Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Нестеренко Василь Володимирович

УДК 517.51

АНАЛОГИ НЕПЕРЕРВНОСТІ: ЗВ'ЯЗКИ МІЖ НАРІЗНИМИ І СУКУПНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ ТА ТЕОРЕМИ ПРО ДЕКОМПОЗИЦІЮ

01.01.01 – математичний аналіз

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів – 2 0 1 6

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант

доктор фізико-математичних наук,
професор Маслюченко Володимир Кирилович,
завідувач кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
професор Загороднюк Андрій Васильович,
проректор з наукової роботи,
професор кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

доктор фізико-математичних наук,
професор Зелінський Юрій Борисович,
завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України;

доктор фізико-математичних наук,
професор Радул Тарас Миколайович,
професор кафедри геометрії та топології Львівського національного університету імені Івана Франка.

Захист відбудеться 2016 р. о 15.00 год. на засіданні Вченої ради Д 35.051.18 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розіслано 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Гуран І.Й.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Неперервність – це одне з центральних понять математики, яке інтенсивно вивчається, починаючи з класичних робіт О.Коші та Б.Больцано, протягом останніх двохсот років. Ще в XIX столітті виникли перші аналоги неперервності: точкова розривність, вимірність за Бером, квазінеперервність. У XX столітті з'явилося дуже багато (понад 150) аналогів і послаблень неперервності (майже неперервність, ледь неперервність, кліковість, графічна неперервність, замкненість графіка, тощо) і накопичилось досить багато матеріалу. Є огляди, в яких викладається частина отриманих результатів (Т.Нойбрунна про квазінеперервність, З.Пьотровського про зв'язки між нарізними і сукупними ослабленнями неперервності, Т.Натканьця про майже неперервність, Т.Натканьця і Р.Ґібсона про властивість Дарбу). Крім того, була спроба оглянути всі аналоги неперервності у праці Д.Ґаулда, С.Ґрінвуда і І.Райлі (їх там близько 100). Але повного огляду результатів про аналоги неперервності поки що ще не написано.

Вивчення аналогів неперервності групується навколо двох великих тем: зв'язки між нарізними і сукупними властивостями та теореми про декомпозицію неперервності.

Зв'язки між нарізними і сукупними ослабленнями неперервності вивчалися в працях С.Кемпістого, Н.Мартіна, Дж.Бреккенріджа і Т.Нішіури, В.Маслюченка, З.Пьотровського, З.Ґранде та багатьох інших. Т.Нойбрунн, М.Матейдес, Ж.Еверт та інші вивчали аналоги неперервності для многозначних відображень. Розвиваючи дослідження К.Беґеля, В.Маслюченко і В.Нестеренко ввели поняття горизонтальної квазінеперервності та отримали багато результатів, пов'язаних з цим поняттям, які потім дістали значний розвиток. Деякі з цих досліджень були підсумовані у кандидатській дисертації В.Нестеренка "Різні типи квазінеперервності та їх застосування".

Дослідження різних аналогів неперервності активно проводяться і в наш час, зараз з цієї тематики нараховується більше тисячі публікацій. Та, незважаючи на їх велике число, залишається ще багато напрямків, які потребують подальшої розробки і розвитку. Наприклад, актуально отримати найзагальніші умови на відображення $f : X \times Y \to Z$, які гарантують наявність у них точок сукупної неперервності, причому бажано, щоб вони були як достатніми, так і необхідними, розвиваючи при цьому деякі нещодавно отримані результати, що стосуються властивості Гана. Так само важливо знайти теорему, яка б охоплювала недавно отримані результати В.Маслюченка і В.Нестеренка та А.Бузіада і Ж.-П.Троалліка щодо узагальнення відомої теореми Калбрі-Троалліка.

Зовсім недослідженими є питання про сукупні властивості відображень монотонних відносно однієї змінної чи тих, що мають замкнений графік відносно однієї змінної. Недостатньо вивчені зв'язки між нарізними і сукупними аналогами неперервності для многозначних відображень.

