторової або часової осей, досі було відкритим, хоча до моделей такого вигляду, як зазначено вище, приводять задачі фізики твердого тіла та деякі інші прикладні випадки [76, 84, 116, 131].

Системи гіперболічних рівнянь з ортогональними до осей координат характеристиками виникають як проміжні, наприклад, у методі продовженої системи, який сформулювали в 1949 р. Р. Курант і П. Лакс [113] для випадку зведення квазілінійної системи

$$G(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t,u)G(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x} = \mathcal{R}(x,t,u)$$

до системи в інваріантах Рімана [76, 111].

Нехай

$$p = \frac{\partial u}{\partial x},\ q = \frac{\partial u}{\partial t},\ P = Gp,\ Q = Gq.$$

Тоді з урахуванням того, що $\dfrac{\partial q}{\partial x} = \dfrac{\partial p}{\partial t}$, із $\dfrac{\partial u}{\partial t} + A(x,t,u)\dfrac{\partial u}{\partial x} = b(x,t,u)$ можна одержати систему з $4m$ рівнянь, записану в інваріантах

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} + \Lambda\dfrac{\partial P}{\partial x} = \Omega(x,t,u,P,Q), \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial t} + \Lambda\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \Psi(x,t,u,P,Q), \\[2ex] \qquad\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = G^{-1}Q, \\[2ex] \qquad\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = G^{-1}P, \end{cases}$$

у якій останніх $2m$ рівнянь з ортогональними характеристиками.

Наявність горизонтальних характеристик [76] ускладнює, наприклад, формулювання умов при $t = 0$ для такої групи рівнянь. Гіперболічні системи, у яких частина рівнянь має горизонтальні (вертикальні) характеристики, природньо можуть виникати як у разі переходу від систем загального вигляду до запису в інваріантах [76], так і в деяких прикладних задачах [20, 23–26, 47, 52, 84, 143].

Випадки наявності ортогональних до осей координат характеристик також розглядались в задачах оптимального керування [133, 145].

Наприклад, у роботі [145] в чотирикутнику $R(\delta) = \{t, x : 0 \leq t \leq \delta,\ 0 \leq x \leq 1\}$ розглянуто загальну гіперболічну систему квазілінійних рівнянь

$$\begin{cases} l_p(u)\Big(\dfrac{\partial u}{\partial t} + \lambda_p(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) = F_p(u), \quad p \in \{1, \dots, l\}, \\ l_q(u)\dfrac{\partial u}{\partial t} = F_q(u) + c_q(t, x), \quad q \in \{l+1, \dots, m\}, \\ l_r(u)\Big(\dfrac{\partial u}{\partial t} + \lambda_r(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) = F_r(u), \quad r \in \{m+1, \dots, n\}, \end{cases}$$

де $c_q(t, x)$ – зовнішнє керування, а $l_i(u)$ – власні вектори, що відповідають власним значенням $\lambda_i(u)$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Задачі з ортогональними характеристиками виникають також при дослідженні задач з малим параметром при старших похідних у гіперболічних системах, що є об'єктом дослідження цієї дисертаційної роботи.

Дослідження задач з малим параметром асимптотичними методами вимагає глобальної розв'язності виродженого випадку гіперболічної задачі [14].

Головна трудність у побудові глобальних розв'язків пов'язана з наявністю характеристик, вірніше з їх перетином в середині області. З плином часу розв'язки гіперболічних рівнянь можуть бути менш гладкими, ніж вихідні дані, тобто втрачати гладкість, або взагалі одержувати розриви [1, 33, 41, 63, 72, 76, 77, 83, 85, 140].

Класичний метод характеристик, розроблений спочатку для дослідження задачі Коші для одновимірних напівлінійних гіперболічних систем рівнянь першого порядку [70], виявився потужним засобом і для мішаних задач в дослідженнях В. Е. Аболіні і А. Д. Мишкіса [1]. З метою одержання локальних та глобальних розв'язків для квазілінійних гіперболічних систем цей метод був застосований в працях [4, 5, 59, 73, 76, 131, 144].

Наголосимо, що область існування класичного розв'язку для нелінійних (напівлінійних, квазілінійних) гіперболічних систем рівнянь першого порядку, зазвичай, обмежена. Це зв'язано з можливістю перетину характеристик одного і того ж сімейства і утворення дуже часто розривів розв'язку, зокрема, для квазілійних рівнянь [63, 76]. Основні достатні умови глобальної розв'язності таких задач були зв'язані з побудовою узагальнених розв'язків [72, 76, 131, 144].

Існуючі в даний час методи дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними складної структури, зазвичай, не дають можливості знайти їх розв'язки в явному вигляді, то при наявності малих збурень у таких рівнняннях часто використовують асимптотичні методи для одержання наближених розв'язків. Наприклад, для рівняння Е. Хопфа [124] за допомогою методу зникаючої в'язкості, тобто шляхом аналізу розв'язків сингулярно збуреного рівняння Бюргерса

$$u_t + (f(u))_x = \varepsilon u_{xx}$$

досліджено властивості його розв'язків. Аналізу асимптотичних розвинень розв'язків для різноманітних нелінійних задач присвячені роботи [7, 39, 40, 78, 115].

Розділ 2

Сингулярно збурені гіперболічні системи лінійних та напівлінійних рівнянь першого порядку

У цьому розділі розглянуто мішані задачі для гіперболічної системи $n+m$ сингулярно збурених лінійних та напівлінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку на площині, причому малий параметр є множником при різних частинних похідних. Побудовано та обґрунтовано асимптотичне розвинення довільного порядку розв'язку гіперболічної системи за степенями малого параметра.

Такі рівняння можуть виникати безпосередньо як математичні моделі фізичних процесів, або як проміжні при дослідженні, наприклад, багатовимірних задач.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [90, 95, 118].

2.1. Задача із малим параметром у гіперболічній системі лінійних рівнянь першого порядку

Досліджено лінійну гіперболічну систему із малим параметром у прямокутнику, в якій диференціальний оператор частини рівнянь вироджується за часовою змінною, а решта – за просторовою. Для кожної групи компонент розв'язку побудовано відповідні примежові шари, зумовлені виродженням рівнянь. Крім того, для кожної групи компонент розв'язку виникає необхідність у примежових шарах за змінними, за якими відповідні рівняння системи не вироджуються. Однак узгоджено примежові шари у кутових точках прямокутника без додаткових умов на вхідні дані задачі, крім припущень гладкості. А це у свою чергу дає можливість побудувати асимптотичне розвинення довільного порядку класичного розв'язку задачі.

2.1.1. Формулювання задачі з малим параметром при похідних у гіперболічній системі рівнянь першого порядку

У області $\Omega = \{(x,\, t):\ 0 < x < l,\ 0 < t < T < \infty\}$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_j^\varepsilon + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t) v_k^\varepsilon + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + f_i(x,t;\varepsilon) \quad (i = \overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t) u_j^\varepsilon + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t) v_k^\varepsilon + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + g_s(x,t;\varepsilon) \quad (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.1a}$$

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,0) = u_i^\varepsilon(0,t) = 0, \quad x \in [0,l],\ t \in [0,T] \quad (i = \overline{1,n}), \\ v_s^\varepsilon(x,0) = v_s^\varepsilon(0,t) = 0, \quad x \in [0,l],\ t \in [0,T] \quad (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.1b}$$

де ε – малий додатний параметр.

Особливістю цієї задачі є те, що параметр ε стоїть при різних похідних у перших n та решти m рівняннях. Це приводить до специфічних особливостей розв'язку і його асимптотики.

Ми розглядаємо класичний розв'язок задачі (2.1), тобто розв'язок, неперервний в області $\overline{\Omega} = \{(x,\, t):\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T < \infty\}$, який має неперервні похідні першого порядку, що задовольняють систему (2.1a), а також крайові умови (2.1b).

Для побудови та обгрунтування асимптотичного розвинення розв'язку задачі (2.1) припускаємо, що виконуються такі умови:

(H_1) функції $a_{ij}, b_{ik}, \gamma_{sj}, \sigma_{sk} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, f_i і $g_s : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – достатньо гладкі в області свого визначення (порядок гладкості залежить від порядку асимптотики);

(H_2) $f_i(0,0;\varepsilon) = 0$ $(i = \overline{1,n})$, $g_s(0,0;\varepsilon) = 0$ $(s = \overline{1,m})$, $\forall \varepsilon > 0$ (умови погодження першого порядку).

За умов (H_1), (H_2) при кожному фіксованому значенні параметра ε існує єдиний класичний розв'язок задачі (2.1) [1]. Зазначимо, що на відміну від результатів [21] для обгрунтування асимптотики розв'язку задачі (2.1) жодних додаткових умов на знак a_{ij} $(j = i)$, σ_{sk} $(k = s)$ не потрібно.

Зауважимо також, що розв'язок виродженої системи (в (2.1a) формально покладемо $\varepsilon = 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)v_k + f_i(x,t;0), \quad (i = \overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial v_s}{\partial t} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)u_j + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)v_k + g_s(x,t;0), \quad (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.2}$$

не задовольняє всіх умов (2.1b), а саме, функції u_i $(i = \overline{1,n})$ та v_s $(s = \overline{1,m})$, взагалі кажучи, не задовольняють початкові та крайові умови, відповідно. Тому в околі межі $t = 0$ та $x = 0$ області Ω виникають примежові шари, які підправляють розв'язок виродженої задачі (система (2.2) із крайовими умовами для функцій u та початковими для v, про яку мова нижче) до виконання втрачених при виродженні умов. Особливість задачі полягає ще й в тому, що хоча примежові функції визначаються як розв'язки рівнянь з частинними похідними першого порядку, а межа на якій задаються крайові умови, містить кутову точку (0,0), що впливає на гладкість розв'язку, тим не менше, вдається побудувати без будь-яких інших умов погодження, крім (H_2), асимптотику розв'язку довільного порядку, рівномірну в $\overline{\Omega}$.

Для простоти записів введемо позначення

$$u^\varepsilon(x,t) = (u_1^\varepsilon(x,t), \ldots, u_n^\varepsilon(x,t)), \quad v^\varepsilon(x,t) = (v_1^\varepsilon(x,t), \ldots, v_m^\varepsilon(x,t)).$$

2.1.2. Побудова формальної асимптотики розв'язку задачі із малим параметром

Асимптотику розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (2.1) на першому кроці будуємо у вигляді

$$u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) \ \ (i = \overline{1,n}), \ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) \ (s = \overline{1,m}), (x,t) \in \Omega. \tag{2.3}$$

Для визначення функцій $\bar{u}_{i0}$ та $\bar{v}_{s0}$ нульового наближення регулярної частини асимптотики одержимо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_{i0}}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\bar{u}_{j0} + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\bar{v}_{k0} + f_{i0}(x,t) \quad (i=\overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial t} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)\bar{u}_{j0} + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)\bar{v}_{k0} + g_{s0}(x,t) \quad (s=\overline{1,m}), \\ \bar{u}_{i0}(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \quad (i=\overline{1,n}), \\ \bar{v}_{s0}(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.4}$$

де $f_{i0}(x,t)$, $g_{s0}(x,t)$ – перші члени розвинення функцій f_i та g_s в степеневий ряд за степенями параметра ε в околі $\varepsilon = 0$. Задача (2.4) для визначення $\bar{u}_{i0}$ $(i=\overline{1,n})$, $\bar{v}_{s0}$ $(s=\overline{1,m})$ за умови (H_2) еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, для якої існує єдиний достатньо гладкий розв'язок [69]. Отож, функції $\bar{u}_{i0}$ $(i=\overline{1,n})$, $\bar{v}_{s0}$ $(s=\overline{1,m})$ однозначно визначені і мають достатню гладкість. Із формулювання задачі для визначення $\bar{u}_{i0}, \bar{v}_{s0}$ очевидно випливає, що не всі умови (2.1b) виконуються. Тепер почергово будемо підправляти побудований розв'язок задачі (2.4) функціями примежового шару так, щоб виконувалися втрачені при виродженні умови.

Підправимо (2.3) функцією примежового шару так, щоб виконувалась друга умова (2.1b), тобто наближення розв'язку будуємо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^{\varepsilon}(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t), \\ v_s^{\varepsilon}(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) + Q_{s0}v(\xi,t), \end{cases} \tag{2.5}$$

де

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon},$$

регуляризуюча змінна в околі межі $x = 0$. Щоб записати задачу для визначення $Q_{s0}v(\xi,t)$, розвинемо коефіцієнти системи (2.1a) в ряд за степенями ε, підставимо (2.5) у систему (2.1a) та крайові умови (2.1b) і прирівнявши коефіцієнти при нульовому степені ε, одержимо задачу для визначення $Q_{s0}v$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{s0}v}{\partial t} + \dfrac{\partial Q_{s0}v}{\partial \xi} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,t)Q_{k0}v, \quad 0 < t < T,\ \xi > 0, \\ Q_{s0}v(\xi,0) = 0, \qquad \xi \geqslant 0, \\ Q_{s0}v(0,t) = -\bar{v}_{s0}(0,t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \quad (s=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{2.6}$$

На підставі (2.6), функції $Q_{s0}v$ ліквідують нев'язку, яку приносять $\bar{v}_{s0}$ у крайову умову при $x = 0$ і для визначення функцій $Q_{s0}v$ одержимо крайову задачу в горизонтальній півсмузі для гіперболічної системи рівнянь першого порядку.

Гладкість розв'язку задачі (2.6) залежить від виконання умов погодження в кутовій точці. Перевіримо виконання умов погодження нульового та першого порядків розв'язку $Q_{s0}v$ в кутовій точці $(0,0)$. Для виконання умов погодження нульового порядку повинні виконуватись рівності

$$Q_{s0}v(\xi,0)|_{\xi=0} = Q_{s0}v(0,t)|_{t=0} \quad (s=\overline{1,m}).$$

Очевидним є те, що ліва частина цієї рівності для всіх $s = 1,\dots,m$ дорівнює нулеві у кутовій точці, а з умов (2.6) та (2.4) справджується рівність

$$0 = -\bar{v}_{s0}(0,t)|_{t=0} = 0 \quad (s=\overline{1,m}).$$

Отож, початкові та крайові умови задачі (2.6) погоджені у кутовій точці $(0,0)$.

Перейдемо до перевірки умови погодження першого порядку, а саме, перевіримо, чи задовольняють систему (2.6) умови задачі в кутовій точці. Для цього повинні виконуватись рівності

$$\left.\frac{\partial Q_{s0}v}{\partial t}\right|_{(0,0)} + \left.\frac{\partial Q_{s0}v}{\partial \xi}\right|_{(0,0)} = \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,0) Q_{k0}v\Big|_{(0,0)} \quad (s=\overline{1,m}).$$

Використавши умови із (2.6), залишиться показати, що $\dfrac{\partial \bar{v}_{s0}(0,0)}{\partial t} = 0$. З умов (H_2) та (2.4), маємо

$$\left.\frac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial t}\right|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(0,0)\bar{u}_{j0}\Big|_{(0,0)} + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,0)\bar{v}_{k0}\Big|_{(0,0)} + g_{s0}(0,0) = 0 \ (s=\overline{1,m}).$$

Виконання умов погодження нульового та першого порядків крайових та початкових умов дають підставу стверджувати, що розв'язок $Q_{s0}v$ задачі (2.6) є гладким.

Покажемо тепер що функції $Q_{s0}v$ $(s=\overline{1,m})$ мають примежовий характер. Справді, на підставі однорідності крайової умови (2.6) функції $Q_{s0}v$ $(s=\overline{1,m})$ приймають нульові значення під характеристикою $\xi = x$ рівняння (2.6). При $\varepsilon \to 0$ характеристика наближається до вертикального положення, тобто функції $Q_{s0}v$ відмінні від нуля в околі межі $x = 0$ області Ω.

Побудову нульового наближення розв'язку задачі (2.1) завершуємо визначенням примежового шару в околі межі $t = 0$ області Ω. За допомогою функції примежового шару скоригуємо розв'язок $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ так, щоб виконувалась крайова умова при $t = 0$, а тому $u_i^\varepsilon, v_s^\varepsilon$ в області Ω матимуть вигляд

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) + P_{i0}u(x,\tau) \quad (i = \overline{1,n}), \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) + Q_{s0}v(\xi,t) \quad (s = \overline{1,m}). \end{cases}$$

Уведена ще одна регуляризуюча змінна в околі межі $t = 0$ області Ω

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Застосувавши стандартну процедуру теорії сингулярних збурень побудови примежового шару [21], для визначення функції P_0u одержимо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{i0}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{i0}u}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j0}u, & \tau > 0, \;\; 0 < x < l, \\ P_{i0}u(0,\tau) = 0, & \tau \geqslant 0, \\ P_{i0}u(x,0) = -\bar{u}_{i0}(x,0), & 0 \leqslant x \leqslant l \quad (i = \overline{1,n}). \end{cases} \tag{2.7}$$

Як вище можна переконатися, що умови погодження нульового і першого порядків задачі (2.7) виконуються, тому це дозволяє будувати асимптотику розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (2.1) вищого порядку із забезпеченням достатньої гладкості наближення.

Перейдемо до побудови наближення першого порядку асимптотичного розвинення розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (2.1) у області Ω, а саме:

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim & \bar{u}_{i0}(x,t) + P_{i0}u(x,\tau) + \\ & + \varepsilon\bar{u}_{i1}(x,t) + \varepsilon P_{i1}u(x,\tau) + \varepsilon Q_{i1}u(\xi,t) \;\; (i = \overline{1,n}), \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim & \bar{v}_{s0}(x,t) + Q_{s0}v(\xi,t) + \\ & + \varepsilon\bar{v}_{s1}(x,t) + \varepsilon P_{s1}v(x,\tau) + \varepsilon Q_{s1}v(\xi,t) \;\; (s = \overline{1,m}). \end{cases} \tag{2.8}$$

Підставляємо (2.8) в систему (2.1). Стандартною процедурою теорії сингулярних збурень одержуємо задачі для визначення функцій $Q_{i1}u$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{i1}u}{\partial \xi} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_{ik}(0,t)Q_{k0}v, & 0 < t < T, \; \xi > 0, \\ Q_{i1}u(\infty,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T \;\; (i = \overline{1,n}). \end{cases}$$

Враховуючи рівності $Q_{k0}v(\xi,t)=0$ для $\xi\geqslant t$ $(k=\overline{1,m})$, одержимо розв'язок $Q_{i1}u$ $(i=\overline{1,n})$ задачі:

$$Q_{i1}u(\xi,t)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m}b_{ik}(0,t)\int\limits_{t}^{\xi}Q_{k0}v(\varsigma,t)d\varsigma, & 0\leqslant\xi\leqslant t\leqslant T,\\ 0, & \xi\geqslant t.\end{cases}\tag{2.9}$$

Аналогічно ставиться задача для $P_{s1}v$. Використавши, що $P_{i0}u(x,\tau)=0$ для $\tau\geqslant x$ $(i=\overline{1,n})$, запишемо $P_{s1}v$ $(s=\overline{1,m})$ у вигляді

$$P_{s1}v(x,\tau)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,0)\int\limits_{x}^{\tau}P_{j0}u(x,\eta)d\eta, & 0\leqslant\tau\leqslant x\leqslant l,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant\tau.\end{cases}\tag{2.10}$$

Зазначимо, що функції Q_1u і P_1v мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Система рівнянь для визначення першого наближення $(\bar{u}_1,\bar{v}_1)$ регулярної частини асимптотики для $(t,x)\in\Omega$ матиме вигляд

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{u}_{i1}}{\partial x}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\bar{u}_{j1}+\sum\limits_{k=1}^{m}b_{ik}(x,t)\bar{v}_{k1}+\bar{f}_{i1}(x,t) & (i=\overline{1,n}),\\ \dfrac{\partial\bar{v}_{s1}}{\partial t}=\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,t)\bar{u}_{j1}+\sum\limits_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(x,t)\bar{v}_{k1}+\bar{g}_{s1}(x,t) & (s=\overline{1,m}),\end{cases}\tag{2.11}$$

де $\bar{f}_{i1}(x,t)=f_{i1}(x,t)-\dfrac{\partial\bar{u}_{i0}(x,t)}{\partial t}$, $\bar{g}_{s1}(x,t)=g_{s1}(x,t)-\dfrac{\partial\bar{v}_{s0}(x,t)}{\partial x}$, $f_{i1}(x,t)$, $g_{s1}(x,t)$ – коефіцієнти при першому степені ε розвинення функцій f_i та g_s у ряд за степенями ε, відповідно. Крім того, $\bar{u}_{i1}$, $\bar{v}_{s1}$ ліквідують нев'язки, які вносять примежові шари $Q_{i1}u$, $P_{s1}v$ у крайову та початкові умови, відповідно.

Тому функції $\bar{u}_{i1}$, $\bar{v}_{s1}$, як розв'язки системи (2.11) повинні задовольняти умови

$$\begin{cases}\bar{u}_{i1}(0,t)=-Q_{i1}u(0,t), & 0\leqslant t\leqslant t \quad (i=\overline{1,n}),\\ \bar{v}_{s1}(x,0)=-P_{s1}v(x,0), & 0\leqslant x\leqslant l \quad (s=\overline{1,m}).\end{cases}\tag{2.12}$$

Задача (2.11), (2.12), аналогічно як і (2.4), еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, тобто є однозначно розв'язною.

Для $Q_{s1}v \ \ (s=\overline{1,m})$ одержимо задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{s1}v}{\partial t}+\dfrac{\partial Q_{s1}v}{\partial \xi}=\sum\limits_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(0,t)Q_{k1}v+q_{s1}(\xi,t), & 0<t<T,\ \xi>0, \\ Q_{s1}v(\xi,0)=0, & \xi\geqslant 0, \\ Q_{s1}v(0,t)=-\bar{v}_{s1}(0,t), & 0\leqslant t\leqslant T, \end{cases} \tag{2.13}$$

де $q_{s1}(\xi,t)=\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(0,t)Q_{j1}u+\xi\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial\sigma_{sk}(0,t)}{\partial x}Q_{k0}v.$

Оскільки система (2.13) є неоднорідною, то для існування класичного розв'язку задачі необхідно, щоб виконувались не лише умови погодження нульового та першого порядків в кутовій точці $(0,0)$, але й існували неперервні похідні першого порядку для функцій q_{s1}. Частинні похідні існують, оскільки функції $Q_{s0}v, Q_{s1}u \ \ (s=\overline{1,m})$ – гладкі. Доведемо виконання умов погодження нульового порядку, тобто $Q_{s1}v(\xi,0)\big|_{\xi=0}=Q_{s1}v(0,t)\big|_{t=0} \ \ (s=\overline{1,m})$. Рівність нулеві лівої частини випливає з умови (2.13), а для правої частини використаємо послідовно умови (2.12),(2.10):

$$0=-\bar{v}_{s1}(0,t)\big|_{t=0}=-P_{s1}v(x,0)\big|_{x=0}=0 \quad (s=\overline{1,m}).$$

Тому крайові умови системи (2.13) погоджені до неперервності в кутовій точці $(0,0)$, що характеризує неперервність розв'язку задачі (2.13) у смузі $\xi\geqslant 0$, $0\leqslant t\leqslant T$. Для переконання у гладкості $Q_{s1}v$ у вказаній смузі, покажемо, що $\forall s=\overline{1,m}$ виконуються рівності

$$\left.\frac{\partial Q_{s1}v}{\partial t}\right|_{(0,0)}+\left.\frac{\partial Q_{s1}v}{\partial \xi}\right|_{(0,0)}=\sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(0,0)Q_{k1}v\Big|_{(0,0)}+\bar{q}_{s1}\big|_{(0,0)}.$$

З умов (2.6),(2.9),(2.13) перейдемо до рівності

$$0-\left.\frac{\partial\bar{v}_{s1}}{\partial t}\right|_{(0,0)}=\sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}\cdot 0+0.$$

Тепер залишилось показати, що похідна $\bar{v}_{s1}$ за t дорівнює нулю. Для цього використаємо умову (2.11), з якої маємо

$$\left.\frac{\partial\bar{v}_{s1}}{\partial t}\right|_{(0,0)}=\sum_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(0,0)\bar{u}_{j1}\Big|_{(0,0)}+\sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(0,0)\bar{v}_{k1}\Big|_{(0,0)}+\bar{g}_{s1}\big|_{(0,0)}=0,$$

де

$$\begin{cases} \bar{g}_{s1}(0,0)=g_{s1}(0,0)-\dfrac{\partial\bar{v}_{s0}}{\partial x}=0, \\ \bar{v}_{s1}\big|_{(0,0)}=-P_{s1}v(0,0)=0, \\ \bar{u}_{i1}\big|_{(0,0)}=-Q_{i1}u(0,0)=0. \end{cases}$$

Оскільки, $\left.\dfrac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t}\right|_{(0,0)} = 0$, то всі умови для існування класичного (тобто гладкого) розв'язку задачі (2.13) виконуються.

Для розв'язку $P_{i1}u$ $(i=\overline{1,n})$ задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{i1}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{i1}u}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j1}u + p_{i1}(x,\tau), & \tau > 0,\ 0 < x < l, \\ P_{i1}u(0,\tau) = 0, & \tau \geqslant 0, \\ P_{i1}u(x,0) = -\bar{u}_{i1}(x,0), & 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

де $p_{i1}(x,\tau) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,0)P_{k1}v + \tau \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial a_{ij}(x,0)}{\partial t} P_{j0}u$. Аналогічно, як для розв'язку задачі (2.13), можна повторити всі міркування і довести існування класичного розв'язку.

Отже, як випливає із побудови вище нульового та першого наближень, рекурентний процес послідовного визначення функцій асимптотичного розвинення розв'язку розщеплений, а тому опишемо алгоритм визначення функцій наближення довільного порядку.

У області Ω повне асимптотичне розвинення розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (2.1) будуємо у вигляді:

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \big[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau) + Q_{ih}u(\xi,t)\big] \quad (i=\overline{1,n}), \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \big[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau) + Q_{sh}v(\xi,t)\big] \quad (s=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{2.14}$$

Опишемо послідовність, в якій визначаються функції правих частин (2.14), а також запишемо задачі, розв'язками яких ці функції є. Задачі одержуємо стандартним способом теорії сингулярних збурень, аналогічно як вище, тому пропустимо опис способу їх одержання.

Спочатку визначаємо функцію $Q_h u = (Q_{1h}u, \ldots, Q_{nh}u)$ $(\forall h > 1)$ як розв'язок задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{ih}u}{\partial \xi} = q_{ih}^u(\xi,t), & \xi > 0,\ 0 < t \leqslant T, \\ Q_{ih}u(\infty,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T \quad (i=\overline{1,n}), \end{cases} \tag{2.15}$$

де

$$q_{ih}^{u}(\xi,t)=\sum_{r=0}^{h-1}\frac{\xi^r}{r!}\Big[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^r a_{ij}}{\partial x^r}(0,t)Q_{j,\,h-1-r}u+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^r b_{ik}}{\partial x^r}(0,t)Q_{k,\,h-1-r}v\Big]-$$
$$-\frac{\partial Q_{i,\,h-2}u}{\partial t}\qquad (i=\overline{1,n}),$$

ξ – регуляризуюче перетворення, як вище. Функції $q_{ih}^{u}(\xi,t)$ $(i=\overline{1,n},\ h>0)$ є відомими неперервними і рівними нулю під характеристикою $\xi=t$, що випливає з їхньої структури. Тому розв'язок $Q_{ih}u$ задачі (2.15) для кожного $h>1$ та $i=\overline{1,n}$ запишемо в явному вигляді

$$Q_{ih}u(\xi,t)=\begin{cases}\int\limits_t^{\xi} q_{ih}^{u}(\zeta,t)\,d\zeta, & 0\leqslant\xi\leqslant t\leqslant T,\\ 0, & \xi\geqslant t.\end{cases}\tag{2.16}$$

Аналогічно одержуємо задачу для $P_{sh}v$ із умовою $P_{sh}v(x,\infty)=0$ $(s=\overline{1,m},\ h>1)$ і $P_{sh}v$ можна записати у явному вигляді

$$P_{sh}v(x,\tau)=\begin{cases}\int\limits_x^{\tau} p_{sh}^{v}(x,\vartheta)d\vartheta, & 0\leqslant\tau\leqslant x,\\ 0, & \tau\geqslant x,\end{cases}\tag{2.17}$$

де p_{sh}^{v} – права частина рівняння для $P_{sh}v$ і має вигляд

$$p_{sh}^{v}(x,\tau)=\sum_{r=0}^{h-1}\frac{\tau^r}{r!}\Big[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^r \gamma_{sj}}{\partial t^r}(x,0)P_{j,\,h-1-r}u+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^r \sigma_{sk}}{\partial t^r}(x,0)P_{k,\,h-1-r}v\Big]-$$
$$-\frac{\partial P_{s,\,h-2}v}{\partial x},\ (s=\overline{1,m},\ h>1).$$

Тут p_{sh}^{v} $(s=\overline{1,m},\ h\geqslant 0)$ – відомі неперервні функції, рівні нулеві над характеристикою $\tau=x$.

Зазначимо, що гладкість функцій $Q_{ih}u$ і $P_{sh}v$ $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m},\ h>1)$, зокрема і на характеристиках $\xi=t$ та $x=\tau$, відповідно, випливає безпосередньо з їх структури.

Функції регулярної частини асимптотики $(\bar{u}_h,\bar{v}_h)$ порядку $h>1$ є розв'язками такої задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_{ih}}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\bar{u}_{jh} & + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\bar{v}_{kh} + \\ & + \bar{f}_{ih}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \ \ (i = \overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial \bar{v}_{sh}}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)\bar{u}_{jh} & + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)\bar{v}_{kh} + \\ & + \bar{g}_{sh}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \ \ (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.18a}$$

$$\begin{cases} \bar{u}_{ih}(0,t) = -Q_{ih}u(0,t), & 0 \leqslant t \leqslant T \ \ (i = \overline{1,n}), \\ \bar{v}_{sh}(x,0) = -P_{sh}v(x,0), & 0 \leqslant x \leqslant l \ \ (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.18b}$$

де $\bar{f}_{ih}(x,t) = f_{ih}(x,t) - \dfrac{\partial \bar{u}_{i\,h-1}}{\partial t}$, $\bar{g}_{sh}(x,t) = g_{sh}(x,t) - \dfrac{\partial \bar{v}_{s\,h-1}}{\partial x}$, а $f_{ih}(x,t)$, $g_{sh}(x,t)$ – коефіцієнти розвинення функцій f_i та g_s, відповідно, у ряд за степенями ε. Задача (2.18) еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, для якої існує єдиний розв'язок.

Для $Q_{sh}v$ $(h > 1)$ маємо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{sh}v}{\partial t} + \dfrac{\partial Q_{sh}v}{\partial \xi} = \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(0,t)Q_{kh}v + q_{sh}^{v}(\xi,t), \ \xi > 0, \ 0 < t \leqslant T, \\ Q_{sh}v(\xi,0) = 0, \quad \xi \geqslant 0, \\ Q_{sh}v(0,t) = -\bar{v}_{sh}(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \ \ (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.19}$$

де

$$q_{sh}^{v}(\xi,t) = \sum_{r=0}^{h} \frac{\xi^r}{r!} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^r \gamma_{sj}}{\partial x^r}(0,t) Q_{j,\,h-r}u +$$
$$+ \sum_{r=1}^{h} \frac{\xi^r}{r!} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^r \sigma_{sk}}{\partial x^r}(0,t) Q_{k,\,h-r}v(\xi,t) \quad (s = \overline{1,m}).$$

Аналогічно як у задачі (2.13), для доведення існування класичного розв'язку задачі (2.19) необхідно, щоб функція $q_{sh}^{v}(\xi,t)$ була гладкою й виконувались умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці (0,0). Частинні похідні функцій $q_{sh}^{v}(\xi,t)$ існують, оскільки функція є сумою гладких функцій. Перейдемо до перевірки виконання умов погодження, які випливають із (2.16) та (2.18b):

$$
\begin{aligned}
0 = Q_{sh}v(\xi,0)\Big|_{\xi=0} &= Q_{sh}v(0,t)\Big|_{t=0} = -v_{sh}(0,t)\Big|_{t=0}, \\
0 = -v_{sh}(0,0) &= P_{sh}v(0,0) = 0 \quad (s=\overline{1,m},\ h>1).
\end{aligned}
$$

Отже, крайові умови погоджені до неперервності в кутовій точці. Перевіримо чи початкові умови задовольняють систему (2.19) в точці (0,0), тобто чи справджується співвідношення

$$
\frac{\partial Q_{sh}v}{\partial t}\Big|_{(0,0)} + \frac{\partial Q_{sh}v}{\partial \xi}\Big|_{(0,0)} = \sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(0,0)Q_{kh}v\Big|_{(0,0)} + q^{v}_{sh}\Big|_{(0,0)} \quad (s=\overline{1,m},\ h>1),
$$

або, використавши початкову та крайові умови задачі (2.19), останнє можна записати

$$
-\frac{\partial \bar{v}_{sh}(0,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\cdot\sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(0,0) + q^{v}_{sh}(0,0) \quad (s=\overline{1,m},\ h>1).
$$

Оскільки $q^{v}_{sh}(\xi,t)=0$ $(s=\overline{1,m},\ h>1)$ при $\xi \geqslant t \geqslant 0$, що випливає із їхньої структури, то права частина останнього співвідношення рівна нулеві. Використавши друге рівняння (2.18a) та умови (2.18b), маємо

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{v}_{sh}(0,0)}{\partial t} = &-\sum_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(0,0)Q_{jh}u(0,t)\Big|_{t=0} - \\
&-\sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(0,0)P_{kh}v(\xi,0)\Big|_{\xi=0} + \bar{g}_{sh}(0,0) \quad (s=\overline{1,m},\ h>1).
\end{aligned}
$$

На підставі (2.16) та (2.17), перші два доданки справа останньої нерівності рівні нулеві. Залишилось показати, що $\bar{g}_{sh}(x,t)$ в кутовій точці рівна нулеві. Отож, із вигляду для $\bar{g}_{sh}$, умов (H_2) та (2.18b), можемо записати

$$
\begin{aligned}
\bar{g}_{sh}(0,0) = g_{sh}(0,0) &- \frac{\partial \bar{v}_{s\,h-1}(0,0)}{\partial x} = \\
&= 0 - \frac{\partial \bar{v}_{s\,h-1}(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial P_{s\,h-1}(0,0)}{\partial x} = 0 \quad (s=\overline{1,m},\ h>1).
\end{aligned}
$$

Остання рівність правильна, оскільки $P_{sh}v(x,\tau)=0$ для $\tau \geqslant x$, тому $\dfrac{\partial P_{sh}}{\partial x}(x,\tau)=0$, якщо $\tau \geqslant x$ $(s=\overline{1,m},\ h>1)$. З неперервності випливає, що на характеристиці $\tau = x$ функція $P_{s,\,h-1}v(x,\tau)$ також набуває нульових значень. Виконання умови погодження першого порядку в кутовій точці (0,0) забезпечує гладкість розв'язку задачі (2.19) у півсмузі $\xi > 0,\ 0 < t \leqslant T$. Крім того, відзначимо, що функції $Q_{sh}v$ $(s = \overline{1, m},\ h > 1)$ мають примежовий характер: відмінні від нуля в околі межі $x = 0$ області Ω (крайова умова (2.19)) і при $\varepsilon \to 0$ характеристика $t = \xi$ рівняння (2.19) прямує до вертикального положення.

Для визначення наближень функції примежового шару $P_{ih}u$ в околі межі $t = 0$ області Ω одержимо крайову задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{ih}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{ih}u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} P_{j\,h}u(x,\tau) + p_{ih}^{u}, \quad 0 < x < l,\ \tau > 0, \\ P_{ih}u(0,\tau) = 0, \qquad\qquad \tau \geqslant 0, \\ P_{ih}u(x,0) = -\bar{u}_{ih}(x,0), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \quad (i = \overline{1, n},\ h > 1), \end{cases} \tag{2.20}$$

де

$$p_{ih}^{u}(x,\tau) = \sum_{r=1}^{h} \frac{\tau^r}{r!} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^r a_{ij}}{\partial t^r}(x,0) P_{j,\,h-r}u(x,\tau) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{h} \frac{\tau^r}{r!} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^r b_{ik}}{\partial t^r}(x,0) P_{k,\,h-r}v(x,\tau) \quad (i = \overline{1, n},\ h > 1).$$

Доведення існування класичного розв'язку $P_{ih}u$ для кожного $i = \overline{1, n}$ та $h > 1$ задачі (2.20) проводиться аналогічно як для задачі (2.19). Функції $P_{ih}u$ $(i = \overline{1, n},\ h > 1)$ відмінні від тотожного нуля нижче характеристики $\tau = x$ рівняння (2.20), яка при $\varepsilon \to 0$ прямує до горизонтального положення (початкова умова (2.20)). Це свідчить про примежовий характер поведінки $P_{ih}u$.

Отже, формальне асимптотичне наближення довільного порядку розв'язку $(u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})$ задачі (2.1) побудовано. Перейдемо до обгрунтування одержаної асимптотики.

2.1.3. Оцінка залишкового члена асимптотичного розвинення розв'язку задачі із малим параметром

Нехай $N > 0$ – довільне натуральне число. Виділимо в асимптотиці (2.14) розв'язку $(u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})$ задачі (2.1) частинну суму порядку N. Позначивши через $R_{iN}^{\varepsilon}u = R_{iN}^{\varepsilon}u(x,t)$ $(i = \overline{1, n})$, $R_{sN}^{\varepsilon}v = R_{sN}^{\varepsilon}v(x,t)$ $(s = \overline{1, m})$ залишки асимптотичних розвинень відповідних компонент розв'язку задачі (2.1) запишемо (2.14) у вигляді

$$
\begin{cases}
u_i^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar u_{ih}(x,t) & +P_{ih}u(x,\tau) + Q_{ih}u(\xi,t)\big] \\
& +R_{iN}^\varepsilon u(x,t) \quad (i=\overline{1,n}), \\
v_s^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar v_{sh}(x,t) & +P_{sh}v(x,\tau) + Q_{sh}v(\xi,t)\big] \\
& +R_{sN}^\varepsilon v(x,t) \quad (s=\overline{1,m}).
\end{cases}
\tag{2.21}
$$

Для того, щоб одержати задачі для залишку асимптотики $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$, підставимо (2.21) у систему (2.1a) і умови (2.1b) та використаємо задачі для наближень асимптотичного розвинення. Отож, залишковий член асимптотики в області Ω є розв'язком системи

$$
\begin{cases}
\varepsilon \dfrac{\partial R_{iN}^\varepsilon u}{\partial t} + \dfrac{\partial R_{iN}^\varepsilon u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t) R_{jN}^\varepsilon u & + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t) R_{kN}^\varepsilon v + \\
& +\pi_i^u(x,t;\varepsilon) \quad (i=\overline{1,n}), \\
\dfrac{\partial R_{sN}^\varepsilon v}{\partial t} + \varepsilon \dfrac{\partial R_{sN}^\varepsilon v}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t) R_{jN}^\varepsilon u & + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t) R_{kN}^\varepsilon v + \\
& +\pi_s^v(x,t;\varepsilon) \quad (s=\overline{1,m})
\end{cases}
\tag{2.22a}
$$

і задовольняє початкові та крайові умови при $0 \leqslant x \leqslant l$ та $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$
\begin{cases}
R_{iN}^\varepsilon u(x,0) = R_{iN}^\varepsilon u(0,t) = 0 \quad (i=\overline{1,n}), \\
R_{sN}^\varepsilon v(x,0) = R_{sN}^\varepsilon v(0,t) = 0 \quad (s=\overline{1,m}),
\end{cases}
\tag{2.22b}
$$

де π_i^u $(i=\overline{1,n})$ та π_s^v $(s=\overline{1,m})$ – відомі функції, такі що для всіх $(x,t)\in\Omega$ справджується

$$
\pi_i^u(x,t;\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}), \qquad \pi_s^v(x,t;\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}), \quad \varepsilon \to 0.
$$

Наша мета – одержати рівномірну оцінку залишку асимптотики в $\overline{\Omega}$. Для цього уведемо заміну в задачі (2.22):

$$
\begin{aligned}
\rho_i^\varepsilon u(x,t) &= R_{iN}^\varepsilon u(x,t) \cdot e^{-k(x+t)} \quad (i=\overline{1,n}), \\
\rho_s^\varepsilon v(x,t) &= R_{sN}^\varepsilon v(x,t) \cdot e^{-k(x+t)} \quad (s=\overline{1,m}),
\end{aligned}
$$

де k – деяка додатна стала. Тоді для $(\rho_i^\varepsilon u, \rho_s^\varepsilon v)$ в Ω одержимо задачу

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial \rho_i^\varepsilon u}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho_i^\varepsilon u}{\partial x} & = \tilde{a}_{ii}(x,t)\rho_i^\varepsilon u + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}(x,t)\rho_j^\varepsilon u + \\ & + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\rho_k^\varepsilon v + \Pi_i^u(x,t;\varepsilon) \quad (i=\overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial \rho_s^\varepsilon v}{\partial t} + \varepsilon\dfrac{\partial \rho_s^\varepsilon v}{\partial x} & = \tilde{\sigma}_{ss}(x,t)\rho_s^\varepsilon v + \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)\rho_j^\varepsilon u + \\ & + \sum\limits_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{m} \sigma_{sk}(x,t)\rho_k^\varepsilon v + \Pi_s^v(x,t;\varepsilon) \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\begin{cases} \rho_i^\varepsilon u(x,0) = \rho_i^\varepsilon u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T \ \ (i=\overline{1,n}), \\ \rho_s^\varepsilon v(x,0) = \rho_s^\varepsilon v(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T \ \ (s=\overline{1,m}), \end{cases}$$

де $\Pi_i^u(x,t;\varepsilon) = \pi_i^u(x,t;\varepsilon)e^{-k(x+t)} = O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$, $\tilde{a}_{ii}(x,t) = a_{ii}(x,t) - k(\varepsilon+1)$ $(i=\overline{1,n})$, $\Pi_s^v(x,t;\varepsilon) = \pi_s^v(x,t;\varepsilon)e^{-k(x+t)} = O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$, $\tilde{\sigma}_{ss}(x,t) = \sigma_{ss}(x,t) - k(\varepsilon+1)$ $(s=\overline{1,m})$.