Під декомпозицією в широкому сенсі деякої властивості (A) функцій розуміють теореми типу $(B)\wedge(C) \Rightarrow (A)$, де (B) і (C) якісь інші властивості функцій. Сюди, зокрема, належать класичні теореми функціонального аналізу про те, що кожне адитивне і неперервне відображення буде однорідним, а значить, лінійним, і кожне лінійне відображення із замкненим графіком у банахових просторах неперервне (теорема Банаха про замкнений графік). Після цього багато математиків (Дж.Дуґунджі, О.Алас, З.Пьотровський і А.Шиманський, К.Бурґес, І.Баґґс, Я.Добош, М.Р.Вуйчик і М.С.Вуйчик) отримали ряд теорем про декомпозицію неперервності, коли однією з умов виступає замкненість графіка. У праці В.Маслюченка і В.Крецу було введено нове поняття перехідності для функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і показано, що воно може з успіхом замінити наявність у функції замкненого графіка. Актуальною задачею стало перенесення поняття перехідності на довільні відображення $f : X \to Y$ і отримання відповідних теорем про декомпозицію неперервності з участю перехідності. Крім того, на часі розглянути всі теореми, де фігурує умова замкненості графіка і вивчити, коли її можна замінити перехідністю.

У зв'язку з тим, що різноманітних ослаблень неперервності є дуже велика кількість і багато з них мають спільні риси, природно виникло питання про введення загальних означень, з яких як часткові випадки одержують ті чи інші поняття. Такі підходи розглядалися у працях О.Маслюченка, Х.Ріхтера і Ж.Вільма та Е.Розаса, які розвивали означення неперервності на мові околів чи відкритих множин. Епізодично в роботах Р.Мімни, Я.Борсіка та О.Карлової і В.Михайлюка для характеризації деяких аналогів неперервності використовувалася операція замикання.Тому постало актуальне завдання з'ясувати, які з різновидів неперервності можна охарактеризувати з допомогою операторів замикання і внутрішності.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі математичного аналізу факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Тематика дисертації пов'язана з науково-дослідними програмами "Різні класи операторів в абстрактних просторах" (номер державної реєстрації – 0110U001560) та "Векторні ґратки та зв'язки

між нарізними та сукупними властивостями функцій багатьох змінних" (номер державної реєстрації – 0109U002242), які ведуться на кафедрі математичного аналізу ЧНУ.

Мета і завдання досліджень. *Метою* дисертації є дослідження зв'язків між різними функціональними класами, опис множини точок неперервності різних аналогів неперервності, встановлення зв'язків між нарізними та сукупними аналогами неперервності, одержання результатів про декомпозицію неперервності та її аналогів.

Завданнями дослідження є:

- встановлення взаємозв'язків між різними аналогами неперервності;
- опис множин точок розриву функцій з різних функціональних класів;
- вивчення зв'язків між нарізними та сукупними властивостями різних аналогів неперервності;
- встановлення необхідних і достатніх умов для сукупної квазінеперервності, кліковості та інших аналогів неперервності;
- вивчення властивостей аналогів неперервності многозначних відображень;
- дослідження зв'язків між різними класами просторів, що пов'язані з нарізно неперервними функціями, зокрема, знаходження необхідних і достатніх умов для виконання властивості Гана;
- перенесення поняття перехідності на випадок відображень зі значеннями в топологічних просторах, вивченню його властивостей і аналогів;
- встановлення нових результатів про декомпозицію неперервності, квазінеперервності та інших аналогів неперервності;
- дослідження можливості заміни умови замкненості графіка на перехідність у різних результатах функціонального аналізу і теорії функцій.

Основні *об'єкти* досліджень – множини точок розриву функцій з різних функціональних класів, сукупні та нарізні властивості аналогів неперервності, декомпозиції неперервності та різних ослаблень неперервності, зв'язки між різними класами функцій, пов'язаними з аналогами неперервності. *Предметом* досліджень є квазінеперервні

відображення та їх різновиди, функції типу Дарбу, функції із замкненим графіком та перехідні відображення, різні ослаблення неперервності многозначних відображень, нарізно неперервні функцій, нарізно квазінеперервні функції.

В дослідженнях використовується категорний метод та інші методи загальної теорії функцій і функціонального аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертаційній роботі *вперше* отримано такі результати:

- введено нові поняття псевдоквазінеперервності знизу та покриттєвої категорної кліковості знизу, з допомогою яких отримано найзагальнішу теорему про сукупну неперервність функцій двох змінних, яка охоплює результати Р.Бера, Г.Гана, К.Беґеля, Н.Мартіна, Р.Фейока, Дж.Бреккенріджа та Т.Нішіури, Ж.Калбрі та Ж.-П.Троалліка, В.Маслюченка, А.Бузіада та Ж.-П.Троалліка на цю тему;

- для берівського простору X, компактного чи локально компактного простору Y, що задовольняє другу аксіому зліченності, і метричного простору Z вперше вказані необхідні і достатні умови на відображення $f : X \times Y \to Z$ для того, щоб воно мало властивість Гана про залишковість множини $C_Y(f)$ тих точок $x \in X$, що f сукупно неперервне у кожній точці множини $\{x\} \times Y$, в той час коли в працях багатьох авторів (Р.Бер, Е. ван Влек, Г.Ган, К.Беґель, Р.Фейок, Дж.Бреккенрідж та Т.Нішіура, Ж.Калбрі та Ж.-П.Троаллік, В.Маслюченко, І.Наміока, Р.Христенсен, Ж.-П.Сан-Ремо та інші) були отримані лише достатні умови;

- для берівського простору X, топологічного простору Y із зліченною псевдобазою і регулярного простору Z доведено, що кожне горизонтально квазінеперервне відображення $f : X \times Y \to Z$, яке квазінеперервне відносно другої змінної для всіх значень $x \in X$ за вийнятком деякої множини першої категорії, буде сукупно квазінеперервним, що є найкращим узагальненням відомого результату С.Кемпістого про квазінеперервність нарізно квазінеперервних функцій, над розвитком якого працювало багато математиків (Н.Мартін, Т.Нойбрунн, З.Пьотровський, В.Маслюченко та інші); разом з тим у тому випадку, коли простори Y та Z мають зліченну базу, вперше доведена необхідність вказаних вище умов для сукупної квазінеперервності;

- введено поняття перехідності відображень $f : X \to Y$ між довільними топологічними просторами, з допомогою якого встановлена теорема про декомпозицію неперервності, частинними випадками якої є попередні результати В.Крецу та В.Маслюченка, М.Р.Вуйчика та М.С.Вуйчика, Р.Мімни і Р.Мімни та Д.Розе, і теорема про декомпозицію сукупної неперервності, яка значно покращує результати З.Пьотровського, М.С.Вуйчика і Р.Мімни; як наслідок отримана нова теорема про неперервність скінченновимірних лінійних відображень із замкненим графіком;

- вперше дано характеризацію різних ослаблень неперевності з допомогою операторів замикання та внутрішності, тим самим розвинено один результат О.Карлової і В.Михайлюка та узагальнено результати Р.Мімни, Я.Борсіка та П.Келлера на цю тему;

- досліджено величину множини точок сукупної неперервності нарізно монотонних функцій, зокрема, встановлено, що кожна нарізно монотонна функція є точково розривною, що дало відповідь на питання О.Скасківа;

- для просторів досить загального типу новим методом отримано характеризацію множини точок симетричної квазінеперервності функцій двох змінних, що розвиває результат Е.Котліки та А.Малізевського для функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

- одержано нові декомпозиційні теореми за участю слабкої квазіперехідності та w^*-квазінеперервності, які узагальнюють результати Б.Д.Сміта, Дж.Смітала і Е.Станової, Р.Ґібсона та М.Матейдеса;

- розроблено новий метод побудови розривних двосторонньо квазінеперервних перехідних функцій, який показав, що в результаті Й.Добоша про неперервність двосторонньо квазінеперервних функцій умову замкненості графіка не можна замінити на перехідність;

- поняття горизонтальної квазінеперервності перенесено на мультифункції і отримано нові теореми про сукупну неперервність та квазінеперервність, які узагальнюють відповідні результати Ґ.Дебса та Т.Нойбрунна.