Вибираємо k достатньо великим, щоб виконувались нерівності

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_{ii}(x,t) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}(x,t)| + \sum_{k=1}^{m} |b_{ik}(x,t)| \leqslant -1 \qquad (i=\overline{1,n}), \\ &\tilde{\sigma}_{ss}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} |\gamma_{sj}(x,t)| + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{m} |\sigma_{sk}(x,t)| \leqslant -1 \quad (s=\overline{1,m}). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Припустимо, що кожна з функцій $|\rho_i^\varepsilon u|$ $(i=\overline{1,n})$ досягає свого максимуму в точці $T_i(x_i,t_i) \in \overline{\Omega}$, а функції $|\rho_s^\varepsilon v|$ $(s=\overline{1,m})$ – в точках $T_{n+s}(x_{n+s},t_{n+s}) \in \overline{\Omega}$. Не обмежуючи загальності припустимо, що

$$\begin{aligned} &|\rho_1^\varepsilon u(T_1)| \geqslant |\rho_2^\varepsilon u(T_2)| \geqslant \cdots \geqslant |\rho_n^\varepsilon u(T_n)| \geqslant \\ &\qquad \geqslant |\rho_1^\varepsilon v(T_{n+1})| \geqslant |\rho_2^\varepsilon v(T_{n+2})| \geqslant \cdots \geqslant |\rho_m^\varepsilon v(T_{n+m})|. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Розглянемо перше рівняння системи (2.23) в точці T_1 і перепишемо його у вигляді

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{\partial \rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\bigg|_{T_1} + \frac{\partial \rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\bigg|_{T_1} - \tilde{a}_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1) - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(T_1)\rho_j^\varepsilon u(T_1) - \\ &\qquad - \sum_{k=1}^{m} b_{1k}(T_1)\rho_k^\varepsilon v(T_1) = \Pi_1(T_1;\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Нехай в точці T_1 функція $\rho_1^\varepsilon u$ набуває від'ємного мінімуму. Тоді в цій точці $(\partial\rho_1^\varepsilon u/\partial t)\big|_{T_1} \leqslant 0$, $(\partial\rho_1^\varepsilon u/\partial x)\big|_{T_1} \leqslant 0$ (строга нерівність можлива лише у випадку, якщо точка T_1 знаходиться на межі області $\overline{\Omega}$). Звідси, використовуючи (2.24) та (2.25), для правої частини (2.26) правильна оцінка:

$$\varepsilon\frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\bigg|_{T_1} + \frac{\partial\rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\bigg|_{T_1} - \tilde{a}_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1) -$$
$$-\sum_{j=2}^{n} a_{1j}(T_1)\rho_j^\varepsilon u(T_1) - \sum_{k=1}^{m} b_{1k}(T_1)\rho_k^\varepsilon v(T_1) \leqslant$$
$$\leqslant -\tilde{a}_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1) + \sum_{j=2}^{n}|a_{1j}(T_1)||\rho_j^\varepsilon u(T_1)| + \sum_{k=1}^{m}|b_{1k}(T_1)||\rho_k^\varepsilon v(T_1)| \leqslant$$
$$\leqslant -\left(\tilde{a}_{11}(T_1) + \sum_{j=2}^{n}|a_{1j}(T_1)| + \sum_{k=1}^{m}|b_{1k}(T_1)|\right)\rho_1^\varepsilon u(T_1) \leqslant \rho_1^\varepsilon u(T_1).$$

Отож, права частина (2.26) є величиною порядку ε^{N+1}, а ліва в точці T_1 не перевищує $\rho_1^\varepsilon u(T_1)$. Так як $|\rho_1^\varepsilon u(T_1)| = \max\limits_{\overline{\Omega}}|\rho_1^\varepsilon u(x,t)| = O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$, то із (2.25) одержуємо

$$|\rho_2^\varepsilon u(T_2)| = \max_{\overline{\Omega}}|\rho_2^\varepsilon u(x,t)| = O\left(\varepsilon^{N+1}\right), \ldots, \rho_m^\varepsilon v(T_m)| =$$
$$= \max_{\overline{\Omega}}|\rho_m^\varepsilon v(x,t)| = O\left(\varepsilon^{N+1}\right).$$

Звідки випливає

$$\rho_i^\varepsilon u(x,t) = O\left(\varepsilon^{N+1}\right) \quad (i=\overline{1,n}),\ \rho_s^\varepsilon v(x,t) = O\left(\varepsilon^{N+1}\right)\ (s=\overline{1,m}) \quad \forall (x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Отже, взявши до уваги введену заміну, одержуємо бажану оцінку залишкового члена $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$ асимптотичного розвинення (2.21) розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (2.1):

$$R_{iN}^\varepsilon u(x,t) = \rho_i^\varepsilon u(x,t)e^{k(x+t)} = O\left(\varepsilon^{N+1}\right) \quad (i=\overline{1,n}),$$
$$R_{sN}^\varepsilon v(x,t) = \rho_s^\varepsilon v(x,t)e^{k(x+t)} = O\left(\varepsilon^{N+1}\right) \quad (s=\overline{1,m}), \quad (x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Аналогічні міркування справедливі у випадку додатного максимума. Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2.1. *Нехай* N – довільне натуральне число і виконуються умови (H_1) і (H_2). Тоді розв'язок $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (2.1) в області Ω допускає асимптотичне розвинення

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau) + Q_{ih}u(\xi,t)\big] + R_{iN}^\varepsilon u(x,t) \quad (i=\overline{1,n}), \\ v_s^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h \big[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau) + Q_{sh}v(\xi,t)\big] + R_{sN}^\varepsilon v(x,t) \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases}$$

де функції $(\bar{u}_h, \bar{v}_h)$ регулярної частини асимптотики є розв'язками задач (2.18), функції примежових шарів $(P_h u\,,\ P_h v)$ в околі $t=0$ та $(Q_h u\,,\ Q_h v)$ в околі $x=0$ визначаються як розв'язки задач (2.20), (2.15), (2.19), відповідно, а для залишкового члена $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$ асимптотичного розвинення справедливі оцінки

$$|R_{iN}^\varepsilon u(x,t)| \leqslant C_{1i}\varepsilon^{N+1}, \quad |R_{sN}^\varepsilon v(x,t)| \leqslant C_{2s}\varepsilon^{N+1}, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega},$$

$C_{1i}\,,\ C_{2s}$ – незалежні від ε сталі $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$.

2.2. Глобальна розв'язність мішаної задачі для виродженої напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку

У області $\Pi = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ розглядаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u,v,w), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(x,t,u,v,w), \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = h(x,t,u,v,w), \end{cases} \tag{2.27}$$

де $u=(u_1,\dots,u_k)$, $v=(v_1,\dots,v_m)$, $w=(w_1,\dots,w_n)$, $f=(f_1,\dots,f_k)$, $g=(g_1,\dots,g_m)$, $h=(h_1,\dots,h_n)$, $\Lambda(x,t)=\mathrm{diag}(\lambda_1(x,t),\dots,\lambda_l(x,t))$.

Для системи (2.27) задамо початкові умови при $0 \leqslant x \leqslant l$

$$\begin{aligned} u_i(x,0) &= q_i(x), \quad i \in \{1,\dots,k\}, \\ w_s(x,0) &= r_s(x), \quad s \in \{1,\dots,n\}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

та нелінійні крайові умови при $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$
\begin{aligned}
&u_i(0,t) = \gamma_i^0 \Big(t, (u_j(0,t))_{j \in I_l}, w(x,t) \Big), \;\; i \in I_0, \\
&u_i(l,t) = \gamma_l^2 \Big(t, (u_j(l,t))_{j \in \; I_0}, w(x,t) \Big), \;\; i \in I_l, \\
&v_j(0,t) = \psi_j \Big(t, (u_j(0,t))_{j \in I_l}, w(x,t) \Big), \;\; j \in \{1, \dots, m\},
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

де I_0, I_l – множини індексів, що визначаємо таким чином:

$$
I_0 = \{ i \in \{1, \dots, k\} : \lambda_i(0,t) > 0 \}, \quad I_l = \{ i \in \{1, \dots, k\} : \lambda_i(l,t) < 0 \}.
$$

Нехай множини I_0, I_l містять r_0 та r_l елементів, відповідно. Крім того всі задані функції $f : \overline{\Pi} \times \mathbb{R}^{k+m+n} \to \mathbb{R}^k$, $g : \overline{\Pi} \times \mathbb{R}^{k+m+n} \to \mathbb{R}^m$, $h : \overline{\Pi} \times \mathbb{R}^{k+m+n} \to \mathbb{R}^n$, $\lambda_i : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^k$, $\gamma^0 : [0,T] \times \mathbb{R}^{r_l} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_0}$, $\gamma^l : [0,T] \times \mathbb{R}^{r_0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_l}$, $\psi : [0,T] \times \mathbb{R}^{r_l} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – неперервні, а функції λ_i – задовольняють умову Ліпшиця за змінною x, а також $\operatorname{sign}(\lambda_i(0,t)) = \mathrm{const}$, $\operatorname{sign}(\lambda_i(l,t)) = \mathrm{const} \;\; \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

Нехай $\varphi_i(t; x_0, t_0)$, $i \in \{1, \dots, k\}$ розв'язок задачі Коші

$$
\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x,t), \;\; x(t_0) = x_0,
$$

який є характеристиками системи (2.27). Зауважимо, що дана система має також горизонтальні характеристики вигляду $t = t_0$ та вертикальні характеристики $x = x_0$. Через $\chi_i(x_0, t_0)$ позначимо найменше t, для якого в $\overline{\Pi}$ визначений розв'язок $x = \varphi_i(t; x_0, t_0)$.

Уведемо області:

$$
\begin{aligned}
&\Pi_q^i = \{ (x,t) \in \Pi : \chi_i(x,t) = 0 \}, \; i \in \{1, \dots, k\}, \\
&\Pi_0^i = \{ (x,t) \in \Pi : \chi_i(x,t) > 0, \; \varphi_i(\chi_i(x,t); x, t) = 0 \}, \; i \in I_0, \\
&\Pi_l^i = \{ (x,t) \in \Pi : \chi_i(x,t) > 0, \; \varphi_i(\chi_i(x,t); x, t) = l \}, \; i \in I_l.
\end{aligned}
$$

Проінтегрувавши рівняння системи (2.27) вздовж відповідних характеристик, одержимо системи інтегро-операторних рівнянь:

$$u_i(x,t) = F_i[u,v,w](x,t) +$$

$$+ \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i\left(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),v(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),w(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\right)d\tau, \quad (2.30)$$

$$i \in \{1,\ldots,k\},$$

$$v_j(x,t) = \psi_j\left(t,(u_j(0,t))_{j\in I_l}, w(x,t)\right) +$$

$$+ \int\limits_0^x g_j\left(y,t,u(y,t),v(y,t),w(y,t)\right)dy, \qquad j \in \{1,\ldots,m\}, \qquad (2.31)$$

$$w_s(x,t) = w_s(x,0) +$$

$$+ \int\limits_0^t h_s\left(x,\tau,u(x,\tau),v(x,\tau),w(x,\tau)\right)d\tau, \quad s \in \{1,\ldots,n\}, \qquad (2.32)$$

де

$$F_i[u,v,w](x,t) = \begin{cases} q_i(\varphi_i(0;x,t)), & (x,t) \in \Pi_q^i, \\ \gamma_i^0\left(\chi_i(x,t),(u_j(0,\chi_i(x,t)))_{j\in I_l}, w(x,t)\right), & (x,t) \in \Pi_0^i, \\ \gamma_i^l\left(\chi_i(x,t),(u_j(l,\chi_i(x,t)))_{j\in I_0}, w(x,t)\right), & (x,t) \in \Pi_l^i. \end{cases}$$

Означення 2.1. *Узагальненим розв'язком задачі* (2.27)-(2.29) *будемо називати набір функцій* (u,v,w), *компоненти яких належать простору* $C(\overline{\Pi})$ *і задовольняють системи* (2.30)-(2.32).

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови:*

1) *функція* Λ *є неперервною та ліпшицевою на множині* $\overline{\Pi}$ *за змінною* x;

2) f, g, h, q, r, γ^0, γ^l, ψ *є неперервними функціями на відповідних множинах визначення;*

3) *функції* f, g, h, γ^0, γ^l, ψ *є ліпшицевими за змінними* u, v, w *на відповідних множинах;*

4) $q_i(0) = \gamma_i^0(0,(q_j(0))_{j\in I_l},r(0))$ $(i \in I_0)$, $q_i(l) = \gamma_i^l(0,(q_j(l))_{j\in I_0},r(l))$ $(i \in I_l)$, $v_j(0,0) = \psi_j(0,(q_s(0))_{s\in I_l},r(0))$ $(j \in \{1,\ldots,m\})$ *(умови погодження нульового порядку).*

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (2.27)-(2.29).

Доведення. Уведемо метричний простір $\mathcal{Q}$, який складається з неперервних функцій $z = (u, v, w)$, причому компоненти u, v, w належать простору $\mathrm{C}(\overline{\Pi})$, а також виконується обмеження: $u_i(0,0) = q_i(0)$ $(i \in I_0)$ та $u_i(l,0) = q_i(l)$, $i \in I_l$.

Нехай $\{z^1, z^2\} \subset \mathcal{Q}$, тоді на елементах простору $\mathcal{Q}$ визначимо метрику [52, 105]

$$\begin{aligned}\rho(z^1, z^2) = \max\{\max_{i,x,t} |u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)|\alpha_i(x)e^{-at},\ \max_{i,x,t} |v_i^1(x,t) -\\ - v_i^2(x,t)|\beta_i(x)e^{-at},\ \max_{i,x,t} |v_i^1(x,t) - v_i^2(x,t)|\eta_i(x)e^{-at}\},\end{aligned} \tag{2.33}$$

де сталу $a > 0$ і неперервні, додатні функції α_i, β_i, η_i підберемо пізніше.

На елементах простору $\mathcal{Q}$ введемо оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3)$, де оператори $\mathcal{A}^1$, $\mathcal{A}^2$ та $\mathcal{A}^3$ визначені, відповідно, правими частинами рівностей (2.30)-(2.32), а саме

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_i^1[z](x,t) &= F_i[z](x,t) +\\ &+ \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau;x,t), \tau, u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), v(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), w(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\Big)d\tau,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i \in \{1,\dots,k\},\\ \mathcal{A}_j^2[z](x,t) &= \psi_j\Big(t, \big(u_j(0,t)\big)_{j\in I_l}, w(x,t)\Big) +\\ &\qquad + \int\limits_0^x g_j\Big(y, t, u(y,t), v(y,t), w(y,t)\Big)dy, \quad j \in \{1,\dots,m\},\\ \mathcal{A}_s^3[z](x,t) &= w_s(x,0) +\\ &\qquad + \int\limits_0^t h_s\Big(x, \tau, u(x,\tau), v(x,\tau), w(x,\tau)\Big)d\tau, \quad s \in \{1,\dots,n\}.\end{aligned}$$

Через L позначимо спільну сталу в умовах Ліпшиця для функцій f, g, h, ψ, γ^0, γ^l, що записана, наприклад, для f у вигляді

$$\begin{aligned}|f_i(x,t,u^1(x,t),v^1(x,t),w^1(x,t)) - f_i(x,t,u^2(x,t),v^2(x,t),w^2(x,t))| \leqslant\\ \leqslant L\max\Big\{\max_{j,x,t}|u_j^1(x,t) - u_j^2(x,t)|, \max_{j,x,t}|v_j^1(x,t) - v_j^2(x,t)|,\\ \max_{j,x,t}|w_j^1(x,t) - w_j^2(x,t)|\Big\}.\end{aligned}$$

Зауважимо, що з означення метрики для всіх допустимих i, x, t, та $z \in \mathcal{Q}$ випливають співвідношення

$$|u_i^1(x,t) - u_i^2(x,t)| \leqslant \frac{\rho(z^1, z^2)}{\alpha_i(x)} e^{at},$$
$$|v_i^1(x,t) - v_i^2(x,t)| \leqslant \frac{\rho(z^1, z^2)}{\beta_i(x)} e^{at},$$
$$|w_i^1(x,t) - w_i^2(x,t)| \leqslant \frac{\rho(z^1, z^2)}{\eta_i(x)} e^{at}.$$

Покажемо тепер, що оператор $\mathcal{A}$ є стискуючим. Для цього проведемо низку оцінок.

Нехай $z^1 \in \mathcal{Q}$, $z^2 \in \mathcal{Q}$, тоді справедливе співвідношення

$$\left| F_i \left[z^1 \right] (x,t) - F_i \left[z^2 \right] (x,t) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} L \cdot \max \left\{ \max\limits_{j \notin I_0} \dfrac{e^{a\chi_i(x,t)}}{\alpha_j(0)}, \max\limits_{j} \dfrac{e^{a\chi_i(x,t)}}{\eta_j(x)} \right\} \rho\left(z^1, z^2\right), \\ \hfill (x,t) \in \Pi_0^i, \\ L \cdot \max \left\{ \max\limits_{j \notin I_l} \dfrac{e^{a\chi_i(x,t)}}{\alpha_j(l)}, \max\limits_{j} \dfrac{e^{a\chi_i(x,t)}}{\eta_j(x)} \right\} \rho\left(z^1, z^2\right), \\ \hfill (x,t) \in \Pi_l^i. \end{cases} \tag{2.34}$$

Позначимо $\mu = 1/\max\limits_{i,x,t} |\lambda_i(x,t)|$. Якщо виконується перша нерівність оцінки (2.34), то для всіх $i \in I_0$ і $\chi_i(x,t) \leqslant t - \mu x$. Аналогічно, з другої частини нерівності (2.34), то для $i \in I_l$ маємо, що $\chi_i(x,t) \leqslant t - \mu(l - x)$.

На підставі одержаних співвідношень одержуємо оцінки для операторів $\mathcal{A}^1$, $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{A}^3$, відповідно:

$$\left|\mathcal{A}_i^1\left[w^1\right](x,t)-\mathcal{A}_i^1\left[w^2\right](x,t)\right|\cdot\alpha_i(x)e^{-at}\leqslant$$

$$\leqslant L\cdot\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\alpha_j(0)},\max_{\substack{i\in I_l\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\alpha_j(l)},\max_{\substack{i\in I_0\\ j}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\eta_j(x)},\right.$$

$$\left.\max_{\substack{i\in I_l\\ j}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\eta_j(x)}\right\}\cdot\rho\left(w^1,w^2\right)+$$

$$+L\cdot\max\left\{\max_{i,j,y}\frac{\alpha_i(x)}{\alpha_j(y)},\max_{i,j,y}\frac{\alpha_i(x)}{\beta_j(y)},\max_{i,j,y}\frac{\alpha_i(x)}{\eta_j(y)}\right\}\cdot\rho\left(w^1,w^2\right)\int\limits_0^t e^{a(\sigma-t)}d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant L\cdot\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\alpha_j(0)},\max_{\substack{i\in I_l\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\alpha_j(l)},\max_{\substack{i\in I_0\\ j}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\eta_j(x)},\right.$$

$$\left.\max_{\substack{i\in I_l\\ j}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\eta_j(x)}\right\}\cdot\rho\left(w^1,w^2\right)+$$

$$+\frac{L}{a}\cdot\max\left\{\max_{i,j,y}\frac{\alpha_i(x)}{\alpha_j(y)},\max_{i,j,y}\frac{\alpha_i(x)}{\beta_j(y)},\max_{i,j,y}\frac{\alpha_i(x)}{\eta_j(y)}\right\}\cdot\rho\left(w^1,w^2\right),$$

$$\left|\mathcal{A}_i^2\left[z^1\right](x,t)-\mathcal{A}_i^2\left[z^2\right](x,t)\right|\cdot\beta_i(x)e^{-at}\leqslant$$

$$\leqslant\left(L\cdot\max\left\{\max_{i,\,j\notin I_0}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(0)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\eta_i(x)}\right\}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^x L\cdot\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(y)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(y)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\eta_j(y)}\right\}dy\right)\cdot\rho(z^1,z^2).$$

$$\left|\mathcal{A}_i^3\left[z^1\right](x,t)-\mathcal{A}_i^3\left[z^2\right](x,t)\right|\cdot\eta_i(x)e^{-at}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{L}{a}\cdot\max\left\{\max_{i,j,y}\frac{\eta_i(x)}{\alpha_j(y)},\max_{i,j,y}\frac{\eta_i(x)}{\beta_j(y)},\max_{i,j,y}\frac{\eta_i(x)}{\eta_j(y)}\right\}\cdot\rho\left(z^1,z^2\right).$$

З останніх оцінок одержимо, що

$$\rho\Big(\mathcal{A}\left[w^1\right], \mathcal{A}\left[w^2\right]\Big) \leqslant L \cdot \max_x \Bigg\{ \max \Bigg\{ \max_{\substack{i\in I_0\\ j\notin I_0}} \frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\alpha_j(0)},$$

$$\max_{\substack{i\in I_l\\ j\notin I_l}} \frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\alpha_j(l)}, \max_{\substack{i\in I_0\\ j}} \frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\eta_j(x)}, \max_{\substack{i\in I_l\\ j}} \frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\eta_j(x)} \Bigg\} +$$

$$+ \frac{1}{a} \cdot \max \left\{ \max_{i,j,y} \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_j(y)}, \max_{i,j,y} \frac{\alpha_i(x)}{\beta_j(y)}, \max_{i,j,y} \frac{\alpha_i(x)}{\eta_j(y)} \right\} +$$

$$+ \max \left\{ \max_{i,\, j\notin I_0} \frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(0)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x)}{\eta_i(x)} \right\} +$$

$$+ \int_0^x \max \left\{ \max_{i,j} \frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(y)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x)}{\beta_j(y)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x)}{\eta_j(y)} \right\} dy +$$

$$+ \frac{1}{a} \cdot \max \left\{ \max_{i,j,y} \frac{\eta_i(x)}{\alpha_j(y)}, \max_{i,j,y} \frac{\eta_i(x)}{\beta_j(y)}, \max_{i,j,y} \frac{\eta_i(x)}{\eta_j(y)} \right\} \Bigg\} \cdot \rho\left(w^1, w^2\right).$$

Нехай

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} e^{px(l-x)}, & i \in I_0,\ i \in I_l, \\ e^{px}, & i \in I_0,\ i \notin I_l, \\ e^{p(l-x)}, & i \notin I_0,\ i \in I_l, \\ e^{pl}, & i \notin I_0,\ i \notin I_l, \end{cases}$$

$$\beta_i(x) = \varepsilon e^{-px},\ i \in \{1, \ldots, m\}, \quad \eta_i(x) = e^{pl},\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

і справджуються припущення

$$p \leqslant a\mu, \quad p\,l \leqslant a\mu. \tag{2.35}$$

Тоді правильні оцінки:

$$\max_x\left\{\max_{\substack{i\in I_0\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\alpha_j(0)}\right\}=\max_x\left\{\max_{i\in I_0}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{e^{pl}}\right\}=$$

$$=\max_x\left\{e^{px(l-x)}e^{-a\mu x-pl},\ e^{px}e^{-a\mu x-pl}\right\}=e^{-pl};$$

$$\max_x\left\{\max_{\substack{i\in I_l\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\alpha_j(l)}\right\}=\max_x\left\{\max_{i\in I_l}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{e^{pl}}\right\}=$$

$$=\max_x\left\{e^{px(l-x)}e^{-a\mu(l-x)-pl},\ e^{p(l-x)}e^{-a\mu(l-x)-pl}\right\}=e^{-pl};$$

$$\max_x\left\{\max_{\substack{i\in I_0\\ j}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\eta_j(x)}\right\}=\max_x\left\{\max_{i\in I_0}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{e^{pl}}\right\}=$$

$$=\max_x\left\{e^{px(l-x)}e^{-a\mu x-pl},\ e^{px}e^{-a\mu x-pl}\right\}=e^{-pl};$$

$$\max_x\left\{\max_{i\in I_l}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\eta_j(x)}\right\}=\max_x\left\{\max_{i\in I_l}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{e^{pl}}\right\}=$$

$$=\max_x\left\{e^{px(l-x)}e^{-a\mu(l-x)-pl},\ e^{p(l-x)}e^{-a\mu(l-x)-pl}\right\}=e^{-pl}.$$

Також виконуються такі співвідношення:

$$\max_x\left\{\max_{i,j\notin I_l}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(0)}\right\}=\max_x\frac{\varepsilon e^{-px}}{e^{pl}}=\varepsilon\max_x e^{-px-pl}=\varepsilon e^{-pl};$$

$$\max_x\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\eta_j(x)}\right\}=\max_x\frac{\varepsilon e^{-px}}{e^{pl}}=\varepsilon\max_x e^{-px-pl}=\varepsilon e^{-pl};$$

$$\max_x\int\limits_0^x\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(y)}dy\leqslant\max_x\int\limits_0^x\varepsilon e^{-px}dy\leqslant\max_x\left\{\varepsilon e^{-px}x\right\}\leqslant\varepsilon l;$$

$$\max_x\int\limits_0^x\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(y)}dy=\max_x\int\limits_0^x\frac{\varepsilon e^{-px}}{\varepsilon e^{-py}}dy=$$

$$=\max_x\int\limits_0^x e^{p(y-x)}dy=\max_x\frac{1-e^{-px}}{p}\leqslant\frac{1}{p};$$

$$\max_x\int\limits_0^x\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\eta_j(y)}dy\leqslant\max_x\int\limits_0^x\frac{\varepsilon e^{-px}}{e^{pl}}dy\leqslant\max_x\left\{\varepsilon e^{-px-pl}x\right\}\leqslant\varepsilon le^{-pl}.$$

У підсумку одержимо нерівність

$$\rho\Big(\mathcal{A}\left[w^1\right], \mathcal{A}\left[w^2\right]\Big) \leqslant L \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \max_x \left\{ \max_{i,j,y} \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_j(y)}, \max_{i,j,y} \frac{\alpha_i(x)}{\beta_j(y)}, \max_{i,j,y} \frac{\alpha_i(x)}{\eta_j(y)} \right\} + \right.$$

$$+ \frac{1}{a} \cdot \max_x \left\{ \max_{i,j,y} \frac{\eta_i(x)}{\alpha_j(y)}, \max_{i,j,y} \frac{\eta_i(x)}{\beta_j(y)}, \max_{i,j,y} \frac{\eta_i(x)}{\eta_j(y)} \right\} +$$

$$\left. + \varepsilon(1+l) + (\varepsilon l + 1)e^{-pl} + \frac{1}{p} \right) \cdot \rho\left(w^1, w^2\right).$$

Фіксуємо значення параметра ε достатньо малим, а параметр p достатньо великим, щоб задовольнити умову

$$L \cdot \left(\varepsilon(1+l) + (\varepsilon l + 1)e^{-pl} + \frac{1}{p} \right) < \frac{1}{2}.$$

Тоді функції α_i, β_i, η_i є визначеними, а

$$\max_x \left\{ \max_{i,j,y} \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_j(y)}, \max_{i,j,y} \frac{\alpha_i(x)}{\beta_j(y)}, \max_{i,j,y} \frac{\alpha_i(x)}{\eta_j(y)} \right\} \equiv M,$$

$$\max_x \left\{ \max_{i,j,y} \frac{\eta_i(x)}{\alpha_j(y)}, \max_{i,j,y} \frac{\eta_i(x)}{\beta_j(y)}, \max_{i,j,y} \frac{\eta_i(x)}{\eta_j(y)} \right\} \equiv K,$$

де M і K сталі. Насамкінець, фіксуємо значення параметра a достатньо великим, щоб задовольнити умови (2.35) та нерівність

$$\frac{L(M+K)}{a} < \frac{1}{2}.$$

Отже оператор $\mathcal{A}$ є стискуючим на елементах простору $\mathcal{Q}$ з вибраними функціями α_i, β_i, η_i та параметром a.

Таким чином, за теоремою Банаха про стискуюче відображення існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в просторі $\mathcal{Q}$, яка є узагальненим неперервним розв'язком задачі (2.27)-(2.29). Теорема 2.2 доведена.

$\square$

Зауваження 2.1. Підвищуючи гладкість вихідних даних задачі (2.27)-(2.29) можна сформулювати відповідну теорему про її глобальну класичну коректність у всій області Π.

2.3. Задача з малим параметром при похідних у гіперболічній системі напівлінійних рівнянь першого порядку

У цьому підрозділі розглянуто задачу з малим параметром для гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку. У виродженому випадку задачі ($\varepsilon = 0$) одержуємо задачу з горизонтальними та вертикальними характеристиками [33,69], яка є частинним випадком задачі із підрозділу 2.2, де встановлено її гладку глобальну коректну розв'язність.

2.3.1. Формулювання задачі

В області $\Omega = \{(x, t) : \ 0 < x < l, \ 0 < t < T < \infty\}$ розглянемо систему рівнянь першого порядку з малим параметром

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = F_i(x, t, u, v; \varepsilon) \quad (i = \overline{1, n}), \\ \dfrac{\partial v_s}{\partial t} + \varepsilon \dfrac{\partial v_s}{\partial x} = G_s(x, t, u, v; \varepsilon) \quad (s = \overline{1, m}), \end{cases} \tag{2.36a}$$

$$\begin{cases} u_i(x, 0; \varepsilon) = u_i(0, t; \varepsilon) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant T \ \ (i = \overline{1, n}), \\ v_s(x, 0; \varepsilon) = v_s(0, t; \varepsilon) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant T \ \ (s = \overline{1, m}). \end{cases} \tag{2.36b}$$

Використовуючи результати підрозділу 2.2., за певних, наведених нижче, умов гладкості на вихідні дані та умов погодження в точці $(0, 0)$ для розв'язку задачі (2.36) побудуємо гладку асимптотику довільного порядку.

Розглядаємо класичний розв'язок задачі (2.36), тобто розв'язок, який неперервний в $\overline{\Omega}$ і має неперервні похідні першого порядку в Ω, що задовольняють систему (2.36a), а також крайові умови (2.36b). Вимагатимемо також, щоб крайові умови (2.36b) для u_i $(i = \overline{1, n})$, v_s $(s = \overline{1, m})$ погоджувались до неперервності в кутовій точці (0,0) а також задовольняли систему (2.36a) у цій точці, що приводить для всіх $\varepsilon > 0$ до виконання умов:

$(\tilde{\mathrm{H}}_1)$
$$F_i(0, 0, 0, 0; \varepsilon) = 0 \quad (i = \overline{1, n}),$$
$$G_s(0, 0, 0, 0; \varepsilon) = 0 \quad (s = \overline{1, m}).$$

$(\tilde{\mathrm{H}}_2)$ Функції F_i і $G_s : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ є $N + 2$ рази неперервно диференційовні в $\overline{\Omega}$ за всіма змінними, N – довільне натуральне число.

Особливість розв'язку задачі (2.36) і його асимптотики полягає в тому, що він має примежовий характер в околі відрізків $\{(x,t):\ 0 \leqslant x \leqslant l, t=0\}$ і $\{(x,t):\ x=0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, оскільки при $\varepsilon = 0$ в перших n рівняннях залишається лише похідна $\partial u/\partial x$, а в решти m рівняннях $\partial v/\partial t$. Тому для виродженої системи (при $\varepsilon = 0$) із $2(n+m)$ крайових умов залишаються тільки $n+m$, а саме:

$$\begin{aligned} &u_i(0,t;0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \quad (i=\overline{1,n}),\\ &v_s(x,0;0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \quad (s=\overline{1,m}). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Розв'язок (u_i, v_s) виродженої системи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = F_i(x,t,u,v;0) \qquad (i=\overline{1,n}),\\ \dfrac{\partial v_s}{\partial t} = G_s(x,t,u,v;0) \qquad (s=\overline{1,m}) \end{cases}$$

не задовольняє решти $n+m$ крайових умов

$$\begin{aligned} &u_i(x,0;0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \quad (i=\overline{1,n}),\\ &v_s(0,t;0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \quad (s=\overline{1,m}). \end{aligned}$$

Інша характерна особливість задачі полягає у тому, що хоча примежові функції визначаються як розв'язки рівнянь з частинними похідними першого порядку, а межа, на якій задано крайові умови, містить кутову точку (0,0), що впливає на гладкість розв'язку, тим не менше, можна побудувати асимптотику розв'язку довільного порядку N, рівномірну у $\overline{\Omega}$, тільки за умов погодження $(\tilde{\mathrm{H}}_1)$.

Підкреслимо, що нелінійність правих частин в системі (2.36а) значно ускладнює обгрунтування асимптотики порівняно з лінійним випадком (2.1).

2.3.2. Побудова асимптотичного розвинення задачі

Аналогічно як і в мішаній задачі для системи лінійних рівнянь (2.1), асимптотику розв'язку задачі (2.36) для $(x,t) \in \Omega$ будуємо у вигляді суми функцій регулярної частини та двох примежових шарів

$$\begin{cases} u_i(x,t;\varepsilon) = \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h [\bar{u}_{ih}(x,t) + P^u_{ih}(x,\tau) + Q^u_{ih}(\xi,t)] \quad (i=\overline{1,n}),\\ v_s(x,t;\varepsilon) = \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h [\bar{v}_{sh}(x,t) + P^v_{sh}(x,\tau) + Q^v_{sh}(\xi,t)] \quad (s=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{2.38}$$

Підставимо (2.38) в систему (2.36a) та крайові умови (2.36b). Уведемо позначення:

$$\bar{u}(x,t;\varepsilon)=(\bar{u}_1(x,t;\varepsilon),\bar{u}_2(x,t;\varepsilon),\dots,\bar{u}_n(x,t;\varepsilon)),$$
$$\bar{v}(x,t;\varepsilon)=(\bar{v}_1(x,t;\varepsilon),\bar{v}_2(x,t;\varepsilon),\dots,\bar{v}_m(x,t;\varepsilon)),$$
$$F_i=\bar{F}_i+PF_i+QF_i,\quad G_s=\bar{G}_s+PG_s+QG_s,$$

де

$$\begin{aligned}
\bar{F}_i &= F_i(\bar{u},\bar{v},x,t;\varepsilon)=F_{i0}+\varepsilon\bar{F}_{i1}+\ldots+\varepsilon^r\bar{F}_{ir}+\ldots,\\
PF_i &= F_i\left(\bar{u}(x,\varepsilon\tau)+P^u(x,\tau),\bar{v}(x,\varepsilon\tau)+P^v(x,\tau),x,\varepsilon\tau;\varepsilon\right)-\\
&\quad -F_i\left(\bar{u}(x,\varepsilon\tau),\bar{v}(x,\varepsilon\tau),x,\varepsilon\tau;\varepsilon\right)=PF_{i0}+\varepsilon PF_{i1}+\ldots+\varepsilon^r PF_{ir}+\ldots,\\
QF_i &= F_i\left(\bar{u}(\varepsilon\xi,t)+Q^u(\xi,t),\bar{v}(\varepsilon\xi,t)+Q^v(\xi,t),\varepsilon\xi,t;\varepsilon\right)-\\
&\quad -F_i\left(\bar{u}(\varepsilon\xi,t),\bar{v}(\varepsilon\xi,t),\varepsilon\xi,t;\varepsilon\right)=QF_{i0}+\varepsilon QF_{i1}+\ldots+\varepsilon^r QF_{ir}+\ldots.
\end{aligned}$$

Аналогічно можна записати функції $\bar{G}_s, PG_s, QG_s$.

Задачі для коефіцієнтів асимптотичного розвинення (2.38) одержуємо стандартним способом теорії сингулярних збурень [21].

Перейдемо до побудови головних членів асимптотики. Регулярну частину асимптотики для всіх $(x,t)\in\Omega$ будуємо у вигляді:

$$u_i(x,t)\sim\bar{u}_{i0}(x,t)\quad(i=\overline{1,n}),\qquad v_s(x,t)\sim\bar{v}_{s0}(x,t)\quad(s=\overline{1,m}),\tag{2.39}$$

для якої, позначивши

$$\bar{u}_0(x,t)=(\bar{u}_{10}(x,t),\bar{u}_{20}(x,t),\dots,\bar{u}_{n0}(x,t)),$$
$$\bar{v}_0(x,t)=(\bar{v}_{10}(x,t),\bar{v}_{20}(x,t),\dots,\bar{v}_{m0}(x,t)),$$

одержимо задачу

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\bar{u}_{i0}}{\partial x}=\bar{F}_{i0}\equiv F_{i0}(\bar{u}_0(x,t),\bar{v}_0(x,t),x,t;0) & (i=\overline{1,n}),\\
\dfrac{\partial\bar{v}_{s0}}{\partial t}=\bar{G}_{s0}\equiv G_{s0}(\bar{u}_0(x,t),\bar{v}_0(x,t),x,t;0) & (s=\overline{1,m}),\\
\bar{u}_{i0}(0,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T & (i=\overline{1,n}),\\
\bar{v}_{s0}(x,0)=0,\quad \leqslant x\leqslant l & (s=\overline{1,m}).
\end{cases}\tag{2.40}$$

Виходячи з підрозділу 2.2., задача (2.40), за вказаних вище припущень, має єдиний класичний розв'язок $(\bar{u}_{i0}, \bar{v}_{s0})$ $(i = \overline{1,n}, s = \overline{1,m})$ у всій області Ω [69].

З формулювання задачі для визначення $\bar{u}_{i0}$, $\bar{v}_{s0}$, які є наближенням розв'язку задачі (2.36), очевидно, не всі умови виконуються.

Підправимо (2.39) функцією примежового шару так, щоб виконувалась перша умова (2.36b):

$$\begin{cases} u_i(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) & (i = \overline{1,n}), \\ v_s(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) + Q^v_{s0}(\xi,t) & (s = \overline{1,m}) \end{cases} \tag{2.41}$$

з регуляризуючою змінною

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Розвинемо праві частини системи (2.36a) в ряд за степенями ε і підставимо (2.41) у систему (2.36a) та крайові умови (2.36b), прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε. Отож, одержимо задачу для визначення Q^v_{s0} $(s = \overline{1,m})$:

$$\frac{\partial Q^v_{s0}}{\partial t} + \frac{\partial Q^v_{s0}}{\partial \xi} = QG_{s0} \equiv G_s(\bar{u}_0(0,t), \bar{v}_0(0,t) + Q^v_0(\xi,t), 0, t; 0) -$$

$$- G_s(\bar{u}_0(0,t), \bar{v}_0(0,t), 0, t; 0), \quad (\xi,t) \in D_\xi = \{\xi > 0, 0 < t < T\}, \tag{2.42a}$$

$$\begin{cases} Q^v_{s0}(\xi,0) = 0, & \xi \geqslant 0, \\ Q^v_{s0}(0,t) = -\bar{v}_{s0}(0,t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2.42b}$$

де $Q^v_0(x,t) = (Q^v_{10}(x,t), Q^v_{20}(x,t), \dots, Q^v_{m0}(x,t))$. У підобласті $D_\infty = \{\xi \geqslant t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ розв'язок $Q^v_{s0}(\xi,t)$ визначається крайовою умовою $Q^v_{s0}(\xi,0) = 0$, тому в цій підобласті функція $Q^v_{s0}(\xi,t) \equiv 0$. А в підобласті $D_0 = \{0 \leqslant \xi \leqslant t \leqslant T\}$ розв'язок $Q^v_{s0}(\xi,t)$ визначається крайовою умовою $Q^v_{s0}(0,t) = -\bar{v}_{s0}(0,t)$ [69].

Отже, для визначення функцій примежового шару Q^v_{s0} одержано крайові задачі в горизонтальній півсмузі для системи гіперболічних рівнянь першого порядку. Гладкість розв'язків задач (2.42) залежить від виконання умов погодження в кутовій точці. Перевіримо виконання умов погодження нульового та першого порядків розв'язків Q^v_{s0} у кутовій точці $(0,0)$. Для цього необхідно виконання рівності

$$Q^v_{s0}(\xi,0)|_{\xi=0} = Q^v_{s0}(0,t)|_{t=0} \quad (s = \overline{1,m}).$$

Очевидним є те, що ліва частина рівності дорівнює нулеві в кутовій точці, а, використавши початкову умову (6), одержимо

$$0 = -\bar{v}_{s0}(0,t)|_{t=0} = 0 \quad (s = \overline{1,m}).$$

Перейдемо до перевірки умови погодження першого порядку. Для цього повинна виконуватись рівність

$$\left.\frac{\partial Q^v_{s0}}{\partial t}\right|_{(0,0)} + \left.\frac{\partial Q^v_{s0}}{\partial \xi}\right|_{(0,0)} = G_s(\bar{u}_0(0,t), \bar{v}_0(0,t) + Q^v_0(\xi,t), 0, t; 0)\big|_{(0,0)} - \\ - G_s(\bar{u}_0(0,t), \bar{v}_0(0,t), 0, t; 0)\big|_{(0,0)}.$$

Використавши умову (2.42b), залишилось показати, що $\partial\bar{v}_{s0}/\partial t|_{t=0} = 0$. З умов (2.40) одержимо $\partial\bar{v}_{s0}/\partial t|_{(0,0)} = G_{s0}(0,0,0,0;0)$, а права частина рівності дорівнює нулю, що випливає з умови $(\tilde{\mathrm{H}}_1)$.

Доведемо, що функції Q^v_{s0} $(s = \overline{1,m})$ мають примежовий характер. Справді, на підставі однорідності крайової умови (2.42b), функція Q^v_{s0} нижче характеристики $\xi = x$ рівняння (2.42a) приймає нульові значення. При $\varepsilon \to 0$ характеристика наближається до вертикального положення, тобто функція Q^v_{s0} відмінна від нуля вздовж межі $x = 0$ області Ω.

Завершимо побудову нульового наближення розв'язку задачі (2.36a), (2.36b) знаходженням примежового шару в оточенні межі $t = 0$ області Ω. За допомогою цієї функції скоригуємо розв'язок $(\bar{u}_{i0}, \bar{v}_{s0})$ так, щоб виконувалась крайова умова при $t = 0$, а тому u_i, v_s матимуть вигляд

$$\begin{cases} u_i(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) + P^u_{i0}(x,\tau) \quad (i = \overline{1,n}), \\ v_s(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) + Q^v_{s0}(\xi,t) \quad (s = \overline{1,m}). \end{cases} \tag{2.43}$$

Уведемо тепер ще одну регуляризуючу змінну

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

підставивши (2.43) у систему (2.36a) і прирівнявши коефіцієнти при найнижчих степенях ε, одержимо задачу для P^u_{i0} $(i = \overline{1,n})$

$$\frac{\partial P^u_{i0}}{\partial \tau} + \frac{\partial P^u_{i0}}{\partial x} = PF_{i0} \equiv F_i(\bar{u}_0(x,0) + P^u_0(x,\tau), \bar{v}_0(x,0), x, 0, 0) - \\ - F_i(\bar{u}_0(x,0), \bar{v}_0(x,0), x, 0, 0),\ (x,t) \in S_\tau = \{0 < x < l, \tau > 0\}, \tag{2.44a}$$

$$\begin{cases} P^u_{i0}(0,\tau) = 0, & \tau \geqslant 0, \\ P^u_{i0}(x,0) = -\bar{u}_{i0}(x,0), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{2.44b}$$

Очевидно, що $P^u_{i0} \equiv 0$ у підобласті $S_\infty = \{0 \leqslant x \leqslant l, \tau \geqslant x\}$ області S, а для іншої підобласті $S_0 = \{0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant \tau \leqslant x\}$ рівняння (2.44a) з крайовою умовою $P^u_{i0}(x,0) = -\bar{u}_{i0}(x,0)$ $(i = \overline{1,n})$ має єдиний розв'язок [69].

Для продовження побудови асимптотики нульового порядку розв'язку задачі (2.36) необхідно зберігати достатню гладкість наближень, що досягається виконанням умов погодження нульового і першого порядків для задачі (2.44) і доводиться аналогічно як у задачі для Q^v_0.

Асимптотичне розвинення першого порядку розв'язку (u,v) задачі (2.36) ($i = \overline{1,n}, s = \overline{1,m}$) у області Ω будуємо у вигляді

$$\begin{cases} u_i(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) + P^u_{i0}(x,\tau) + \varepsilon\left(\bar{u}_{i1}(x,t) + P^u_{i1}(x,\tau) + Q^u_{i1}(\xi,t)\right), \\ v_s(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) + Q^v_{s0}(\xi,t) + \varepsilon\left(\bar{v}_{s1}(x,t) + P^v_{s1}(x,\tau) + Q^v_{s1}(\xi,t)\right). \end{cases} \tag{2.45}$$

Підставляємо (2.45) в систему (2.36). Тоді задача для кожної функції Q^u_{i1} $(i = \overline{1,n})$ матиме вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q^u_{i1}}{\partial \xi} = QF_{i0} \equiv F_i\left(\bar{u}_0(0,t), \bar{v}_0(0,t) + Q^v_0(\xi,t), 0, t; 0\right) - \\ \qquad\qquad - F_i\left(\bar{u}_0(0,t), \bar{v}_0(0,t), 0, t; 0\right), & (\xi,t) \in D_\xi, \\ Q^u_{i1}(\infty,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Враховуючи умову $Q^v_{s0}(\xi,t) = 0$ при $\xi \geqslant t$ $(s = \overline{1,m})$, після інтегрування рівняння для Q^u_{i1} $(i = \overline{1,n})$, одержимо представлення

$$Q^u_{i1}(\xi,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_t^\xi QF_{i0}(Q^v_0(\varsigma,t),t)d\varsigma, & (\xi,t) \in D_0, \\ 0, & (\xi,t) \in D_\infty. \end{cases} \tag{2.46}$$

Аналогічно для P^v_{s1} $(s = \overline{1,m})$, використавши що $P^u_{i0}(x,\tau) = 0$, для $\tau \geqslant x$ $(i = \overline{1,n})$, одержимо

$$P^v_{s1}(x,\tau) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^\tau PG_{s0}(P^u_0(x,s),x)ds, & (x,\tau) \in S_0, \\ 0, & (x,\tau) \in S_\infty. \end{cases} \tag{2.47}$$

Запишемо рівняння для знаходження регулярних членів першого наближення $\bar{u}_{i1}$ $(i=\overline{1,n})$ і $\bar{v}_{s1}$ $(s=\overline{1,m})$ у області Ω:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_{i1}}{\partial x} & = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} F_{iu}(\bar{u}_0(x,t),\bar{v}_0(x,t),x,t;0)\cdot \bar{u}_{j1}(x,t)+ \\ & + \displaystyle\sum_{l=1}^{m} F_{iv}(\bar{u}_0(x,t),\bar{v}_0(x,t),x,t;0)\cdot \bar{v}_{l1}(x,t)+\bar{f}_{i1}(x,t), \\ \dfrac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t} & = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} G_{su}(\bar{u}_0(x,t),\bar{v}_0(x,t),x,t;0)\cdot \bar{u}_{j1}(x,t)+ \\ & + \displaystyle\sum_{l=1}^{m} G_{sv}(\bar{u}_0(x,t),\bar{v}_0(x,t),x,t;0)\cdot \bar{v}_{l1}(x,t)+\bar{g}_{s1}(x,t), \end{cases} \tag{2.48}$$

де $\bar{f}_{i1}(x,t) = F_{i\varepsilon}\ (\bar{u}_0(x,t),\bar{v}_0(x,t),x,t;0) - \dfrac{\partial \bar{u}_{i0}}{\partial t}$ $(i=\overline{1,n})$, $\bar{g}_{s1}(x,t) = G_{s\varepsilon}(\bar{u}_0(x,t),\bar{v}_0(x,t),x,t;0) - \dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial x}$ $(s=\overline{1,m})$, а знайдені функції Q_{i1}^u і P_{s1}^v дозволяють задати крайові умови

$$\begin{cases} \bar{u}_{i1}(0,t) = -Q_{i1}^u(0,t) \quad (i=\overline{1,n}), \\ \bar{v}_{s1}(x,0) = -P_{s1}^v(x,0) \quad (s=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{2.49}$$

Задачу (2.48),(2.49), аналогічно як і задачу (2.40), можемо розв'язати, звівши до системи інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду.