Наукове та практичне значення одержаних результатів. Дисертація носить теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в загальній теорії функцій, функціональному аналізі і знаходяться на передньому краї сучасних досліджень з цієї тематики.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, включені в дисертацію, одержані здобувачем особисто. В спільних працях [1, 10, 12, 15, 17, 27] В.Маслюченку належить постановка задач та загальне керівництво, а в праці [18] він запропонував ідею застосування $(2,3)$-схем. При написанні праці [26] О.Маслюченко допомагав при здійснені перекладу і при побудові одного прикладу, О.Фотій брала участь в обговоренні і допомагала при оформленні.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях: [28–52].

- міжнародній конференції, присвяченої 125 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 27 червня - 3 липня 2004р.);
- міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 11 - 14 жовтня 2006р.);
- міжнародній конференції, присвячена 90-річчю Ю.Митропольского (Київ, 19 серпня - 2 вересня 2007р.);
- міжнародній конференції ім. В.Я. Скоробогатька (Дрогобич, 24 - 28 вересня 2007р.);
- міжнародній конференції "Analisis and topology" (Львів, 2 - 7 червня 2008р.);
- міжнародній конференції "Set Theory, Topology and Banach Spaces" (Кельце, 7 - 11 липня 2008р.);
- міжнародній конференції "Infinite Dimensional Analysis and Topology" (Івано-Франківськ, 27 травня - 1 червня 2009р.);
- міжнародній конференції до 100-річчя М.М.Боголюбова та 70-річчя М.І.Нагнибіди (Чернівці, 8 - 13 червня 2009р.);
- міжнародній конференції "Сучасні проблеми аналізу", присвяченій 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету (Чернівці, 30 вересня - 3 жовтня 2010р.);
- міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 90-річчю В.Лянце (Львів, 17 - 21 листопада 2010р.);
- міжнародній конференції, присвяченій 70-річчю А.Гришина (Харків, 15 - 18 серпня 2011р.);
- всеукраїнській конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 20 - 26 лютого 2012р.);
- міжнародній конференції "Теорія наближень функцій та її застосування" (Кам'янець-Подільський, 28 травня - 3 червня 2012р.);

- всеукраїнській конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці", присвяченій 50-річчю кафедри прикладної математики Чернівецького університету (Чернівці, 11- 13 червня 2012р.);
- міжнародній науково-практичній конференції "Математика. Інформаційні технології. Освіта" (Луцьк, 7 - 9 вересня 2012р.);
- міжнародній конференції, присвяченій 120-річчю Стефана Банаха (Львів, 17 - 21 вересня 2012р.);
- всеукраїнській конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013р.);
- всеукраїнській конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24 лютого - 2 березня 2014р.);
- IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня - 5 липня 2014р.);
- IX Літній школі: алгебра, топологія і аналіз (Поляниця, 7 - 18 липня 2014р.);
- всеукраїнській конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 25 лютого - 1 березня 2015р.);
- науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 1 - 4 липня 2015р.);
- всеукраїнській конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24 - 27 лютого 2016р.).

Результати дисертації неодноразово доповідалися на

- науковому семінарі кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (керівник В. К. Маслюченко),
- науковому семінарі з теорії потенціалу та її застосування у Львівському національному університеті імені Івана Франка (керівники проф. О.Скасків та проф. І.Чижиков),
- науковому семінарі з топології та її застосувань у Львівському національному університеті імені Івана Франка (керівники проф. М.Зарічний та проф. Т.Банах),
- науковому семінарі відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник проф. Ю.Зелінський).
- науковому семінарі відділу топології Інституту математики НАН України (керівник проф. С.Максименко).

Публікації. Всього за темою дисертації написано 58 праць [1–58], які не увійшли до кандидатської дисертації автора. Серед них 30 – це статті у фахових математичних журналах, а 28 – тези та матеріали міжнародних і всеукраїнських конференцій. Основні результати дисертації опубліковані в працях [1–27], серед яких 18 написані без співавторів. З них 6 – у базах даних Web of Science або SCOPUS. Додатково відображають результати дисертації праці [53–58].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел, який налічує 395 найменувань та покажчика термінів. Загальний обсяг роботи становить 320 с. Головна частина (без списку використаних джерел і списку умовних позначень та термінів) займає 280 с.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** дисертації розкрито суть і стан наукових досліджень, яким присвячена дисертаційна робота, обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі дослідження. У **першому розділі** зроблено огляд результатів, що близькі до тематики дисертації та окреслено коло проблем, які залишалися нерозв'язними. В **другому розділі** наведено основні результати дисертації та описано методи, якими вони отримуються.