Для Q_{s1}^v $(s=\overline{1,m})$ одержимо задачу

$$\frac{\partial Q_{s1}^v}{\partial t}+\frac{\partial Q_{s1}^v}{\partial \xi} = Q_{s1}G \equiv \sum_{l=1}^{m} G_{sv}(\xi,t)Q_{l1}^v + q_{s1}(\xi,t), \quad (\xi,t)\in D_\xi, \tag{2.50a}$$

$$\begin{cases} Q_{s1}^v(\xi,0)=0, & \xi \geqslant 0, \\ Q_{s1}^v(0,t) = -\bar{v}_{s1}(0,t), & 0\leqslant t\leqslant T, \end{cases} \tag{2.50b}$$

де

$$q_{s1}(\xi,t) = G_{su}(\xi,t)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\bar{u}_{j0}}{\partial x}(0,t)\xi + \bar{u}_{j1}(0,t) + Q^u_{j1}(\xi,t)\right) +$$
$$+ G_{sv}(\xi,t)\cdot\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial\bar{v}_{l0}}{\partial x}(0,t)\xi + \bar{v}_{l1}(0,t)\right) + G_{sx}(\xi,t)\xi + G_{s\varepsilon}(\xi,t) -$$
$$- \bar{G}_{su}(0,t)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\bar{u}_{j0}}{\partial x}(0,t)\xi + \bar{u}_{j1}(0,t)\right) -$$
$$- \bar{G}_{sv}(0,t)\cdot\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial\bar{v}_{l0}}{\partial x}(0,t)\xi + \bar{v}_{l1}(0,t)\right) - \bar{G}_{sx}(0,t)\xi - \bar{G}_{s\varepsilon}(0,t).$$

Зауважимо, що похідні $G_{su}\,(\xi,t)$, $G_{sv}\,(\xi,t)$, $G_{sx}(\xi,t)$, $G_{s\varepsilon}(\xi,t)$ обчислено у точці $(\bar{u}_0(0,t),\ \bar{v}_0(0,t)+Q^v_0(\xi,t),0,t;0)$, а похідні $\bar{G}_{su}(0,t)$, $\bar{G}_{sv}(0,t)$, $\bar{G}_{sx}(0,t)$, $\bar{G}_{s\varepsilon}(0,t)$ – у точці $(\bar{u}_0(0,t),\ \bar{v}_0(0,t),0,t;0)$.

Оскільки система (2.50a) не є однорідною, то для існування класичного розв'язку задачі необхідно, щоб виконувались не лише умови погодження нульового та першого порядків в кутовій точці (0,0), але і відповідна гладкість функції $q_{s1}(\xi,t)$, тобто існування її неперервних похідних першого порядку. Але частинні похідні існують, на підставі умови $(\tilde{\mathrm{H}}_2)$ і гладкості функцій Q^v_{s0}, Q^u_{i1} у області D_ξ.

Доведемо, що виконуються умови погодження нульового порядку:

$$Q^v_{s1}(\xi,0)|_{\xi=0} = Q^v_{s1}(0,t)|_{t=0} \quad (s=\overline{1,m}).$$

Із однорідної крайової умови (2.40) одержуємо, що $Q^v_{s1}(0,t)|_{t=0} = 0$. Тоді послідовно використавши (2.49) та другу умову (2.44b), одержимо

$$0 = -\bar{v}_{s1}(0,t)|_{t=0} = -P^v_{s1}(x,0)|_{x=0} = 0 \quad (s=\overline{1,m}).$$

Тому крайові умови системи (2.50b) погоджені до неперервності в кутовій точці (0,0).

Розв'язок задачі (2.50) матиме неперервні частинні похідні за змінними ξ та t у області D_ξ, якщо виконуватиметься рівність

$$\frac{\partial Q^v_{s1}}{\partial t}\Big|_{(0,0)} + \frac{\partial Q^v_{s1}}{\partial \xi}\Big|_{(0,0)} = \sum_{l=1}^{m} G_{sv}\cdot Q^v_{l1}\big|_{(0,0)} + q_{s1}\big|_{(0,0)} \quad (s=\overline{1,m}).$$

Використавши умови (2.50b), (2.42b) та вигляд (2.46), прийдемо до рівності

$$0 - \frac{\partial\bar{v}_{s1}}{\partial t}|_{(0,0)} = \sum_{l=1}^{m} G_{sv}\cdot 0 + 0 \quad (s=\overline{1,m}).$$

Залишилось показати, що похідна $\bar{v}_{s1}$ за змінною t у кутовій точці рівна нулеві. Обчисливши рівняння системи (2.48) стосовно $\bar{v}_{s1}$ у кутовій точці, одержимо

$$\frac{\partial \bar{v}_{s1}}{\partial t}\Big|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} G_{su} \cdot \bar{u}_{j1}|_{(0,0)} + \sum_{l=1}^{m} G_{sv} \cdot \bar{v}_{l1}|_{(0,0)} + \bar{g}_{s1}|_{(0,0)} = 0 \quad (s = \overline{1,m}),$$

а із $(\tilde{H}_1)$ і (2.37) маємо, що $\bar{g}_{s1}(0,0) = G_{s\varepsilon}(0,0) - \partial \bar{v}_{s0}(0,0)/\partial x = 0$. Те, що $v_{s1}|_{(0,0)} = -P^v_{s1}(0,0) = 0$, одержано з умов (2.49) та (2.47). Оскільки виконуються (2.49) та (2.46), то $u_{i1}|_{(0,0)} = -Q^u_{i1}(0,0) = 0$. Отже, всі умови для існування класичного розв'язку задачі (2.50) виконуються.

Для P^u_{i1} $(i = \overline{1,n})$ задача матиме вигляд

$$\frac{\partial P^u_{i1}}{\partial t} + \frac{\partial P^u_{i1}}{\partial \xi} = P_{i1}F \equiv \sum_{j=1}^{n} F_{iu}(x,\tau) P^u_{j1} + p_{i1}(x,\tau), \quad (x,\tau) \in S_\tau, \tag{2.51a}$$

$$\begin{cases} P^u_{i1}(0,\tau) = 0, & \tau \geqslant 0, \\ P^u_{i1}(x,0) = -\bar{u}_{i1}(x,0), & 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \tag{2.51b}$$

де для всіх $i = \overline{1,n}$

$$\begin{aligned} p_{i1}(x,\tau) = F_{iv}(x,\tau) \sum_{l=1}^{m} \left(\tau \frac{\partial \bar{v}_{l0}}{\partial t}(x,0) + \bar{v}_{l1}(x,0) + P^v_{l1}(x,\tau) \right) + \\ + F_{iu}(x,\tau) \sum_{j=1}^{n} \left(\tau \frac{\partial \bar{u}_{j0}}{\partial t}(x,0) + \bar{u}_{j1}(x,0) \right) + \tau F_{it}(x,\tau) + F_{i\varepsilon}(x,\tau) - \\ - \bar{F}_{iv}(x,0) \sum_{l=1}^{m} \left(\tau \frac{\partial \bar{v}_{l0}}{\partial t}(x,0) + \bar{v}_{l1}(x,0) \right) - \\ - \bar{F}_{iu}(x,0) \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{u}_{j0}}{\tau\, \partial t}(x,0) + \bar{u}_{j1}(x,0) \right) - \tau \bar{F}_{it}(x,0) - \bar{F}_{i\varepsilon}(x,0). \end{aligned}$$

Зауважимо, що похідні $F_{iv}(x,\tau)$, $F_{iu}(x,\tau)$, $F_{it}(x,\tau)$, $F_{i\varepsilon}(x,\tau)$ обчислено в точці $(\bar{u}_0(x,0) + P^u_0(x,\tau),\ \bar{v}_0(x,0), x, 0; 0)$, а похідні $\bar{F}_{iu}(x,0)$, $\bar{F}_{iv}(x,0)$, $\bar{F}_{it}(x,0)$, $\bar{F}_{i\varepsilon}(x,0)$ – в точці $(\bar{u}_0(x,0),\ \bar{v}_0(x,0), x, 0; 0)$. А також $P^u_{i1} \equiv 0$ в підобласті S_∞. Як і в задачі (2.50) можна провести аналогічні міркування і довести існування класичного розв'язку задачі (2.51) для функції P^u_{i1}.

Отже, побудовано всі члени асимптотики першого наближення, які є гладкими функціями своїх аргументів.

Повне асимптотичне розвинення розв'язку (u_i, v_s) задачі (2.36) будуємо у вигляді (2.38). Опишемо алгоритм визначення функцій асимптотичного наближення довільного порядку $h > 1$. Допоміжні задачі одержимо стандартним способом теорії сингулярних збурень [21], аналогічно як вище, тому пропустимо опис способу їх одержання.

Спочатку визначаємо функції $Q_h^u = (Q_{1h}^u, \ldots, Q_{nh}^u)$ як розв'язки задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_{ih}^u}{\partial \xi} = q_{ih}^u(\xi, t), \quad \xi > 0,\ 0 < t < T, \\ Q_{ih}^u(\infty, t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \quad (i = \overline{1,n}), \end{cases} \tag{2.52}$$

де

$$q_{ih}^u(\xi, t) = QF_{i,h-1} - \frac{\partial Q_{i,\,h-2}^u}{\partial t} \quad (i = \overline{1,n}),$$

а ξ – вище задане регуляризуюче перетворення. Функції $q_{ih}^u(\xi, t)$ $(i = \overline{1,n})$ є відомими неперервними і рівні нулеві під характеристикою $\xi = t$, що випливає з їх структури. Тому розв'язок Q_{ih}^u задач (2.52) для кожного $i = \overline{1,n}$ запишемо в явному вигляді

$$Q_{ih}^u(\xi, t) = \begin{cases} \displaystyle\int_t^\xi q_{ih}^u(\zeta, t)\, d\zeta, & (\xi, t) \in D_0, \\ 0, & (\xi, t) \in D_\infty. \end{cases} \tag{2.53}$$

Розв'язок задачі для P_{sh}^v із умовами $P_{sh}^v(x, \infty) = 0$ $(s = \overline{1,m})$ також можна записати у явному вигляді

$$P_{sh}^v(x, \tau) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^\tau p_{sh}^v(x, \vartheta) d\vartheta, & (x, \tau) \in S_0, \\ 0, & (x, \tau) \in S_\infty, \end{cases} \tag{2.54}$$

де $p_{sh}^v(x, \tau) = PG_{s,h-1} - \dfrac{\partial P_{s,\,h-2}^v}{\partial x}$ $(s = \overline{1,m})$ – відомі неперервні функції, рівні нулеві над характеристикою $\tau = x$.

Зазначимо, що гладкість функцій Q_{ih}^u і P_{sh}^v $(i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m})$, зокрема, і на характеристиках $\xi = t$ та $x = \tau$, відповідно, випливає безпосередньо із їх структури.

Функції регулярної частини асимптотики $(\bar{u}_h, \bar{v}_h)$ у області Ω задовольняють систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_{ih}}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} F_{iu}(x,t)\bar{u}_{jh} + \sum\limits_{l=1}^{m} F_{iv}(x,t)\bar{v}_{lh} + \bar{f}_{ih}(x,t) \quad (i=\overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial \bar{v}_{sh}}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} G_{su}(x,t)\bar{u}_{jh} + \sum\limits_{l=1}^{m} G_{sv}(x,t)\bar{v}_{lh} + \bar{g}_{sh}(x,t) \quad (s=\overline{1,m}) \end{cases} \tag{2.55a}$$

та умови

$$\begin{cases} \bar{u}_{ih}(0,t) = -Q^{u}_{ih}(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \quad (i=\overline{1,n}), \\ \bar{v}_{sh}(x,0) = -P^{v}_{sh}(x,0), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.55b}$$

де $\bar{f}_{ih}(x,t)$, $\bar{g}_{sh}(x,t)$ – відомі функції, що рекурентно виражаються через $\bar{u}_{i\bar{h}}$, $\bar{v}_{s\bar{h}}$ $(\bar{h} < h)$.

Задачу (2.55), аналогічно як (2.48),(2.49), зводимо до еквівалентної системи інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, а звідси на підставі результату підрозділу 2.2. одержуємо її розв'язність [69].

Для функцій Q^{v}_{sh} $(s=\overline{1,m})$ одержуємо такі задачі

$$\frac{\partial Q^{v}_{sh}}{\partial t} + \frac{\partial Q^{v}_{sh}}{\partial \xi} = QG_{sh} \equiv \sum_{l=1}^{m} G_{sv}(\xi,t)Q^{v}_{lh} + q^{v}_{sh}, \ (\xi,t) \in D_{\xi}, \tag{2.56a}$$

$$\begin{cases} Q^{v}_{sh}(\xi,0) = 0, & (\xi,t) \in D_{\infty}, \\ Q^{v}_{sh}(0,t) = -\bar{v}_{sh}(0,t), & (\xi,t) \in D_{0}, \end{cases} \tag{2.56b}$$

де $q^{v}_{sh}(\xi,t)$ – відома гладка функція в D_{ξ}, що рекурентно виражається через $Q^{u}_{i\bar{h}}$, $Q^{v}_{s\bar{h}}$ $(\bar{h} < h)$ і $q^{v}_{sh}(\xi,t) \equiv 0$ в підобласті D_{∞}.

Аналогічно, як у задачі (2.50), для доведення існування класичного розв'язку задачі (2.56) необхідно, щоб функція $q^{v}_{sh}(\xi,t)$ була гладкою й виконувались умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці $(0,0)$. Частинні похідні функцій $q^{v}_{sh}(\xi,t)$ існують, оскільки функція є сумою гладких функцій.

Перейдемо до перевірки виконання умов погодження. Із (2.54) та (2.55b) одержуємо рівності:

$$0 = Q^{v}_{sh}(\xi,0)\big|_{\xi=0} = Q^{v}_{sh}(0,t)\big|_{t=0} = -v_{sh}(0,t)\big|_{t=0},$$
$$0 = -v_{sh}(0,0) = P^{v}_{sh}(0,0) = 0 \quad (s=\overline{1,m}),$$

із яких випливає, що крайові умови погоджені в кутовій точці $(0,0)$. Перевіримо виконання умов погодження першого порядку, тобто, чи початкові умови задовольняють систему (2.56a) в точці $(0,0)$, а саме

$$\left.\frac{\partial Q_{sh}^v}{\partial t}\right|_{(0,0)} + \left.\frac{\partial Q_{sh}^v}{\partial \xi}\right|_{(0,0)} = \sum_{l=1}^{m} G_{sv}(\xi,t) \left.Q_{lh}^v\right|_{(0,0)} + \left.q_{sh}^v\right|_{(0,0)} \quad (s=\overline{1,m}).$$

Використавши умови (2.56b), останнє можна записати у вигляді

$$-\left.\frac{\partial \bar{v}_{sh}(0,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\cdot G_{sv}(0,0) + q_{sh}^v(0,0) \quad (s=\overline{1,m}).$$

Права частина цього співвідношення рівна нулеві, оскільки $q_{sh}^v(\xi,t)=0$ $(s=\overline{1,m})$ при $\xi \geqslant t \geqslant 0$, що випливає із властивостей q_{sh}^v. Використавши друге рівняння (2.55a) та умови (2.55b), одержимо

$$\left.\frac{\partial \bar{v}_{sh}(0,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -\sum_{j=1}^{n} G_{su}(0,0) \left.Q_{jh}^u(0,t)\right|_{t=0} - \sum_{l=1}^{m} G_{sv}(0,0) \left.P_{lh}^v(x,0)\right|_{x=0} +$$

$$+\bar{g}_{sh}(0,0),\ (x,t)\in\Omega \quad (s=\overline{1,m}).$$

На підставі (2.53) та (2.54) перші два доданки справа останнього виразу рівні нулеві. Залишилось показати, що $\bar{g}_{sh}(x,t)$ в кутовій точці рівна нулеві. Функція $\bar{g}_{sh}$ в точці $(0,0)$ рівна нулеві через виконання умов $u_{i\bar{h}}(0,0) = v_{s\bar{h}}(0,0) = 0$ $(\bar{h} < h)$ і $\frac{\partial^h G_s}{\partial \varepsilon^h}(0,0,0,0;0) = 0$. А з крайової умови для функції $\bar{v}_{s,\,h-1}(0,0)$ матимемо $\frac{\partial \bar{v}_{s,\,h-1}(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial P_{s,\,h-1}(0,0)}{\partial x} = 0$ $(s=\overline{1,m})$. Остання рівність справедлива тому, що $P_{s,h-1}^v(x,\tau)=0$ для $\tau \geqslant x$, отже $\frac{\partial P_{s,h-1}^v}{\partial x}(x,\tau) = 0$, якщо $\tau \geqslant x$ $(s=\overline{1,m})$. Виконання умови погодження першого порядку в кутовій точці (0,0) забезпечує гладкість розв'язку задачі (2.56) в області $\xi > 0,\ 0 < t < T$. Крім того, відзначимо, що функції Q_{sh}^v $(s=\overline{1,m})$ мають примежовий характер, тобто відмінні від нуля в околі межі $x=0$ області $\bar{\Omega}$ і при $\varepsilon \to 0$ характеристика $t=\xi$ рівняння (2.56a) прямує до вертикального положення.

Для визначення наближень функцій примежових шарів P_{ih}^u $(i=\overline{1,n})$

в околі межі $t = 0$ області Ω одержимо крайову задачу

$$\frac{\partial P^u_{ih}}{\partial \tau} + \frac{\partial P^u_{ih}}{\partial x} = PF_{ih} \equiv \sum_{j=1}^{n} F_{iu}(x,\tau) P^u_{jh} + p^u_{ih}, \qquad (x,\tau) \in S_\tau, \tag{2.57a}$$

$$\begin{cases} P^u_{ih}(0,\tau) = 0, & (x,\tau) \in S_0, \\ P^u_{ih}(x,0) = -\bar{u}_{ih}(x,0), & (x,\tau) \in S_\infty, \end{cases} \tag{2.57b}$$

де $p^u_{ih}(x,\tau)$ – відома гладка функція в S_τ, що рекурентно виражена через $P^u_{i\bar{h}}$, $P^v_{s\bar{h}}$ $(\bar{h} < h)$. Зазначимо, що $p^u_{ih}(x,\tau) \equiv 0$ в підобласті S_∞.

Доведення існування класичного розв'язку P^u_{ih} для кожного $i = \overline{1,n}$ та $h > 1$ задачі (2.57) проводиться аналогічно як для задачі (2.56). Функції P^u_{ih} $(i = \overline{1,n})$ відмінні від тотожного нуля нижче характеристики $\tau = x$ рівняння (2.57a), яка при $\varepsilon \to 0$ прямує до горизонтального положення. Це свідчить про примежовий характер поведінки P^u_{ih}.

Отже, формальне асимптотичне наближення довільного порядку розв'язку (u_i, v_s) задачі (2.36) побудовано. Перейдемо до обгрунтування одержаної асимптотики.

2.3.3. Оцінка залишкового члена асимптотичного розвинення розв'язку задачі

Виділимо в асимптотиці (2.38) розв'язку (u_i, v_s) задачі (2.36) частинні суми порядку N, $N > 0$ – довільне натуральне число і позначимо їх, врахувавши, що $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$, $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon}$,

$$\begin{cases} U^N_i(x,t,\varepsilon) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h [\bar{u}_{ih}(x,t) + P^u_{ih}(x,\tau) + Q^u_{ih}(\xi,t)] \quad (i = \overline{1,n}), \\ V^N_s(x,t,\varepsilon) = \sum\limits_{h=0}^{N} \varepsilon^h [\bar{v}_{sh}(x,t) + P^v_{sh}(x,\tau) + Q^v_{sh}(\xi,t)] \quad (s = \overline{1,m}). \end{cases}$$

Доведемо теорему.

Теорема 2.3. *Якщо виконуються умови* $(\tilde{\mathrm{H}}_1)$, $(\tilde{\mathrm{H}}_2)$, *то для достатньо малого значення параметра* $\varepsilon > 0$ *задача* (2.36) *має єдиний класичний розв'язок* (u_i, v_s), *для якого* $U^N_i(x,t,\varepsilon)$ *та* $V^N_s(x,t,\varepsilon)$ *є рівномірні асимптотичні наближення з точністю* $O(\varepsilon^{N+1})$ *в області* $\bar{\Omega}$, *тобто*

$$\max_{\bar{\Omega}} \left| u_i - U^N_i \right| = O\left(\varepsilon^{N+1}\right), \quad \max_{\bar{\Omega}} \left| v_s - V^N_s \right| = O\left(\varepsilon^{N+1}\right).$$

Доведення. Позначаємо через $R_i^u = u_i^\varepsilon - U_i^{N+1}$ і $R_s^v = v_s^\varepsilon - V_s^{N+1}$ залишкові члени розвинення (2.38). Тоді в області Ω для них одержимо задачі, подібні до (2.36):

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial R_i^u}{\partial t} + \dfrac{\partial R_i^u}{\partial x} = \hat{F}_i(R^u, R^v, x, t; \varepsilon) \quad (i = \overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial R_s^v}{\partial t} + \varepsilon \dfrac{\partial R_s^v}{\partial x} = \hat{G}_s(R^u, R^v, x, t; \varepsilon) \quad (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.58a}$$

$$\begin{cases} R_i^u(x, 0; \varepsilon) = R_i^u(0, t; \varepsilon) = 0 \quad (i = \overline{1,n}), \\ R_s^v(x, 0; \varepsilon) = R_s^v(l, t; \varepsilon) = 0 \quad (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.58b}$$

де

$$\hat{F}_i = -\varepsilon \frac{\partial U_i^{N+1}}{\partial t} - \frac{\partial U_i^{N+1}}{\partial x} + F_i(U^{N+1} + R^u, V^{N+1} + R^v, x, t; \varepsilon),$$
$$\hat{G}_s = -\frac{\partial V_s^{N+1}}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial V_s^{N+1}}{\partial x} + G_s(U^{N+1} + R^u, V^{N+1} + R^v, x, t; \varepsilon).$$
$$R^u = (R_1^u, \dots R_n^u)\,,\ R^v = (R_1^v, \dots R_m^v)\,,$$
$$U^{N+1} = \left(U_1^{N+1}, \dots U_n^{N+1}\right),\ V^{N+1} = \left(V_1^{N+1}, \dots V_m^{N+1}\right).$$

Оскільки система (2.36а) задовольняється із точністю $O(\varepsilon^{N+1})$, то справедливі рівномірні оцінки в області Ω:

$$\hat{F}_i(0, 0, x, t; \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}), \quad \hat{G}_s(0, 0, x, t; \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}).$$

З того, що $U^{N+1} = V^{N+1} = \dfrac{\partial U^{N+1}}{\partial t} = \dfrac{\partial V^{N+1}}{\partial t} = \dfrac{\partial U^{N+1}}{\partial x} = \dfrac{\partial V^{N+1}}{\partial x} = 0$ у кутовій точці $(0,0)$ і виконується умова $(\tilde{\mathrm{H}}_1)$, справедливі рівності $\hat{F}_i(0,0,0,0;\varepsilon) = 0$, $\hat{G}_s(0,0,0,0;\varepsilon) = 0$.

Уведемо оператори та запишемо (2.58а) у вигляді

$$\begin{aligned} L_i^u[R^u, R^v] \equiv \varepsilon \frac{\partial R_i^u}{\partial t} + \frac{\partial R_i^u}{\partial x} - F_{iu}(M) &\sum_{j=1}^{n} R_j^u - F_{iv}(M) \sum_{l=1}^{m} R_l^v = \\ &= \Pi_i^u(R^u, R^v, x, t; \varepsilon) \quad (i = \overline{1,n}), \\ L_s^v[R^u, R^v] \equiv \frac{\partial R_s^v}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial R_s^v}{\partial x} - G_{su}(M) &\sum_{j=1}^{n} R_j^u - G_{sv}(M) \sum_{l=1}^{m} R_l^v = \\ &= \Pi_s^v(R^u, R^v, x, t; \varepsilon) \quad (s = \overline{1,m}), \end{aligned} \tag{2.59}$$

де $M = (u_{i0}(x,t) + P^u_{i0}(x,\tau), v_{s0}(x,t) + Q^v_{s0}(\xi,t), 0, t; 0)$, а через Π^u_i, Π^v_s позначимо

$$\Pi^u_i(R^u, R^v, x, t; \varepsilon) = \hat{F}_i - F_{iu}(M)\sum_{j=1}^{n} R^u_j - F_{iv}(M)\sum_{l=1}^{m} R^v_l,$$
$$\Pi^v_s(R^u, R^v, x, t; \varepsilon) = \hat{G}_s - G_{su}(M)\sum_{j=1}^{n} R^u_j - G_{sv}(M)\sum_{l=1}^{m} R^v_l.$$

Зауважимо, що із властивостей функцій $\hat{F}_i$, $\hat{G}_s$ одержимо аналогічні властивості і для Π^u_i, Π^v_s $(i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m})$, тобто, справедливі рівномірні в $\overline{\Omega}$ оцінки $\Pi^u_i(0,0,x,t;\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$, $\Pi^v_s(0,0,x,t;\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ та $\Pi^u_i(0,0,0,0;\varepsilon) = 0$, $\Pi^v_s(0,0,0,0;\varepsilon) = 0$ $(i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m})$.

Якщо $|\bar{R}^u_i| \leqslant C_1\varepsilon$ $(i = \overline{1,n})$, і $|\bar{R}^v_s| \leqslant C_1\varepsilon$ $(s = \overline{1,m})$, $|\tilde{R}^u_i| \leqslant C_1\varepsilon$ $(i = \overline{1,n})$, і $|\tilde{R}^v_s| \leqslant C_1\varepsilon$ $(s = \overline{1,m})$, де C_1 – додатне число, то існують $C_2 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ такі, що при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$\left|\Pi^u_i(\bar{R}^u, \bar{R}^v, x, t; \varepsilon) - \Pi^u_i(\tilde{R}^u, \tilde{R}^v, x, t; \varepsilon)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_2\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\bar{R}^u_j - \tilde{R}^u_j\right| + \sum_{l=1}^{m}\left|\bar{R}^v_l - \tilde{R}^v_l\right|\right),$$
$$\left|\Pi^v_s(\bar{R}^u, \bar{R}^v, x, t; \varepsilon) - \Pi^v_s(\tilde{R}^u, \tilde{R}^v, x, t; \varepsilon)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_2\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\bar{R}^u_j - \tilde{R}^u_j\right| + \sum_{l=1}^{m}\left|\bar{R}^v_l - \tilde{R}^v_l\right|\right).$$

Доведемо, що для достатньо малого значення параметра ε існує класичний розв'язок задачі (2.58) такий, що справедливі оцінки $R^u_i = O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$ $(i = \overline{1,n})$ та $R^v_s = O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$ $(s = \overline{1,m})$. Тоді на підставі рівностей

$$u_i - U^N_i = \left(u_i - U^{N+1}_i\right) + \left(U^{N+1}_i - U^N_i\right) = R^u_i + O\left(\varepsilon^{N+1}\right) \quad (i = \overline{1,n}),$$
$$v_s - V^N_s = \left(v_s - V^{N+1}_s\right) + \left(V^{N+1}_s - V^N_s\right) = R^v_s + O\left(\varepsilon^{N+1}\right) \quad (s = \overline{1,m}),$$

одержимо справедливість теореми.

Для доведення теореми застосуємо метод послідовних наближень. Запишемо рекурентні співвідношення для системи (2.59) в операторному вигляді

$$
\begin{aligned}
&R_i^{u(0)}=0,\ R_s^{v(0)}=0,\\
&L_i^u\left[R^{u(k)},R^{v(k)}\right]=\Pi_i^u\left(R^{u(k-1)},R^{v(k-1)},x,t;\varepsilon\right),\\
&L_s^v\left[R^{u(k)},R^{v(k)}\right]=\Pi_s^v\left(R^{u(k-1)},R^{v(k-1)},x,t;\varepsilon\right),\\
&R_i^{u(k)}\big|_{t=0}=0,\ R_i^{u(k)}\big|_{x=0}=0,\\
&R_s^{v(k)}\big|_{t=0}=0,\ R_s^{v(k)}\big|_{x=0}=0\quad (i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m},\ k=1,2,\ldots).
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

З рівностей $\Pi_i^u(0,0,0,0;\varepsilon)=0$, $\Pi_s^v(0,0,0,0;\varepsilon)=0$ $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$ для задачі (2.60) для довільного k виконуються умови погодження першого порядку в кутовій точці $(0,0)$.

З (2.60) при $k=1$, маємо

$$
\begin{aligned}
&L_i^u\left[R^{u(1)},R^{v(1)}\right]=\Pi_i^u(0,0,x,t;\varepsilon),\\
&L_s^v\left[R^{u(1)},R^{v(1)}\right]=\Pi_s^v(0,0,x,t;\varepsilon),\\
&R_i^{u(1)}\big|_{t=0}=0,\ R_i^{u(1)}\big|_{x=0}=0,\\
&R_s^{v(1)}\big|_{t=0}=0,\ R_s^{v(1)}\big|_{x=0}=0\quad (i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m}).
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

Функції $\Pi_i^u(0,0,x,t;\varepsilon)$ та $\Pi_s^v(0,0,x,t;\varepsilon)$ системи (2.61) неперервні у всій області $\overline{\Omega}$ і виконуються умови погодження першого порядку в кутовій точці $(0,0)$. Отже, задача (2.61) має єдиний класичний розв'язок. Те ж саме відноситься до задач (2.60) для всіх $k>1$.

Для розв'язку задачі (2.61) справедлива оцінка [21]

$$
\begin{aligned}
&\max_{\overline{\Omega}}\left\{\left|R_i^{u(1)}(x,t;\varepsilon)\right|,\left|R_s^{v(1)}(x,t;\varepsilon)\right|\right\}\leqslant\\
&\qquad\leqslant C_3\max_{i,s}\left\{\max_{\overline{\Omega}}\left\{\left|\Pi_i^u(0,0,x,t;\varepsilon)\right|,\left|\Pi_s^v(0,0,x,t;\varepsilon)\right|\right\}\right\},
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

де C_3 – додатна стала, що не залежить від ε. Надалі через $C_4, C_5, \ldots$ будемо позначати сталі, що не залежать від ε.

Оскільки справедливі рівномірні в $\overline{\Omega}$ оцінки $\Pi_i^u(0,0,x,t;\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$, $\Pi_s^v(0,0,x,t;\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$, то із (2.62) для всіх $(x,t)\in\overline{\Omega}$ справджується

$$
\left|R_i^{u(1)}(x,t;\varepsilon)\right|\leqslant C_4\varepsilon^{N+1}\quad (i=\overline{1,n}),
$$

$$
\left|R_s^{v(1)}(x,t;\varepsilon)\right|\leqslant C_4\varepsilon^{N+1}\quad (s=\overline{1,m}).
$$

Визначимо нові сталі $C_0 = \max\{C_3, C_4\}$, $C_1 = 2C_0$. Сталій C_1 відповідають деякі C_2 і ε_0 із властивостей функцій Π_i^u та Π_s^v. Виберемо ε_0 достатньо малим, щоб виконувалась нерівність $2C_2C_0\varepsilon_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$. Покажемо, що для довільного k при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned}
&\max_{\overline{\Omega}} \left| R_i^{u(k)} \right| \leqslant \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} \right) C_0 \varepsilon^{N+1} \quad (i = \overline{1, n}),\\
&\max_{\overline{\Omega}} \left| R_s^{v(k)} \right| \leqslant \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} \right) C_0 \varepsilon^{N+1} \quad (s = \overline{1, m}),
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
&\max_{\overline{\Omega}} \left| z_i^{u(k)} \right| \equiv \max_{\overline{\Omega}} \left| R_i^{u(k)} - R_i^{u(k-1)} \right| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} C_0 \varepsilon^{N+1} \quad (i = \overline{1, n}),\\
&\max_{\overline{\Omega}} \left| z_s^{v(k)} \right| \equiv \max_{\overline{\Omega}} \left| R_s^{v(k)} - R_s^{v(k-1)} \right| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} C_0 \varepsilon^{N+1} \quad (s = \overline{1, m}).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

При $k = 1$ виконання цих нерівностей очевидне. З рівняння (2.60) при $k = 2$ для $z_i^{u(2)}$ і $z_s^{v(2)}$ $(i = \overline{1, n},\ s = \overline{1, m})$ одержимо задачі

$$\begin{aligned}
&L_i^u[z^{u(2)}, z^{v(2)}] = \Pi_i^u(R^{u(1)}, R^{v(1)}, x, t; \varepsilon) - \Pi_i^u(R^{u(0)}, R^{v(0)}, x, t; \varepsilon),\\
&L_s^v[z^{u(2)}, z^{v(2)}] = \Pi_s^v(R^{u(1)}, R^{v(1)}, x, t; \varepsilon) - \Pi_s^v(R^{u(0)}, R^{v(0)}, x, t; \varepsilon),\\
&z_i^{u(2)}|_{t=0} = 0,\ z_i^{u(2)}|_{x=0} = 0,\\
&z_s^{v(2)}|_{t=0} = 0,\ z_s^{v(2)}|_{x=0} = 0.
\end{aligned}$$

Оскільки $\left| R_i^{u(0)} \right| = 0 \leqslant C_1 \varepsilon$, та $\left| R_s^{v(0)} \right| = 0 \leqslant C_1 \varepsilon$ $(i = \overline{1, n},\ s = \overline{1, m})$, то, з врахуванням властивостей функцій Π_i^u та Π_s^v, маємо

$$\begin{aligned}
&\left| \Pi_i^u \left(R^{u(1)}, R^{v(1)}, x, t; \varepsilon \right) - \Pi_i^u \left(R^{u(0)}, R^{v(0)}, x, t; \varepsilon \right) \right| \leqslant\\
&\leqslant C_2 \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n} \max_{\overline{\Omega}} \left| R_j^{u(1)} \right| + \sum_{l=1}^{m} \max_{\overline{\Omega}} \left| R_l^{v(1)} \right| \right) \leqslant\\
&\leqslant 2C_2 \varepsilon C_0 \varepsilon^{N+1} \leqslant \frac{\varepsilon^{N+1}}{2},\\
&\left| \Pi_s^v \left(R^{u(1)}, R^{v(1)}, x, t; \varepsilon \right) - \Pi_s^v \left(R^{u(0)}, R^{v(0)}, x, t; \varepsilon \right) \right| \leqslant\\
&\leqslant C_2 \varepsilon \left(\sum_{j=1}^{n} \max_{\overline{\Omega}} \left| R_j^{u(1)} \right| + \sum_{l=1}^{m} \max_{\overline{\Omega}} \left| R_l^{v(1)} \right| \right) \leqslant\\
&\leqslant 2C_2 \varepsilon C_0 \varepsilon^{N+1} \leqslant \frac{\varepsilon^{N+1}}{2}.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Умов $2C_2C_0\varepsilon_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$ виконується за рахунок вибору малого ε_0.

Застосувавши до задач (2.65) умови (2.62), одержимо нерівності

$$\max_{\overline{\Omega}}\left|R_i^{u(2)}\right| \leqslant \frac{1}{2}C_3\varepsilon^{N+1} \leqslant \frac{1}{2}C_0\varepsilon^{N+1} \quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\max_{\overline{\Omega}}\left|R_s^{v(2)}\right| \leqslant \frac{1}{2}C_3\varepsilon^{N+1} \leqslant \frac{1}{2}C_0\varepsilon^{N+1} \quad (s=\overline{1,m}).$$

З нерівності трикутника матимемо

$$\max_{\overline{\Omega}}\left|R_i^{u(2)}\right| = \max_{\overline{\Omega}}\left|R_i^{u(1)} + z_i^{u(2)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\overline{\Omega}}\left|R_i^{u(1)}\right| + \max_{\overline{\Omega}}\left|z_i^{u(2)}\right| \leqslant \left(1+\frac{1}{2}\right)C_0\varepsilon^{N+1} \quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\max_{\overline{\Omega}}\left|R_s^{v(2)}\right| = \max_{\overline{\Omega}}\left|R_s^{v(1)} + z_s^{v(2)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\overline{\Omega}}\left|R_s^{v(1)}\right| + \max_{\overline{\Omega}}\left|z_s^{v(2)}\right| \leqslant \left(1+\frac{1}{2}\right)C_0\varepsilon^{N+1} \quad (s=\overline{1,m}).$$

Виконання нерівностей (2.63), (2.64) при $k=2$ доведено.

Для доведення правильності нерівностей (2.63), (2.64) для довільного k застосуємо метод математичної індукції. Нехай (2.63), (2.64) справедливі для $k=q$. Доведемо, що ці нерівності виконуються для $k=q+1$.

Отже, з (2.60)

$$\begin{aligned} L_i\left[z^{u(q+1)}, z^{v(q+1)}\right] &= \Pi_i^u\left(R^{u(q)}, R^{v(q)}, x, t; \varepsilon\right) - \\ &-\Pi_i^u\left(R^{u(q-1)}, R^{v(q-1)}, x, t; \varepsilon\right), \\ L_s\left[z^{u(q+1)}, z^{v(q+1)}\right] &= \Pi_s^v\left(R^{u(q)}, R^{v(q)}, x, t; \varepsilon\right) - \\ &-\Pi_s^v\left(R^{u(q-1)}, R^{v(q-1)}, x, t; \varepsilon\right), \end{aligned} \tag{2.66a}$$

$$\begin{aligned} &z_i^{u(q+1)}\big|_{t=0} = 0,\ z_i^{u(q+1)}\big|_{x=0} = 0 \quad (i=\overline{1,n}), \\ &z_s^{v(q+1)}\big|_{t=0} = 0,\ z_s^{v(q+1)}\big|_{x=0} = 0 \quad (s=\overline{1,m}). \end{aligned} \tag{2.66b}$$

За припущенням справедливі нерівності (2.63), (2.64) для $k=q-1$ і $k=q$, звідки слідують наступні оцінки:

$$\max_{\overline{\Omega}}\left|R_i^{u(q-1)}\right| \leqslant C_1\varepsilon,\quad \max_{\overline{\Omega}}\left|R_s^{v(q-1)}\right| \leqslant C_1\varepsilon,\quad \max_{\overline{\Omega}}\left|R_i^{u(q)}\right| \leqslant C_1\varepsilon,$$

$$\max_{\overline{\Omega}}\left|R_s^{v(q)}\right| \leqslant C_1\varepsilon,\quad \max_{\overline{\Omega}}\left|z_i^{u(q)}\right| \leqslant \frac{C_0\varepsilon^{N+1}}{2^{q-1}},\quad \max_{\overline{\Omega}}\left|z_S^{v(q)}\right| \leqslant \frac{C_0\varepsilon^{N+1}}{2^{q-1}},$$

а тому

$$\left|\Pi_i^u\left(R^{u(q)}, R^{v(q)}, x, t; \varepsilon\right) - \Pi_i^u\left(R^{u(q-1)}, R^{v(q-1)}, x, t; \varepsilon\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_2\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}\max_{\overline{\Omega}}\left|R_j^{u(q)}\right| + \sum_{l=1}^{m}\max_{\overline{\Omega}}\left|R_l^{v(q)}\right|\right) \leqslant 2C_2\varepsilon C_0\frac{\varepsilon^{N+1}}{2^{q-1}} \leqslant \frac{\varepsilon^{N+1}}{2^q} \quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\left|\Pi_s^v\left(R^{u(q)}, R^{v(q)}, x, t; \varepsilon\right) - \Pi_s^v\left(R^{u(q-1)}, R^{v(q-1)}, x, t; \varepsilon\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_2\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}\max_{\overline{\Omega}}\left|R_j^{u(q)}\right| + \sum_{l=1}^{m}\max_{\overline{\Omega}}\left|R_l^{v(q)}\right|\right) \leqslant 2C_2\varepsilon C_0\frac{\varepsilon^{N+1}}{2^{q-1}} \leqslant \frac{\varepsilon^{N+1}}{2^q} \quad (s=\overline{1,m}).$$

Застосувавши оцінку (2.62) до задачі (2.66), одержимо

$$\max_{\overline{\Omega}}\left|R_i^{u(q+1)}\right| \leqslant C_0\frac{\varepsilon^{N+1}}{2^q}, \quad \max_{\overline{\Omega}}\left|R_s^{v(q+1)}\right| \leqslant C_0\frac{\varepsilon^{N+1}}{2^q}.$$

Звідси, використавши відповідні оцінки, маємо таке

$$\max_{\overline{\Omega}}\left|R_i^{u(q+1)}\right| = \max_{\overline{\Omega}}\left|R_i^{u(q)} + z_i^{u(q+1)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\overline{\Omega}}\left|R_i^{u(q)}\right| + \max_{\overline{\Omega}}\left|z_i^{u(q+1)}\right| \leqslant C_0\varepsilon^{N+1}\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{2^k} \quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\max_{\overline{\Omega}}\left|R_s^{v(q+1)}\right| = \max_{\overline{\Omega}}\left|R_s^{v(q)} + z_s^{v(q+1)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\overline{\Omega}}\left|R_s^{v(q)}\right| + \max_{\overline{\Omega}}\left|z_s^{v(q+1)}\right| \leqslant C_0\varepsilon^{N+1}\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{2^k} \quad (s=\overline{1,m}).$$

Отже, нерівності (2.63), (2.64) справедливі для довільного k.

Виконання умови (2.64) забезпечує рівномірну в $\overline{\Omega}$ збіжність рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_i^{u(k)}$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_s^{v(k)}$, що еквівалентно збіжності послідовностей $\left\{R_i^{u(k)}\right\}$, $\left\{R_s^{v(k)}\right\}$, границі яких

$$\lim_{k\to\infty} R_i^{u(k)}(x,t;\varepsilon) = R_i^u(x,t;\varepsilon) \quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\lim_{k\to\infty} R_s^{v(k)}(x,t;\varepsilon) = R_s^v(x,t;\varepsilon) \quad (s=\overline{1,m}),$$

є неперервними функціями в області $\overline{\Omega}$. Із умови (2.63) маємо оцінки $|R_i^u| \leqslant 2C_0\varepsilon^{N+1}$, $|R_s^v| \leqslant 2C_0\varepsilon^{N+1}$, а отже одержано рівномірні оцінки $R_i^u = O(\varepsilon^{N+1})$, $R_s^v = O(\varepsilon^{N+1})$ $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$ в області $\overline{\Omega}$.

Крім неперервності функцій R_i^u, R_s^v $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$, для доведення існування класичного розв'язку задачі (2.58) необхідно довести неперервність їх частинних похідних і виконання умов погодження першого порядку для рівнянь (2.59) в області $\overline{\Omega}$.