В **третьому розділі** вивчаються властивості різних типів ослабленої неперервності відображень від однієї змінної. В перших двох підрозділах **розділу 3** розглядаються питання, які пов'язані з вивченням множини точок майже неперервності, майже квазінеперервності, ледь неперервності та загального поняття $\mathcal{A}$-квазінеперервності.

Підрозділи 3.3 і 3.4 дисертаційної роботи присвячені характеризації різних ослаблень неперервності в термінах замикання і внутрішності. Добре відомою є характеризація неперервності відображення в термінах замикання образу: відображення f між топологічними просторами X та Y є неперервним тоді і тільки тоді, коли

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \qquad (*)$$

для довільної підмножини A простору X.

Зрозуміло, що коли вимагати виконання умови $(*)$ не для всіх підмножин простору X, а лише для деяких, то включення $(*)$ буде означати певне ослаблення неперервності.

Нехай X і Y – топологічні простори, $\mathcal{A}$ – деяка система підмножин простору X і $f : X \to Y$ – відображення. Ми кажемо, що відображення f *є неперервним відносно системи* $\mathcal{A}$, якщо $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \in \mathcal{A}$.

У підрозділі 3.3 різні аналоги неперервності (майже неперервність, властивість Юнґа, B-квазінеперервність, α-неперервність, ледь неперервність та майже ледь неперервність) охарактеризовано як неперервність відносно тієї чи іншої системи множин, наприклад, α-неперервність характеризується з допомогою так званих передвідкритих множин.

Множина A в топологічному просторі називається *α-відкритою /передвідкритою/*, якщо $A \subseteq int(\overline{intA})$ $/A \subseteq int\overline{A}/$. Відображення $f : X \to Y$ називається *α-неперервним*, якщо для кожної відкритої множини V в Y прообраз $f^{-1}(V)$ є α-відкритою множиною в X.

Теорема 3.3.7. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{G}_p$ – система всіх передвідкритих множин в X. Відображення $f : X \to Y$ є α-неперервним тоді і тільки тоді, коли f є неперервним відносно системи $\mathcal{G}_p$.*

Основне завдання підрозділу 3.4 – встановлення зв'язку між між поняттям $\mathcal{A}$-неперервності, яке ввів О.Маслюченко, та поняттям неперервності відносно системи.

Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ – сім'я непорожніх систем $\mathcal{A}_x \subseteq 2^X$ і $\mathcal{B}$ – деяка система в X. Системи $\mathcal{B}$ називається *спряженою з сім'єю* $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$, якщо виконуються такі дві умови:

1) для кожної множини $B \in \mathcal{B}$, кожної точки $x \in \overline{B} \setminus B$ і для кожної множини $A \in \mathcal{A}_x$ маємо, що $A \cap B \neq \varnothing$;

2) для кожної точки $x \in X$ і довільної сім'ї $(C_A)_{A\in\mathcal{A}_x}$ підмножин C_A простору X, такої, що $A \setminus C_A \notin \mathcal{A}_x$ для кожного $A \in \mathcal{A}_x$, існує сім'я $(B_A)_{A\in\mathcal{A}_x}$ підмножин B_A простору X, така, що $B_A \subseteq C_A$ для кожного $A \in \mathcal{A}_x$, $B = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}_x} B_A \in \mathcal{B}$ і $x \in \overline{B}$.

Відображення $f : X \to Y$ називається *$\mathcal{A}$-неперервним в точці* $x \in X$, якщо для довільного околу V точки $f(x)$ в Y існує множина $A \in \mathcal{A}_x$, така, що $f(A) \subseteq V$. Якщо відображення є $\mathcal{A}$-неперервним у кожній точці, то воно називається $\mathcal{A}$-неперервним.