Для цього достатньо в $\overline{\Omega}$ показати рівномірну збіжність послідовностей:

$$\left\{\frac{\partial R_i^{u(k)}}{\partial t}\right\},\ \left\{\frac{\partial R_s^{v(k)}}{\partial t}\right\},\ \left\{\frac{\partial R_i^{u(k)}}{\partial x}\right\},\ \left\{\frac{\partial R_s^{v(k)}}{\partial x}\right\}\ (i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m}).$$

Продиференціюємо (2.60) за змінною t і введемо позначення $\dfrac{\partial R_i^{u(k)}}{\partial t}=\mu_i^{u(k)}$, $\dfrac{\partial R_s^{v(k)}}{\partial t}=\mu_s^{v(k)}$. Одержимо послідовність рівнянь

$$\begin{aligned}
&\mu_i^{u(0)}=0, \qquad \mu_s^{v(0)}=0,\\
&L_i^u\big[\mu^{u(k)},\mu^{v(k)}\big] = \alpha_i^u\big[R^{u(k-1)},R^{v(k-1)}\big]+\\
&\qquad +\beta_i^u\big[\mu^{u(k-1)},\mu^{v(k-1)},R^{u(k-1)},R^{v(k-1)}\big],\\
&L_s^v\big[\mu^{u(k)},\mu^{v(k)}\big] = \alpha_s^v\big[R^{u(k-1)},R^{v(k-1)}\big]+\\
&\qquad +\beta_s^v\big[\mu^{u(k-1)},\mu^{v(k-1)},R^{u(k-1)},R^{v(k-1)}\big],\\
&\qquad i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m},\ k=1,2,\ldots,
\end{aligned} \tag{2.67}$$

де L_i^u, L_s^v – ті ж оператори, що і в (2.60), а

$$\alpha_1^u\big[R^u,R^v\big]=\frac{\partial F_{1u}}{\partial t}(M)\sum_{j=1}^{n}R_j^u+\frac{\partial F_{1v}}{\partial t}(M)\sum_{l=1}^{m}R_l^v,$$

$$\begin{aligned}
\beta_1^u\big[\mu^u,\mu^v,R^u,R^v\big] &= \big(F_{1u}(U^{N+1}+R^u,V^{N+1}+R^v,x,t;\varepsilon)-F_{1u}(M)\big)\sum_{j=1}^{n}\mu_j^u+\\
&+\big(F_{1v}(U^{N+1}+R^u,V^{N+1}+R^v,x,t;\varepsilon)-F_{1v}(M)\big)\sum_{l=1}^{m}\mu_l^s-\alpha_1^u\big[R^u,R^v\big]+\\
&+F_{1u}\big(U^{N+1}+R^u,V^{N+1}+R^v,x,t;\varepsilon\big)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U_j^{N+1}}{\partial t}+\\
&+F_{1v}\big(U^{N+1}+R^u,V^{N+1}+R^v,x,t;\varepsilon\big)\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial V_l^{N+1}}{\partial t}+\\
&+F_{1t}\big(U^{N+1}+R^u,V^{N+1}+R^v,x,t;\varepsilon\big)-\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\frac{\partial U_1^{N+1}}{\partial t}+\frac{\partial U_1^{N+1}}{\partial x}\right].
\end{aligned}$$

Функції α_i^u, β_i^u $(i=\overline{2,n})$, α_s^v, β_s^v $(s=\overline{1,m})$ виражаються аналогічно.

Для α_1^u справедлива оцінка

$$|\alpha_1^u[R^u, R^v]| \leqslant \frac{C_5}{\varepsilon}\left(\sum_{j=1}^{n}|R_j^u| + \sum_{l=1}^{m}|R_l^v|\right), \tag{2.68}$$

оскільки $\partial F_{1u}(M)/\partial t = O(1/\varepsilon)$, $\partial F_{1v}(M)\partial t = O(1/\varepsilon)$. Аналогічні оцінки мають місце для α_i^u, α_s^v $(i=\overline{2,n},\ s=\overline{1,m})$. Крім того, функція β_1^u задовольняє наступні умови (аналогічні умови виконуються для функцій β_i^u, β_s^v $(i=\overline{2,n},\ s=\overline{1,m})$):

a) $\beta_1^u(0,0,0,0) = O(\varepsilon^N)$ рівномірно в Ω;

b) якщо $|\bar{\mu}_i^u| \leqslant C_6\varepsilon$, $|\bar{\mu}_s^v| \leqslant C_6\varepsilon$, $|\tilde{\mu}_i^u| \leqslant C_6\varepsilon$, $|\tilde{\mu}_s^v| \leqslant C_6\varepsilon$, $|\bar{R}_i^u| \leqslant C_6\varepsilon$, $|\bar{R}_s^v| \leqslant C_6\varepsilon$, $|\tilde{R}_i^u| \leqslant C_6\varepsilon$, $|\tilde{R}_s^v| \leqslant C_6\varepsilon$, то знайдуться $C_7>0$, $\varepsilon_0>0$ такі, що при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$

$$\left|\beta_1^u[\bar{\mu}^u, \bar{\mu}^v, \bar{R}^u, \bar{R}^v] - \beta_1^u[\tilde{\mu^u}, \tilde{\mu^u}, \tilde{R}^u, \tilde{R}^v]\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_7\left[\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}|\bar{\mu}_j^u - \tilde{\mu}_j^u| + \sum_{l=1}^{m}|\bar{\mu}_l^v - \tilde{\mu}_l^v|\right) + \sum_{j=1}^{n}\left|\bar{R}_j^u - \tilde{R}_j^u\right| + \sum_{l=1}^{m}\left|\bar{R}_l^v - \tilde{R}_l^v\right|\right].$$

При $k=1$ з (2.60) одержимо крайові умови

$$\begin{aligned} &\mu_i^{u(k)}|_{x=0} = 0,\ \ \mu_i^{u(k)}|_{t=0} = \frac{1}{\varepsilon}\cdot \Pi_i^u(0,0,x,0;\varepsilon) = O(\varepsilon^N)\ \ (i=\overline{1,n}),\\ &\mu_s^{v(k)}|_{x=0} = 0,\ \ \mu_s^{v(k)}|_{t=0} = \Pi_s^v(0,0,x,0;\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})\quad (s=\overline{1,m}). \end{aligned} \tag{2.69}$$

Розглянемо задачу (2.67)-(2.69) при $k=1$. З умови (2.68), оцінок $\left|R_i^{u(1)}\right| = O\big(\varepsilon^{N+1}\big)$, $\left|R_s^{v(1)}\right| = O\big(\varepsilon^{N+1}\big)$ і властивостей функцій β_i^u та β_s^v $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$, застосувавши оцінки (2.62), одержимо

$$\begin{aligned} &\max_{\overline{\Omega}}\left|\mu_i^{u(1)}\right| \leqslant C_8\varepsilon^N\quad (i=\overline{1,n}),\\ &\max_{\overline{\Omega}}\left|\mu_s^{v(1)}\right| \leqslant C_8\varepsilon^N\quad (s=\overline{1,m}). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Нехай $C_9 = \max\{C_0, C_3, C_8\}$, C_0, C_3, C_8 – сталі з нерівностей (2.63), (2.62), (2.70), відповідно, і нехай $C_6 = 2C_9$, якому відповідають C_7, ε_0 з властивості **b)** функцій β_i^u, β_s^v $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$. Виберемо ε_0 настільки малим, щоб виконувалась нерівність $(C_5 + 2C_7(1+\varepsilon_0))C_9\varepsilon_0 \leqslant 1/2$, де C_5 –

стала з нерівності (2.68). Тоді

$$
\begin{aligned}
&\max_{\overline{\Omega}}\left|\mu_i^{u(k)}\right| \leqslant C_9\varepsilon^{N-1}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{2^l} && (i=\overline{1,n}),\\
&\max_{\overline{\Omega}}\left|\mu_i^{u(k)}-\mu_i^{u(k-1)}\right| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}C_9\varepsilon^{N-1} && (i=\overline{1,n}).
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

З умови (2.70) випливає виконання нерівностей (2.71) для $k = 1$. Методом математичної індукції можна довести виконання нерівностей (2.71) для довільного k, аналогічно як при доведенні (2.63), (2.64). Для функцій $\mu_s^{v(k)}$ $(s=\overline{1,m})$ одержимо аналогічні оцінки.

На підставі (2.71), послідовності $\left\{\mu_i^{u(k)}\right\}$, $\left\{\mu_s^{v(k)}\right\}$ $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$ рівномірно збіжні в області $\overline{\Omega}$, звідки випливає неперервність частинних похідних $\partial R_i^u/\partial t$, $\partial R_s^v/\partial t$ $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$ в $\overline{\Omega}$.

На підставі (2.60) послідовності $\left\{\partial R_i^{u(k)}/\partial x\right\}$, $\left\{\partial R_s^{v(k)}/\partial x\right\}$ $(i = \overline{1,n},\ s = \overline{1,m})$ рівномірно збіжні в області $\overline{\Omega}$, отже, частинні похідні $\partial R_i^u/\partial x$, $\partial R_s^v/\partial x$ $(i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})$ є неперервні. Це завершує доведення теореми.

$\square$

2.4. Висновок до другого розділу

У цьому розділі побудовано та обґрунтовано асимптотичне розвинення довільного порядку розв'язку мішаної задачі для гіперболічних систем лінійних та напівлінійних сингулярно збурених рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними. Обґрунтовано необхідність примежових шарів, що підправляють розв'язки вироджених задач.

Класичні розв'язки задач побудовано без будь-яких додаткових умов на вихідні дані, крім умов гладкості та умов погодження нульового та першого порядків у кутовій точці області.

Розділ 3

Сингулярно збурені гіперболічні системи лінійних та напівлінійних рівнянь першого порядку із різними характеристичними нахилами

У цьому розділі розглянуто мішані задачі для гіперболічної системи лінійних рівнянь першого порядку із малим параметром при різних похідних з додатними та від'ємним характеристиками в першій чверті та прямокутнику. Виродження параметра приводить до задачі з ортогональними характеристиками, що викликає ефект примежового шару [21]. Результати розділу опубліковані в роботі [118].

3.1. Задача з малим параметром при похідних у гіперболічній системі рівнянь із різними характеристичними нахилами

Досліджено мішану задачу в першій чверті площини для лінійної гіперболічної системи рівнянь із різними характеристичними нахилами. Побудовано та обґрунтовано асимптотичне розвинення довільного порядку класичного розв'язку задачі.

3.1.1. Формулювання задачі з малим параметром при похідних у гіперболічній системі лінійних рівнянь із різними характеристичними нахилами

У області $\Omega = \{(x,\, t):\ 0 < x, t < \infty\}$ розглянемо мішану задачу для гіперболічної системи $n+m$ рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j^\varepsilon + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)v_k^\varepsilon + f_i(x,t;\varepsilon) \quad (i=\overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon\dfrac{\partial v_s^\varepsilon}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)u_j^\varepsilon + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)v_k^\varepsilon + g_s(x,t;\varepsilon) \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.1a}$$

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,0) = u_i^\varepsilon(0,t) = 0, \quad x \geqslant 0,\ t \geqslant 0 \quad (i=\overline{1,n}), \\ v_s^\varepsilon(x,0) = 0, \qquad\qquad\qquad x \geqslant 0 \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.1b}$$

де $\varepsilon \ll 1$ – малий додатний параметр.

Розглядаємо класичний розв'язок задачі (3.1), тобто розв'язок, неперервний в замиканні області $\Omega = \{(x,\, t):\ 0 < x, t < \infty\}$, який має неперервні похідні першого порядку в Ω, що задовольняють систему (3.1a), а також крайові умови (3.1b).

Наша мета – побудувати та обґрунтувати розвинення за степенями малого параметра ε розв'язку задачі (3.1). При цьому припускаємо, що виконуються такі умови:

($\widehat{\mathrm{H}}_1$) функції $a_{ij}, b_{ik}, \gamma_{sj}, \sigma_{sk} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, f_i і $g_s : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – достатньо гладкі в областях свого визначення (порядок гладкості залежить від порядку асимптотики);

($\widehat{\mathrm{H}}_2$) $f_i(0,0;\varepsilon) = 0$ $(i=\overline{1,n})$, $g_s(0,0;\varepsilon) = 0$ $(s=\overline{1,m})$ для всіх $\varepsilon \in (0,1)$ (умови погодження першого порядку).

За умов $(\widehat{H}_1)$, $(\widehat{H}_2)$ при кожному фіксованому значенні параметра ε існує єдиний класичний розв'язок задачі (3.1) [1, 21, 33, 69]. Зауважимо, що для побудови та обґрунтування асимптотики розв'язку досліджуваної задачі не вимагається жодних додаткових умов на знак діагональних елементів матриць a_{ij} $(j=i)$, σ_{sk} $(k=s)$ системи (3.1a).

Зазначимо, що розв'язок відповідної незбуреної системи (3.1a)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)v_k + f_i(x,t;0) \quad (i = \overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial v_s}{\partial t} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)u_j + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)v_k + g_s(x,t;0) \quad (s = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.2}$$

не задовольняє, всіх умов (3.1b), а саме, функції u_i $(i = \overline{1,n})$, загалом, не задовольняють початкові умови. Тому в околі межі $t = 0$ області Ω виникає примежовий шар, який підправляє розв'язок виродженої задачі (система (3.2) із крайовими умовами для функції u та початковими для v, яка наведена нижче) до виконання втрачених умов.

Особливість задачі полягає ще й у тому, що хоча примежова функція визначається як розв'язок рівняння з частинними похідними першого порядку, а межа, на якій задається крайова умова, містить кутову точку $(0,0)$, що у загальному випадку впливає на гладкість розв'язку, тим не менше, вдається побудувати асимптотику розв'язку довільного порядку, рівномірну в $\overline{\Omega}$ без будь-яких інших додаткових умов, крім умови $(\widehat{\mathrm{H}}_2)$.

Для простоти викладок уведемо вектори

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x,t) &= (u_1^\varepsilon(x,t), \ldots, u_n^\varepsilon(x,t)), \\ v^\varepsilon(x,t) &= (v_1^\varepsilon(x,t), \ldots, v_m^\varepsilon(x,t)). \end{aligned}$$

та будемо використовувати усталену термінологію і позначення, які зустрічались у попередньому розділі, незважаючи на їх деяке повторення та співпадіння.

3.1.2. Побудова асимптотичного розвинення розв'язку задачі

Розглянемо, насамперед, побудову нульового наближення. Асимптотику розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (3.1) в області $\overline{\Omega}$ на першому кроці будуємо у вигляді

$$\begin{aligned} u_i^\varepsilon(x,t) &\sim \bar{u}_{i0}(x,t) \quad (i = \overline{1,n}), \\ v_s^\varepsilon(x,t) &\sim \bar{v}_{s0}(x,t) \quad (s = \overline{1,m}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Для визначення функцій регулярної частини асимптотики $\bar{u}_{i0}$ та $\bar{v}_{s0}$

нульового наближення сформулюємо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}_{i0}}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\bar{u}_{j0} + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\bar{v}_{k0} + f_{i0}(x,t) \quad (i=\overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial \bar{v}_{s0}}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)\bar{u}_{j0} + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)\bar{v}_{k0} + g_{s0}(x,t) \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.4a}$$

$$\begin{cases} \bar{u}_{i0}(0,t) = 0 \quad (i=\overline{1,n}), \\ \bar{v}_{s0}(x,0) = 0 \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.4b}$$

де $f_{i0}(x,t)$, $g_{s0}(x,t)$ – перші члени розвинення функцій f_i та g_s у степеневий ряд за степенями параметра ε в околі $\varepsilon = 0$.

Задача (3.4) для визначення $\bar{u}_{i0}$ $(i=\overline{1,n})$, $\bar{v}_{s0}$ $(s=\overline{1,m})$ за умови $(\widehat{\mathrm{H}}_2)$ еквівалентна системі інтегральних рівнянь типу Вольтерри другого роду, для якої існує єдиний достатньо гладкий розв'язок [69]. Отож, функції $\bar{u}_{i0}$ $(i=\overline{1,n})$, $\bar{v}_{s0}$ $(s=\overline{1,m})$ однозначно визначені та мають потрібну гладкість. Із формулювання задачі для визначення $\bar{u}_{i0}$, $\bar{v}_{s0}$, очевидно, випливає, що не всі умови (3.1b) виконуються. Тепер будемо підправляти побудований розв'язок задачі (3.4) функцією примежового шару так, щоб виконувалася втрачена при виродженні умова.

Підправимо (3.3) функцією примежового шару так, щоб виконувалась друга умова (3.1b), тобто наближення розв'язку в області Ω будуємо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^{\varepsilon}(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) + P_{i0}u(x,\tau) \quad (i=\overline{1,n}), \\ v_s^{\varepsilon}(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) \quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.5}$$

де

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}$$

– регуляризуюча змінна в околі межі $t=0$. Щоб записати задачу для визначення $P_{i0}u(x,\tau)$, розвинемо коефіцієнти системи (3.1a) в ряд за степенями ε і підставимо (3.5) у систему (3.1a) та крайові умови (3.1b), прирівнявши коефіцієнти при нульовому степені ε, одержуємо задачу для визначення $P_{i0}u$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{i0}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{i0}u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j0}u, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < \infty, \\ P_{i0}u(0,\tau) = 0, \quad \tau \geqslant 0, \\ P_{i0}u(x,0) = -\bar{u}_{i0}(x,0), \quad 0 \leqslant x < \infty \quad (i=\overline{1,n}). \end{cases} \tag{3.6}$$

Отож, як випливає із (3.6), функції $P_{i0}u$ ліквідують нев'язку, яку приносять $\bar{u}_{i0}$ у крайову умову при $t = 0$ і для визначення функцій $P_{i0}u$ одержано крайову задачу для гіперболічної системи рівнянь першого порядку. Гладкість розв'язку задачі (3.6) залежить від виконання умов погодження в кутовій точці. Перевіримо виконання умов погодження нульового та першого порядків розв'язку $P_{i0}u$ у кутовій точці $(0, 0)$. Для виконання умов погодження нульового порядку повинні виконуватись рівності

$$P_{i0}u(0,\tau)|_{\tau=0} = P_{i0}u(x,0)|_{x=0} \quad (i = \overline{1,n}).$$

Очевидним є те, що ліва частина цієї рівності для всіх $i = 1, \ldots, n$ дорівнює нулеві в кутовій точці, а з умов (3.6) та (3.4) одержуємо

$$0 = -\bar{u}_{i0}(x,0)|_{x=0} = 0 \quad (i = \overline{1,n}).$$

Отже, умови погодження початкових та крайових умов нульового порядку задачі (3.6) виконуються.

Перейдемо до перевірки умови погодження першого порядку, а саме, перевіримо, чи задовольняють систему (3.6) умови задачі в кутовій точці. Для цього повинні виконуватись співвідношення

$$\left.\frac{\partial P_{i0}u}{\partial t}\right|_{(0,0)} + \left.\frac{\partial P_{i0}u}{\partial \xi}\right|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0) P_{j0}u\Big|_{(0,0)} \quad (i = \overline{1,n}).$$

Використавши умови із (3.6), потрібно показати, що $\left.\dfrac{\partial \bar{u}_{i0}}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$. З умов $(\widehat{\mathrm{H}}_1)$ та (3.4) одержимо

$$\left.\frac{\partial \bar{u}_{i0}}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(0,0)\bar{u}_{j0}\Big|_{(0,0)} + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(0,0)\bar{v}_{k0}\Big|_{(0,0)} + f_{i0}(0,0) = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Виконання умов погодження нульового та першого порядків крайових та початкових умов дають підставу стверджувати, що розв'язок $P_{i0}u$ $(i = \overline{1,n})$ задачі (3.6) є достатньо гладким.

Покажемо тепер що функції $P_{i0}u$ $(i = \overline{1,n})$ мають примежовий характер. Справді, з однорідності крайової умови (3.6), функції $P_{i0}u$ $(i = \overline{1,n})$ приймають нульові значення над характеристикою $\tau = x$ системи (3.6). При $\varepsilon \to 0$ характеристика наближається до горизонтального положення, тобто функції $P_{i0}u$ відмінні від нуля в околі межі $t = 0$ області Ω.

Розглянемо тепер асимптотичне розвинення першого порядку розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (3.1) у області Ω, тобто будуємо розв'язок у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) \sim \bar{u}_{i0}(x,t) + P_{i0}u(x,\tau) + \varepsilon\bar{u}_{i1}(x,t) + \varepsilon P_{i1}u(x,\tau) & (i=\overline{1,n}), \\ v_s^\varepsilon(x,t) \sim \bar{v}_{s0}(x,t) + \varepsilon\bar{v}_{s1}(x,t) + \varepsilon P_{s1}v(x,\tau) & (s=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{3.7}$$

Підставляємо (3.7) в систему (3.1). Тоді стандартною процедурою теорії сингулярних збурень [21] одержуємо задачу для визначення функцій $P_{s1}v$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{s1}v}{\partial\tau} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,0)P_{j0}u, & 0<x<\infty,\ \tau>0, \\ P_{s1}v(x,\infty)=0, & 0\leqslant x<\infty\ \ (s=\overline{1,m}). \end{cases}$$

Проінтегрувавши систему для $P_{s1}v$, використавши те, що $P_{s0}u(x,\tau)=0$ при $\tau \geqslant x$ $(s=\overline{1,m})$, запишемо $P_{s1}v$ $(s=\overline{1,m})$ у явному вигляді

$$P_{s1}v(x,\tau) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,0)\int_x^\tau P_{j0}u(x,\eta)d\eta, & 0\leqslant\tau\leqslant x<\infty, \\ 0, & 0\leqslant x\leqslant\tau. \end{cases} \tag{3.8}$$

Зазначимо, що функції $P_{s1}v$ мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Систему рівнянь для визначення першого наближення $(\bar{u}_{i1}, \bar{v}_{s1})$ регулярної частини асимптотики в області Ω запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{u}_{i1}}{\partial x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\bar{u}_{j1} + \sum_{k=1}^{m}b_{ik}(x,t)\bar{v}_{k1} + \bar{f}_{i1}(x,t) & (i=\overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial\bar{v}_{s1}}{\partial t} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,t)\bar{u}_{j1} + \sum_{k=1}^{m}\sigma_{sk}(x,t)\bar{v}_{k1} + \bar{g}_{s1}(x,t) & (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.9}$$

де $\bar{f}_{i1}(x,t) = f_{i1}(x,t) - \partial\bar{u}_{i0}(x,t)/\partial t$, $\bar{g}_{s1}(x,t) = g_{s1}(x,t) + \partial\bar{v}_{s0}(x,t)/\partial x$, $f_{i1}(x,t)$, $g_{s1}(x,t)$ – коефіцієнти при першому степені ε розвинення функцій f_i та g_s у ряд за степенями ε, відповідно. Крім того, $\bar{v}_{s1}$ ліквідують нев'язки, які вносять примежові шари $P_{s1}v$ у початкові умови. Тому функції $\bar{u}_{i1}$, $\bar{v}_{s1}$, як розв'язки системи (3.9) повинні задовольняти умови

$$\begin{cases} \bar{u}_{i1}(0,t)=0, & t\geqslant 0\ \ (i=\overline{1,n}), \\ \bar{v}_{s1}(x,0) = -P_{s1}v(x,0), & 0\leqslant x<\infty\ \ (s=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{3.10}$$

Задача (3.9), аналогічно як і (3.4), еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, тобто є однозначно розв'язною [69].

Для ліквідації нев'язки першого порядку, яку вносить регулярна частина асимптотики $\bar{u}_1$ у початкову умову (3.1b), будуємо функцію $P_1u = (P_{11}u, \ldots, P_{n1}u)$, яка є розв'язком крайової задачі для лінійної системи гіперболічних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{i1}u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial P_{i1}u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j1}u + p_{i1}^{u}(x,\tau), & 0 < x < \infty,\ \tau > 0, \\ P_{i1}u(0,\tau) = 0, & \tau \geqslant 0, \\ P_{i1}u(x,0) = -\bar{u}_{i1}(x,0), & 0 \leqslant x < \infty, \end{cases} \tag{3.11}$$

де $p_{i1}^{u}(x,\tau) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,0)P_{k1}v + \tau\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial a_{ij}(x,0)}{\partial t}P_{j0}u \ \ (i = \overline{1,n})$.

Оскільки система (3.11) є неоднорідною, то для існування класичного розв'язку задачі необхідно, щоб виконувались не лише умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці $(0,0)$, але й існували неперервні похідні першого порядку для функцій p_{i1}^{u}. Частинні похідні існують, оскільки функції $P_{k0}u$, $P_{k1}v$ – гладкі. Доведемо виконання умов погодження нульового порядку, тобто справедлива рівність $P_{i1}u(0,\tau)\big|_{\tau=0} = P_{i1}u(x,0)\big|_{x=0}$. Рівність нулеві лівої частини випливає з умови (3.11), а для правої частини використаємо умови (3.10)

$$0 = -\bar{u}_{i1}(x,0)\big|_{x=0} = 0 \qquad (i = \overline{1,n}).$$

Отже, крайові умови системи (3.11) погоджені до неперервності в кутовій точці $(0,0)$, а це означає, що розв'язок задачі (3.11) у області $\tau \geqslant 0$, $0 \leqslant x < \infty$ є неперервний. Щоб переконатися, що $P_{i1}u$ у вказаній області гладкі, покажемо, що для всіх $i = \overline{1,n}$ виконуються рівності

$$\frac{\partial P_{i1}u}{\partial \tau}\bigg|_{(0,0)} + \frac{\partial P_{i1}u}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,0)P_{j1}u\bigg|_{(0,0)} + p_{i1}^{u}\big|_{(0,0)}.$$

Для цього з умов (3.6),(3.8),(3.11) переходимо до рівності

$$0 - \frac{\partial \bar{u}_{i1}}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot 0 + 0.$$

Тепер залишилось показати, що похідна $\bar{u}_{i1}$ за змінною x рівна нулеві. Для цього використаємо умову (3.9), з якої маємо

$$\frac{\partial \bar{u}_{i1}}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(0,0)\bar{u}_{j1}\bigg|_{(0,0)} + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(0,0)\bar{v}_{k1}\bigg|_{(0,0)} + \bar{f}_{i1}\bigg|_{(0,0)} \quad (i=\overline{1,n}),$$

де

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{i1}(0,0) &= f_{i1}(0,0) - \frac{\partial \bar{u}_{i0}}{\partial t} = 0 \quad && (i=\overline{1,n}),\\
\bar{v}_{s1}|_{(0,0)} &= -P_{s1}v(0,0) = 0 && (s=\overline{1,m}),\\
\bar{u}_{i1}|_{(0,0)} &= 0 && (i=\overline{1,n}).
\end{aligned}$$

Оскільки, $\dfrac{\partial \bar{u}_{i1}}{\partial x}\bigg|_{(0,0)} = 0 \ \ (i=\overline{1,n})$, то всі умови існування класичного (тобто гладкого) розв'язку для задачі (3.11) виконуються.

Отже, як випливає із побудованого вище нульового та першого наближень, рекурентний процес послідовного визначення функцій асимптотичного розвинення розв'язку розщеплений, а тому опишемо алгоритм визначення функцій наближення довільного порядку.

Перейдемо до побудови асимптотики довільного порядку. Повне асимптотичне розвинення розв'язку $(u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})$ задачі (3.1) в області Ω будуємо у вигляді:

$$\begin{cases}
u_i^{\varepsilon}(x,t) \sim \sum\limits_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \big[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau)\big] \quad (i=\overline{1,n}),\\
v_s^{\varepsilon}(x,t) \sim \sum\limits_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \big[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau)\big] \quad (s=\overline{1,m}).
\end{cases} \tag{3.12}$$

Опишемо послідовність, з якої визначаємо функції правих частин (3.12), а також випишемо задачі, розв'язками яких є ці функції. Задачі одержимо відповідними методами теорії сингулярних збурень [18], подібно до наведеного вище, тому пропустимо опис способу їх одержання.

Функції примежового шару $P_h v$ асимптотичного розвинення порядку h ліквідують нев'язки, які приносять функції $P_h u$ у праву частину системи (3.1a) стосовно v, і визначаються як розв'язки задач

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial P_{sh}v}{\partial \tau} = p_{sh}^{v}(x,\tau), \quad 0 < x < \infty, \ \ \tau > 0,\\
P_{sh}v(x,\infty) = 0, \qquad 0 \leqslant x < \infty \ \ (s=\overline{1,m}),
\end{cases} \tag{3.13}$$

де p_{sh}^v – права частина рівняння для $P_{sh}v$ і має вид

$$p_{sh}^v(x,\tau) = \sum_{r=0}^{h-1} \frac{\tau^r}{r!} \Bigg[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^r \gamma_{sj}}{\partial t^r}(x,0) P_{j,\,h-1-r}u + \\ + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^r \sigma_{sk}}{\partial t^r}(x,0) P_{k,\,h-1-r}v \Bigg] + \frac{\partial P_{s,\,h-2}v}{\partial x},\ h>1\ (s=\overline{1,m}).$$

Відзначимо, що p_{sh}^v $(s=\overline{1,m},\ h>1)$ – відомі неперервні для $0\leqslant x<\infty$, $\tau\geqslant 0$ функції (виражаються через $P_l u$, $P_l v$, $\partial P_l v/\partial x$ для $l<h$), рівні нулеві над характеристикою $\tau = x$ (що випливає з їхньої структури), а τ – регуляризуюче перетворення. Тому розв'язок $P_{sh}v$ задачі (3.13) для кожного $h>1$ та $s=\overline{1,m}$ запишемо в явному вигляді

$$P_{sh}v(x,\tau) = \begin{cases} \int\limits_x^{\tau} p_{sh}^v(x,\vartheta)d\vartheta, & 0\leqslant \tau \leqslant x, \\ 0, & 0\leqslant x\leqslant \tau. \end{cases} \tag{3.14}$$

Зазначимо, що гладкість функцій $P_{sh}v$ $(s=\overline{1,m},\, h>1)$ для $0\leqslant x<\infty$, $\tau\geqslant 0$, зокрема, на характеристиці $x=\tau$, випливає безпосередньо із їхньої структури.

Функції регулярної частини асимптотики $(\bar u_h, \bar v_h)$ порядку $h>1$ у області Ω є розв'язками такої задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar u_{ih}}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\bar u_{jh} + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\bar v_{kh} + \bar f_{ih}(x,t) & (i=\overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial \bar v_{sh}}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)\bar u_{jh} + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)\bar v_{kh} + \bar g_{sh}(x,t) & (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.15a}$$

$$\begin{cases} \bar u_{ih}(0,t) = 0, & 0\leqslant t<\infty\ \ (i=\overline{1,n}), \\ \bar v_{sh}(x,0) = -P_{sh}v(x,0), & 0\leqslant x<\infty\ \ (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.15b}$$

де $\bar f_{ih}(x,t) = f_{ih}(x,t) - \dfrac{\partial \bar u_{i,\,h-1}}{\partial t}$, $\bar g_{sh}(x,t) = g_{sh}(x,t) + \dfrac{\partial \bar v_{s,\,h-1}}{\partial x}$, а $f_{ih}(x,t)$, $g_{sh}(x,t)$ – коефіцієнти розвинення функцій f_i та g_s, відповідно, в ряд за степенями ε. Задача (3.15) еквівалентна системі інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, коректну розв'язність якої описано, наприклад, в [69].

Для визначення наближень функції примежового шару $P_{ih}u$ $(i =$

$\overline{1,n},\ h>1)$ в околі межі $t=0$ області Ω одержимо крайову задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{ih}u}{\partial \tau}+\dfrac{\partial P_{ih}u}{\partial x}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(x,0)P_{jh}u+p_{ih}^{u}(x,\tau), & 0<x<\infty,\ \tau>0,\\ P_{ih}u(0,\tau)=0, & \tau\geqslant 0,\\ P_{ih}u(x,0)=-\bar{u}_{ih}(x,0), & 0\leqslant x<\infty, \end{cases} \tag{3.16}$$

де

$$p_{ih}^{u}(x,\tau)=\sum_{r=1}^{h}\frac{\tau^{r}}{r!}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^{r}a_{ij}}{\partial t^{r}}(x,0)P_{j,\,h-r}u(x,\tau)+$$

$$+\sum_{r=0}^{h}\frac{\tau^{r}}{r!}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^{r}b_{ik}}{\partial t^{r}}(x,0)P_{k,\,h-r}v(x,\tau)\quad (i=\overline{1,n},\ h>1).$$

Аналогічно як у задачі (3.11), для доведення існування класичного розв'язку задачі (3.16) необхідно, щоб функція p_{ih}^{u} була гладкою й виконувались умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці $(0,0)$. Частинні похідні функцій p_{ih}^{u} існують, оскільки функція є сумою гладких функцій. Перейдемо до перевірки виконання умов погодження. Із (3.15b) та (3.16) безпосередньо маємо:

$$0=P_{ih}u(0,\tau)\Big|_{\tau=0}=P_{ih}u(x,0)\Big|_{x=0}=-\bar{u}_{ih}(x,0)\Big|_{x=0},$$

а, враховуючи (3.15b), одержуємо

$$0=-u_{ih}(0,0)=0\quad (i=\overline{1,n},\ h>1).$$

Отже, крайові умови задачі (3.16) погоджені до неперервності в кутовій точці. Перевіримо чи початкові умови задовольняють систему (3.16) в точці $(0,0)$, тобто:

$$\frac{\partial P_{ih}u}{\partial \tau}\Big|_{(0,0)}+\frac{\partial P_{ih}u}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,0)P_{j\,h}u\big|_{(0,0)}+p_{ih}^{u}(x,\tau)\big|_{(0,0)}\quad (i=\overline{1,n},\ h>1),$$

або, використавши початкову та крайові умови задачі (3.16), останнє можна записати у виді

$$-\frac{\partial \bar{u}_{ih}(x,0)}{\partial x}\Big|_{x=0}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(0,0)\cdot 0+p_{ih}^{u}(0,0)\quad (i=\overline{1,n},\ h>1).$$

Права частина цього співвідношення рівна нулеві, оскільки $p^u_{ih}(x,\tau)=0$ $(i=\overline{1,n},\ h>1)$ при $\tau\geqslant x\geqslant 0$, що випливає із їхніх властивостей. Використавши перше рівняння (3.15a) та умови (3.15b), маємо

$$\frac{\partial \bar u_{ih}(0,0)}{\partial x}=-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(0,0)\cdot 0-\sum_{k=1}^{m}b_{ik}(0,0)P_{kh}v(x,0)\big|_{x=0}+$$
$$+\bar f_{ih}(0,0)\quad (i=\overline{1,n},\ h>1).$$

Відповідно до (3.15b) та (3.14), перші два доданки справа останньої рівності рівні нулеві. Залишилось показати, що $\bar f_{ih}(x,t)$ в кутовій точці рівна нулеві. Отож, із вигляду для $\bar f_{ih}$, умов $(\widehat{\mathrm{H}}_2)$, (3.15b) можемо записати $(i=\overline{1,n},\ h>1)$

$$\bar f_{ih}(0,0)=f_{ih}(0,0)-\frac{\partial \bar u_{i,\,h-1}(0,0)}{\partial t}=0.$$

Справедливість останньої рівності випливає з того, що $\bar u_{ih}(0,t)=0$ для $0\leqslant t<\infty$ $(i=\overline{1,n})$, тому $\dfrac{\partial u_{ih}}{\partial t}(0,0)=0$ $(i=\overline{1,n},\ h>1)$. Виконання умови погодження першого порядку в кутовій точці $(0,0)$ забезпечує гладкість розв'язку задачі (3.16) в області $\tau\geqslant 0,\quad 0<x<\infty$. Зазначимо, крім того, що функції $P_{ih}u$ $(i=\overline{1,n},\ h>1)$ мають примежовий характер, відмінні від нуля в околі межі $t=0$ області Ω (крайова умова (3.16)) і при $\varepsilon\to 0$ характеристика $x=\tau$ рівняння (3.16) прямує до горизонтального положення.

Отже, формальне асимптотичне наближення довільного порядку розв'язку $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$ задачі (3.1) побудовано. Перейдемо до обгрунтування одержаної асимптотики.

3.1.3. Оцінка залишкового члена асимптотики розв'язку задачі

Проведемо оцінку залишкового члена асимптотики. Нехай $N>0$ – довільне натуральне число. Виділимо в асимптотиці (3.12) розв'язку $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)$ задачі (3.1) частинну суму N-го порядку. Позначивши через $R^\varepsilon_{iN}u=R^\varepsilon_{iN}u(x,t)$ $(i=\overline{1,n})$ та $R^\varepsilon_{sN}v=R^\varepsilon_{sN}v(x,t)$ $(s=\overline{1,m})$ залишки асимптотичних розвинень відповідних компонент розв'язку задачі, (3.12) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N}\varepsilon^h\big[\bar u_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau)\big] + R_{iN}^\varepsilon u(x,t) \quad (i=\overline{1,n}), \\ v_s^\varepsilon(x,t) = \sum\limits_{h=0}^{N}\varepsilon^h\big[\bar v_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau)\big] + R_{sN}^\varepsilon v(x,t) \quad (s=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{3.17}$$

Для того, щоб одержати задачі для залишку асимптотики $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$, підставимо (3.17) у систему (3.1a), умови (3.1b) та використаємо задачі для наближень асимптотичного розвинення. Після очевидних спрощень залишковий член $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v) = (R_{1N}^\varepsilon u, \ldots, R_{nN}^\varepsilon u, R_{1N}^\varepsilon v, \ldots, R_{mN}^\varepsilon v)$ асимптотики в області Ω задовольняє систему гіперболічних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial R_{iN}^\varepsilon u}{\partial t} + \dfrac{\partial R_{iN}^\varepsilon u}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)R_{jN}^\varepsilon u + \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)R_{kN}^\varepsilon v + \\ \qquad\qquad + \pi_i^u(x,t;\varepsilon), \\ \dfrac{\partial R_{sN}^\varepsilon v}{\partial t} - \varepsilon\dfrac{\partial R_{sN}^\varepsilon v}{\partial x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{sj}(x,t)R_{jN}^\varepsilon u + \sum\limits_{k=1}^{m} \sigma_{sk}(x,t)R_{kN}^\varepsilon v + \\ \qquad\qquad + \pi_s^v(x,t;\varepsilon), \end{cases} \tag{3.18a}$$

та початково-крайові умови

$$\begin{cases} R_{iN}^\varepsilon u(x,0) = R_{iN}^\varepsilon u(0,t) = 0 \quad (i=\overline{1,n}), \\ R_{sN}^\varepsilon v(x,0) = 0 \qquad\qquad\qquad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.18b}$$

де π_i^u $(i=\overline{1,n})$ та π_s^v $(s=\overline{1,m})$ – відомі функції, для яких у області Ω справджується

$$\pi_i^u(\cdot,\cdot;\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}), \quad \pi_s^v(\cdot,\cdot;\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Наша мета – одержати рівномірну оцінку залишку асимптотики в $\overline{\Omega}$. Для цього уведемо заміну в задачі (3.18):

$$\rho_i^\varepsilon u(x,t) = R_{iN}^\varepsilon u(x,t)e^{-\eta(x+t)} \quad (i=\overline{1,n}),$$
$$\rho_s^\varepsilon v(x,t) = R_{sN}^\varepsilon v(x,t)e^{-\eta(x+t)} \quad (s=\overline{1,m}),$$

де η – деяка додатна стала. Тоді, відповідно, для $\rho_i^\varepsilon u$ і $\rho_s^\varepsilon v$ одержимо в області Ω задачу

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial\rho_i^\varepsilon u}{\partial t}+\dfrac{\partial\rho_i^\varepsilon u}{\partial x}=\tilde a_{ii}(x,t)\rho_i^\varepsilon u+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}(x,t)\rho_j^\varepsilon u+ \\ \qquad\qquad\qquad +\sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik}(x,t)\rho_k^\varepsilon v+\Pi_i^u(x,t;\varepsilon)\quad (i=\overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial\rho_s^\varepsilon v}{\partial t}-\varepsilon\dfrac{\partial\rho_s^\varepsilon v}{\partial x}=\tilde\sigma_{ss}(x,t)\rho_s^\varepsilon v+\sum\limits_{j=1}^{n}\gamma_{sj}(x,t)\rho_j^\varepsilon u+ \\ \qquad\qquad\qquad +\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{m}\sigma_{sk}(x,t)\rho_k^\varepsilon v+\Pi_s^v(x,t;\varepsilon)\quad (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.19a}$$

$$\begin{cases} \rho_i^\varepsilon u(x,0)=\rho_i^\varepsilon u(0,t)=0 & (i=\overline{1,n}), \\ \rho_s^\varepsilon v(x,0)=0 & (s=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{3.19b}$$

де

$$\begin{aligned} &\Pi_i^u(x,t;\varepsilon)=\pi_i^u(x,t;\varepsilon)e^{-\eta(x+t)}=O(\varepsilon^{N+1}),\\ &\tilde a_{ii}(x,t)=a_{ii}(x,t)-\eta(1+\varepsilon)\quad (i=\overline{1,n}),\\ &\Pi_s^v(x,t;\varepsilon)=\pi_s^v(x,t;\varepsilon)e^{-\eta(x+t)}=O(\varepsilon^{N+1}),\\ &\tilde\sigma_{ss}(x,t)=\sigma_{ss}(x,t)-\eta(1-\varepsilon)\quad (s=\overline{1,m}). \end{aligned}$$

Вибираємо тепер η настільки великим, щоб виконувались нерівності

$$\begin{aligned} &\tilde a_{ii}(x,t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}(x,t)|+\sum_{k=1}^{m}|b_{ik}(x,t)|\leqslant -1 \quad (i=\overline{1,n}),\\ &\tilde\sigma_{ss}(x,t)+\sum_{j=1}^{n}|\gamma_{sj}(x,t)|+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{m}|\sigma_{sk}(x,t)|\leqslant -1 \quad (s=\overline{1,m}). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Припустимо, що кожна з функцій $|\rho_i^\varepsilon u|$ $(i=\overline{1,n})$ досягає свого максимуму в точці $T_i(x_i,t_i)\in\overline{\Omega}$, а функції $|\rho_s^\varepsilon v|$ $(s=\overline{1,m})$ – в точках $T_{n+s}(x_{n+s},t_{n+s})\in\overline{\Omega}$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що

$$\begin{aligned} |\rho_1^\varepsilon u(T_1)|\ &\geqslant|\rho_2^\varepsilon u(T_2)|\geqslant\ldots\geqslant|\rho_n^\varepsilon u(T_n)|\geqslant\\ &\geqslant|\rho_1^\varepsilon v(T_{n+1})|\geqslant|\rho_2^\varepsilon v(T_{n+2})|\geqslant\ldots\geqslant|\rho_m^\varepsilon v(T_{n+m})|. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Розглянемо перше рівняння системи (3.19) в точці T_1 і перепишемо його у вигляді

$$
\begin{gathered}
\varepsilon \frac{\partial \rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\bigg|_{T_1} + \frac{\partial \rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\bigg|_{T_1} - \tilde{a}_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1) - \\
- \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(T_1)\rho_j^\varepsilon u(T_1) - \sum_{k=1}^{m} b_{1k}(T_1)\rho_k^\varepsilon v(T_1) = \Pi_1(T_1;\varepsilon).
\end{gathered}
\tag{3.22}
$$

Припустимо, що у точці T_1 функція $\rho_1^\varepsilon u$ набуває від'ємного мінімуму. Тоді в цій точці $\dfrac{\partial \rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\bigg|_{T_1} \leqslant 0$, $\dfrac{\partial \rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\bigg|_{T_1} \leqslant 0$ (строга нерівність можлива лише у випадку, якщо точка T_1 знаходиться на межі області $\overline{\Omega}$). Звідси, використовуючи (3.20) та (3.21), для правої частини (3.22) справедлива оцінка

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \frac{\partial \rho_1^\varepsilon u}{\partial t}\bigg|_{T_1} &+ \frac{\partial \rho_1^\varepsilon u}{\partial x}\bigg|_{T_1} - \tilde{a}_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1) - \\
&- \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(T_1)\rho_j^\varepsilon u(T_1) - \sum_{k=1}^{m} b_{1k}(T_1)\rho_k^\varepsilon v(T_1) \leqslant \\
&\leqslant -\tilde{a}_{11}(T_1)\rho_1^\varepsilon u(T_1) + \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}(T_1)||\rho_j^\varepsilon u(T_1)| + \sum_{k=1}^{m} |b_{1k}(T_1)||\rho_k^\varepsilon v(T_1)| \leqslant \\
&\leqslant -\Big(\tilde{a}_{11}(T_1) + \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}(T_1)| + \sum_{k=1}^{m} |b_{1k}(T_1)|\Big)\rho_1^\varepsilon u(T_1) \leqslant \rho_1^\varepsilon u(T_1).
\end{aligned}
$$

Отож, права частина (3.22) є величиною порядку ε^{N+1}, а ліва в точці T_1 не перевищує $\rho_1^\varepsilon u(T_1)$. Оскільки $|\rho_1^\varepsilon u(T_1)| = \max\limits_{\overline{\Omega}} |\rho_1^\varepsilon u(x,t)| = O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$, то із (3.21) одержимо

$$
\begin{gathered}
|\rho_2^\varepsilon u(T_2)| = \max_{\overline{\Omega}} |\rho_2^\varepsilon u(x,t)| = O\left(\varepsilon^{N+1}\right), \ldots, \\
|\rho_m^\varepsilon v(T_m)| = \max_{\overline{\Omega}} |\rho_m^\varepsilon v(x,t)| = O\left(\varepsilon^{N+1}\right).
\end{gathered}
$$

Звідки й випливає, що для всіх $(x,t) \in \overline{\Omega}$

$$
\rho_i^\varepsilon u(x,t) = O\left(\varepsilon^{N+1}\right) \quad (i = \overline{1,n}), \quad \rho_s^\varepsilon v(x,t) = O\left(\varepsilon^{N+1}\right) \quad (s = \overline{1,m}).
$$

Тому, взявши до уваги уведену заміну, одержимо бажану оцінку залишкового члена $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$ асимптотичного розвинення (3.17) розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (3.1) в області $\overline{\Omega}$:

$$
\begin{aligned}
R_{iN}^\varepsilon u(x,t) &= \rho_i^\varepsilon u(x,t) e^{\eta(x+t)} = O\left(\varepsilon^{N+1}\right) \quad (i = \overline{1,n}), \\
R_{sN}^\varepsilon v(x,t) &= \rho_s^\varepsilon v(x,t) e^{\eta(x+t)} = O\left(\varepsilon^{N+1}\right) \quad (s = \overline{1,m}).
\end{aligned}
$$

Аналогічні міркування справедливі також у випадку додатного максимуму для функції $\rho_i^\varepsilon u$. Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 3.1. *Нехай* $\Omega = \{(x,\, t):\ 0 < x, t < \infty\}$, *а* N *– довільне натуральне число і виконуються умови:*

($\widehat{\mathrm{H}}_1$) $a_{ij}\,,\ b_{ik}\,,\ \gamma_{sj}\,,\ \sigma_{sk} \in C^{(N+2)}(\overline{\Omega})\,,\ f_i\,,\ g_s \in C^{(N+2)}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}_+)\ \ (i,j = \overline{1,n}\,,\ s,k = \overline{1,m})$ *;*

($\widehat{\mathrm{H}}_2$) $f_i(0,0;\varepsilon) = 0\ \ (i=\overline{1,n})\,,\quad g_s(0,0;\varepsilon) = 0\ \ (s=\overline{1,m})\,.$

Тоді розв'язок $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ *задачі* (3.1) *в області* Ω *допускає асимптотичне розвинення*

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon(x,t) = \displaystyle\sum_{h=0}^{N}\varepsilon^h\big[\bar{u}_{ih}(x,t) + P_{ih}u(x,\tau)\big] + R_{iN}^\varepsilon u(x,t) \quad (i=\overline{1,n}),\\ v_s^\varepsilon(x,t) = \displaystyle\sum_{h=0}^{N}\varepsilon^h\big[\bar{v}_{sh}(x,t) + P_{sh}v(x,\tau)\big] + R_{sN}^\varepsilon v(x,t) \quad (s=\overline{1,m}),\end{cases}$$

де функції $(\bar{u}_h, \bar{v}_h)$ *регулярної частини асимптотики є розв'язками задач* (3.15)*; функція примежового шару* $(P_h u, P_h v)$ *в околі* $t=0$ *задовольняє задачу* (3.16),(3.13)*; для залишкового члена* $(R_N^\varepsilon u, R_N^\varepsilon v)$ *асимптотичного розвинення справедливі оцінки*

$$\Big|R_{iN}^\varepsilon u(x,t)\Big| \leqslant C_{1i}\varepsilon^{N+1}, \qquad \Big|R_{sN}^\varepsilon v(x,t)\Big| \leqslant C_{2s}\varepsilon^{N+1}$$

для всіх $(x,t)\in\overline{\Omega}$, *з незалежними від* ε *сталими* $C_{1i}\,,\ C_{2s}\ \ (i=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m})\,.$

3.2. Задача з малим параметром при похідних у гіперболічній системі рівнянь першого порядку із різними характеристичними нахилами у прямокутнику

У цьому підрозділі розглянуто випадок гіперболічної системи, у якої кутові коефіцієнти характеристик мають різні знаки, а областю дослідження задачі є прямокутник. Основна мета підрозділу полягає у побудові та дослідженні асимптотики розв'язку, використовуючи методи побудови асимптотичного розвинення розв'язку сингулярно збуреної крайової задачі у прямокутнику для гіперболічної системи рівнянь першого порядку [10, 18, 21].