Теорема 3.4.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ – сім'я непорожніх систем $\mathcal{A}_x \subseteq 2^X$ і $\mathcal{B}$ – система в X, яка спряжена з сімє'ю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$. Відображення $f : X \to Y$ є $\mathcal{A}$-неперервним тоді і тільки тоді, коли f є неперервним відносно системи $\mathcal{B}$.*

Далі в підрозділі 3.4 подано характеризації різних ослаблень

неперервності за допомогою операцій замикання та внутрішності. Відображення $f : X \to Y$ називається:

- *квазінеперервним в точці* $x \in X$, якщо для довільних околів U і V точок x і $y = f(x)$ у просторах X та Y відповідно існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$;

- *майже неперервним в точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $x \in int\overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$;

- *майже квазінеперервним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y і для кожного околу U точки x в X існує множина A в X, така, що $\varnothing \neq int\overline{A} \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$.

Відображення називається *квазінеперервним*, *майже неперервним* чи *майже квазінеперервним*, якщо моно є таким в кожній точці.

Теорема 3.4.2. *Для довільних топологічних просторів X та Y відображення $f : X \to Y$:*

- *квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли $f(int\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$;*

- *майже неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(A)}$;*

- *α-неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{int\overline{A}}) \subseteq \overline{f(A)}$;*

- *майже квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли $f(int\overline{(intA)}) \subseteq \overline{f(A)}$;*

для довільної підмножини $A \subseteq X$.

В підрозділі 3.5 досліджуються властивості деяких типів ослабленої неперервності оберненого відображення. Спочатку (твердження 3.5.1) побудовано приклад квазінеперервної бієкції $f : [0, 1] \to [0, 1]$, для якої функція f^{-1} не є майже ледь неперервною. Він значно уточнює приклад З.Ґранде і Т.Натканьця квазінеперервної бієкції $f : [0, 1] \to [0, 1]$, у якої обернена функція f^{-1} не квазінеперервна, і побудований на іншій ідеї.

Також в цьому підрозділі одержано кілька позитивних результатів щодо наявності у оберненого відображення певних властивостей ослабленої неперервності.

Підрозділ 3.6 присвячений вивченню властивостей псевдоквазінеперервності. Ця властивість відображення виникла у зв'язку з дослідженням множини точок сукупної неперервності відображень від двох змінних. Однак, як встановлено в теоремі 3.6.7 поняття псевдоквазінеперервності еквівалентне вже відомому поняттю простої неперервності.

У підрозділі 3.7 вивчаються типи точок розриву деяких аналогів неперервності. Ці результати дають можливість встановити ряд теорем про декомпозицію неперервності для функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

В **четвертому розділі** вивчаються нарізні та сукупні властивості різних ослаблень неперервності. Так в підрозділі 4.1 одержано характеризацію сукупної квазінеперервності відображення від двох змінних.

Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним у точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо для кожного околу W точки $z = f(p)$ в Z і будь-яких околів U точки x в X і V точки y в Y існують точка $b \in V$ і відкрита непорожня множина G в X, такі, що $G \subseteq U$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq W$, і просто *горизонтально квазінеперервним*, якщо воно є таким, у кожній точці добутку $X \times Y$. Аналогічно вводиться поняття вертикальної квазінеперервності.

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Позначимо через $X_K(f)$ множину всіх точок $x \in X$, таких, що відображення f^x квазінеперервне. Через $K_h\tilde{K}(X \times Y, Z)$ позначимо клас відображень $f : X \times Y \to Z$, які горизонтально квазінеперервні і множина $X_K(f)$ залишкова в X, а через $K(X \times Y, Z)$ – клас відображень $f : X \times Y \to Z$, які сукупно квазінеперервні.

Теорема 4.1.1. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – регулярний простір, відображення $f \in K_h\tilde{K}(X \times Y, Z)$. Тоді відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних.*

Приклад 4.1.1 показує, що горизонтально і вертикально квазінеперервні відображення не зобов'язані бути сукупно квазінеперервними. Навіть наявність у таких відображень всюди щільної множини точок неперервності не гарантує сукупної квазінеперервності (приклад 4.1.2).

На відміну від неперервності та багатьох ослаблень неперервності, квазінеперервність за сукупністю змінних не гарантує квазінеперервність відносно кожної із змінних. Однак, сукупна квазінеперервність все ж має певні риси нарізної квазінеперервності.

Відображення $f : X \times Y \to Z$ *симетрично квазінеперервне відносно x в точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо для кожного околу W точки $z = f(p)$ в Z і будь-яких околів U точки x в X і V точки y в Y існують окіл G точки x в X і відкрита непорожня множина H в Y, такі, що $G \times H \subseteq U \times V$ і $f(G \times H) \subseteq W$. Позначимо через $K^s_Y(f)$ множину точок $x \in X$, таких, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці множини $\{x\} \times Y$. Через $K^s(f)$ ми позначаємо множину точок симетричної квазінеперервності відносно x відображення f.

Теорема 4.1.3. *Нехай X – топологічний простір, простори Y і Z задовольняють другу аксіому зліченності і відображення $f : X \times Y \to Z$ квазінеперервне за сукупністю змінних. Тоді множина $K^s_Y(f)$ залишкова в X.*

Зазначимо, що наслідок 4.1.1 з теореми 4.1.3 узагальнює результат Е.Котліки та А.Малізевського для функцій з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$ про залишковість множини $X_K(f)$, де $X = \mathbb{R}$.

З теорем 4.1.1 та 4.1.3 одержана наступна характеризація сукупної квазінеперервності.

Теорема 4.1.4. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір. Тоді*

$$K_h\tilde{K}(X \times Y, Z) = K(X \times Y, Z).$$

В підрозділі 4.2 досліджується сукупні властивості функцій $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, які монотонні відносно першої змінної.

Теорема 4.2.1. *Нехай простір Y має зліченну псевдобазу і функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ монотонна відносно першої змінної і квазінеперервна відносно другої змінної при значеннях першої з деякої залишкової множини в $\mathbb{R}$. Тоді множина $K^s_Y(f)$ залишкова в $\mathbb{R}$.*

Аналогічні результати мають місце для ледь неперервності (теорема 4.2.2) та кліковості (4.2.3).

Як зазначалося в підрозділі 4.1 (приклад 4.1.1) горизонтально і вертикально квазінеперервні відображення не зобов'язані бути сукупно квазінеперервними. Однак, додаткова умова монотонності відносно однієї із змінних буде гарантувати сукупну квазінеперервність таких відображень.

Теорема 4.2.5. *Нехай Y – довільний топологічний простір, функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ горизонтально та вертикально квазінеперервна і монотонна відносно першої змінної. Тоді функція f квазінеперервна за сукупністю змінних.*

Цей результат аналогічний відомій теоремі Юнґа про сукупну неперервність нарізно неперервних функцій.

У підрозділ 4.3 вивчається поняття слабкої горизонтальної квазінеперервності. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *слабко горизонтально квазінеперервним*, якщо для довільних відкритих множин U і V в X і Y відповідно та множини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$ виконується включення $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$. З горизонтальної

квазінеперервності випливає слабка горизонтальна квазінеперервність, але не навпаки. В деяких теоремах про сукупні властивості аналогів неперервності горизонтальну квазінеперервність можна замінити на слабку горизонтальну квазінеперервність. Зокрема, це можна зробити в теоремі 4.1.4.

Теорема 4.3.5. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір. Відображення $f : X \times Y \to Z$ є квазінеперервним за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли f слабко горизонтально квазінеперервне і множина $X_K(f)$ залишкова в X.*

Вивченню множини точок симетричної квазінеперервності та її аналогів присвячений підрозділ 4.4. Крім розглянутих в підрозділі 4.2 властивостей симетричної квазінеперервності та симетричної кліковості тут вивчається симетрична майже квазінеперервність та симетрична майже ледь неперервність.

У підрозділі 4.5 продовжується удосконалення достатніх умов на відображення $f : X \times Y \to Z$, за яких буде існувати залишкова в X множина A, така, що відображення f симетрично квазінеперервне (клікове) відносно x, а в підрозділі 4.6 одержано вже необхідні і достатні умови для виконання цієї властивості.