3.2.1. Формулювання сингулярно збуреної задачі

В області $\Pi = \{(t, x) : \ 0 < t < T, \ 0 < x < 1\}$ розглянемо сингулярно збурену крайову задачу для гіперболічної системи

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} = a_{11} u^\varepsilon(t, x) + a_{12} v^\varepsilon(t, x) + f(t, x), \\ \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial x} = a_{21} u^\varepsilon(t, x) + a_{22} v^\varepsilon(t, x) + g(t, x), \end{cases} \tag{3.23a}$$

$$\begin{cases} u^\varepsilon(0, x) = \varphi(x), \ \ v^\varepsilon(0, x) = \psi(x), \ \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u^\varepsilon(t, 0) = \mu(t), \quad v^\varepsilon(t, 1) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{3.23b}$$

де a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – сталі коефіцієнти, f, g – вільні члени, задані функції в Π, φ, ψ – початкове значення розв'язку, задані функції на відрізку $[0, 1]$, μ, ν – значення розв'язку на краях області, задані функції на $[0, T]$. Побудуємо асимптотичне розвинення за степенями малого параметра ε класичного розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (3.23).

Припустимо, що виконуються такі умови:

($\widetilde{\mathrm{H}}_1$) функції f, g належать до класу $C^\infty(\Pi)$; $\varphi, \ \psi \in C^\infty([0, 1])$; $\mu, \ \nu \in C^\infty([0, T])$ (порядок гладкості залежить від порядку асимптотики розв'язку);

($\widetilde{\mathrm{H}}_2$) виконуються умови погодження нульового та першого порядків даних задачі (3.23)

$$\varphi(0) = \mu(0), \tag{3.24a}$$

$$\psi(1) = \nu(0), \tag{3.24b}$$

$$\mu'(0) = 0, \tag{3.24c}$$

$$\psi'(1) = 0, \tag{3.24d}$$

$$\varphi'(0) = a_{11}\varphi(0) + a_{12}\psi(0) + f(0, 0), \tag{3.24e}$$

$$\nu'(0) = a_{21}\varphi(1) + a_{22}\psi(1) + g(0, 1). \tag{3.24f}$$

Відомо, що при фіксованому ε та виконанні зроблених припущень ($\widetilde{\mathrm{H}}_1$), ($\widetilde{\mathrm{H}}_2$) існує єдиний класичний розв'язок задачі (3.23) [1].

Уведемо регуляризуючі змінні, які будемо використовувати при побудові розвинення розв'язку досліджуваної задачі, а саме

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}, \ \ \xi = \frac{x - 1}{\varepsilon}, \ \ \varsigma = \frac{x - 1}{\varepsilon^2} = \frac{\xi}{\varepsilon}. \tag{3.25}$$

3.2.2. Побудова асимптотичного наближення розв'язку задачі

Асимптотику розв'язку $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ задачі (3.23) у прямокутнику Π будуємо у вигляді

$$u^\varepsilon(t,x) = U_0(t,x) + u_0^{(0)}(\tau,x) + \\ + \sum_{k=1}^{3} \varepsilon^k \left(U_k(t,x) + u_k^{(0)}(\tau,x) + u_k^{(1)}(t,\xi) + u_k^{(2)}(\tau,\varsigma) \right), \tag{3.26a}$$

$$v^\varepsilon(t,x) = V_0(t,x) + v_0^{(1)}(t,\xi) + \\ + \sum_{k=1}^{3} \varepsilon^k \left(V_k(t,x) + v_k^{(0)}(\tau,x) + v_k^{(1)}(t,\xi) + v_k^{(2)}(\tau,\varsigma) \right). \tag{3.26b}$$

Для визначення регулярної частини (U_0, V_0) асимптотики нульового наближення розв'язку задачі (3.23) у прямокутнику Π одержимо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_0}{\partial x} = a_{11} U_0(t,x) + a_{12} V_0(t,x) + f(t,x), \\ \dfrac{\partial V_0}{\partial t} = a_{21} U_0(t,x) + a_{22} V_0(t,x) + g(t,x) \end{cases} \tag{3.27a}$$

з умовами

$$\begin{cases} U_0(t,0) = \mu(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ V_0(0,x) = \psi(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{3.27b}$$

Задача (3.27) для визначення (U_0, V_0) зводиться до еквівалентної системи інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду із неперервним ядром, для якої існує єдиний розв'язок [5]. Отже, при достатній гладкості даних задачі (3.23), функції U_0, V_0 також будуть достатньо гладкі.

Розв'язок (U_0, V_0) системи (3.27a), тобто розв'язок виродженої системи (3.23a), загалом, не задовольняє всі сформульовані умови (3.23b). Тому в тих околах межі області Π, у яких не виконуються поставлені умови невиродженої задачі, виникають примежові шари. Роль примежових шарів полягає у тому, щоб на кожному кроці побудови асимптотики розв'язку вихідної задачі "підправляти" розв'язок виродженої задачі до виконання втрачених умов. Досить часто при побудові асимптотики розв'язку сингулярно збурених крайових задач у області з кутовими точками виникають кутові примежові шари: примежовий шар, ліквідуючи нев'язку на одній частині межі або вносить нев'язку в іншу крайову умову, яка суттєво відмінна від нуля саме в околі кутової точки області, або приводить до порушення виконання умов погодження, що зумовлює втрати гладкості асимптотичного розвинення. Саме останній випадок наявний у досліджуваній задачі. Опишемо процес послідовної побудови асимптотичного розвинення задачі (3.23).

Отож, при виродженні задачі (3.23), як вказано вище, залишилася, зокрема, не виконана початкова умова для компоненти u розв'язку. Для того, щоб "підправити" на першому кроці u^ε до виконання втраченої умови при $t = 0$, у першому рівнянні (3.23a) уведемо регуляризуюче перетворення

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

розвинувши функції у ряди за степенями ε за змінною t. Замінимо $u^\varepsilon(t, x)$ на $U_0(t, x) + u_0^{(0)}(\tau, x)$, у першому рівнянні (3.23a) після вказаних перетворень та в умовах для u, візьмемо до уваги задачу (3.27) і, прирівнявши коефіцієнти при ε^0, одержимо задачу для $u_0^{(0)}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0^{(0)}}{\partial \tau} + \dfrac{\partial u_0^{(0)}}{\partial x} = a_{11} u_0^{(0)}(\tau, x), & (\tau, x) \in \mathbb{R}_{++} \times (0,1), \\ u_0^{(0)}(0, x) = \varphi(x) - U_0(0, x), & x \in [0,1], \\ u_0^{(0)}(\tau, 0) = 0, & \tau \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{3.28}$$

Отже, функція примежового шару $u_0^{(0)}$ є розв'язком крайової задачі у півсмузі для гіперболічного рівняння першого порядку. Неперервність розв'язку задачі (3.28) залежить від виконання умов погодження нульового порядку розв'язку $u_0^{(0)}$ у кутовій точці $(0, 0)$, тобто повинна виконуватись рівність

$$u_0^{(0)}(0, \tau)|_{\tau=0} = u_0^{(0)}(x, 0)|_{x=0}.$$

Справедливість цієї рівності очевидним чином випливає із умов (3.28), (3.27b) та (3.24a).

Взявши до уваги умову погодження (3.24e) припущення $(\widetilde{\mathrm{H}}_2)$ неважко переконатись у виконанні умов погодження першого порядку в точці $(0, 0)$.

Функція $u_0^{(0)}$ має примежовий характер. Справді, на підставі однорідності крайової умови (3.28) функція $u_0^{(0)}$ над характеристикою $\tau = x$ рівняння (3.28) приймає нульові значення. При $\varepsilon \to 0$ характеристика наближається до горизонтального положення, тобто функція $u_0^{(0)}$ відмінна від нуля в оточенні межі $t=0$ області Π. Розв'язок представимо, як

$$u_0^{(0)}(\tau, x) = \begin{cases} (\varphi(x-\tau) - U_0(0, x-\tau))\, e^{a_{11}\tau}, & \tau \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x \leqslant \tau \leqslant +\infty. \end{cases}$$

Тепер, на першому етапі, підправимо компоненту v розв'язку задачі (3.23a) до виконання крайової умови при $x=1$. Аналогічно як вище, після впровадження регуляризуючої змінної

$$\xi = \frac{x-1}{\varepsilon}$$

та стандартної процедури теорії сингулярних збурень, одержимо задачу для знаходження функції $v_0^{(1)}$, яка у сумі із V_0 задовольняє умову при $x=1$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_0^{(1)}}{\partial t} - \dfrac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi} = a_{22} v_0^{(1)}(t, \xi), & (t, \xi) \in (0, T) \times \mathbb{R}_{--}, \\ v_0^{(1)}(0, \xi) = 0, & \xi \in \mathbb{R}_{-}, \\ v_0^{(1)}(t, 0) = \nu(t) - V_0(t, 1), & t \in [0, T]. \end{cases} \tag{3.29}$$

Для продовження побудови асимптотичного розвинення розв'язку досліджуваної задачі необхідно забезпечити достатню гладкість наближень. У випадку $v_0^{(1)}$ перевіримо виконання умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці $(0,1)$ напівобмеженої смуги $(0,T)\times\mathbb{R}_{++}$, які забезпечують неперервність розв'язку в замиканні області та диференційовність у внутрішніх точках. Тобто, для погодження умов задачі (3.29) необхідно виконання рівності

$$v_0^{(1)}(\xi, 0)|_{\xi=0} = v_0^{(1)}(0, t)|_{t=0}.$$

Звідси, взявши до уваги умови (3.29), одержимо

$$0 = [\nu(t) - V_0(t, 1)]|_{t=0},$$

а із умови (3.27b) випливає

$$0 = \nu(0) - \psi(1) = 0.$$

Справедливість останньої рівності забезпечують умови (3.24b) припущення $(\widetilde{\mathrm{H}}_2)$.

Перевіримо виконання умов погодження першого порядку задачі (3.29) в кутовій точці $(0,1)$, а саме

$$\frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial t}|_{(0,0)} - \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi}|_{(0,0)} = a_{22} v_0^{(1)}|_{(0,0)},$$

або

$$\nu'(0) - \frac{\partial V_0(t,1)}{\partial t}|_{t=0} = a_{22} \cdot 0.$$

Із умови (3.24f), припущення $(\widetilde{\mathrm{H}}_2)$ та (3.27a) одержимо

$$a_{21}\varphi(1) + a_{22}\nu(0) + g(0,1) - (a_{21}U_0(0,1) + a_{22}\nu(0) + g(0,1)) = \\ = a_{21}\,(\varphi(1) - U_0(0,1)).$$

Вираз справа, взагалі кажучи, відмінний від нуля. Тому функція $v_0^{(1)}$, загалом, не є класичним розв'язком задачі (3.29) – похідні мають розрив на характеристиці $t=-\xi$ рівняння (3.29). Розв'язок допускає представлення у явному вигляді

$$v_0^{(1)}(t,\xi) = \begin{cases} (\nu(t+\xi) - V_0(t+\xi,0)) + e^{a_{22}\xi}, & -\xi < t < T, \\ 0, & t \leqslant -\xi. \end{cases}$$

Відзначимо, що при виродженні задачі (3.23) початкова умова для другої компоненти v не втрачається, тим не менше, у правій частині рівняння системи для v присутня функція змінної τ. Тому виникає необхідність побудови функції $v_1^{(0)}$ асимптотичного наближення, щоб узгодити ліву і праву частини рівняння за швидкою змінною τ. Крім того, використаємо формулювання умови для цієї функції з метою усунення нев'язки у виконанні умови погодження. Отже, на підставі вище сказаного, $v_1^{(0)}$ є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1^{(0)}}{\partial \tau} = a_{12} u_0^{(0)}(\tau,x), & (\tau,x) \in \mathbb{R}_{++} \times (0,1), \\ v_1^{(0)}(0,x) = \lambda_1(x), & x \in [0,1], \end{cases} \tag{3.30}$$

де $\lambda_1(x)$ така, що

$$v_1^{(0)}(0,x) + V_1(0,x) = 0, \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} v_1^{(0)}(0,x) = \lambda_1(x), \\ V_1(0,x) = -\lambda_1(x). \end{cases}$$

Права частина рівняння (3.30) неперервна, а тому після інтегрування одержимо гладкий розв'язок

$$v_1^{(0)}(\tau,x)=\begin{cases}\lambda_1(x)+a_{21}\int\limits_0^{\tau}u_0^{(0)}(s,x)ds, & \tau\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & x\leqslant\tau.\end{cases}$$

З іншого боку, функція $v_1^{(0)}$ вносить нев'язку у крайову умову при $x=1$, тому для її усунення будуємо функцію $v_1^{(2)}$, яка є розв'язком задачі

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_1^{(2)}}{\partial\tau}-\dfrac{\partial v_1^{(2)}}{\partial\varsigma}=0, & (\tau,\varsigma)\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}_{--},\\ v_1^{(2)}(0,\varsigma)=0, & \varsigma\in\mathbb{R}_-,\\ v_1^{(2)}(\tau,0)=-v_1^{(0)}(\tau,1), & \tau\in\mathbb{R}_+.\end{cases}\tag{3.31}$$

Для виконання умови погодження нульового порядку задачі для $v_1^{(2)}$ необхідно виконання умови

$$-v_1^{(0)}(0,1)=\lambda_1(1)=0,\tag{3.32}$$

звідки приймемо, що $\lambda_1(1)=0$. Розглянемо виконання умов погодження першого порядку задачі для $v_1^{(2)}$ у кутовій точці $(0,1)$, тобто

$$\frac{\partial v_1^{(0)}}{\partial\tau}(0,1)-0=0.$$

Звідси та із (3.30) одержимо

$$-a_{21}u_0^{(0)}(0,1)=0,$$

а із (3.28) остаточно маємо, що для виконання умови погодження першого порядку необхідно виконання рівності

$$a_{21}(\varphi(1)-U_0(0,1))=0.$$

Остання умова, загалом, не виконується. Тому функція $v_1^{(2)}$, явне подання якої

$$v_1^{(2)}(\tau,\varsigma)=\begin{cases}-v_1^{(0)}(\varsigma+\tau,1), & -\varsigma<\tau,\\ 0, & \tau\leqslant-\varsigma,\end{cases}$$

не є, взагалі кажучи, класичним розв'язком.

На наступному кроці побудови асимптотичного розвинення розв'язку задачі (3.23) будуємо функцію $u_1^{(1)}$, яка ліквідує нев'язку у правій частині рівняння системи для u за змінною ξ, і визначається $u_1^{(1)}$ як розв'язок задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \xi} = a_{12} v_0^{(1)}(t,\xi), & (t,\xi) \in (0,T) \times \mathbb{R}_{--}, \\ u_1^{(1)}(t,-\infty) = 0 & t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.33}$$

Оскільки права частина рівняння (3.33) неперервна, то після інтегрування одержимо гладкий розв'язок

$$u_1^{(1)}(t,\xi) = a_{12} \int\limits_{-t}^{\xi} v_0^{(1)}(t,y)dy, \quad (t,\xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}_{--}.$$

Подібно ж одержимо задачу для $u_1^{(2)}$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \varsigma} = 0, & (\tau,\varsigma) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{--}, \\ u_1^{(2)}(\tau,-\infty) = 0, & \tau \in \mathbb{R}_{+}, \end{cases}$$

тобто $u_1^{(2)}(\tau,\varsigma) \equiv 0$, для всіх $(\tau,\varsigma) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{--}$.

Регулярна частина асимптотичного розвинення першого наближення розв'язку задачі (3.23) задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial x} = a_{11} U_1(t,x) + a_{12} V_1(t,x) - \dfrac{\partial U_0}{\partial t}, & (t,x) \in \Pi, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial t} = a_{21} U_1(t,x) + a_{22} V_1(t,x) + \dfrac{\partial V_0}{\partial x}, & (t,x) \in \Pi, \end{cases} \tag{3.34a}$$

та умови

$$\begin{cases} U_1(t,0) = 0, & t \in [0,T], \\ V_1(0,x) = -\lambda_1(x), & x \in [0,1]. \end{cases} \tag{3.34b}$$

Очевидно, що задача (3.34) еквівалентна задачі (3.27).

Функція примежового шару першого наближення $u_1^{(0)}$ асимптотики розв'язку задачі (3.23), яка ліквідує нев'язку у початковій умові для компоненти u, задовольняє задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \tau} + \dfrac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x} = a_{11}u_1^{(0)}(\tau, x) + a_{12}v_1^{(0)}(\tau, x), & (\tau, x) \in \mathbb{R}_{++} \times (0, 1), \\ u_1^{(0)}(0, x) = -U_1(0, x), & x \in [0, 1], \\ u_1^{(0)}(\tau, 0) = 0, & \tau \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{3.35}$$

Отже, для визначення функції $u_1^{(0)}$ одержано крайову задачу у півсмузі для гіперболічного рівняння першого порядку. Розв'язок задачі (3.35) є неперервно диференційовний. Дійсно, із (3.35) та (3.34b) слідує, що виконуються умови погодження крайової та початкової умови (3.35) у кутовій точці $(0, 0)$:

$$u_1^{(0)}(0, \tau)|_{\tau=0} = u_1^{(0)}(x, 0)|_{x=0}.$$

Аналогічно переконуємось у виконанні умов погодження першого порядку в точці $(0, 0)$, а саме:

$$0 - \frac{\partial U_1}{\partial x}(0, 0) = a_{11}u_1^{(0)}(0, 0) + a_{12}v_1^{(0)}(0, 0).$$

Із першого рівняння (3.34a), першої умови (3.35), умови (3.30), випливає, що

$$- a_{11}U_1(0, 0) - a_{12}V_1(0, 0) + \frac{\partial U_0}{\partial t}(0, 0) = -a_{11}U_1(0, 0) + a_{12}\lambda_1(0),$$

а звідси, взявши до уваги (3.34b), першу умову (3.27b) та припущення (3.24c), одержимо тотожність

$$a_{12}\lambda_1(0) = a_{12}\lambda_1(0).$$

Функція $u_1^{(0)}$ має примежовий характер. Справді, на підставі однорідності крайової умови (3.35) функція $u_1^{(0)}$ над характеристикою $\tau = x$ рівняння (3.35) тотожно дорівнює нулеві. При $\varepsilon \to 0$ характеристика наближається до горизонтального положення, тобто функція $u_1^{(0)}$ відмінна від нуля в оточенні межі $t = 0$ області Π. Розв'язок матиме вигляд

$$u_1^{(0)}(\tau, x) = \begin{cases} -U_1(0, x - \tau) + e^{a_{11}\tau} a_{12} \int\limits_0^\tau v_1^{(0)}(s, x - s)e^{-a_{11}s}ds, & \tau \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x \leqslant \tau \leqslant +\infty. \end{cases}$$

Для знаходження другої компоненти $v_1^{(1)}$ асимптотичного розвинення розв'язку досліджуваної задачі одержимо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1^{(1)}}{\partial t} - \dfrac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi} = a_{21}u_1^{(1)}(t,\xi) + a_{22}v_1^{(1)}(t,\xi), & (t,\xi) \in (0,T) \times \mathbb{R}_{--}, \\ v_1^{(1)}(0,\xi) = 0, & \xi \in \mathbb{R}_-, \\ v_1^{(1)}(t,0) = -V_1(t,1), & t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.36}$$

Продовження побудови асимптотичного розвинення розв'язку задачі (3.23) вимагає забезпечення достатньої гладкості наближень. У випадку $v_1^{(1)}$ перевіримо виконання умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці $(0,0)$ напівобмеженої смуги $(0,T) \times \mathbb{R}_{--}$. Умова погодження нульового порядку:

$$v_1^{(1)}(\xi,0)|_{\xi=0} = v_1^{(1)}(0,t)|_{t=0}, \quad \text{звідки} \quad 0 = V_1(t,1)|_{t=0}, \quad \text{або} \quad 0 = \lambda_1(1).$$

Правильність останньої рівності випливає з умови (3.32).

Для виконання умови погодження першого порядку розв'язку задачі (3.36) в кутовій точці $(0,0)$ півсмуги необхідно виконання рівності:

$$-\frac{\partial V_1(t,1)}{\partial t}|_{t=0} = a_{21}u_1^{(1)}|_{(0,0)} + a_{22}v_1^{(1)}|_{(0,0)}.$$

Використавши (3.34a), (3.35), (3.36), остання умова запишеться у вигляді

$$a_{21}U_1(0,1) + a_{22}V_1(0,1) + \frac{\partial V_0}{\partial x}(0,1) = 0.$$

Із врахуванням (3.27b), (3.34b), (3.32), із останнього одержимо

$$a_{21}U_1(0,1) + \psi'(1) = 0,$$

або, спираючись на (3.24d),

$$a_{21}U_1(0,1) = 0.$$

Як і у попередніх випадках, остання умова не обов'язково дорівнює нулеві, що вказує на можливу некласичність шуканого розв'язку $v_1^{(1)}$, який дозволяє явне подання:

$$v_1^{(1)}(t,\xi) = \begin{cases} -V_1(t+\xi,0) + a_{21}e^{a_{22}\xi}\displaystyle\int_0^{\xi} u_1^{(1)}(t+y,y)e^{-a_{22}y}dy, & -\xi < t \leqslant T, \\ 0, & t \leqslant -\xi. \end{cases}$$

Тепер, коли в процесі побудови асимптотики розв'язку першого порядку виявлені всі вимоги, що не виконуються, переформулюємо задачі для функцій $v_0^{(1)}$, $v_1^{(2)}$ так, щоб забезпечити виконання умов погодження, не зіпсувавши інші.

У задачах для $v_0^{(1)}$, $v_1^{(2)}$ не виконуються умови погодження першого порядку. Тому крайові умови (3.29), (3.31) для функцій $v_0^{(1)}, v_1^{(2)}$, відповідно, задамо у наступному вигляді

$$v_0^{(1)}(t,0) = \nu(t) - V_0(t,1) - \alpha_1 t, \tag{3.37}$$

$$v_1^{(2)}(\tau,0) = -v_1^{(0)}(\tau,1) + \alpha_1 \tau, \tag{3.38}$$

де α_1 – параметр, значення якого подамо нижче. Зауважимо, що $-\alpha_1 t + \varepsilon \alpha_1 \tau = 0$.

Не важко перевірити, що для задачі (3.29) після заміни крайової умови на (3.37) виконуються умови погодження нульового порядку, а при перевірці умов погодження першого порядку приходимо до рівності $\alpha_1 = a_{12}(\varphi(1) - U_0(0,1))$.

Аналогічно в задачі (3.31), замінивши крайову умову на (3.38), для гладкості розв'язку необхідно виконання рівності $\alpha_1 = a_{12}(\varphi(1) - U_0(0,1))$, тобто α_1 визначається однозначно, беручи до уваги вище одержане значення α_1. Тому задачі (3.29) для $v_0^{(1)}$ та (3.31) для $v_1^{(2)}$ і їхні розв'язки, відповідно, мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_0^{(1)}}{\partial t} - \dfrac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi} = a_{22} v_0^{(1)}(t,\xi), & (t,\xi) \in (0,T) \times \mathbb{R}_{--}, \\ v_0^{(1)}(0,\xi) = 0, & \xi \in \mathbb{R}_{-}, \\ v_0^{(1)}(t,0) = \nu(t) - V_0(t,1) - a_{12}(\varphi(1) - & \\ \qquad\qquad - U_0(0,1))t \equiv \gamma_0^{(1)}(t), & t \in [0,T]; \end{cases}$$

$$v_0^{(1)}(t,\xi) = \begin{cases} \gamma_0^{(1)}(t+\xi) + e^{a_{22}\xi}, & -\xi \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & t \leqslant -\xi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \tau} - \dfrac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \varsigma} = 0, & (\tau, \varsigma) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{--}, \\ v_1^{(2)}(0, \varsigma) = 0, & \varsigma \in \mathbb{R}_-, \\ v_1^{(2)}(\tau, 0) = -v_1^{(0)}(\tau, 1) + a_{12}(\varphi(1) - & \\ \qquad\qquad - U_0(0,1))\tau \equiv \gamma_1^{(2)}(\tau), & \tau \in \mathbb{R}_+; \end{cases}$$

$$v_1^{(2)}(\tau, \varsigma) = \begin{cases} \gamma_1^{(2)}(\varsigma + \tau), & -\varsigma \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant -\varsigma. \end{cases}$$

Перейдемо до побудови асимптотики другого порядку. Функція $v_2^{(0)}$ ліквідує нев'язку за швидкою змінною τ у правій частині рівняння для v системи (3.23a) і є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \tau} = a_{12} u_1^{(0)}(\tau, x) + \\ \qquad + a_{22} v_1^{(0)}(\tau, x) \equiv \eta_v^{(0)}(\tau, x), & (\tau, x) \in \mathbb{R}_{++} \times (0,1), \\ v_2^{(0)}(0, x) = \lambda_2(x), & x \in [0,1], \end{cases} \tag{3.39}$$

де $\lambda_2(x)$ – функція, яку визначимо з наступної умови

$$v_2^{(0)}(0, x) + V_2(0, x) = 0, \qquad \text{тобто} \qquad \begin{cases} v_2^{(0)}(0, x) = \lambda_2(x), \\ V_2(0, x) = -\lambda_2(x). \end{cases}$$

Права частина задачі (3.39) неперервна, а тому після інтегрування одержимо гладкий розв'язок

$$v_2^{(0)}(\tau, x) = \begin{cases} \lambda_2(x) + \displaystyle\int_0^\tau \eta_v^{(0)}(s, x) ds, & \tau \leqslant x, \\ 0, & x \leqslant \tau. \end{cases}$$

Функція $v_2^{(2)}$ є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_2^{(2)}}{\partial \tau} - \dfrac{\partial v_2^{(2)}}{\partial \varsigma} = a_{22} v_1^{(2)}(\tau, \varsigma), & (\tau, \varsigma) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{--}, \\ v_2^{(2)}(0, \varsigma) = 0, & \varsigma \in \mathbb{R}_-, \\ v_2^{(2)}(\tau, 0) = -v_2^{(0)}(\tau, 1), & \tau \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{3.40}$$

Умова погодження нульового порядку задачі для $v_2^{(0)}$ виконується, якщо

$$-v_2^{(0)}(0,1) = \lambda_2(1) = 0, \tag{3.41}$$

звідки покладемо $\lambda_2(1) = 0$.

Умови погодження першого порядку в кутовій точці $(0,1)$ виконуються, якщо

$$-\frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \tau}(0,1) - 0 = a_{22} v_1^{(2)}(0,0),$$

або, враховуючи (3.39),

$$-a_{21} u_1^{(0)}(0,1) - a_{22} v_1^{(0)}(0,1) = 0,$$

звідки, прийнявши до уваги (3.35), (3.30) та (3.32), одержимо умову, за якої виконуєтья умова погодження першого порядку, а саме

$$a_{21} U_1(0,1) = 0.$$

Функція $v_2^{(2)}$, як розв'язок задачі (3.40), який, загалом, не є гладкий, допускає явне подання вигляду

$$v_2^{(2)}(\tau,\varsigma) = \begin{cases} -v_2^{(0)}(\varsigma+\tau,1) + a_{22}\displaystyle\int_0^\tau v_1^{(2)}(s,\varsigma+s)ds, & -\varsigma \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant -\varsigma. \end{cases}$$

Функція $u_2^{(1)}$ усуває нев'язку другого порядку асимптотики у правій частині рівняння системи (3.23a) за змінною ξ, яку вносить компонента розв'язку v, і задовольняє систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \xi} = a_{11} u_1^{(1)}(t,\xi) + a_{12} v_1^{(1)}(t,\xi) \equiv \eta_u^{(1)}(t,\xi), & (t,\xi) \in (0,T) \times \mathbb{R}_{--}, \\ u_2^{(1)}(t,-\infty) = 0, & t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.42}$$

Права частина рівняння в задачі (3.42) неперервна, а тому після інтегрування одержимо гладкий розв'язок $u_2^{(1)}$ даної задачі

$$u_2^{(1)}(t,\xi) = \int_{-t}^{\xi} \eta_u^{(1)}(t,y)dy, \quad (t,\xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}_{--}. \tag{3.43}$$

Співвідношення $u_2^{(2)}(\tau,\varsigma)\equiv 0$ одержимо із задачі

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_2^{(2)}}{\partial\varsigma}=0,\\ u_2^{(2)}(\tau,-\infty)=0.\end{cases}$$

Для визначення регулярної частини другого наближення асимптотики розв'язку задачі (3.23) одержуємо систему

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U_2}{\partial x}=a_{11}U_2(t,x)+a_{12}V_2(t,x)-\dfrac{\partial U_1}{\partial t}, & (t,x)\in\Pi,\\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t}=a_{21}U_2(t,x)+a_{22}V_2(t,x)+\dfrac{\partial V_1}{\partial x}, & (t,x)\in\Pi,\end{cases}\tag{3.44a}$$

із крайовими умовами

$$\begin{cases}U_2(t,0)=0, & t\in[0,T],\\ V_2(0,x)=-\lambda_2(x), & x\in[0,1].\end{cases}\tag{3.44b}$$

Задача (3.44) еквівалентна задачі (3.34). Функція λ_2 впроваджена у задачі (3.39).

Функція $u_2^{(0)}$ у сумі із U_2 задовольняє однорідну початкову умову задачі (3.23) і є розв'язком крайової задачі для гіперболічного рівняння першого порядку у півсмузі

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_2^{(0)}}{\partial\tau}+\dfrac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x}=a_{11}u_2^{(0)}(\tau,x)+a_{12}v_2^{(0)}(\tau,x), & (\tau,x)\in\mathbb{R}_{++}\times(0,1),\\ u_2^{(0)}(0,x)=-U_2(0,x), & x\in[0,1],\\ u_2^{(0)}(\tau,0)=0, & \tau\in\mathbb{R}_+.\end{cases}\tag{3.45}$$

Перевіримо погодження початкової та крайової умов задачі (3.45) до першого порядку включно у кутовій точці, що забезпечить існування гладкого у півсмузі розв'язку $u_2^{(0)}$. Із (3.45) та (3.44b) безпосередньо випливає справедлива рівність

$$u_2^{(0)}(0,\tau)|_{\tau=0}=u_2^{(0)}(x,0)|_{x=0}.$$

Умову погодження першого порядку задачі (3.45) запишемо у вигляді

$$0-\frac{\partial U_2}{\partial x}(0,0)=a_{11}u_2^{(0)}(0,0)+a_{12}v_2^{(0)}(0,0).$$

Врахувавши (3.44a) і (3.39), останню умову запишемо у вигляді

$$-a_{11}U_2(0,0)-a_{12}V_2(0,0)+\frac{\partial U_1}{\partial t}(0,0)=-a_{11}U_2(0,0)+a_{12}\lambda_2(0).$$

Остаточно, посилаючись на (3.34b) та (3.45), одержимо справедливу рівність

$$a_{12}\lambda_2(0)=a_{12}\lambda_2(0).$$

Функція $u_2^{(0)}$ має примежовий характер. Справді, на підставі однорідності крайової умови (3.45), функція $u_2^{(0)}$ під характеристикою $x=\tau$ рівняння (3.45) приймає нульові значення. При $\varepsilon\to 0$ характеристика наближається до вертикального положення, тобто функція $u_2^{(0)}$ відмінна від нуля в оточенні межі $t=0$ області Π. Розв'язок задачі має вигляд

$$u_2^{(0)}(\tau,x)=\begin{cases}-U_2(0,x-\tau)e^{a_{11}\tau}a_{12}\int\limits_0^\tau v_2^{(0)}(s,x-s)e^{-a_{11}s}ds, & \tau\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & x\leqslant\tau.\end{cases}$$

Примежовий шар $v_2^{(1)}$ другого порядку асимптотики в околі межі $x=1$ компоненти v розв'язку задовольняє систему

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_2^{(1)}}{\partial t}-\dfrac{\partial v_2^{(1)}}{\partial\xi}=a_{21}u_2^{(1)}(t,\xi)+a_{22}v_2^{(1)}(t,\xi), & (t,\xi)\in(0,T)\times\mathbb{R}_{--},\\ v_2^{(1)}(0,\xi)=0, & \xi\in\mathbb{R}_-,\\ v_2^{(1)}(t,0)=-V_2(t,1), & t\in[0,T].\end{cases}\tag{3.46}$$

Побудова асимптотичного розвинення розв'язку досліджуваної задачі, вимагає забезпечення достатньої гладкості наближень. У випадку $v_2^{(1)}$ перевіримо виконання умови погодження нульового та першого порядків у кутовій точці $(0,0)$ напівобмеженої смуги $(0,T)\times\mathbb{R}_{--}$. Тобто,

$$v_2^{(1)}(\xi,0)|_{\xi=0}=v_2^{(1)}(0,t)|_{t=0},\quad \text{звідки}\quad 0=V_2(t,1)|_{t=0},\ \text{або}\ 0=\lambda_2(1).$$

Справедливість останньої рівності випливає з виконання умови (3.41). Перевіримо виконання умов погодження першого порядку задачі (3.46) в кутовій точці, тобто, повинна виконуватися рівність

$$-\frac{\partial V_2(t,1)}{\partial t}\Big|_{t=0}=a_{21}u_2^{(1)}\big|_{(0,0)}+a_{22}v_2^{(1)}\big|_{(0,0)},$$

або, використавши (3.43), (3.46), (3.44), запишемо її у вигляді

$$a_{21}U_2(0,1) + a_{22}V_2(0,1) + \frac{\partial V_1}{\partial x}(0,1) = 0.$$

У свою чергу, із (3.44b), (3.41), (3.34b) випливає рівність

$$a_{21}U_2(0,1) - \lambda_1'(1) = 0.$$

Остання рівність не дорівнює нулеві. Тому розв'язок для функції $v_2^{(1)}$, який запишемо у вигляді

$$v_2^{(1)}(t,\xi) = \begin{cases} -V_2(t+\xi,0) + a_{21}e^{a_{22}\xi}\int\limits_0^\xi u_2^{(1)}(t+y,y)e^{-a_{22}y}dy, & -\xi < t \leqslant T, \\ 0, & t \leqslant -\xi, \end{cases}$$

взагалі кажучи, не є класичний.

Переформулюємо задачі для $v_1^{(1)}$ і $v_2^{(2)}$ так, як на попередньому кроці, щоб відповідні розв'язки були класичними. Тобто, змінимо неоднорідні крайові умови у відповідних задачах і знайдено значення $\alpha_2 = a_{12}U_1(0,1)$. Отже, задачі для $v_1^{(1)}$ та $v_2^{(2)}$ та їхні розв'язки, відповідно, запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1^{(1)}}{\partial t} - \dfrac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi} = a_{21}u_1^{(1)}(t,\xi) + a_{22}v_1^{(1)}(t,\xi), & (t,\xi) \in (0,T) \times \mathbb{R}_{--}, \\ v_1^{(1)}(0,\xi) = 0, & \xi \in \mathbb{R}_-, \\ v_1^{(1)}(t,0) = -V_1(t,1) - a_{12}U_1(0,1)t \equiv \gamma_1^{(1)}(t), & t \in [0,T]; \end{cases}$$

$$v_1^{(1)}(t,\xi) = \begin{cases} \gamma_1^{(1)}(t+\xi) + a_{21}e^{a_{22}\xi}\int\limits_0^\xi u_1^{(1)}(t+y,y)e^{-a_{22}y}dy, & -\xi \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & t \leqslant -\xi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_2^{(2)}}{\partial \tau} - \dfrac{\partial v_2^{(2)}}{\partial \varsigma} = a_{22} v_1^{(2)}(\tau, \varsigma), & (\tau, \varsigma) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{--}, \\ v_2^{(2)}(0, \varsigma) = 0, & \varsigma \in \mathbb{R}_{-}, \\ v_2^{(2)}(\tau, 0) = -v_1^{(0)}(\tau, 1) + a_{12} U_1(0,1)\tau \equiv \gamma_2^{(2)}(\tau), & \tau \in \mathbb{R}_{+}; \end{cases}$$

$$v_2^{(2)}(\tau, \varsigma) = \begin{cases} \gamma_2^{(2)}(\varsigma + \tau) + a_{22} \int\limits_0^{\tau} v_1^{(2)}(s, \varsigma + s) ds, & -\varsigma \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant -\varsigma. \end{cases}$$

Перейдемо до побудови асимптотики третього порядку, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \varsigma} = a_{22} v_1^{(2)}(\tau, \varsigma), & (\tau, \varsigma) \in \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}_{-}, \\ u_3^{(2)}(\tau, -\infty) = 0, & \tau \in \mathbb{R}_{+}. \end{cases}$$

Права частина рівняння цієї задачі неперервна, а тому після інтегрування одержимо гладку функцію $u_3^{(2)}$,

$$u_3^{(2)}(\tau, \varsigma) = a_{22} \int\limits_{-t}^{\varsigma} v_1^{(2)}(\tau, y) dy.$$

Отже побудову гладкої асимптотики третього порядку обґрунтовано.

3.2.3. Обгрунтування асимптотики розв'язку задачі

Перейдемо до оцінки залишкового члена. Уведемо наступні позначення: через U^ε і V^ε позначимо головні члени розвинення (3.26), відповідно. Тоді $R^u(t, x; \varepsilon) = u^\varepsilon(t, x) - U^\varepsilon(t, x)$ і $R^v(t, x; \varepsilon) = v^\varepsilon(t, x) - V^\varepsilon(t, x)$ означатимуть відповідні залишки асимптотичного розвинення розв'язку задачі (3.23), які для $(t, x) \in \Pi$ задовольняють задачу

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial R^u}{\partial t} + \dfrac{\partial R^u}{\partial x} = a_{11} R^u(t, x; \varepsilon) + a_{12} R^v(t, x; \varepsilon) + \pi^u(t, x; \varepsilon), \\ \dfrac{\partial R^v}{\partial t} - \varepsilon \dfrac{\partial R^v}{\partial x} = a_{21} R^u(t, x; \varepsilon) + a_{22} R^v(t, x; \varepsilon) + \pi^v(t, x; \varepsilon), \end{cases} \tag{3.47a}$$

$$\begin{cases} R^u(0, x; \varepsilon) = R^v(0, x; \varepsilon) = 0, & x \in [0, 1], \\ R^u(t, 0; \varepsilon) = R^v(t, 1; \varepsilon) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases} \tag{3.47b}$$

причому, в області Π правильні оцінки

$$\pi^u(t,x;\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \pi^v(t,x;\varepsilon) = O(\varepsilon^2).$$

З метою доведення рівномірних у Π оцінок для розв'язку (R^u, R^v) задачі (3.47) уведемо заміну змінних

$$R^u(t,x;\varepsilon) = \rho^u(t,x;\varepsilon)e^{-k(t+x)}, \quad R^v(t,x;\varepsilon) = \rho^v(t,x;\varepsilon)e^{-k(t+x)}, \tag{3.48}$$

де $k > 0$ – стала величина, яку визначимо нижче. Тоді для (ρ^u, ρ^v) одержимо задачу в області Π з однорідними крайовими умовами

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial\rho^u}{\partial t} + \dfrac{\partial\rho^u}{\partial x} = \alpha_{11}\rho^u(t,x;\varepsilon) + \alpha_{12}\rho^v(t,x;\varepsilon) + \Pi^u(t,x;\varepsilon), \\ \dfrac{\partial\rho^v}{\partial t} - \varepsilon\dfrac{\partial\rho^v}{\partial x} = \alpha_{21}\rho^u(t,x;\varepsilon) + \alpha_{22}\rho^v(t,x;\varepsilon) + \Pi^v(t,x;\varepsilon), \end{cases} \tag{3.49a}$$

$$\begin{cases} \rho^u(0,x;\varepsilon) = \rho^v(0,x;\varepsilon) = 0, \quad x \in [0,1], \\ \rho^u(t,0;\varepsilon) = \rho^v(t,1;\varepsilon) = 0, \quad t \in [0,T], \end{cases} \tag{3.49b}$$

де

$$\Pi^u(t,x;\varepsilon) = \pi^u(t,x;\varepsilon)e^{-k(t+x)} = O(\varepsilon^2), \;\; \alpha_{11} = a_{11} - k(1+\varepsilon), \;\; \alpha_{12} = a_{12},$$
$$\Pi^v(t,x;\varepsilon) = \pi^v(t,x;\varepsilon)e^{-k(t+x)} = O(\varepsilon^2), \;\; \alpha_{22} = a_{22} - k(1-\varepsilon), \;\; \alpha_{21} = a_{21}.$$

Виберемо k таким, щоб виконувались нерівності

$$\alpha_{11} + |\alpha_{12}| \leqslant -1, \quad |\alpha_{21}| + \alpha_{22} \leqslant -1.$$

Припустимо, що $|\rho^u|$ досягає свого максимуму в точці $T_1(t_1,x_1)$ в $\overline{\Pi}$, а функція $|\rho^v|$ досягає максимуму у точці $T_2(t_2,x_2)$. Не обмежуючи загальності припустимо, що $|\rho^u(T_1)| \geqslant |\rho^v(T_2)|$. Розглянемо перше рівняння системи (3.49a) в точці T_1 і перепишемо його у вигляді

$$\varepsilon\frac{\partial\rho^u}{\partial t} + \frac{\partial\rho^u}{\partial x} - \alpha_{11}\rho^u - \alpha_{12}\rho^v = \Pi^u(t,x;\varepsilon). \tag{3.50}$$

Нехай, в точці T_1 функція ρ^u набуває мінімального від'ємного значення, тоді в цій точці

$$\frac{\partial\rho^u}{\partial t} \leqslant 0, \quad \frac{\partial\rho^u}{\partial x} \leqslant 0$$

(строга нерівність можлива лише у випадку, якщо точка T_1 знаходиться на межі області $\overline{\Pi}$). Тоді,

$$-\alpha_{11}\rho^u - \alpha_{12}\rho^v \leqslant -\alpha_{11}\rho^u - |\alpha_{12}|\cdot|\rho^v| \leqslant -(-\alpha_{11} + |\alpha_{12}|)\rho^u \leqslant \rho^u.$$

Використовуючи згадані вище припущення, одержимо оцінку, в якій права частина рівності (3.50) є величиною порядку ε^2, а ліва у точці T_1 – від'ємна і не перевищує $\rho^u(T_1)$. Відповідно, $|\rho^u(T_1)| = \max\limits_{\overline{\Pi}} |\rho^u(t,x;\varepsilon)| = O(\varepsilon^2)$, а оскільки $|\rho^u(T_1)| \geqslant |\rho^v(T_2)|$, то $|\rho^v(T_2)| = \max\limits_{\overline{\Pi}} |\rho^v(t,x;\varepsilon)| = O(\varepsilon^2)$. Звідки випливає, що $\rho^u = O(\varepsilon^2)$, $\rho^v = O(\varepsilon^2)$ рівномірно в області $\overline{\Pi}$. Отже, із одержимо $\rho^u = R^u e^{-k(t+x)} = O(\varepsilon^2)$, $\rho^v = R^v e^{-k(t+x)} = O(\varepsilon^2)$ рівномірно в $\overline{\Pi}$. Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 3.2. *При виконанні умов припущення* $(\widetilde{H}_1)$, $(\widetilde{H}_2)$ *розв'язок задачі* (3.23) *допускає асимптотичне розвинення виду:*

$$u^\varepsilon(x,t) = U_0(t,x) + u_0^{(0)}(\tau,x) + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon^k \Big(U_k(t,x) + u_k^{(0)}(\tau,x) + u_k^{(1)}(t,\xi) + u_k^{(2)}(\tau,\varsigma) \Big) + u_3^{(2)}(\tau,\varsigma) + R^u(t,x;\varepsilon),$$

$$v^\varepsilon(x,t) = V_0(t,x) + v_0^{(1)}(t,\xi) + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon^k \Big(V_k(t,x) + v_k^{(0)}(\tau,x) + v_k^{(1)}(t,\xi) + v_k^{(2)}(\tau,\varsigma) \Big) + R^v(t,x;\varepsilon),$$

в якому залишкові члени задовольняють оцінки

$$|R^u(x,t;\varepsilon)| \leqslant C_1\varepsilon^2, \quad |R^v(x,t;\varepsilon)| \leqslant C_2\varepsilon^2,$$

а C_1, C_2 *– не залежні від* ε *сталі.*

Зауваження 3.1. Для задачі (3.23) вище описано та обгрунтовано побудову асимптотичного розвинення другого порядку класичного розв'язку. Продовжуючи вище описаний алгоритм побудови наближень розв'язку досліджуваної задачі, можна побудувати асимптотику розв'язку довільного порядку без додаткових умов на вихідні дані задачі, крім вказаних припущень.

3.2.4. Висновок до третього розділу

У третьому розділі досліджено сингулярно збурені мішані задачі для гіперболічної системи двох рівнянь першого порядку з різними характеристичними нахилами. Для розв'язків задач побудовані та обгрунтовані асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε.

Доведено теорему про асимптотичне розвинення розв'язків мішаної задачі до третього порядку включно для гіперболічної системи з різними нахилами характеристик у прямокутнику, наведено також оцінки залишкових членів асимптотики. При побудові асимптотичного розвинення гладкого розв'язку виникла необхідність побудови допоміжних примежових шарів, роль яких зводиться до усування нев'язки у кутових точках області, яку вносять побудовані примежові шари прилеглих меж. Використано нетрадиційний метод формулювання задач для деяких функцій розвинення, а саме, переформулювання первинної задачі, що є нетипове для методу Люстерника-Вішика.

Розділ 4

Гіперболічні системи квазілінійних рівнянь першого порядку з малим параметром

У цьому розділі через ефект примежового шару вивчено зв'язок між розв'язками мішаної задачі для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з однією просторовою змінною, записаної в інваріантах Рімана та розв'язками відповідної задачі для виродженої системи, тобто системи, у якої відсутні похідні за часом [33–37, 46, 47].

Вироджені гіперболічні системи такого виду виникають у багатьох прикладних проблемах, зокрема, фізиці, біології, оптимальному керуванні тощо [33, 47].

Результати цього розділу опубліковані в працях [92, 98, 103].

4.1. Аналіз ефекту примежового шару в мішаних задачах для вироджених гіперболічних систем квазілінійних рівнянь

4.1.1. Формулювання задачі

У прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x,t) : \ 0 < x < l, \ 0 < t < T_0 < \infty\}$ розглянемо систему

$$\frac{\partial \check{u}_i}{\partial t} + \check{\lambda}_i(x,t,\check{u},\check{v})\frac{\partial \check{u}_i}{\partial x} = \check{f}_i(x,t,\check{u}(x,t),\check{v}(x,t)), \quad i \in I, \tag{4.1a}$$

$$\check{\mu}_j(x,t,\check{u},\check{v})\frac{\partial \check{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial \check{v}_j}{\partial x} = \check{g}_j(x,t,\check{u}(x,t),\check{v}(x,t)), \quad j \in J, \tag{4.1b}$$

з початковими та крайовими умовами для системи (4.1a):

$$\check{u}_i(x,0) = \check{\alpha}_i(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad i \in I, \tag{4.2a}$$

$$\check{u}_i(0,t) = \check{\gamma}_i^0(t, \check{u}(0,t), \check{v}(0,t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T_0, \qquad i \in I_+, \tag{4.2b}$$

$$\check{u}_i(l,t) = \check{\gamma}_i^l(t, \check{u}(l,t), \check{v}(l,t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T_0, \qquad i \in I_-, \tag{4.2c}$$

та для системи (4.1b):

$$\check{v}_j(x,0) = \check{p}_j(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \;\; j \in J, \tag{4.3a}$$

$$\check{v}_j(0,t) = \check{\beta}_j(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0, \;\; j \in J, \tag{4.3b}$$

де

$$\begin{aligned} &I = \{1, 2, \dots, m\}, && J = \{1, 2, \dots, n\}, \\ &I_+ = \{i : \ \mathrm{sign}(\check{\lambda}_i(0,0,0,0)) = 1\}, && I_- = \{i : \ \mathrm{sign}(\check{\lambda}_i(l,0,0,0)) = -1\}, \\ &\check{u}(x,t) = (\check{u}_1(x,t), \dots, \check{u}_m(x,t)), && \check{v}(x,t) = (\check{v}_1(x,t), \dots, \check{v}_n(x,t)). \end{aligned}$$

Нехай $\check{\omega} = (\check{u}, \check{v})$. Уведемо позначення:

$$\begin{aligned} &|\check{u}| = \max_i |\check{u}_i|, \quad |\check{v}| = \max_j |\check{v}_j|, \quad |\check{\omega}| = \max_{\Pi(T_0)}\{|\check{u}|, |\check{v}|\}, \\ &\|\check{u}\| = \max_{\Pi(T_0)} |\check{u}|, \quad \|\check{v}\| = \max_{\Pi(T_0)} |\check{v}|, \quad \|\check{\omega}\| = \max\{\|\check{u}\|, \|\check{v}\|\}. \end{aligned}$$

Припустимо тепер, що

$$\check{\mu}_j(x,t,\check{\omega}) \geqslant M_0 > 0, \ \forall (x,t,\check{\omega}) \in D(T_0, P_0) = \Pi(T_0) \times \{\check{\omega} |\ \check{\omega} \in \mathbb{R}^{m+n}, |\check{\omega}| \leqslant P_0\}.$$

Достатні умови коректної розв'язності для задачі (4.1)-(4.3) наведемо нижче.

Поряд із задачею (4.1)-(4.3) розглянемо задачу для системи

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u,v)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u(x,t),v(x,t)), \quad i \in I, \tag{4.4a}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = g_j(x,t,u(x,t),v(x,t)), \quad j \in J, \tag{4.4b}$$

із початковими і крайовими умовами

$$u_i(x,0) = \alpha_i(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad i \in I, \tag{4.5a}$$

$$u_i(0,t) = \gamma_i^0(t, u(0,t), v(0,t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T_0, \quad i \in I_+, \tag{4.5b}$$

$$u_i(l,t) = \gamma_i^l(t, u(l,t), v(l,t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T_0, \quad i \in I_-, \tag{4.5c}$$

$$v_j(0,t) = \beta_j(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T_0, \quad j \in J. \tag{4.5d}$$

Уведемо множини

$$
\begin{aligned}
D^1(T_0,P_0) &= [0,T_0]\times\{\omega\in\mathbb{R}^{m+n}, |\omega|\leqslant P_0\},\\
D^2(T_0,P_0) &= [0,T_0]\times[0,l]^n\times\{\omega\in\mathbb{R}^{m+n}, |\omega|\leqslant P_0\}.
\end{aligned}
$$

Означення 4.1. [33] *Нехай* $\mathfrak{R}_i[\omega]$ *і* $\mathfrak{B}_j[\omega]$ *– оператори, визначені інтегруванням вздовж характеристик системи* (4.4) *з умовами* (4.5), *а неперервна функція* $\omega=(u,v):\Pi(T_0)\to\mathbb{R}^{n+m}$ *задовольняє систему*

$$
\begin{cases}
u_i(x,t)=\mathfrak{R}_i[\omega](x,t), \quad i\in I,\\[2ex]
v_j(x,t)=\mathfrak{B}_j[\omega](x,t), \quad j\in J,
\end{cases}
$$

причому u *– ліпшицева за* x,t*, а* v *– ліпшицева за* x*. Тоді* ω *будемо називати узагальненим розв'язком задачі* (4.4),(4.5).

Зауваження 4.1. Аналогічне означення узагальненого розв'язку має місце для функцій $\breve{u}$ та $\breve{v}$, замінивши відповідно $\mathfrak{R}_i[\omega]$ на $\breve{\mathfrak{R}}_i[\breve{\omega}]$ та $\mathfrak{B}_j[\omega]$ на $\breve{\mathfrak{B}}_j[\breve{\omega}]$.

Зробимо наступні припущення:

$\mathbf{A_1}$. В області $D^1(T_0,P_0)$ для $i\in I$ виконується

$$
\operatorname{sign}(\lambda_i(0,t,u,v))=\mathrm{const},\ \ \operatorname{sign}(\lambda_i(l,t,u,v))=\mathrm{const}.
$$

$\mathbf{A_2}$. Функції $\lambda_i(x,t,\omega)$, $f_i(x,t,\omega)$ для $i\in I$, $g_j(x,t,\omega)$ для $j\in J$, визначені в області $D(T_0,P_0)$. Всі ці функції обмежені за модулем деякими сталими Λ, F, G, відповідно (надалі всі функції будемо обмежувати відповідними сталими, використовуючи заголовні букви та індекси для них [37]). Крім цього, функції $g_j(x,t,\omega)$ для $j\in J$, неперервні за t.

$\mathbf{A_3}$. Для кожного значення $t\in[0,\,T_0]$ $(x\in[0,l])$ при $(x_1,t,\omega_1)\in D(T_0,P_0)$, $(x_2,t,\omega_2)\in D(T_0,P_0)$, $(x_1,t,\omega_1)\in D^2(T_0,P_0)$, $(x_2,t,\omega_2)\in D^2(T_0,P_0)$ (і при $(x,t,\omega_1)\in D(T_0,P_0)$, $(x,t,\omega_2)\in D(T_0,P_0)$, відповідно) для $i\in I$ та $j\in J$ виконуються нерівності

$$
\begin{aligned}
|\lambda_i(x_1,t,\omega_1)-\lambda_i(x_2,t,\omega_2)| &\leqslant \Lambda_1|x_1-x_2|+\Lambda_2|\omega_1-\omega_2|,\\
|f_i(x_1,t,\omega_1)-f_i(x_2,t,\omega_2)| &\leqslant F_1|x_1-x_2|+F_2|\omega_1-\omega_2|,\\
|g_i(x,t,\omega_1)-g_i(x,t,\omega_2)| &\leqslant G_2|\omega_1-\omega_2|,
\end{aligned}
$$

де Λ_k, F_k $(k=1,2)$, G_2 – сталі.

$\mathbf{A_4}$. Виконуються умови погодження нульового порядку

$$\gamma_i^0(0,\alpha(0),v(0,0))=\alpha(0), \quad i\in I_+,$$
$$\gamma_i^l(0,\alpha(l),v(l,0))=\alpha(l), \quad i\in I_-.$$

Тут $v(0,0)$, $v(l,0)$ визначені як відповідні значення розв'язків задачі

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_j}{\partial x}(x,0)=g_j(x,0,\alpha(x),v(x,0)),\\ v_j(0,0)=\beta_j(0), \qquad\qquad j\in J.\end{cases}$$

$\mathbf{A_5}$. Існує невід'ємна сумовна на $[0,l]$ функція $M(x)$ така, що

$$|g_j(x,t,\omega)|\leqslant M(x)\left(1+|u|+|v|\right), \quad j\in J.$$

$\mathbf{A_6}$. Функції $x\to\alpha_i(x)$, $i\in I$ ліпшицеві зі сталою A_1 і обмежені за модулем зверху сталою A.

$\mathbf{A_7}$. Функції $(t,\omega)\to\gamma_i^0(t,\omega)$ $(i\in I_+)$, $(t,\omega)\to\gamma_i^l(t,\omega)$ $(i\in I_-)$, $t\to\beta_j(t)$ локально ліпшицеві за t, u, v із сталими Γ_1, Γ_2, B_1, відповідно.

$\mathbf{A_8}$. Функції $\gamma_i^0(t,u,v)$, $i\in I_+,$ не залежать від тих u_k, для яких $k\in I_+$, а $\gamma_i^l(t,u,v)$, $i\in I_-,$ не залежить від тих u_k, для яких $k\in I_-$.

$\mathbf{A_9}$. Існують такі сталі ε_0 і $\Lambda_0>0$, що всі значення $\lambda_i(x,t,\omega)$ $(i\in I_+)$ при $0\leqslant x\leqslant\varepsilon_0$ і $-\lambda_i(x,t,\omega)$ $(i\in I_-)$ при $l-\varepsilon_0\leqslant x\leqslant l$ не менші за значення Λ_0 при $(t,\omega)\in D^1(T_0,P_0)$.

Достатність виконання цих умов для існування єдиного узагальненого розв'язку задачі (4.4),(4.5) наведено в [5, 33, 37].

Отже, вважатимемо, що виконуються умови $\mathbf{A_1}$ - $\mathbf{A_9}$. Припустимо, що також виконані умови:

$\mathbf{B_1}$. Функції $\check{\lambda}_i$ $\check{f}_i$ $\check{\alpha}_i$ $(i\in I)$, $\check{\gamma}_i^0$ $(i\in I_+)$, $\check{\gamma}_i^l$ $(i\in I_-)$, $\check{g}_j$, $\check{\beta}_j$ $(j\in\{1,\dots,n\})$ – задовольняють умови $\mathbf{A_1}$ - $\mathbf{A_9}$ з тими ж сталими і задані, відповідно, в тих самих областях, що й функції λ_i f_i α_i $(i\in I)$, γ_i^0 $(i\in I_+)$, γ_i^l $(i\in I_-)$, g_i, β_j $(j\in J)$, а $\max\{||\omega||,||\check{\omega}||\leqslant P_0\}$.

$\mathbf{B_2}$. Функції $\check{\mu}_j(x,t,\check{\omega})$ ліпшицеві за t і $\check{\omega}$, а функції $\check{p}_j(x)$ – за x $(\forall j\in J)$.

Позначимо

$$\Theta = \max\Big\{ \max_{i\in I}\max_{[0,l]}|\alpha_i(x)-\check{\alpha}_i(x)|, \max_{i\in I_+}\max_{D^1(T_0,P_0)}|\gamma_i^0(t,\omega)-\check{\gamma}_i^0(t,\check{\omega})|,$$

$$\max_{i\in I_-}\max_{D^1(T_0,P_0)}|\gamma_i^l(t,\omega)-\check{\gamma}_i^l(t,\check{\omega})|, \max_{i\in I}\max_{D(T_0,P_0)}|f_i(t,\omega)-\check{f}_i(t,\check{\omega})|,$$

$$\max_{i\in I}\max_{D(T_0,P_0)}|\lambda_i(x,t,\omega)-\check{\lambda}_i(x,t,\check{\omega})|, \max_{j\in J}\max_{D(T_0,P_0)}|g_j(x,t,\omega)-\check{g}_j(x,t,\check{\omega})|,$$

$$\max_{j\in J}\max_{D^1(T_0,P_0)}|\beta_j(t)-\check{\beta}_j(t)|, \max_{j\in J}\max_{D(T_0,P_0)}|\check{\mu}_j(x,t,\check{\omega})|\Big\}.$$

Зазначимо, що $0 < M_0 < \check{\mu} \leqslant \Theta$, тобто для довільного $\Theta > 0$ виконується нерівність $M_0 < \Theta$.

$\mathbf{A_{10}}$. Існує $\Theta_0 > 0$, що $\forall\Theta \in (0,\Theta_0]$ задачі (4.1)-(4.3) і (4.4),(4.5) мають єдині узагальненні розв'язки $\check{\omega}(x,t) = \{\check{u}(x,t),\check{v}(x,t)\}$ і $\omega(x,t) = \{u(x,t),v(x,t)\}$, відповідно, в усій області $\Pi(T_0)$ [33, 37].

Припущення $\mathbf{A_{10}}$ є істотним, оскільки для довільного фіксованого значення $\Theta > 0$, поділивши систему (4.1b) на $\check{\mu}_j(x,t,\check{\omega})$, одержимо систему рівнянь вигляду (4.1a). Тоді для цього випадку задача (4.1)-(4.3) при відповідних додаткових умовах [52–54] має єдиний глобальний узагальнений розв'язок. Питання коректної розв'язності задачі (4.4),(4.5) наведено в [4, 10, 33, 37].

Оцінимо тепер різницю розв'язків задач (4.1)-(4.3) і (4.4),(4.5) у прямокутнику $\Pi(T_0)$, вважаючи $\Theta > 0$ малою величиною.

Позначимо розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{d\xi} = \check{\mu}_j(\xi;x,t,\check{\omega}), \\ \tau(x) = t, \qquad\qquad j \in J \end{cases}$$

через $\check{\psi}_j(\xi;x,t,\check{\omega})$ і будемо називати його характеристикою j-ї сім'ї, що відповідає функції $\check{\omega}$. Нехай $\check{\varkappa}_j(\xi;x,t,\check{\omega})$ – абсциса точки перетину вказаної характеристики з межею області $\Pi(T_0)$. Деколи для простоти будемо використовувати скорочення $\check{\varkappa}_j(\omega)$.

Зауваження 4.2. Оскільки $\check{\mu}_j(x,t,\check{\omega}) < \Theta$, то $|t-\check{\psi}_j(0;x,t,\check{\omega})| \leqslant \Theta\, l$ $\forall j \in J$.

Справді, проінтегрувавши рівняння $\displaystyle\int_0^x \tau'_\xi d\xi = \int_0^x \check{\mu}_j(\xi;x,t,\check{\omega})d\xi$ та використавши оцінку для $\breve{\psi}_j$, одержимо

$$|t - \breve{\psi}_j(0; x, t, \breve{\omega})| \leqslant \int\limits_0^x |\breve{\mu}_j(\xi, t, \breve{\omega})| d\xi \leqslant \Theta l.$$

Звідки, зокрема, випливає, що $|\breve{\psi}(x; 0, 0, \breve{\omega})| \leqslant \Theta\, l$.

Через $\chi_i(x, t, \omega)$ (скорочено $\chi_i(\omega)$) надалі позначатимемо i-ту ординату точки перетину характеристики $\varphi_i(\tau; x, t, \omega)$ задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(x, t, \omega), \\ \xi(t) = x, \qquad\qquad i \in I \end{cases}$$

з межею області $\Pi(T_0)$.

Для всіх $j \in J$ уведемо множини (рис 4.1):

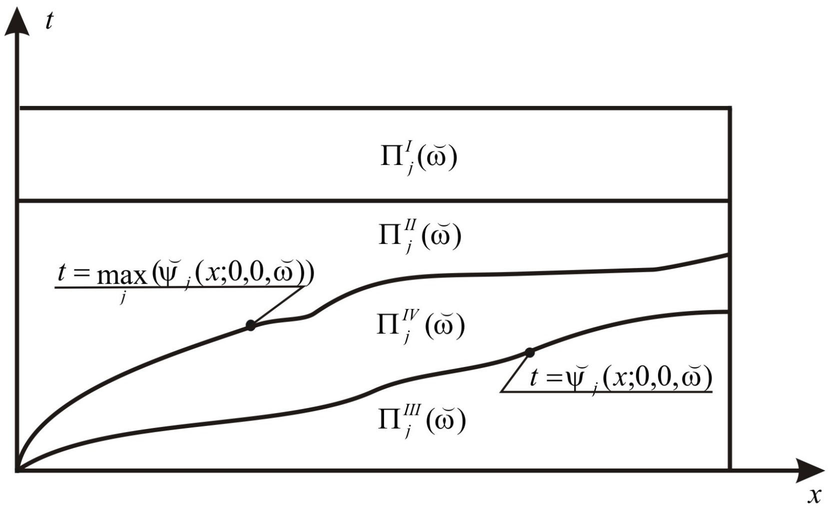

Рис. 4.1: Розбиття прямокутника $\Pi(T_0)$ на множини.

$$\Pi_j^I(\breve{\omega}) = \{(x, t) \in \Pi(T_0) : 0 \leqslant x \leqslant l, \Theta l \leqslant t \leqslant T_0\},$$
$$\Pi_j^{II}(\breve{\omega}) = \{(x, t) \in \Pi(T_0) : 0 \leqslant x \leqslant l, \max_j \breve{\psi}_j(x; 0, 0, \breve{\omega}) \leqslant t \leqslant \Theta l\},$$
$$\Pi_j^{III}(\breve{\omega}) = \{(x, t) \in \Pi(T_0) : 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant \breve{\psi}_j(x; 0, 0, \breve{\omega})\},$$
$$\Pi_j^{IV}(\breve{\omega}) = \{(x, t) \in \Pi(T_0) : 0 \leqslant x \leqslant l, \breve{\psi}_j(x; 0, 0, \breve{\omega}) \leqslant t \leqslant \max_j \breve{\psi}_j(x; 0, 0, \breve{\omega})\}.$$

Зазначимо, що множини Π_j^I і Π_j^{II} від j не залежать.

Надалі для всіх $j \in J$ також використовуватимемо позначення [37]:

$$\Pi_j^\alpha(\omega) = \{(x, t) \in \Pi(T_0) :\ \chi_j(x, t, \omega) = 0\},$$
$$\Pi_j^0(\omega) = \{(x, t) \in \Pi(T_0) :\ \chi_j(x, t, \omega) > 0,\ \varphi_j(\chi_j(x, t, \omega); x, t, \omega) = 0\},$$
$$\Pi_j^l(\omega) = \{(x, t) \in \Pi(T_0) :\ \chi_j(x, t, \omega) > 0,\ \varphi_j(\chi_j(x, t, \omega); x, t, \omega) = l\},$$

Нижче через B_i $(i=\overline{1,9})$ позначимо згруповані сталі, що обмежують дані задач (4.1)-(4.3) та (4.4),(4.5).

Лема 4.1. *Нехай* $(x,t)\in \Pi_j^I(\breve{\omega})\cup\Pi_j^{II}(\breve{\omega})$, *тоді для розв'язків* $\breve{\omega}$ *і* ω *відповідно задач* (4.1)-(4.3) *і* (4.4),(4.5) *справджується нерівність*

$$\begin{aligned}|\breve{v}(x,t)-v(x,t)| \; &\leqslant \Theta\left(1+l\left(1+B_1+G_1 l+G_2 L l\right)\right)+\\ &+G_2\int\limits_0^x |\breve{\omega}(\xi,t)-\omega(\xi,t)|\, d\xi.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Доведення. Для $(x,t)\in\Pi_j^I(\breve{\omega})\cup\Pi_j^{II}(\breve{\omega})$, користуючись поданням $\mathfrak{B}_j[\omega](x,t) \; =\beta_j(t)+\int\limits_0^x g_j\left(\xi,t,\omega(\xi,t)\right)d\xi \;\; (j\in J)$, із [33, 37], одержимо

$$\begin{aligned}
&|\breve{v}_j(x,t)-v_j(x,t)|\leqslant \left|\breve{\beta}_j(\breve{\psi}_j(0;x,t,\breve{\omega}))-\beta_j(t)\right|+\\
&+\int\limits_0^x \left|\breve{g}_j\big(\xi,\breve{\psi}_j(\xi;x,t,\breve{\omega}),\omega(\breve{\psi}_j(\xi;x,t,\breve{\omega}))\big)-g_j\big(\xi,t,\omega(\xi,t)\big)\right| d\xi\leqslant\\
&\leqslant \left|\breve{\beta}_j(\breve{\psi}_j(0;x,t,\breve{\omega}))-\beta_j(t)\right|+\left|\breve{\beta}_j(t)-\beta_j(t)\right|+\\
&+\int\limits_0^x\Big[\left|\breve{g}_j\big(\xi,\breve{\psi}_j(\xi;x,t,\breve{\omega}),\omega(\breve{\psi}_j(\xi;x,t,\breve{\omega}))\big)-\breve{g}_j\big(\xi,t,\omega(\xi,t)\big)\right|+\\
&+\left|\breve{g}_j\big(\xi,t,\omega(\xi,t)\big)-g_j\big(\xi,t,\omega(\xi,t)\big)\right|\Big]d\xi\leqslant B_1\left|\breve{\psi}_j(0;x,t,\breve{\omega})-t\right|+\\
&+\Theta+\int\limits_0^x\left[G_1\Theta\, l+\Theta+G_2\left|\breve{\omega}(\xi,\breve{\psi}_j(\xi;x,t,\breve{\omega}))-\omega(\xi,t)\right|\right]d\xi\leqslant\\
&\leqslant\Theta\left(B_1 l+1+l+G_1 l^2\right)+G_2\int\limits_0^x\left|\breve{\omega}(\xi,\breve{\psi}_j(\xi;x,t,\breve{\omega}))-\omega(\xi,t)\right|d\xi\leqslant\\
&\leqslant\Theta\big(1+l(B_1+1+G_1 l)\big)+G_2\int\limits_0^x\Big[\left|\breve{\omega}\big(\xi,\breve{\psi}_j(\xi;x,t,\breve{\omega})\big)-\breve{\omega}(\xi,t)\right|+\\
&+|\breve{\omega}(\xi,t)-\omega(\xi,t)|\Big]d\xi\leqslant\Theta\big(1+l(B_1+1+G_1 l)\big)+
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$+G_2\int\limits_0^x\Big[L\big|\check{\psi}_j(\xi;x,t,\check{\omega})-t\big|+\big|\check{\omega}(\xi,t)-\omega(\xi,t)\big|\Big]d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\Theta\big(1+l(B_1+1+G_1l+G_2Ll)\big)+G_2\int\limits_0^x\big|\check{\omega}(\xi,t)-\omega(\xi,t)\big|d\xi.$$

Із нерівності (4.7) одержуємо (4.6), що доводить справедливість леми.

□

Зауваження 4.3. У формулі (4.6) функції $\check{\omega}$ і ω у підінтегральному виразі визначені в точках $(\xi,t)\in\Pi_j^I(\check{\omega})\cup\Pi_j^{II}(\check{\omega})$.

Лема 4.2. *Нехай* $(x,t)\in\Pi_j^{II}(\check{\omega})\cup\Pi_j^{III}(\check{\omega})\cup\Pi_j^{IV}(\check{\omega})$. *Тоді для розв'язків* $\check{\omega}$ *і* ω *задач* (4.1)-(4.3) *і* (4.4),(4.5) *відповідно, виконується нерівність*

$$|\check{u}(x,t)-u(x,t)|\leqslant\Theta(\max\{1,\Gamma_1,\Gamma_3\}(2A_1\Lambda l+1)+A_1\Lambda l+ +l(\Gamma_1+L(\Gamma_2+\Gamma_3))+2\Gamma_2lF+1+3Fl).\tag{4.8}$$

Доведення. Нехай для визначеності $\check{\chi}(x,t,\check{\omega})\leqslant\chi(x,t,\omega)$. Тоді, користуючись відповідними зображеннями розв'язків із [33, 37], одержимо:

$$|\check{u}(x,t)-u(x,t)|\leqslant\big|\check{\mathfrak{R}}_i[\check{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)\big|+\int\limits_{\check{\chi}_i(x,t,\check{\omega})}^{\chi_i(x,t,\omega)}Fd\tau+ +\int\limits_{\chi_i(x,t,\omega)}^{t}2Fd\tau\leqslant\big|\check{\mathfrak{R}}_i[\check{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)\big|+3F\Theta l.\tag{4.9}$$

Зауважимо, що $\check{\chi}_i(x,t,\check{\omega}=\chi_i(x,t,\omega)=0$ і доданок $\int\limits_{\check{\chi}_i(x,t,\check{\omega})}^{\chi_i(x,t,\omega)}Fd\tau$ відсутній, якщо $(x,t)\in\Pi_i^{\alpha}(\check{\omega})\cap\Pi_i^{\alpha}(\omega)$, що не порушує справедливість оцінки.

Розглянемо тепер окремо $\big|\check{\mathfrak{R}}_i[\check{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)\big|$.

1. Якщо $(x,t)\in\Pi_i^{\alpha}(\check{\omega})\cap\Pi_i^{\alpha}(\omega)$, то

$$\big|\check{\mathfrak{R}}_i[\check{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)\big|=\big|\check{\alpha}_i\big(\check{\varphi}_i(0;x,t,\check{\omega})\big)-\alpha_i\big(\varphi_i(0;x,t,\omega)\big)\big|\leqslant$$
$$\leqslant A_1\big|\varphi_i(0;x,t,\omega)-\check{\varphi}_i(0;x,t,\check{\omega})\big|+\Theta.$$

У цьому випадку вираз $|\varphi_i(0;x,t,\omega)-\check{\varphi}_i(0;x,t,\check{\omega})|$ можна оцінити так

$$\begin{aligned}&\big|\varphi_i(0;x,t,\omega)-\check{\varphi}_i(0;x,t,\check{\omega})\big|\leqslant\\&\leqslant\int\limits_0^t\big|\lambda_i\big(\varphi_i(\omega),\tau,\omega\big)-\check{\lambda}_i\big(\check{\varphi}_i(\check{\omega}),\tau,\check{\omega}\big)\big|d\tau\leqslant\int\limits_0^t 2\Lambda d\tau=2\Lambda t\leqslant 2\Lambda\Theta l.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Відповідно, справедлива оцінка

$$\big|\check{\mathfrak{R}}_i[\check{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)\big|\leqslant 2A_1\Lambda\Theta l+\Theta\leqslant\Theta(2A_1\Lambda l+1).\tag{4.11}$$

2. Якщо $(x,t)\in\Pi_i^0(\check{\omega})\cap\Pi_i^0(\omega)$ (або $(x,t)\in\Pi_i^l(\check{\omega})\cap\Pi_i^l(\omega)$), то для $k\notin I_+$ точки $(0,t)\in\Pi_i^\alpha(\omega)$, використовуючи (4.11), одержимо

$$\begin{aligned}\big|\check{\mathfrak{R}}_i\ &[\check{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)\big|=\\&=\big|\gamma_i^0\big(\chi_i(\omega),u(0,\chi_i(\omega))\big)-\check{\gamma}_i^0\big(\check{\chi}_i(\check{\omega}),u(0,\check{\chi}_i(\check{\omega}))\big)\big|\leqslant\\&\qquad\qquad\leqslant\Gamma_1|\chi_i(\omega)-\check{\chi}_i(\check{\omega})|+\Theta+\\&+\Gamma_2\max_{k\notin I_+}\big|\omega\big(0,\chi_i(x,t,\omega)\big)-\check{\omega}\big(0,\check{\chi}_i(x,t,\check{\omega})\big)\big|\leqslant\\&\leqslant(\Gamma_1+L\Gamma_2)\big|\chi_i(\omega)-\check{\chi}_i(\check{\omega})\big|+\Theta+\int\limits_0^{\chi_i(x,t,\omega)}2Fd\tau+\\&+\Gamma_2\max_{k\notin I_+}\Big|\check{\mathfrak{R}}_k[\check{\omega}]\big(0,\check{\chi}_i(x,t,\check{\omega})\big)-\mathfrak{R}_k[\omega]\big(0,\chi_i(x,t,\omega)\big)\Big|\leqslant\\&\leqslant(\Gamma_1+L\Gamma_2)\big|\chi_i(\omega)-\check{\chi}_i(\check{\omega})\big|+\Gamma_2\big(\Theta(2A_1\alpha l+1)+2lF\Theta\big)+\Theta=\\&=(\Gamma_1+L\Gamma_2)\big|\chi_i(\omega)-\check{\chi}_i(\check{\omega})\big|+\Theta\big(\Gamma_2(2A_1\Lambda l+1+2Fl)+1\big)\leqslant\\&\leqslant\Theta\big[l(\Gamma_1+L\Gamma_2)+\Gamma(2A_1\Lambda l+1+2lF)+1\big].\end{aligned}\tag{4.12}$$

3. Якщо $(x,t)\in\Pi_i^\alpha(\check{\omega})\cap\Pi_i^0(\omega)$ (або $(x,t)\in\Pi_i^0(\check{\omega})\cap\Pi_i^\alpha(\omega)$, або $(x,t)\in\Pi_i^\alpha(\check{\omega})\cap\Pi_i^l(\omega)$, або $(x,t)\in\Pi_i^l(\check{\omega})\cap\Pi_i^\alpha(\omega)$), тоді

$$\begin{aligned}\big|\check{\mathfrak{R}}_i[\check{\omega}]\ &(x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)\big|=\\&=\big|\check{\alpha}_i\big(\check{\varphi}_i(0;x,t,\check{\omega})\big)-\gamma_i^0\big(\chi_i(\omega),\omega(0,\chi_i(\omega))\big)\big|\leqslant\\&\leqslant\big|\check{\alpha}_i\big(\check{\varphi}_i(0;x,t,\check{\omega})\big)-\check{\alpha}_i(0)\big|+|\check{\alpha}_i(0)-\gamma_i^0\big(\chi_i(\omega),\omega(0,\chi_i(\omega))\big)|\leqslant\\&\leqslant A\,\check{\varphi}_i(0;x,t,\check{\omega})+\big|\check{\alpha}_i(0)-\alpha_i(0)\big|+\\&\qquad\qquad+\big|\check{\gamma}_i^0\big(0,\omega(0,0)\big)-\gamma_i^0\big(\chi_i(\omega),\omega(0,\chi_i(\omega))\big)\big|\leqslant\\&\leqslant A\check{\varphi}_i(0;x,t,\check{\omega})+\Theta+(\Gamma_1+L\Gamma_2)\chi_i(\omega).\end{aligned}\tag{4.13}$$

Оцінимо тепер $\breve{\varphi}_i(0; x, t, \breve{\omega})$, тобто розглянемо

$$\begin{aligned}\left|\breve{\varphi}_i(0; x, t, \breve{\omega})\right| \leqslant \left|\breve{\varphi}_i\big(\chi_i(\omega); x, t, \breve{\omega}\big)\right| + \int\limits_0^{\chi_i(\omega)} \left|\breve{\alpha}_i\big(\breve{\varphi}_i(\breve{\omega}), \tau, \breve{\omega}\big)\right| d\tau \leqslant \\ \leqslant \left|\breve{\varphi}_i\big(\chi_i(\omega); x, t, \breve{\omega}\big)\right| + \Lambda\chi_i(\omega).\end{aligned} \tag{4.14}$$

Далі, використовуючи (4.10), одержуємо

$$|\breve{\varphi}_i(\chi(\omega); x, t, \breve{\omega})| = |\breve{\varphi}_i(\chi_i(\omega); x, t, \breve{\omega}) - \varphi_i(\chi_i(\omega); x, t, \omega)| \leqslant 2\Lambda\Theta l,$$

і, відповідно,

$$\breve{\varphi}_i(0; x, t, \breve{\omega}) \leqslant 2\Lambda\Theta l + \Lambda\Theta l = 3\Lambda\Theta l.$$

Отже, насамкінець одержимо

$$\begin{aligned}\left|\breve{\mathfrak{R}}_i[\breve{\omega}](x, t) - \mathfrak{R}_i[\omega](x, t)\right| \leqslant 3A_1\Lambda\theta l + \Theta + (\Gamma_1 + L\Gamma_2)\Theta l = \\ + \Theta\big(3A_1\Lambda l + (\Gamma_1 + L\Gamma_2)l + 1\big).\end{aligned} \tag{4.15}$$

Таким чином, об'єднавши (4.11), (4.12) і (4.15) одержимо, що $\forall (x, t) \in \Pi_j^{II}(\breve{\omega}) \cup \Pi_j^{III}(\breve{\omega}) \cup \Pi_j^{IV}(\breve{\omega})$ виконується нерівність

$$\begin{aligned}&\left|\breve{\mathfrak{R}}_i[\breve{\omega}](x, t) - \mathfrak{R}_i[\omega](x, t)\right| \leqslant \\ &\leqslant \Theta\big(\max\{1, \Gamma_2\}\,(2A_1\Lambda l + 1) + A_1\Lambda l + (\Gamma_1 + L\Gamma_2)l + 2\Gamma_2 lF + 1\big).\end{aligned} \tag{4.16}$$

Об'єднавши нерівності (4.9) і (4.16), одержимо (4.8), тобто лема доведена.

□

Позначимо $\breve{\eta}(\tau) = \max\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant l \\ \Theta l \leqslant t \leqslant \tau}} |\omega(x, t) - \breve{\omega}(x, t)|$.

Лема 4.3. *Якщо* $(x, t) \in \Pi_j^I(\breve{\omega})$*, то для розв'язків* $\breve{\omega}$ *і* ω *відповідно задач* (4.1)-(4.3) *і* (4.4),(4.5) *виконується нерівність*

$$|\breve{u}(x, t) - u(x, t)| \leqslant b_{12}\Theta + b_{13}\int\limits_{\Theta l}^{t} \breve{\eta}(\tau) d\tau, \tag{4.17}$$

де b_{12}, b_{13} *– визначені додатні сталі.*

Доведення. Для визначеності вважатимемо, що $\chi_i(x, t, \omega) \geqslant \breve{\chi}_i(x, t, \breve{\omega})$. Тоді, користуючись, як і вище, відповідними зображеннями із [33], маємо, що в $\Pi_j^I(\breve{\omega})$ виконується нерівність

$$
\begin{gathered}
\big|\breve{u}(x,t)-u(x,t)\big| \leqslant \\
\leqslant \big|\breve{\mathfrak{R}}_i[\breve{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)\big| + \int\limits_{\breve{\chi}_i(x,t,\breve{\omega})}^{\chi_i(x,t,\omega)} \big|\breve{f}_i\big(\breve{\varphi}_i(\tau,\breve{\omega}),\tau,\breve{\omega}(\breve{\varphi}_i(\tau,\breve{\omega}),\tau)\big)\big|d\tau + \\
+ \int\limits_{\breve{\chi}_i(x,t,\breve{\omega})}^{t} \big|\breve{f}_i\big(\breve{\varphi}_i(\tau,\breve{\omega}),\tau,\breve{\omega}(\breve{\varphi}_i(\tau,\breve{\omega}),\tau)\big) - f_i\big(\varphi_i(\tau,\omega),\tau,\omega(\varphi_i(\tau,\omega),\tau)\big)\big|d\tau.
\end{gathered}
$$

Із леми 4.1 випливає, що при $\tau \in [\max\{\chi_i(x,t,\omega),\breve{\chi}_i(x,t,\breve{\omega})\},t]$ виконується співвідношення

$$
\begin{gathered}
\big|\varphi_i(\tau;x,t,\omega)-\breve{\varphi}_i(\tau;x,t,\breve{\omega})\big| \leqslant \\
\leqslant e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\left(\Theta T_0 + \int\limits_{\tau}^{t}\Lambda_2\big|\omega\big(\varphi_i(\omega),\xi\big)-\omega\big(\breve{\varphi}_i(\breve{\omega}),\xi\big)\big|d\xi\right).
\end{gathered}
$$

Якщо $\chi_i(x,t,\omega) \geqslant \Theta l$ (за припущенням $\chi_i(x,t,\omega) \geqslant \breve{\chi}_i(x,t,\breve{\omega})$), то

$$
\begin{gathered}
\big|\varphi_i(\tau;x,t,\omega)-\breve{\varphi}_i(\tau;x,t,\breve{\omega})\big| \leqslant e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\Bigg(\Theta T_0 + \\
+\int\limits_{\tau}^{\Theta l}\Lambda_2\big|\omega\big(\varphi_i(\omega),\xi\big)-\omega\big(\breve{\varphi}_i(\breve{\omega}),\xi\big)\big|d\xi+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\big|\omega\big(\varphi_i(\omega),\xi\big)-\omega\big(\breve{\varphi}_i(\breve{\omega}),\xi\big)\big|d\xi\Bigg) \leqslant \\
\leqslant e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\left(\Theta T_0 + 2P_0\Lambda_2\Theta l + \int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\breve{\eta}(\tau)d\tau\right).
\end{gathered}
$$

Якщо $\chi_i(x,t,\omega) > \Theta l$, то

$$
\big|\varphi_i(\tau;x,t,\omega)-\breve{\varphi}_i(\tau;x,t,\breve{\omega})\big| \leqslant e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\left(\Theta T_0 + \int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\breve{\eta}(\tau)d\tau\right).
$$

Отже, у всіх випадках для $(x,t) \in \Pi_j^I(\hat{\omega})$ виконується нерівність

$$
\begin{gathered}
\big|\varphi_i(\tau;x,t,\omega)-\breve{\varphi}_i(\tau;x,t,\breve{\omega})\big| \leqslant \\
\leqslant e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\left(\Theta T_0 + 2P_0\Lambda_2\Theta l + \int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\breve{\eta}(\tau)d\tau\right). \qquad (4.18)
\end{gathered}
$$

Користуючись нерівністю (4.18), одержуємо

$$\Big|\chi_i(x,t,\omega)-\check\chi_i(x,t,\check\omega)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant \Lambda^{-1}e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\left(\Theta T_0+2P_0\Lambda_2\Theta l+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\check\eta(\tau)d\tau\right). \qquad (4.19)$$

Відмітимо, що якщо $\chi_i(x,t,\omega)\leqslant\Theta l$, то $\Big|\chi_i(x,t,\omega)-\check\chi_i(x,t,\check\omega)\Big|\leqslant\Theta\, l$. Позначимо

$$I=\int\limits_{\check\chi_i(x,t,\check\omega)}^{\chi_i(x,t,\omega)}\Big|\check f_i\big(\check\varphi_i(\tau,\check\omega),\tau,\check\omega(\check\varphi_i(\tau,\check\omega),\tau)\big)\Big|d\tau+$$
$$+\int\limits_{\check\chi_i(x,t,\check\omega)}^{t}\Big|\check f_i\big(\check\varphi_i(\tau,\check\omega),\tau,\check\omega(\check\varphi_i(\tau,\check\omega),\tau)\big)-f_i\big(\varphi_i(\tau,\omega),\tau,\omega(\varphi_i(\tau,\omega),\tau)\big)\Big|d\tau.$$

Нехай $\chi_i(x,t,\omega)\leqslant\Theta l$. Тоді, використовуючи (4.18), (4.19), одержимо

$$I\leqslant F|\chi_i(x,t,\omega)-\check\chi_i(x,t,\check\omega)|+2F\Theta l+$$
$$+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Big|\check f_i\big(\check\varphi_i(\tau,\check\omega),\tau,\check\omega(\check\varphi_i(\tau,\check\omega),\tau)\big)-f_i\big(\varphi_i(\tau,\omega),\tau,\omega(\varphi_i(\tau,\omega),\tau)\big)\Big|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant 2F\Theta l+F\Big|\chi_i(x,t,\omega)-\check\chi_i(x,t,\check\omega)\Big|+$$
$$+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Big[F_1|\check\varphi_i(\tau;x,t,\check\omega)-\varphi_i(\tau;x,t,\omega)|+$$
$$+F_2\Big|\check\omega\big(\check\varphi_i(\tau,\check\omega),\tau\big)-\omega\big(\varphi_i(\tau,\omega),\tau\big)\Big|+\Theta\Big]d\tau\leqslant$$
$$\leqslant 2F\Theta l+F\Big|\chi_i(x,t,\omega)-\check\chi_i(x,t,\check\omega)\Big|+$$
$$+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Big[(F_1+F_2L)\Big|\check\varphi_i(\tau;x,t,\check\omega)-\varphi_i(\tau;x,t,\omega)\Big|+$$
$$+F_2\Big|\check\omega\big(\check\varphi_i(\tau,\check\omega),\tau\big)-\omega\big(\varphi_i(\tau,\omega),\tau\big)\Big|\Big]d\tau+\Theta T_0\leqslant$$
$$\leqslant F\Big|\chi_i(x,t,\omega)-\check\chi_i(x,t,\check\omega)\Big|+2F\Theta l+$$
$$+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Big[(F_1+F_2L)e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\times$$

$$\times\Big(\Theta T_0+2P_0\Lambda_2\Theta l+\int\limits_{\Theta l}^{\tau}\Lambda_2\check{\eta}(\sigma)d\sigma\Big)+F_2\check{\eta}(\tau)\Big]d\tau+\Theta T_0\leqslant$$

$$\leqslant T_0(F_1+F_2L)e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\big(\Theta T_0+2P_0\Lambda_2\Theta l\big)+\Theta T_0+$$

$$+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Big(T_0(F_1+F_2L)e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\Lambda_2+F_2\Big)\check{\eta}(\tau)d\tau+ \tag{4.20}$$

$$+F\Lambda_0^{-1}e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\left(\Theta T_0+2P_0\Lambda_2\Theta l+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\check{\eta}(\tau)d\tau\right).$$

Якщо $\chi_i(x,t,\omega)\geqslant\Theta l$, то із врахуванням (4.18), (4.19), (4.20) одержимо

$$I\leqslant F|\chi_i(x,t,\omega)-\check{\chi}_i(x,t,\check{\omega})|+$$

$$+\int\limits_{\chi_i(x,t,\omega)}^{t}\big|\check{f}_i\big(\check{\varphi}_i(\tau,\check{\omega}),\tau,\check{\omega}(\check{\varphi}_i(\tau,\check{\omega}),\tau)\big)-$$

$$-f_i\big(\varphi_i(\tau,\omega),\tau,\omega(\varphi_i(\tau,\omega),\tau)\big)\big|d\tau\leqslant$$

$$\leqslant F\Lambda_0^{-1}e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\left(\Theta T_0+2P_0\Lambda_2\Theta l+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\check{\eta}(\tau)d\tau\right)+ \tag{4.21}$$

$$+T_0(F_1+2F_2L)e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}(\Theta T_0+2P_0\Lambda_2\Theta l)+\Theta T_0+$$

$$+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Big(T_0(F_1+F_2L)e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\Lambda_2+F_2\Big)\check{\eta}(\tau)d\tau.$$

Таким чином, використовуючи (4.20),(4.21), в області $\Pi_j^I(\check{\omega})$ одержимо таку оцінку

$$|\check{u}_i(x,t)-u_i(x,t)|\leqslant|\check{\mathfrak{R}}_i[\check{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)|+\Theta\big(2Fl+F\Lambda_0^{-1}b_2+$$

$$+T_0+T_0(F_2+F_2L)b_2\big)+\int\limits_{\Theta l}^{t}(F\Lambda_0^{-1}b_1\Lambda_2+b_3\Lambda_2+F_2)\check{\eta}(\tau)d\tau, \tag{4.22}$$

де $b_1=e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}, b_2=b_1(T_0+2P_0\Lambda_2 l)$, $b_3=T_0(F_1+F_2l)b_1$.

Оцінимо тепер $|\check{\mathfrak{R}}_i[\check{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)|$. Нехай $(x,t)\in\Pi_i^{\alpha}(\check{\omega})\cap\Pi_i^{\alpha}(\omega)$. Тоді

$$|\check{\mathfrak{R}}_i[\check{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)|=|\check{\alpha}_i(\check{\varphi}_i(0;x,t,\check{\omega}))-\alpha_i(\varphi_i(0;x,t,\omega))|\leqslant$$

$$\leqslant A_1|\breve{\varphi}_i(0;x,t,\breve{\omega})-\varphi_i(0;x,t,\omega)|+\Theta\leqslant$$

$$\leqslant A_1 e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}+(\Theta T_0+2P\Lambda_2\Theta l+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\breve{\eta}(\tau)d\tau)+\Theta.$$

Якщо ж $(x,t)\in\Pi_i^0(\breve{\omega})\cap\Pi_i^0(\omega)$ (або $(x,t)\in\Pi_i^l(\breve{\omega})\cap\Pi_i^l(\omega)$), то

$$\left|\breve{\mathfrak{R}}_i[\breve{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)\right|\leqslant(\Gamma_1+L\Gamma_2)\left|\chi_i(\omega)-\breve{\chi}_i(\breve{\omega})\right|+$$
$$+\Gamma_2\max_{k\notin I_+}\left|u_k(0,\chi_i(x,t,\omega))-u_k(0,\chi_i(x,t,\omega))\right|+\Theta.$$

Оскільки для $k\notin I_+$ точка $(0,t)\in\Pi_i^{\alpha}(\breve{\omega})\cap\Pi_i^{\alpha}(\omega)$, то із нерівності (4.20), одержимо

$$\left|u_i\big(0,\chi(x,t,\omega)\big)-\breve{u}_i\big(0,\breve{\chi}(x,t,\breve{\omega})\big)\right|\leqslant A_1 e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}+$$
$$+\left(\Theta T_0+2P\Lambda_2\Theta l+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\breve{\eta}(\tau)d\tau\right)+\Theta+2F\Theta l+$$
$$+\int\limits_{\Theta l}^{t}\left|\breve{f}_i\big(\breve{\varphi}_i(\tau,\breve{\omega}),\tau,\breve{\omega}(\breve{\varphi}_i(\tau,\breve{\omega}),\tau)\big)-f_i\big(\varphi_i(\tau,\omega),\tau,\omega(\varphi_i(\tau,\omega),\tau)\big)\right|d\tau\leqslant$$
$$\leqslant A_1 e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}+\left(\Theta T_0+2P\Lambda_2\Theta l+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\breve{\eta}(\tau)d\tau\right)+\Theta+2F\Theta l+$$
$$+T_0(F_1+F_2L)e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}(\Theta T_0+2P\Lambda_2\Theta l)+\Theta T_0+$$
$$+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Big(T_0(F_1+F_2L)e^{T_0(\Lambda_1+L\Lambda_2)}\Lambda_2+F_2\Big)\breve{\eta}(\tau)d\tau=$$
$$=A_1\Theta b_2+A_1 b_1\int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\breve{\eta}(\tau)d\tau+\Theta(1+2Fl+T_0)+$$
$$+T_0(F_1+F_2L)\Theta b_2+\int\limits_{\Theta l}^{t}\big(b_2\Lambda_2+F_2\big)\breve{\eta}(\tau)d\tau=\Theta b_4+\int\limits_{\Theta l}^{t}b_5\breve{\eta}(\tau)d\tau,\qquad(4.23)$$

де $b_4=A_1b_2+1+2Fl+T_0+T_0(F_1+LF_2)b_2$, $b_5=A_1b_1\Lambda_2+b_3\Lambda_2+F_2$.

Відповідно, при $(x,t)\in\Pi_i^0(\breve{\omega})\cap\Pi_i^0(\omega)$ (або $(x,t)\in\Pi_i^l(\breve{\omega})\cap\Pi_i^l(\omega)$), виконується нерівність

$$\left|\check{\mathfrak{R}}_i[\check{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)\right| \leqslant (\Gamma_1+L\Gamma_2)|\chi_i(\omega)-\check{\chi}_i(\check{\omega})|+\Gamma_2\Theta b_4+\Theta+$$
$$+\Gamma_2 b_5\int\limits_{\Theta l}^{t}\check{\eta}(\tau)d\tau \leqslant (\Gamma_1+L\Gamma_2)\left(\Lambda_0^{-1}\Theta b_2+\int\limits_{\Theta l}^{t} b_1\Lambda_2\Lambda_0^{-1}\check{\eta}(\tau)d\tau\right)+$$
$$+\Theta(\Gamma_2 b_4+1)+\int\limits_{\Theta l}^{t}\Gamma_2 b_5\check{\eta}(\tau)d\tau \leqslant \Theta b_6+\int\limits_{\Theta l}^{t} b_7\check{\eta}(\tau)d\tau, \tag{4.24}$$

де $b_6=\Lambda_0^{-1}b_2(\Gamma_1+L\Gamma_2)+\Gamma_2 b_4+1$, $b_7=b_1\Lambda_2\Lambda_0^{-1}(\Gamma_1+L\Gamma_2)+\Gamma_2 b_5$.

Накінець, нехай $(x,t)\in\Pi_i^{\alpha}(\check{\omega})\cap\Pi_i^{0}(\omega)$ $\big($або $(x,t)\in\Pi_i^{0}(\check{\omega})\cap\Pi_i^{\alpha}(\omega)$, або $(x,t)\in\Pi_i^{\alpha}(\check{\omega})\cap\Pi_i^{l}(\omega)$, або $(x,t)\in\Pi_i^{l}(\check{\omega})\cap\Pi_i^{\alpha}(\omega)\big)$. Тоді використовуючи (4.13) і (4.14), одержимо

$$|\check{\mathfrak{R}}_i[\check{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)| = \left|\check{\alpha}_i\big(\check{\varphi}_i(0;x,t,\check{\omega})\big)-\gamma_i^0\big(\chi_i(\omega),u(0,\chi_i(\omega))\big)\right| \leqslant$$
$$\leqslant A_1\check{\varphi}_i(\chi_i(\omega);x,t,\check{\omega})+\Theta+(\Gamma_1+L\Gamma_2+\Lambda)\chi_i(\omega).$$

Далі

$$\check{\varphi}_i(\chi_i(\omega),x,t,\check{\omega}) \leqslant b_2\Theta+b_1\int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\check{\eta}(\tau)d\tau;$$
$$\chi_i(x,t,\omega) \leqslant \Lambda_0^{-1}b_2\Theta+\Lambda_0^{-1}b_1\int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\check{\eta}(\tau)d\tau.$$

Відповідно одержимо

$$\left|\check{\mathfrak{R}}_i[\check{\omega}](x,t)-\mathfrak{R}_i[\omega](x,t)\right| \leqslant A_1 b_2\Theta+A_1 b_1\int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\check{\eta}(\tau)d\tau+\Theta+$$
$$+(\Gamma_1+L\Gamma_2+\Lambda)\left(\Lambda_0^{-1}b_2\Theta+\Lambda_0^{-1}b_1\int\limits_{\Theta l}^{t}\Lambda_2\check{\eta}(\tau)d\tau\right)=$$
$$=\Theta\left(1+b_2\left(A_1+\Lambda_0^{-1}(\Gamma_1+L\Gamma_2+\Lambda)\right)\right)+$$
$$+\int\limits_{\Theta l}^{t}\left(A_1 b_1\Lambda_2+(\Gamma_1+L\Gamma_2+\Lambda)\Lambda_0^{-1}b_1\Lambda_2\right)\check{\eta}(\tau)d\tau. \tag{4.25}$$

Враховуючи (4.23), (4.24), (4.25), маємо, що в $\Pi_j^I(\breve{\omega})$ справедлива оцінка

$$\left|\breve{\mathfrak{R}}_i[\breve{\omega}](x,t) - \mathfrak{R}_i[\omega](x,t)\right| \leqslant \Theta b_8 + \int\limits_{\Theta l}^{t} b_9 \breve{\eta}(\tau) d\tau, \tag{4.26}$$

де $b_8 = 1 + b_2\Lambda_0^{-1}(\Gamma_1 + L\Gamma_2 + \Lambda) + b_4 \max\{1, \Gamma_2\}$, $b_9 = b_1\Lambda_2\Lambda_0^{-1}(\Gamma_1 + L\Gamma_2 + \Lambda) + b_5 \max\{1, \Gamma_2\}$.

Використовуючи тепер (4.22), (4.26), одержимо

$$|\breve{u}_i(x,t) - u_i(x,t)| \leqslant \Theta b_{12} + \int\limits_{\Theta l}^{t} b_{13} \breve{\eta}(\tau) d\tau, \tag{4.27}$$

де $b_{12} = b_8 + b_{10}$, $b_{13} = b_9 + b_{11}$, $b_{10} = 2Fl + F\Lambda_0^{-1}b_2 + T_0 + T_0(F_1 + F_2 L)b_2$, $b_{11} = F\Lambda_0^{-1}\Lambda_2 b_1 + b_3\Lambda_2 + F_2$. Із нерівності (4.27), взявши максимум за всіма i, одержимо нерівність (4.17). Лема 4.3 доведена.

□

Теорема 4.1. *Нехай* $\breve{\omega}(x,t)$ *і* $\omega(x,t)$ *– узагальнені розв'язки відповідно задач* (4.1)-(4.3) *і* (4.4),(4.5). *Тоді в* $\Pi(T_0)$ *справджуються оцінки:*

1) $\|u(x,t) - \breve{u}(x,t)\| \leqslant b_{20}\Theta, \qquad (x,t) \in \Pi(T_0),$

2) $\max\limits_{\Pi_j^I(\breve{\omega})} |v(x,t) - \breve{v}(x,t)| \leqslant b_{17}\Theta \exp^{b_{18}(T_0 - x)}, \qquad (x,t) \in \Pi_j^I(\breve{\omega}),$

3) $\max\limits_{\Pi_j^{II}(\breve{\omega})} |v(x,t) - \breve{v}(x,t)| \leqslant b_{21}\Theta, \qquad (x,t) \in \Pi_j^{II}(\breve{\omega}).$

Доведення. На підставі того, що $\max\limits_j \max\limits_x |\breve{\psi}_j(x; 0, 0, \breve{\omega})| \leqslant \Theta l \leqslant T_0$, з урахуванням зауваження 4.3, а також використовуючи те, що $|\breve{\omega}(x,t) - \omega(x,t)| = \max\{|\breve{u}(x,t) - u(x,t)|, |\breve{v}(x,t) - v(x,t)|\}$, із леми Гронуолла одержимо, що оцінка (4.6) в $\Pi_j^I(\breve{\omega}) \cup \Pi_j^{II}(\breve{\omega})$ набуде вигляду

$$|v(x,t) - \breve{v}(x,t)| \leqslant e^{Q_2 l} \left(\Theta\, b_{14} + Q_2 \int\limits_0^x |u(\xi,t) - \breve{u}(\xi,t)| d\xi \right), \tag{4.28}$$

де $b_{14} = 1 + l(1 + B_1 + Q_1 l + Q_2 L l)$. Крім того із леми 4.3, випливає, що в $\Pi_j^I(\breve{\omega})$ справджується оцінка (4.17)

$$|u(x,t) - \breve{u}(x,t)| \leqslant \Theta b_{12} + \int\limits_{\Theta l}^{t} b_{13} \breve{\eta}(\tau) d\tau.$$

Тому, користуючись оцінками (4.17), (4.28), одержимо, що в $\Pi_j^I(\breve{\omega})$ справджується нерівність

$$|v(x,t)-\breve{v}(x,t)| \leqslant e^{Q_2 l}\left(\Theta b_{14} + Q_2\int\limits_0^x\left(\Theta b_{12} + \int\limits_{\Theta l}^t b_{13}\breve{\eta}(\tau)d\tau\right)d\xi\right) \leqslant$$

$$\leqslant \Theta b_{15} + \int\limits_{\Theta l}^t b_{16}\breve{\eta}(\tau)d\tau, \quad (4.29)$$

де $b_{15} = (b_{14} + G_2 b_{12} l)e^{G_2 l}$, $b_{16} = e^{G_2 l}G_2 l b_{13}$.

Отже, із (4.17), (4.29) одержимо, що в області $\Pi_j^I(\breve{\omega})$ виконується нерівність

$$\max_{\Pi_j^I(\breve{\omega})}|\omega(x,t)-\breve{\omega}(x,t)| \leqslant b_{17}\Theta + \int\limits_{\Theta l}^t b_{18}\breve{\eta}(\tau)d\tau,$$

де $b_{17} = \max\{b_{12}; b_{15}\}$, $b_{18} = \max\{b_{13}; b_{16}\}$.

Отже, для довільної точки $(x,\tau)(\Theta l \leqslant \tau \leqslant T_0)$ одержимо

$$\breve{\eta}(\tau) \leqslant \Theta b_{17} + \int\limits_{\Theta l}^t b_{18}\breve{\eta}(\tau)d\tau. \quad (4.30)$$

Застосувавши в (4.30) лему Гроноулла, маємо

$$\breve{\eta}(\tau) \leqslant b_{17}\Theta e^{b_{18}(T_0-\Theta l)}. \quad (4.31)$$

Окрім того, із леми 4.2 випливає, що при $(x,t) \in \Pi_j^{II}(\breve{\omega}) \cup \Pi_j^{III}(\breve{\omega}) \cup \Pi_j^{IV}(\breve{\omega})$ виконується нерівність

$$|u(x,t)-\breve{u}(x,t)| \leqslant b_{19}\Theta, \quad (4.32)$$

де $b_{19} = \max\{1,\Gamma_2\}(2A_1\Lambda l + 1) + A_1\Lambda l + l(\Gamma_1 + L\Gamma_2) + 2\Gamma_2 lF + 1 + 3Fl$. Відповідно, у всьому прямокутнику $\Pi(T_0)$ справедлива оцінка:

$$\|u(x,t)-\breve{u}(x,t)\| \leqslant b_{20}\Theta, \quad (4.33)$$

де $b_{20} = \max\{b_{19};\ b_{17}e^{b_{18}(T_0-\Theta l)}\}$.

Із оцінок (4.31), (4.33) випливають пункти 1), 2) теореми 4.1.

Накінець, нехай $(x,t) \in \Pi_j^{II}(\breve{\omega})$, тоді користуючись оцінками (4.28) (4.32), одержимо

$$|v(x,t)-\breve{v}(x,t)| \leqslant \left(b_{14}\Theta + G_2\int\limits_0^x b_{19}\Theta d\xi\right)e^{G_2 l} \leqslant b_{21}\Theta,$$

де $b_{21} = (b_{14} + G_2 l b_{19})e^{G_2 l}$. Тобто, виконується пункт 3) теореми 4.1, а отже, теорема 4.1 доведена.

$\square$

Розглянемо поведінку розв'язків задач (4.1)-(4.3) і (4.4),(4.5) в області $\Pi_j^{III}(\breve{\omega})$. Пояснимо механізм появи примежового шару в цій області.

Насамперед зауважимо, що характеристика випущена із точки $(x,t) \in \Pi_j^{III}(\breve{\omega})$ для функції $\breve{v}_j(x,t)$ попадає на лінію $t=0$, тобто $\breve{v}_j(x,t)$ в області $(x,t) \in \Pi_j^{III}(\breve{\omega})$ визначається значенням на лінії $t=0$, а функція $v_j(x,t)$ – значенням на лінії $x=0$ (рис.4.2).

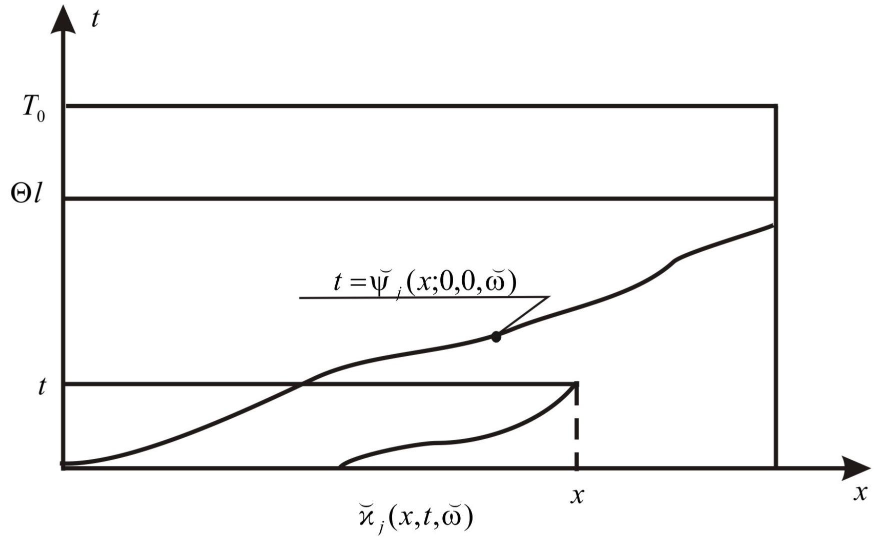

Рис. 4.2: Випадок, коли $(x,t) \in \Pi_j^{III}(\breve{\omega})$.

Використовуючи доведення леми 4.1, маємо

$$v(x,t) - \breve{v}(x,t) = \beta_j(t) - \breve{p}_j\big(\breve{\phi}_j(x,t,\breve{\omega})\big) + \int\limits_{\breve{\varkappa}_j(x,t,\breve{\omega})}^{x} \Big[g_j(\xi,x,\omega) -$$

$$-\breve{g}_j,\big(\xi,\breve{\psi}_j(x,t,\breve{\omega}),\breve{\omega}(\xi,\breve{\psi}_j(x,t,\breve{\omega}))\big)\Big]d\xi + \int\limits_{0}^{\breve{\varkappa}_j(x,t,\breve{\omega})} g_j(\xi,x,\omega)d\xi. \qquad (4.34)$$

Припустимо, що

$$\Bigg|\int\limits_{\check{\varkappa}_j(x,t,\check{\omega})}^{x}\Big[g_j(\xi,x,\omega)-\check{g}_j,\Big(\xi,\check{\psi}_j(x,t,\check{\omega}),\check{\omega}\big(\xi,\check{\psi}_j(x,t,\check{\omega})\big)\Big)\Big]\,d\xi+$$

$$\int\limits_{0}^{\check{\varkappa}_j(x,t,\check{\omega})} g_j(\xi,x,\omega)d\xi\Bigg| = O(1).$$

Тоді взявши, наприклад, $\beta_j(t)\equiv\check{p}_j(x)\equiv 0$ одержимо, що в області $\Pi_j^{III}(\check{\omega})$ розв'язки задач (4.1)-(4.3) і (4.4),(4.5) не є близькі.

Нехай тепер

$$\Bigg|\int\limits_{\check{\varkappa}_j(x,t,\check{\omega})}^{x}\Big[g_j(\xi,x,\omega)-\check{g}_j,\big(\xi,\check{\psi}_j(x,t,\check{\omega}),\check{\omega}(\xi,\check{\psi}_j(x,t,\check{\omega}))\big)\Big]d\xi+$$

$$\int\limits_{0}^{\check{\varkappa}_j(x,t,\check{\omega})} g_j(\xi,x,\omega)d\xi\Bigg| = O(\Theta).$$

Розглянемо характеристику $t^*=\check{\psi}_j(x^*;l/2,0,\check{\omega})$. Згідно означення, для точок (x^*,t^*), які лежать на цій характеристиці, виконується рівність $\check{\varkappa}_j(x^*,t^*,\check{\omega})=l/2$. Крім того, для всіх цих точок розв'язок $\check{v}_j(x^*,t^*)$ визначається значенням на лінії $x=0$, оскільки всі характеристики задачі (4.4),(4.5) для функції v горизонтальні, тому враховуючи те, що $-B\leqslant\beta_j(t)\leqslant B$, із формули (4.34) в точках (x^*,t^*) одержимо

$$-B-O(\Theta)\leqslant v_j(x^*,t^*)-\check{v}_j(x^*,t^*)+\check{p}_j(l/2)\leqslant B+O(\Theta).$$

Нехай тепер $\check{p}_j(l/2)=-2B$. Тоді маємо

$$-B-O(\Theta)\leqslant v_j(x^*,t^*)-\check{v}_j(x^*,t^*)\leqslant 3B+O(\Theta). \tag{4.35}$$

Із співвідношення (4.35) видно, що при такому заданні додаткових умов на функції $v_j(x,t)$, $\check{v}_j(x,t)$ розв'язки задач (4.1)-(4.3), (4.4),(4.5) близькими не будуть.

Зауваження 4.4. У загальному випадку, як видно із теореми 4.1, залишилась область $\Pi_j^{IV}(\check{\omega})$, в якій не вдалось провести оцінку різниці розв'язків. Однак, якщо з самого початку вважати, що для $j\in J$ функції $\check{g}_j(x,t,\check{\omega})$

і $g_j(x,t,\omega)$ мають вид $\breve{g}_j(x,t,\breve{u},\breve{v}_j)$ і $g_j(x,t,u,v_j)$, відповідно, і зробити наступні зміни:

а) множина $\Pi_j^{II}(\breve{\omega})$ має вигляд

$$\Pi_j^{II}(\breve{\omega}) = \{(x,t)\in\Pi(T_0):\ 0\leqslant x\leqslant l;\ \breve{\psi}_j(x;0,0,\breve{\omega})\leqslant t\leqslant \Theta l\};$$

б) множина $\Pi_j^{IV}(\breve{\omega})$ – пуста;

в) пункт 3) теореми 4.1 має вид:

3) для всіх $j\in J$ в області $\Pi_j^{II}(\breve{\omega})$ справджується оцінка

$$\max_{\Pi_j^{II}(\breve{\omega})}|v_j(x,t)-\breve{v}_j(x,t)|\leqslant b_{21}\Theta,$$

то одержимо, що теорема 4.1 разом із зауваженням 4.4 охоплює весь прямокутник $\Pi(T_0)$ як для функцій $\breve{u}$, u, так і для функцій $\breve{v}$, v.

Отже, як бачимо з теореми 4.1 і зауваження 4.4, розв'язки $\breve{u}$ і u задач (4.1)-(4.3) і (4.4),(4.5), відповідно, будуть близькими у цілому прямокутнику $\Pi(T_0)$. Щодо розв'язків v і $\breve{v}$, то для цих функцій існує область $\Pi_j^{III}(\breve{\omega})$, яка зменшується із зменшенням Θ, в якій ці два розв'язки близькими не будуть. Таким чином, для функцій v і $\breve{v}$ спостерігається ефект примежового шару, в якому немає близькості розв'язків, хоч поза цим шаром є близькість розв'язків для випадку описаного в зауваженні 4.4.

4.2. Частинний випадок задачі

Покажемо для деякого частинного випадку розглядуваних задач появу примежових функцій у розв'язку.

Для простоти припустимо, що $\breve{\mu}_j(x,t,\breve{\omega})\equiv\varepsilon\breve{\mu}_j(x,t,\breve{\omega})$ а також всі $\breve{\mu}_j(x,t,\breve{\omega})>M_0>0$, де $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ – малий параметр. Крім того, нехай множини I_+ і I_- – порожні та функції g_j не залежать від v, всі $\breve{\mu}_j(x,t,\breve{\omega})$ не залежить від v, тобто $\breve{\mu}_j(x,t,\breve{\omega})\equiv\varepsilon\breve{\mu}_j(x,t,\breve{u})$.

Замінимо t на $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$ і позначимо $\hat{\omega}_j(x,\varepsilon\tau)=\tilde{\omega}_j(x,\tau)$. Тоді задача (4.1)-(4.3) з врахуванням усіх припущень запишеться так:

$$\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial\tau}+\varepsilon\breve{\lambda}_i(x,\varepsilon\tau,\tilde{\omega})\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x}=\varepsilon\breve{f}_i(x,\varepsilon\tau,\tilde{\omega}),\quad i\in I, \tag{4.36}$$

$$\breve{\mu}_j(x,\varepsilon\tau,\tilde{u})\frac{\partial\tilde{v}_j}{\partial\tau}+\frac{\partial\tilde{v}_j}{\partial x}=\breve{g}_j(x,\varepsilon\tau,\tilde{u}),\quad j\in J, \tag{4.37}$$

де $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant\tau\leqslant\dfrac{T_0}{\varepsilon}$.

Початкові та крайові умови матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &\tilde{u}(x,0) = \check{\alpha}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,\\ &\tilde{v}(0,\tau) = \check{\beta}(\varepsilon\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{T_0}{\varepsilon},\\ &\tilde{v}(x,0) = \check{p}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Зауваження 4.5. За припущенням множини I_+ і I_- – порожні, тому $\tilde{u}(x,\tau)$ визначається початковими умовами у всій області (рис. 4.3).

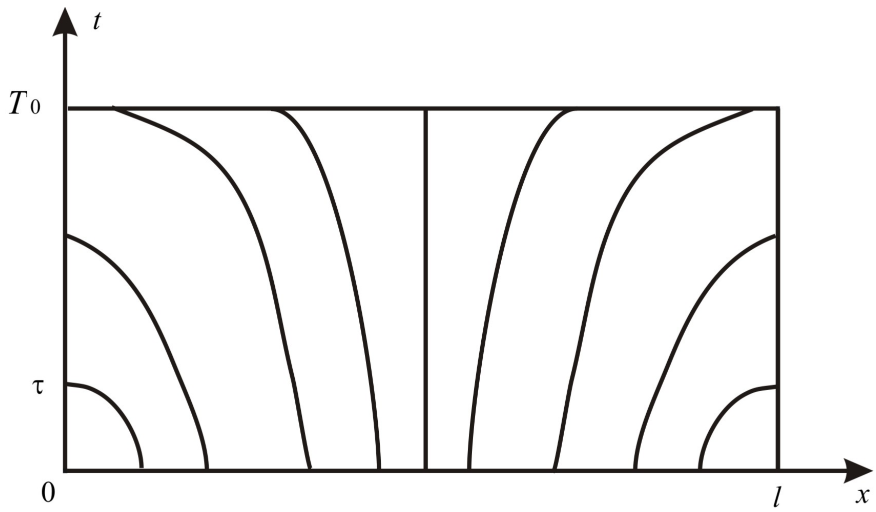

Рис. 4.3: Поведінка характеристик при $I_+ = I_- = \emptyset$.

Для довільного $\tilde{T} > 0 : \tilde{T} \leqslant \dfrac{T_0}{\varepsilon}$ в $\Pi(\tilde{T}) = \Big\{(x,t) : \ 0 \leqslant x \leqslant l,$ $0 \leqslant \tau \leqslant \tilde{T}\Big\}$ розглянемо вироджену задачу при $\varepsilon = 0$, тобто

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} = 0, \tag{4.39}$$

$$\check{\mu}_j(x,0,u)\frac{\partial v_j}{\partial \tau} + \frac{\partial v_j}{\partial x} = \check{g}_j(x,0,u) \tag{4.40}$$

з початковими та крайовими умовами

$$\begin{aligned} &u(x,0) = \check{\alpha}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,\\ &v(0,\tau) = \check{\beta}(0), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tilde{T},\\ &v(x,0) = \check{p}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Зазначимо тут, що $|\varepsilon\check{\lambda}_i(x,\varepsilon\tau,\tilde{\omega}) - 0| \sim O(\varepsilon)$, $|\varepsilon\check{f}_i(x,\varepsilon\tau,\tilde{\omega}) - 0| \sim O(\varepsilon)$, $|\check{g}_j(x,\varepsilon\tau,u) - \check{g}_j(x,0,u)| \leqslant G_1\varepsilon\tau \sim O(\varepsilon)$, $|\check{\mu}_j(x,\varepsilon\tau,u) - \check{\mu}_j(x,0,u)| \leqslant M_3\varepsilon\tau \sim$

$O(\varepsilon)$, де G_1, M_3 – сталі Ліпшиця за t функцій $\check{g}_j$ та $\check{\mu}_j$, відповідно. Крім того, за припущенням $\mu_j(x,\varepsilon\tau,\check{u}) > M_0 > 0$, а, відповідно, $\check{\mu}_j(x,0,\check{u}) > M_0 > 0$. Тому, з урахуванням зауваження 4.5 маємо, що при $\varepsilon \to 0^+$ розв'язок задачі (4.36)-(4.38) рівномірно збігається до розв'язку виродженої задачі (4.39)-(4.41).

Далі із рівнянь (4.39)-(4.40) одержимо $u = \check{\alpha}(x)$. Отже, в $\Pi(\tilde{T})$ для v одержимо задачу

$$\check{\mu}_j(x,0,\check{\alpha}(x))\frac{\partial v_j}{\partial \tau} + \frac{\partial v_j}{\partial x} = \check{g}_j(x,0,\check{\alpha}(x)),$$
$$v|_{\tau=0} = \check{p}(x), \quad v|_{x=0} = \check{\beta}(0) = \check{p}(0) \ \text{(на підставі умови погодження)}.$$

Позначимо

$$\begin{aligned} G_j(x) &= \int\limits_0^x \check{g}_j(\xi,0,\check{\alpha}(\xi))d\xi, \\ \check{M}_j(x) &= \int\limits_0^x \check{\mu}_j(\xi,0,\check{\alpha}(\xi))d\xi, \end{aligned} \tag{4.42}$$

і нехай $\check{M}_j^{-1}$ – обернена функція до $\check{M}_j$. Позначимо $x^* = \check{\varkappa}(x,\tau,u)$ для $0 \leqslant \tau \leqslant \check{\psi}_j(x;0,0,u)$. Тоді використовуючи (4.42) (рис. 4.4), одержимо

$$\int\limits_{x^*}^x \frac{d\tau}{dx} = \int\limits_{x^*}^x \check{\mu}_j(\xi,0,\check{\alpha}(\xi))d\xi,$$

тобто

$$\tau - 0 = \int\limits_0^x \check{\mu}_j(\xi,0,\check{\alpha}(\xi))d\xi - \int\limits_0^{x^*} \check{\mu}_j(\xi,0,\check{\alpha}(\xi))d\xi,$$

або $\tau = \check{M}_j(x) - \check{M}_j(x^*)$. Отже, $\check{M}_j(x^*) = \check{M}_j(x) - \tau$ і $x^* = \check{M}_j^{-1}(\check{M}_j(x) - \tau)$.

Використовуючи (4.42) в прямокутнику $\Pi(\tilde{T})$ для $j \in J$, одержимо

$$v_j(x,\tau) = \begin{cases} G_j(x) + \check{p}_j(0), & \tau > \tilde{M}_j(x), \\ G_j(x) - G_j(\check{M}_j^{-1}(\check{M}_j - \tau)) + \check{p}_j\left(\check{M}_j^{-1}(\check{M}_j - \tau)\right), & \tau \leqslant \tilde{M}_j(x). \end{cases}$$

Повертаючись до змінної t одержуємо, що при $\varepsilon \to 0^+$ рівномірно

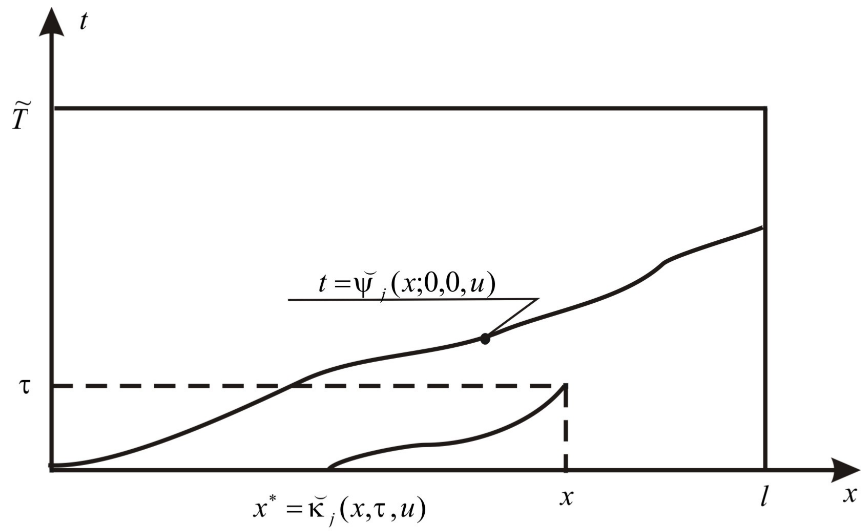

Рис. 4.4: Характеристика, яка проходить через точку (x,τ).

для $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(\tilde{T})$ виконується:

$$\check{u}_i(x,t) = \check{\Lambda}_i(x) + O(\varepsilon), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(\tilde{T}), \quad i \in I,$$

$$\check{v}_j(x,\tau) = \begin{cases} G_j(x) + \check{p}_j(0) + O(\varepsilon), & \varepsilon\tilde{M}_j(x) \leqslant t \leqslant \varepsilon(\tilde{T}), \\ G_j(x) - G_j\left(\check{M}_j^{-1}\left(\check{M}_j(x) - \dfrac{t}{\varepsilon}\right)\right) + & \\ \quad +\check{p}_j\left(\check{M}_j^{-1}\left(\check{M}_j(x) - \dfrac{t}{\varepsilon}\right)\right) + O(\varepsilon), & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon\tilde{M}_j. \end{cases} \tag{4.43}$$

Зазначимо, що другий та третій рядки в (4.43) для розв'язку $\check{v}_j(x,\tau)$ містять примежові функції в області, що звужується при $\varepsilon \to 0^+$. Тому цей випадок демонструє присутність примежового шару при переході від класичних систем квазілінійних гіперболічних рівнянь з однією просторовою змінною до вироджених систем.

4.3. Випадок лінійної системи двох рівнянь

Підтвердимо факт існування примежового шару для випадку системи двох лінійних рівнянь. У прямокутнику $\Pi(T) = \{(x,t):\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, де $T > 0$ деяка стала, розглянемо систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = v, \tag{4.44}$$

$$\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{4.45}$$

з початковими та крайовими умовами:

$$u(x,0) = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.46}$$

$$v(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.47}$$

$$v(x,0) = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.48}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Розв'язок цієї системи має вигляд:

$$u(x,t) = \begin{cases} xe^{-t} + x(1 - e^{-t}) - \dfrac{t^2}{2\varepsilon}, & (x,t) \in II \cup IV, \\ xe^{-t} + x(e^{t_1 - t} - e^{-t}) - \dfrac{t_1^2}{2\varepsilon}, & (x,t) \in I, \\ xe^{-t} + x(1 + e^{t_1 - t} - e^{t_2 - t} - e^{-t}) - \dfrac{t_1^2 + t^2 - t_2^2}{2\varepsilon}, & (x,t) \in III, \end{cases}$$

$$v(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t) \in \{0 \leqslant x \leqslant l;\ \varepsilon x \leqslant t \leqslant T\}, \\ x - \dfrac{t}{\varepsilon}, & (x,t) \in \{0 \leqslant x \leqslant l;\ 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon\}, \end{cases}$$

де t_1 і t_2 – корені рівняння $xe^{\tau - t} = \dfrac{\tau}{\varepsilon}$ відносно τ, а вид множини з відповідними індексами I, II, III, IV зображено на малюнку (рис. 4.5).

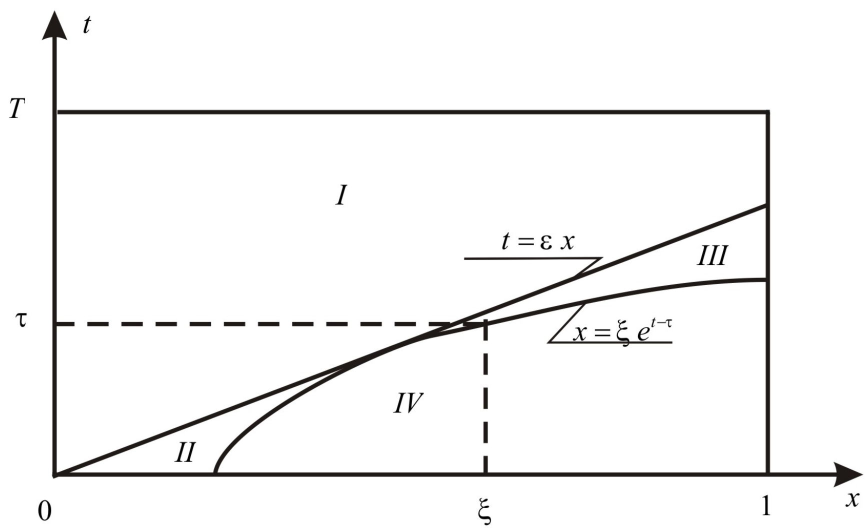

Рис. 4.5: Області I, II, III, IV.

Поряд із задачею (4.44)-(4.48) розглянемо задачу з $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + x\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \tilde{v}, \\ \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

з початковою та крайовою умовами:

$$\begin{cases} \tilde{u}(x,0) = x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \tilde{v}(0,t) = 0, & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Розв'язок цієї задачі має вигляд

$$\tilde{u}(x,t) = xe^{-t}, \quad \tilde{v}(x,t) \equiv 0.$$

Порівнюючи одержані розв'язки виродженої та збуреної задач бачимо, що різниця розв'язків $u(x,t)$ та $\tilde{u}(x,t)$ є величина порядку ε у всьому прямокутнику $\Pi(T)$. Щодо розв'язків $v(x,t)$ та $\tilde{v}(x,t)$, то в області $(x,t) \in \{0 \leqslant x \leqslant 1, \ \ \varepsilon x \leqslant t \leqslant T\}$ вони співпадають, а в області $(x,t) \in \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon x\}$ різниця розв'язків не є величиною порядку ε, тобто маємо ефект примежового шару.

4.4. Неперервна залежність від даних розв'язку нелінійної крайової задачі для гіперболічної системи першого порядку в секторі

У цьому підрозділі одержано теорему про неперервну залежність розв'язку нелінійної крайової задачі від вихідних даних для системи $m+n$ рівнянь $(n \geqslant 0, \ m \geqslant 0, \ n+m \geqslant 1)$ в секторі $S = \{(x,t) : \ 0 \leqslant t \leqslant T, \ -kt \leqslant x \leqslant kt\}$, $T > 0$, k – додатна стала

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \lambda(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u(x,t),v(x,t)), \\ \mu(x,t)\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(x,t,u(x,t),v(x,t)), \end{cases} \tag{4.49}$$

де

$$u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots, u_m(x,t)), \quad v(x,t) = (v_1(x,t), \ldots, v_n(x,t)),$$
$$f(x,t,u(x,t),v(x,t)) = (f_1(x,t,u(x,t),v(x,t)), \ldots, f_m(x,t,u(x,t),v(x,t))),$$
$$g(x,t,u(x,t),v(x,t)) = (g_1(x,t,u(x,t),v(x,t)), \ldots, g_n(x,t,u(x,t),v(x,t))),$$
$$\lambda(x,t) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(x,t), \ldots, \lambda_m(x,t)\}, \ \mu(x,t) = \mathrm{diag}\{\mu_1(x,t), \ldots, \mu_n(x,t)\},$$

причому $\lambda_i(x,t) \neq 0$, $(\lambda_i(-kt,t)+k)(\lambda_i(kt,t)-k) \neq 0$ для всіх $i \in I$, $0 \leqslant \mu_j(x,t) < \dfrac{1}{k}$ для всіх $j \in J$, $(x,t) \in S$, де $I = \{1,2,\ldots,m\}$, $J = \{1,2,\ldots,n\}$.

Для формулювання крайових умов уведемо множини індексів, які містять r_1, r_2, r_3 елементів, відповідно,

$$\begin{aligned} &I_1 = \{i \in I:\ \lambda_i(0,0) < -k\}, \quad I_2 = \{i \in I:\ \lambda_i(0,0) > k\},\\ &I_3 = \{i \in I:\ -k < \lambda_i(0,0) < k\}. \end{aligned}$$

Задамо нелінійні крайові умови

$$u_i(-kt,t) = \gamma_i^-\left(t, (u_s(-kt,t))_{s\in I_1}\right), \quad i \in I_2 \cup I_3, \tag{4.50}$$

$$u_i(kt,t) = \gamma_i^+\left(t, (u_s(kt,t))_{s\in I_2}\right), \qquad i \in I_1 \cup I_3, \tag{4.51}$$

$$v_j(-kt,t) = \gamma_j\left(t, (u_s(-kt,t))_{s\in I_1}\right), \quad j \in J. \tag{4.52}$$

Припустимо, що всі задані функції λ_i, μ_j : $S \to \mathbb{R}$; f_i, g_j : $S \times \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, γ_i^+, γ : $[0,T] \times \mathbb{R}^{r_1} \to \mathbb{R}$, γ_i^- : $[0,T] \times \mathbb{R}^{r_2} \to \mathbb{R}$ – неперервні; функції λ_i задовольняють умову Ліпшиця за змінною x, а μ_j – за t; функції f_i, g_j, γ_i^+, γ_i^-, мають за $\{u,v\}$ ріст не більший ніж лінійний; система рівнянь відносно $r_1 + r_2$ невідомих

$$\begin{cases} \alpha_i^0 = \gamma_i^-(0, (\alpha_s^0)_{s\in I_1}), & i \in I_2,\\ \alpha_i^0 = \gamma_i^+(0, (\alpha_s^0)_{s\in I_2}), & i \in I_1 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок α_i^0, $i \in I_1 \cup I_2$; виконується умова погодження нульового порядку $\gamma_i^-(0, (\alpha_s^0)_{s\in I_1}) = \gamma_i^+(0, (\alpha_s^0)_{s\in I_2})$, $i \in I_3$.

Позначимо через $\xi = \varphi_i(\tau; x, t)$ характеристику i-го $(i \in I)$ першого рівняння системи (4.49), що проходить через точку $(x,t) \in S$ і є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi,\tau),\\ \xi|_{\tau=t} = x. \end{cases}$$

Аналогічно, $\tau = \psi_j(\xi; x, t)$ – характеристика j-го $(j \in J)$ другого рівняння системи (4.49), яка є розв'язком початкової задачі

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{d\xi} = \mu_j(\xi,\tau),\\ \tau|_{\xi=x} = t. \end{cases}$$

Тоді система (4.49) на характеристиках має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{du_i}{d\tau}\left(\varphi_i(\tau;x,t),\tau\right) = \\ \qquad = f_i\left(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),v(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\right), \quad i\in I, \\ \dfrac{dv_j}{d\xi}\left(\xi,\psi_j(\xi;x,t)\right) = \\ \qquad = g_j(\xi,\psi_j(\xi;x,t),u(\xi,\psi_j(\xi;x,t)),v(\xi,\psi_j(\xi;x,t)), \quad j\in J. \end{cases} \tag{4.53}$$

Уведемо позначення: $\partial S^- = \{(x,t): \ x=-kt,\ t\geqslant 0\}$ – ліва межа сектора S та $\partial S^+ = \{(x,t): \ x=kt,\ t\geqslant 0\}$ – права межа сектора S, $\partial S = \partial S^- \cup \partial S^+$. Нехай $\chi_i(x,t)$ $(i\in I)$ ордината точки перетину i-ої характеристики $\xi=\varphi_i(\tau;x,t)$ системи (4.49) із межею ∂S сектора S, а $\varkappa_j(x,t)$ $(j\in J)$ – абсциса точки перетину j-ої характеристики $\tau=\psi_j(\xi;x,t)$ системи із ∂S^-.

Проінтегруємо систему (4.53) вздовж характеристик, використавши умови (4.50)–(4.52), тоді одержимо систему інтегро-операторних рівнянь

$$u_i(x,t) = F_i[u](x,t) + \\ + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i\left(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),v(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\right)d\tau, \quad i\in I, \tag{4.54a}$$

$$v_j(x,t) = G_j[u](x,t) + \\ + \int\limits_{\varkappa_j(x,t)}^{x} g_j\left(\xi,\psi_j(\xi;x,t),u(\xi,\psi_j(\xi;x,t)),v(\xi,\psi_j(\xi;x,t))\right)d\xi, \quad j\in J, \tag{4.54b}$$

в якій оператор F_i має вигляд

$$F_i[u](x,t) = \begin{cases} \gamma_i^-\left(\chi_i(x,t),[u_s(-k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))]_{s\in I_1}\right), & i\in I_2\cup I_3, \\ \gamma_i^+\left(\chi_i(x,t),[u_s(k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))]_{s\in I_2}\right), & i\in I_1\cup I_3, \end{cases} \tag{4.55}$$

а G_j $(j\in J)$, відповідно,

$$G_j[u](x,t) = \\ = \gamma_j\left(\psi_j(\varkappa_j(x,t);x,t),[u_s\left(-k\psi_j(\varkappa_j(x,t);x,t),\psi_j(\varkappa_j(x,t);x,t)\right)]_{s\in I_1}\right). \tag{4.56}$$

На підставі згаданих вище припущень, кожний із цих операторів відображає простір $C(S;\mathbb{R}^n)$ в простір $C(S;\mathbb{R})$.

Означення 4.2. *Узагальненим розв'язком задачі* (4.49)–(4.52) *називаємо пару вектор-функцій* (u, v), *компоненти яких належать простору* $C(S)$ *і задовольняють системи* (4.54) *та крайові умови* (4.50)–(4.52).

Приймемо позначення:

$$|f(x,t,u,v)| = \max_i |f_i(x,t,u,v)|, \quad ||f|| = \max_{(x,t)\in S} |f(x,t,u,v)|.$$

Аналогічні позначення використаємо для інших векторів та функцій.

Теорема 4.2. *Якщо* $w = (u, v)$ *– узагальнений розв'язок задачі* (4.49)–(4.52), *то для довільного* $0 < M < 1$, *такого що*

$$||\lambda|| \leqslant M, \quad \max\{||f||, ||g||\} \leqslant M(1 + |u| + |v|),$$
$$\max\{||\gamma^-||, ||\gamma^+||, ||\gamma||\} \leqslant M(1 + |u|),$$

справджується оцінка $||w|| \leqslant N$, *де* $N > 0$.

Доведення. Нехай $S^t = \{(x,\tau) : \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t, \ -k\tau \leqslant x \leqslant k\tau\}$, $S^- = \{(\xi,\tau) : \ -x/k \leqslant \tau \leqslant t, \ -k\tau \leqslant \xi \leqslant x, \quad x \leqslant 0\}$, $S^+ = \{(\xi,\tau) : \ x/k \leqslant \tau \leqslant t, \ x \leqslant \xi \leqslant k\tau, \quad x > 0\}$. Позначимо

$$U(t) = \max_{(x,\tau)\in S^t} |u(x,\tau)|,$$

$$V(x,t) = \begin{cases} \max\limits_{(\xi,\tau)\in S^-} |v(\xi,\tau)|, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ \max\limits_{(\xi,\tau)\in S^t\setminus S^+} |v(\xi,\tau)|, & \text{якщо} \quad x > 0. \end{cases}$$

Тоді з (4.54), (4.55), (4.56) одержимо

$$|u_i(x,t)| \leqslant |F_i[u](x,t)| + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} M(1 + U(\tau) + V(k\tau,\tau))d\tau, \tag{4.57a}$$

$$|v_j(x,t)| \leqslant |G_j[v](x,t)| + \int\limits_{\varkappa_j(x,t)}^{x} M(1 + U(t) + V(\xi,t))d\xi, \tag{4.57b}$$

$$|F_i[u](x,t)| \leqslant \begin{cases} M(1 + \max\limits_{i\in I_1\cup I_3} |u_i(-k\chi_i(x,t), \chi_i(x,t))|), & i \in I_2 \cup I_3, \\ M(1 + \max\limits_{i\in I_2\cup I_3} |u_i(k\chi_i(x,t), \chi_i(x,t))|), & i \in I_1 \cup I_3. \end{cases} \tag{4.57c}$$

$$|G_j[v](x,t)| \leqslant M(1 + U(t)), \qquad j \in J. \tag{4.57d}$$

Із нерівностей (4.57a) і (4.57c) випливає, що

$$U(t) \leqslant M\left(1 + U\left(t\right)\right) + M\int\limits_0^t [U(\tau) + V(k\tau,\tau)]d\tau + MT,$$

$$U(t) \leqslant \frac{M(1+T)}{1-M} + \frac{M}{1-M}\int\limits_0^t [U(\tau) + V(k\tau,\tau)]d\tau. \qquad (4.58)$$

Відповідно з (4.57b) і (4.57d) одержимо

$$V(x,t) \leqslant M(1+U(t)) + M\int\limits_{-kt}^{x} (1 + U(t) + V(\xi,t))d\xi \leqslant$$

$$\leqslant M(1+2kt)(1+U(t)) + M\int\limits_{-kt}^{x} V(\xi,t)d\xi,$$

тобто

$$V(x,t) \leqslant M(1+2kt)(1+U(t))e^{M(x+kt)}.$$

Застосувавши лему Гронуолла при фіксованому t, одержимо оцінку для $V(x,t)$, підставивши яку в праву частину нерівності (4.58) і знову за допомогою леми Гронуолла, маємо

$$U(t) \leqslant \exp\left\{\frac{(1+2kT)e^{2kMT}-1}{2k}\right\}\times$$
$$\times\left[\frac{M(1+T)}{1-M} + \frac{1-M+(M-1+2kMT)e^{2kMT}}{2k(1-M)}\right].$$

Теорема доведена.

$\square$

Зауваження 4.6. Одержані оцінки розв'язку задачі (4.49)-(4.52) можна використати при побудові асимптотичних розвинень розв'язків сингулярно збурених гіперболічних задач у криволінійних секторах.

4.5. Висновок до четвертого розділу

У четвертому розділі дисертації досліджено ефект примежового шару в мішаних задачах для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними при переході від горизонтальних до вертикальних характеристик системи і навпаки.

Доведено теорему про оцінку розв'язків регулярних та вироджених задач, вказано область, у якій виникає ефект примежового шару та області, у яких розв'язки відповідних задач є близькими.

Наведено приклади частинних випадків відповідних задач, на яких проаналізовано досліджувану проблему.

Доведено теорему про апріорну оцінку розв'язку нелінійної крайової задачі для гіперболічної системи рівнянь першого порядку в секторі, з вершини якого частина характеристик попадає в область. Одержану апріорну оцінку розв'язку задачі можна використовувати при дослідженні сингулярних гіперболічних систем рівнянь першого порядку в таких областях.

Дослідженні у цьому розділі задачі виникають у фізиці, біології, гідрота газодинаміці.

Висновки

Дисертаційну роботу присвячено вивченню сингулярно збурених задач для гіперболічних систем рівнянь із частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними. Задачі для таких систем описують різноманітні математичні моделі природознавства, техніки, економіки, теорії біопопуляцій, оптимального керування тощо.

У роботі одержано такі основні результати:

– встановлено достатні умови глобальної розв'язності сингулярних задач для гіперболічних систем лінійних, напівлінійних та квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними в різних областях;

– побудовано асимптотику розв'язків зі встановленням оцінок залишкових членів мішаних задач із малим параметром за різних похідних для лінійних та напівлінійних гіперболічних систем рівнянь першого порядку;

– побудовано асимптотичне наближення розв'язків мішаних задач для гіперболічних систем рівнянь першого порядку з різними характеристичними напрямками;

– одержано апріорні оцінки розв'язків нелінійних сингулярних задач для одновимірних гіперболічних систем у прямокутнику та секторі;

– доведено теорему про існування ефекту примежового шару в нелінійних мішаних задачах для квазілінійних гіперболічних систем рівнянь першого порядку при переході до вироджених систем.

Ці результати мають теоретичний характер, їх можна використати в теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними, а також під час дослідження прикладних проблем.

Список використаних джерел

[1] *Аболиня В. Э.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости/ *В. Э. Аболиня, А. Д. Мышкис* // Матем. сб. – 1960. – Т. 50. – Вып. 4. – С. 423–442.

[2] *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления/ *Л. Д. Акуленко.* – М.: Наука, 1987. – 326 с.

[3] *Алексеев В. С.* Гиперболическая регуляризация системы Соболева/ *В. С. Алексеев* // Математические труды – 2002. – Т. 5. – № 1. – С. 3–17.

[4] *Андрусяк Р. В.* Задача для квазілінійної системи гіперболічного типу у криволінійному секторі з вільними межами/ *Р. В. Андрусяк, В. М. Кирилич* // Наук. вісн. Чернівец. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 421. – С. 5–12.

[5] *Андрусяк Р.В.* Задача для виродженої гіперболічної системи в секторі/ *Р. В. Андрусяк, В. М. Кирилич, О. В. Пелюшкевич* // Карпатські математичні публікації. – 2011. – Т.3. – №2. – С. 4–12.

[6] *Андрусяк Р.В.* Глобальна розв'язність мішаної задачі для виродженої гіперболічної системи/ *Р. В. Андрусяк, В. М. Кирилич, О. В. Пелюшкевич* // Вісн. Львів ун-ту. Сер. мех-мат. – 2011. – Вип. 75. – С. 5–16.

[7] *Бомба А.* Метод дослідження багатосолітонних розв'язків рівнянь типу Кортевега-де Фріза на основі Т-представлень/ *А. Бомба, Ю. Турбал* // Вісник ТНТУ. – 2015. – Т. 77. – № 1. – С. 239–249.

[8] *Булдаев А. С.* Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем/ *А. С. Булдаев.* – Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. – 260 с.

[9] *Боголюбов Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний/ *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский.* – М.: Наука, 1974 – 503 с.

[10] *Бутузов В. Ф.* Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений/ *В. Ф. Бутузов* // Матем. сб.– 1977. – Т. 104. – № 3. – С. 460–485.

[11] *Бутузов В. Ф.* Асимптотика решений некоторых модельных задач химической кинетики с учетом диффузии/ *В. Ф. Бутузов* // ДАН СССР. – 1978. – Т. 242. – № 2. – С. 268–271.

[12] *Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений/ *В. Ф. Бутузов, А. Б. Васильева, М. В. Федорюк* // М.: ВИНИТИ АН СССР – 1969. – С. 5–73.

[13] *Бутузов В. Ф.* Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка/ *В. Ф. Бутузов, А. Ф. Каращук* // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57. – Вып. 3. – С. 338–349.

[14] *Бутузов В. Ф.* Асимптотика решения системы уравнений в частных производных первого порядка с малым параметром при части производных/ *В. Ф. Бутузов, А. Ф. Каращук* // Фундамент. и прикл. матем. – 2000. – Т. 6. – № 3. – С. 723–738.

[15] *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений/ *В. Вазов.* М.: Мир, 1986. – 464 с.

[16] *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики/ *Б. Р. Вайнберг.* – М.: МГУ, 1982. – 296 с.

[17] *Васильева А. Б.* Сингулярные возмущения в критических случаях/ *А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов.* –М.: МГУ, 1978. – 106 с.

[18] *Васильева А. Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений/ *А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов.* – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.

[19] *Васильева А. Б.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления *А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев* // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Сер. Мат. анализ. – 1982. – Т. 20. – С. 3–77.

[20] *Верещагин И. К.* Старение электролюминофоров/ *И. К. Верещагин, С. М. Кокин, В. А. Селезнев* // Изв. АН СССР. Физика. – 1985. – Т. 49. – № 10. – С. 1940–1943.

[21] *Вишик М. И.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром/ *М. И. Вишик, Л. А. Люстерник* // Успехи мат. наук. – 1957. – Вып. 12. – № 5. – С. 3–122.

[22] *Вишик М. И.* Некоторые вопросы возмущений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных/ *М. И. Вишик* // ДАН СССР. – 1959. – Т. 129. – Вып. 6. – С. 1203–1205.

[23] *Габов С. А.* Новые задачи математической теории волн/ *С. А. Габов.* – М.: Наука, 1998. – 448 с.

[24] *Градштейн И.С.* Системы дифференциальных уравнений гиперболического типа с малыми множителями при производных/ *И.С. Градштейн* // Докл. АН СССР, 1956. – № 108. – С. 9–12.

[25] *Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах управления/ *М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 3–51.

[26] *Ерофеенко В. Т.* Уравнения с частными производными и математические модели в экономике/ *В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская.* – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 248 с.

[27] *Иманалиев М.И.* Колебания и устойчивость сингулярно возмущеных интегро-дифферециальных систем/ *М.И.Иманалиев* . – Фрунзе: Илим, 1974. – 350 с.

[28] *Ишлинский А. Ю.* Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации/ *А. Ю. Ишлинский* // Прикл. математика и механика. – 1940. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 79–92.

[29] *Кабаций Н.М.* Асимптотическое представление решения задачи Коши для линейного гиперболического уравнения 2-го порядка с малым параметром при старшей производной по временной координате/ *Н. М. Кабаций, И.И. Маркуш* // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1974. – № 9. – С. 780–783.

[30] *Кадикенов Б.М.* О задаче Коши с начальным скачком для сингулярно возмущеных гиперболических уравнений вырождающихся в уравнение первого порядка/ *Б.М. Кадикенов, К. А.Касимов* // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 12. – С. 2114–1222.

[31] *Касимов К. А.* Асимптотическое представление решения задачи Коши для линейного гиперболического уравнения 2-го порядка с малым параметром при старшей производной по временной координате/ *К. А.Касимов, Е.У. Медеуов* // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1974. – № 9. – С. 780–783.

[32] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов/ *Т. Като* . – М.: Мир. – 1972. – 739 с.

[33] *Кирилич В. М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений/ *В. М. Кирилич, А. М. Филимонов* // Матем. студії. – 2008. – Т. 30. – № 1. – С. 42–60.

[34] *Кирилич В. М.* Глобальна гладка розв'язність гіперболічної задачі Валле-Пуссена з вільними межами/ *В. М. Кирилич, А. М. Філімонов* // Вісн. Львів ун-ту. Сер. мех-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 38–65.

[35] *Кирилич В. М.* Стійкість узагальненого неперервного розв'язку задачі з вільними межами для сингулярної квазілінійної гіперболічної системи/ *В. М. Кирилич* // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 7–16.

[36] *Кирилич В. М.* Достатні умови глобальної неперервної розв'язності задачі з невідомими межами для виродженої квазілінійної гіперболічної системи/ *В. М. Кирилич* // Матем. вісн. НТШ. – 2009. – Т. 6. – С. 123–139.

[37] *Кирилич В. М.* Задачі з вільними межами для гіперболічних систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. фіз.–мат. наук: 01.01.02 " Диференціальні рівняння"/ *В. М. Кирилич* — Київ, 2010. — 32с.

[38] *Кирилич В. М.* Ефект примежового шару для сингулярних гіперболіних систем/ В. М. Кирилич, О. В. Флюд// Всеукр. наукова конф. "Застосування математичних методів в науці і техніці": зб. тез доп., Луцьк, 25-26 листопада 2011 р. - Луцьк, 2011. - С. 36–37.

[39] *Клевчук І. І.* Квазіоптимальна стабілізація лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням/ *І.І. Клевчук* // Наук. Вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр., Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 56–59.

[40] *Клевчук І.І.* Існування незліченного числа циклів у гіперболічних системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом/ *І.І. Клевчук* // Нелінійні коливання. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 71–78.

[41] *Кміть І. Я.* Нелокальні крайові задачі для гіперболічних систем рівнянь із сингулярностями: автореф. дис. на здоб. наук. ступеня доктора фіз.-мат. наук: 01.01.02 "Диференціальні рівняння"/ *І. Я. Кміть* ; Інститут математики НАН України. – Київ, 2012. – 36 с.

[42] *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике/ *Дж. Коул.* – М.: Мир, 1972. – 276 с.

[43] *Куликовский А. Г.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений/ *А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов.* – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.

[44] *Курант Р.* Уравнения с частными производными/ *Р. Курант.* – М.: Мир, 1964. – 830 с.

[45] *Лакс П.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных/ *П. Лакс* – М. – Ижевск: ИИКИ, 2010. – 296 с.

[46] *Лапин Д. С.* Математические модели одномерных сред с конечными и бесконечными скоростями распространения возмущений: автореф. дис. на соиск. уч. степени канд. физ.- мат. наук: 05.13.18 "Математические моделирование, численные методы и комплексы програм"/ *Д. С. Лапин* – Москва, 2002. – 18 с.

[47] *Лапин Д. С.* Смешанная задача для сингулярной квазилинейной гиперболической системы с одной пространственной переменной/ *Д. С. Лапин, А. М. Филимонов* // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73. – № 2. – С. 315–318.

[48] *Ломов С. А.* Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач/ *С. А. Ломов, А. Г. Елисеев* // Успехи матем. наук – 1998. – Т. 43. – Вып. 2(361). – С. 3–53.

[49] *Лыков А. В.* Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло - и массообмена/ *А. В. Лыков* // Инж.-физ. журн. – 1965. – Т. 9. – № 3. – С. 287–304.

[50] *Малышев А. Н.* Гиперболические уравнения теплопроводности. Глобальная разрешимость задачи Коши/ *А. Н. Малышев, Е. И. Роменский*// Сиб. матем. журн. – 1986. – Т. 27. – № 5. – С. 128–134.

[51] *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях/ *В. П. Маслов.* – М.: Наука, 1977. – 384 с.

[52] *Мауленов О.* О разрешимости смешанной задачи для вырожденной полулинейной гиперболической системы на отрезке/ *О. Мауленов, А. Д. Мышкис* // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1981. – № 5. – С. 25–29.

[53] *Мауленов О.* О смешанной задаче для полулинейной гиперболической системы на отрезке с малым параметром при производных по времени (часть I)/ *О. Мауленов, А. Д. Мышкис* // Изв. АН КазССР. Сер. – физ.-мат. – 1983. – № 3. – С. 59–62.

[54] *Мауленов О.* О смешанной задаче для полулинейной гиперборлической системы на отрезке с малым параметром при производных по времени (часть III)/ *О. Мауленов, А. Д. Мышкис* // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1985. – № 1. – С. 65–68.

[55] *Мельник З. О.* Пример неклассической граничной задачи для уравнения колебаний струны/ *З. О. Мельник* // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32. – № 5. – С. 671–674.

[56] *Мельник З. О.* Смешаная задача для гиперболической системы первого порядка с малым параметром при производных/ *З. О. Мельник, В. Н. Цымбал* // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12. – № 5. – С. 902–907.

[57] *Мельник З. О.* Задача с неизвестными границами для гиперболической системы первого порядка/ *З. О. Мельник* // Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей. – К. : Наук. думка, 1983. – С. 77–79.

[58] *Мельник З. О.* Задача с интегральными ограничениямы для общих двумерных гиперболических уравнений и систем/ *З. О. Мельник* // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21. – № 2. – С. 246–253.

[59] *Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа/ *Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громяк* . – К.: Наук. думка, 1991. – 232 с.

[60] *Мищенко Е. Ф.* Дифференциальные уравнение с малым параметром и релаксационные колебания/ *Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов.* – М.: Наука, 1975. – 247 с.

[61] *Мурадов Р. И.* Задача Коши для гиперболического уравнения с малым параметром/ *Р. И. Мурадов, М. Г. Гасанов* // Уч. Зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. на. – 1974. – № 2-3. – С. 43–50.

[62] *Мышкис А. Д.* Непрерывные решения гиперболических систем квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными/ *А. Д. Мышкис, А. М. Филимонов* ; под ред. В. А. Треногина и А. Ф. Филиппова // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Физ.-мат. л-ра, 2003. – С. 337–351.

[63] *Мышкис А. Д.* О глобальной непрерывной разрешимости смешаной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений/ *А. Д. Мышкис, А. М. Филимонов* // Дифференц. уравнения – 2008. – Т. 44. – № 3. – С. 1 – 15.

[64] *Найфе А.* Введение в методы возмущений/ *А. Найфе.* – М.: Мир, 1984. – 535 с.

[65] *Нижник, Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений/ *Л. П. Нижник.* – К.: Наукова думка, 1991. – 232с.

[66] *Панайоти Б.Н.* О задаче Коши для волнового уравнения с малым параметром при $\frac{dv}{dt}$/ *Б.Н. Панайоти* // Докл. АН АзССР. – 1952. – Т. 7. – № 6. – С. 279–283.

[67] *Панайоти Б.Н.* Об одной задаче Коши с малым параметром/ *Б.Н. Панайоти* // Докл. АН АзССР. – 1952. – Т. 10. – № 7. – С. 527–531.

[68] *Парный И. А.* Подземная гидродинамика/*И. А Парный* .– М.: Гостехиздат., 1948. – 347 с.

[69] *Пелюшкевич О. В.* Задачі для вироджених гіперболічних систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними: автореф. дис.

на здобуття наук. ступення канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 ”Диференціальні рівняння”/ *О. В. Пелюшкевич* – Львів, 2013. – 19 с.

[70] *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для системы уравнений с частными производными/ *И. Г. Петровский* // Избранные труды. – М.: Наука, 1986. – С. 34–97.

[71] *Перестюк М. О.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь/ *М. О. Перестюк, І. І. Клевчук* // Нелінійні коливання. – 2013. – Т. 16 – № 1. – С. 94–104.

[72] *Полянин А. Д.* Методы решений нелинейных уравнений математической физики и механики/ *А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов* – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 256 с.

[73] *Пташник Б. Й.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними/ *Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук* – К.: Наук. думка, 2002. – 415 с.

[74] *Рейнер М.* Реология/ *М. Рейнер.* – М.: Наука, 1965. – 224 с.

[75] *Риман Б.* О распространении волн конечной амплитуды [сочинения] / *Б. Риман.* – М.– Л., 1948. – С. 376–395.

[76] *Рождественский Б. Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике/ *Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко.* – М. : Наука, 1978. – 592 с.

[77] *Рождественский Б. Л.* О невозможности ”градиентной катастрофы” для слабонелинейных систем/ *Б. Л. Рождественский, А. Д. Сидоренко* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т. 7. – № 5. – С. 1176–1179.

[78] *Самойленко Ю. І.* Асимптотичні солітоноподібні розв’язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега- де Фріза зі змінними коефіцієнтами: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора. фіз.-мат. наук: 01.01.02 – ”Диференціальні рівняння”/ *Ю. І. Самойленко* – Київ, 2016. – 40 с.

[79] *Су Юй-чен* Асимтотика решений некоторых вырождающихся квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка/ *Юй-чен Су* // ДАН СССР. – 1961. – Т. 138. – № 1. – С. 63–66.

[80] *Тихонов А. Н.* Системы диффереciальных уравнений содержащих малые параметры при производных/ *А. Н. Тихонов* // Матем. сб. – 1952. – Т. 31(73). – № 3. – С. 575–586.

[81] *Треногин В. А.* Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика/ *В. А. Треногин* // Успехи мат. наук. – 1970. – Вып. 25. – № 4. – С. 123–156.

[82] *Треногин В. А.* Об асимптотике решений квазилинейных гиперболических уравнений с негиперболическим погранслоем/ *В. А. Треногин* // Тр. МФТИ "Исследование по механики и прикладной математике." – 1970. – Вып. 9 – С. 112–127.

[83] *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны/ *Дж. Б. Уизем.* – М.: МИР, 1977. – 622 с.

[84] *Уфлянд Я. С.* К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях/ *Я. С. Уфлянд* // Инж.-физ. журн. – 1964. – Т. 7. – № 1. – С. 89–92.

[85] *Филимонов А. М.* Достаточные условия глобальной разрешимости смешанной задачи для квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными/ *А. М. Филимонов* // М., 1980. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 19.12.80, № 6-81 Деп.

[86] *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений/ *М. В. Федорюк.* – М.: Наука, 1983. – 352 с.

[87] *Флюд О.* Про одну задачу з малим параметром при похідних у гіперболічній системі/ *О. Флюд* // Чотирнадцята міжн. наукова конф. імені академіка М. Кравчука: матер. конф., Київ, 19-21 квітня 2012р. – К.: НТУУ "КПІ", 2012. – С. 424.

[88] *Флюд О.* Асимптотика розв'язку напівлінійної гіперболічної системи рівнянь з малим параметром/ *О. Флюд* // Міжн. наукова конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування": матер. конф., Ужгород, 27-29 вересня, 2012 р. – Ужгород, 2012. – С. 81.

[89] *Флюд О.* Задача з малим параметром при похідних гіперболічної системи напівлінійних рівнянь /*О. Флюд* // Fourth Intern. Conf. for Young

Mathematics on Diff. Eq. and Appl. dedicated to Ya. B. Lopatynskii: Book of abstracts, November 14-17, 2012, Donetsk, Ukraine. – Donetsk, 2012. – P. 86.

[90] *Флюд О.* Задача з малим параметром при похідних у гіперболічній системі рівнянь першого порядку/ *О. Флюд* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2013. – Вип. 78. – С. 135–149.

[91] *Флюд О.* Апріорна оцінка розв'язку крайової задачі для виродженої напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку в секторі/ *О. Флюд* // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2013. – Вип. 11. – С. 188–192.

[92] *Флюд О. В.* Ефект примежового шару в крайових задачах для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку/ *О. В. Флюд* // Наук. вісник Ужгород ун-ту. – 2013. – Вип. 24. – №2. – С. 214–217.

[93] *Флюд О. В.* Мішана задача для напівлінійної гіперболічної системи в секторі з малим параметром при похідних по часу/ *О. В. Флюд* // V всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу": тези доп., Івано-Франківськ, 19-21 вересня 2013. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 77.

[94] *Флюд О. В.* Задача з малим параметром при похідних у гіперболічній системі лінійних рівнянь першого порядку/ *О. В. Флюд* // Буковинський матем. журнал, – 2014. – Т.2. – №1. – С. 130–138.

[95] *Флюд О. В.* Задача з малим параметром при похідних у напівлінійній гіперболічній системі рівнянь першого порядку/ *О. В. Флюд* // Буковинський матем. журнал, – 2015. – Т.3. – №2. – С. 102–115.

[96] *Флюд О. В.* Задача з малим параметром при похідних у гіперболічній системі лінійних рівнянь першого порядку у півсмузі/ *О. В. Флюд* // П'ятнадцята міжн. наукова конф. імені академіка М. Кравчука: матер. конф., Київ, 15-17 травня 2014р. – К.: НТУУ КПІ, 2014. – С. 318.

[97] *Флюд О. В.* Примежовий шар у мішаній задачі для виродженої гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку/ *О. В Флюд* // Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня 2015 р., Київ – Інститут математики НАН України, 2015. – С. 172.

[98] *Флюд О. В.* Примежовий шар у мішаних задачах для вироджених гіперболічних систем квазілінійних рівнянь першого порядку/ *О. В Флюд*//

Конференція молодих учених ”Підстригачівські читання - 2015”, Львів, 26-28 травня 2015 р., - Львів, 2015. – С. 318.

[99] *Флюд О. В.* Асимптотика розв'язку напівлінійної гіперболічної системи рівнянь з малим параметром / *О. В Флюд* // Міжнародна наукова конференція ”Диференціальні рівняння та їх застосування” присвячена 70-річчю академіка НАН України М. О. Перестюка, Ужгород, , 19-21 травня 2016 р. – Ужгород: Вид-во УжНУ ”Говерла”, 2016. – С. 126.

[100] *Фодчук В. І.* Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння / *В. І. Фодчук, Я. Й. Бігун, І. І. Клевчук, І. М. Черевко, І. В. Якімов* – К.: Ін-т Математики НАН України, 1996. – 210 с.

[101] *Фридрикс К. О.* Асимптотические явления в математической физике/*К. О. Фридрикс* // Математика. Сб. переводов. – 1957. – Т. I – С. 79–94.

[102] *Цымбал В. Н.* Задача Коши для гиперболической системы первого порядка с несколькими малыми параметрами/ *В. Н.Цымбал* // – ДАН УССР. Сер. физ-мат и техн. н. – 1983. – № 1. – С. 27–29.

[103] *Andrusyak R.* The Two-Phase Problem for One Quasilinear Hyperbolic System/ *R. Andrusyak, I. Andrusyak , O. Pelyushkevych, O. Flyud* // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 5. – № 2. – P. 61–77.

[104] *Barbu L.* Singularly Perturbed Boundary-Value Problems/ *L. Barbu , G. Morosanu.* – Birkhäuser Verlag AG, Basel – Boston – Berlin, 2007. – 231 p.

[105] *Bielecki A.* Une remarque sur la methode de Banach-Caciopoli-Tikhonov dans la theorie des equations differentielles ordinaries/ *A. Bielecki* // Bull. Accad. Pol. – 1956. – Sci. 4. – P. 261–268.

[106] *Blondel L. E.* Etude de deux Problemes Singuliers Relatifs aux Equations aux Derivees Partielles Lineaires et Hyperboliques du Second Ordre/ *L. E. Blondel* // J. Math. Anal. and Appl. – 1961. – Vol. 40. – №. 3. – P. 247–299.

[107] *Blondel L. E.* Perturbation Singuliere Pout Une Equation aux Derivees Partielles du Second Ordre, Lineaire, du Type Hyperbolique Normal/ *L. E. Blondel* //C. R. Acad. Sci. Paris. – 1963. – P. 353–355.

[108] *Bobisud L. E.* Degeneration of the Solution of Certain Well-Posed Systems of Partial Differential Equations Depending on a Small Parameter/ *L. E. Bobisud* // J. Math. Anal. and Appl. – 1966. – Vol. 16. – №. 3. – P. 419–454.

[109] *Bobisud L. E.* On the behavior of the solution of the telegraphists equation for large velocities/ *L. E. Bobisud* // Pacific J. Math. – 1967. – №. 2. – P. 213–219.

[110] *Butuzov V. F.* On a Singularly Perturbed System of First-Order Partial Differential Equations With Various Degrees of a Small Parameter/ *V. F. Butuzov, E. A. Derkunova* //Differential Equations. – 2006. – Vol. 42. – №. 6. – P. 826–841.

[111] *Cesari L.* A Boundary Value Problem for Quasilinear Hyperbolic Systems in the Schauder Canonic Form/ *L. Cesari* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. – 1974. – Vol. 4. – № 1. – P. 311–358.

[112] *Chien X.* A Hyperbolic Free Boundary Problem Modeling Tumor Growth: Asymptotic Behavior/ *X. Chien, S. Gui, A. Friedman* // Trans. Amer. Math. Soc. – 2005. – Vol. 357. – №. 12. – P. 4771–4804.

[113] *Courant R.* On Nonlinear Partial Differential Equations With Two Independent Variables / *R. Courant, P. Lax* // Comm. Pure. Appl. Math. – 1949. – Vol. 2. – P. 255–273.

[114] *Eckhaus W.* Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations/ *W. Eckhaus*. New York: North-Holland/ American Elsevier. – 1973. – 145 p.

[115] *El G. A.* Expansion Shock Solutions of the BBM and Boussinesq Equations/ *G. A. El, M. A. Hoefer, M. Shearer* // arxiv: 1601.01071v1[nlin.PS], 6 Jan 2016. – 6 p.

[116] *Florescu D.* Asupra existentei solutiilor unor sisteme hiperbolice de tip special/ *D. Florescu* // Studii si cerc. Mat. – 1978. – Vol. 30. – №. 3. – P. 279–285.

[117] *Flyud O.* Singularly Perturbed Mixed Boundary Value Problem For the System of Hyperbolic Equation of the First Order/ *O.Flyud* // Intern. Conf.

dedicated to the 120th Anniversary of Stefan Banach: Abstracts of Reports, 17-21 September 2012, Lviv. – Lviv, 2012. – P. 191.

[118] *Flyud O.* On a Singularly Perturbed System of First-Order Partial Differential Equations / *O. Flyud* // Open Sciense Journal of Mathematics and Aplication. – 2015. – Vol. 3 – № 3. – P. 58–65.

[119] *Flyud O.V.* Singularly Perturbed Mixed Boundary Value Problem for the Semilinear System of Hyperbolic Equations of the First Order/ *O.V.Flyud* // International V. Skorobohatko mathematical conference, August 25-28, 2015, Drohobych, Ukraine. – P. 43.

[120] *Friedman A.* The Stefan Problem for a Hyperbolic Heat Equation/ *A. Friedman, B. Hu* // Math. Anal. and Appl. – 1989. – Vol. 138. – № 1. – P. 249–279.

[121] *Gally T.* Global Stability of Travelling Fronts for a Damped Wave Equation with Bistable Nonlinearity/ *T. Gally, R. Joly* // Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. – 2009. – Vol. 42. – № 1. – P. 103–140.

[122] *Geel R.* Nonlinear Initial Value Problem With a Singular Perturbation of Hyperbolic Type/ *R. Geel* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1981. – Vol. 89. – № 3-4. – P. 333–345.

[123] *Genet J.* Perturbations singulieres pour une classe de problemes hyperboliques non lineaires/ *J. Genet, M. Madaune* // C. r. Acad. sci.– 1976. – Vol. 283. – № 4. – P. 167–170.

[124] *Hopf E.* The Partial Differential Equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ / *E. Hopf* // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1950. – Vol. 3. – № 3. – P. 201–230.

[125] *Hsiao G. C.* A Singularly Perturbed Cauchy Problem/ *G. C. Hsiao, R. J. Weinacht* // J. Math. Anal. And Appl. – 1959. – Vol. 71. – № 1. – P. 242–250.

[126] *Jager E. M.* Singular Perturbations of Hyperbolic Type/ *E. M. Jage* // Nieuw arch. Wisk. – 1975. – Vol. 23. – №2. – P. 145–172.

[127] *Kamont Z.* Hyperbolic Functional Differential Inequalities and Applications/ *Z. Kamont* – Kenwez Acad. Publ., Dordzecht, 1990. – 324 p.

[128] *de Kerf. F.* Asymptotic Analysis of a Class of Perturbed Korteweg-de Vries Initial Value Problems/ *F. de Kerf* – Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1988. – Vol. 50. – 180 p.

[129] *Kopackova-Sucha M.* On the Weakly Nonlinear Wave Equation Involving a Small Parameeter of the Highest Derivative/ *M. Kopackova-Sucha* // Czehosl. Math. J. – 1963. – Vol. 19. – № 3. – P. 46–491.

[130] *Kordulova P.* Quasilinear Hyperbolic Equations with Hysteresis/ *P. Kordulova* // J. of Physics: Conference Series. – 2006. – Vol. 55. – P. 135–143.

[131] *Li Ta-Tsien* Global Classical Solutions for Quasilinear Hyperbolic Systems/ *Ta-Tsien Li.* – New York: Masson, 1994. – 315 p.

[132] *Li Ta-Tsien* Exact Controllability for First Order Quasilinear Hyperbolic Systems with Zero Eigenvalues/ *Ta-Tsien Li, Yu Lixin* // Chin. Ann. Math. – 2003. – Vol. 24 B. – № 4. – P. 415–422.

[133] *Li Ta-Tsien* Exact Boundary Controllability and Observability for First Order Quasilinear Hyperbolic Systems with a Kind of Nonlocal Boundary Conditions/ *Ta-Tsien Li, Bopeng Rao, Zhiqiang Wang* // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2010. – Vol. 28. – № 1. – P. 243–257.

[134] *Lions J. L.* Perturbations singulieres dans les problemes aux limites et en controle optimal/ *J. L. Lions* – Lect. Notes in Math., Springer, Berlin, 1973. – 323 p.

[135] *Mika J.* Asymptotic Relationship Between Telegraphic and Diffusion Equations/ *J. Mika , R. Stankiewicz* // Math. Meth. Appl. Sci. – 1981. – Vol. 3. – № I. – P. 21–37 .

[136] *Miura R. M.* Application of a Non Linear WKB Method to the Korteweg-DeVries Equation/ *R. M. Miura, M. D. Kruskal* // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1974. – Vol. 26. – № 2. – P. 376–395.

[137] *Naidu D. S.* Singular Perturbations and Time Scales in Control Theory and Applications: an Overview/ *D. S. Naidu* // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B. Applications and Algorithms. – 2002. – Vol. 9. – № 2. – P. 233–278.

[138] *Nedoma J.* Pocátecni Cauchyuv problem u hyperbolichych rovnic s malym parametrem/ *J. Nedoma* // Casop. Pestov mat. – 1967. – Vol. 97. – № 4 – P. 392–417.

[139] *Schauder J.* Cauchy'sches Problem für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Anwendung einiger sich auf die Absolutbeträge der Lösungen beziehenden Abschätzungen/ *J. Schauder* // Commen. Mathem. Helvetici. – 1936 – 1937. – Bd. 9. – S. 263–282.

[140] *Shao Z.-Q.* Global Weakly Discontinuous Solutions to Quasilinear Hyperbolic Systems of Couservation Laws With Damping with a Kind of Non-Smooth Initial Data/ *Z.-Q. Shao, Y.-C. Li, D.-X. Kong* // Z. angew. Math. Phys. – 2008. – Vol. 59. – P. 935–968.

[141] *Smith D.R.* An Asymptotic Analysis of Certain Hyperbolic Cauchy Problem/ *D. R. Smith* // SIAM J. Math. Anal. – 1971. – Vol. 2. – P. 375–392.

[142] *Smith D.R.* On the Behavior of the Solution of the Telegraphist's Equatiion for Large Absorption/ *D. R. Smith, J.I. Palmer* // Arch. Rational Mech. Anal. – 1970. – Vol. 39. – № 2. – P. 146–157.

[143] *Trustrum K.* Rotating and Stratified Fluid Flow/ *K. Trustrum* // J. Fluid Mech. – 1964. – № 19. – P. 415–432.

[144] *Turo J.* Mixed Problems for Quasilinear Hyperbolic Systems/ *J. Turo* // Nonlin. Anal., Theory, Meth., Appl. – 1997. – Vol. 30. – № 4. – P. 2329–2340.

[145] *Wang Z.* Exact Controllability for Nonautonomous First Order Quasilinear Hyperbolic Systems/ *Z. Wang* // Chin. Ann. Math. – 2006. – Vol. 27 B. – № 6. – P. 643–656.

[146] *Zlamal M.* Sur l'equation des telegraphistes avec un petit parametre/ *M. Zlamal* // Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. – 1959. – Vol. 27. – № 8. – P. 324–332.