Нехай X та Y – топологічні простори, а Z – метричний простір. Функція $f : X \times Y \to Z$

- *задовольняє умову* (B), якщо для довільного $\varepsilon > 0$, довільних відкритих непорожніх множин U в X і V в Y та довільної множини $E \subseteq X$, щільної в U, для яких $\omega_f(E \times V) < \varepsilon$, існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y, такі, що $G \subseteq U$, $H \subseteq V$ і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$;

- *задовольняє умову* (C), якщо для кожного $\varepsilon > 0$, для довільної множини E другої категорії в X і довільної відкритої непорожньої множини V в Y існують множина E_1 десь щільна в X і функція $g : E_1 \to V$, такі що $E_1 \subseteq E$ і $\omega_f(Gr(g)) < \varepsilon$.

Наслідок 4.6.5. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – функція. Тоді для того щоб множина $K^s_Y(f)$ була залишкова в X необхідно і досить, щоб функція f задовольняла умови (B) та (C) і множина $X_K(f)$ була залишковою в X.*

Відповідний результат має місце і для кліковості.

Аналогічно до того, як в підрозділі 4.2 вивчалися сукупні властивості відображень від двох змінних, які монотонні відносно першої змінної, в підрозділі 4.7 досліджуються сукупні властивості відображень, які мають замкнений графік відносно однієї із змінних.

В підрозділі 4.8 вивчаються нарізні та сукупні властивості деяких аналогів кліковості. Відображення $f : X \to Z$ називається *точково розривним*, якщо множина $C(f)$ його точок неперервності щільна в X. Задача про знаходження умов, за яких у відображення від двох змінних множина $C(f)$ непорожня, цікавить багатьох математиків уже більше ста років. Ці умови стосуються як обмежень на простори, так і на відображення. В наслідку 4.8.2 вказано мінімальні умови на відображення, за яких множина $C(f)$ непорожня.

Наслідок 4.8.2. *Нехай X та Y – берівські простори, причому простір Y має зліченну псевдобазу і Z – метричний простір. Функція $f : X \times Y \to Z$ точково розривна тоді і тільки тоді, коли функція f задовольняє умови (B) та (C) і $\{x \in X : \overline{C(f^x)} = Y\}$ – залишкова множина в X.*

В **п'ятому розділі** досліджується множина точок сукупної неперервності відображення від двох змінних. Відображення $f : X \times Y \to Z$ має *властивість Гана*, якщо множина

$$C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$$

залишкова в X. Топологічний простір Y є *простором Гана*, якщо для довільного топологічного простору X і довільного метризовного простору Z кожне відображення $f : X \times Y \to Z$, яке неперервне відносно другої змінної і неперервне відносно першої при значеннях другої змінної з деякої всюди щільної в Y множини, має властивість Гана. Кожний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, є простором Гана, але не навпаки.

В підрозділах 5.1 та 5.2 вказано деякі нові класи відображень, які мають властивість Гана.

Через $K_hC(X \times Y, Z)$ позначаємо клас відображень $f : X \times Y \to Z$, які горизонтально квазінеперервні і неперервні відносно другої змінної.

Теорема 5.1.2. *Нехай X – топологічний простір, Y – сепарабельний з першою аксіомою зліченності простір Гана, Z – метризовний простір і $f \in K_hC(X \times Y, Z)$. Тоді відображення f має властивість Гана.*

Теорема 5.2.2. *Нехай X – топологічний простір, Y – сепарабельний з першою аксіомою зліченності простір Гана, Z – метризовний простір, $f : X \times Y \to Z$ – сукупно квазінеперервне відображення і f^x – майже неперервне для всіх x з деякої залишкової в X множини. Тоді f має властивість Гана.*

Крім того, в підрозділі 5.2 дано відповідь на одне питання О.Скасківа про множину точок неперервності нарізно монотонних функцій.

Теорема 5.2.3. *Якщо функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ монотонна відносно другої змінної і монотонна відносно першої змінної при значеннях другої змінної з деякої всюди щільної множини, то множина $C(f)$ всюди щільна в $\mathbb{R}^2$.*

В 1979 році Дж.Калбрі та Ж.-П. Троалліка встановили свій відомий результат про множину точок сукупної неперервності. За допомогою поняття *множини зліченного типу*, тобто такої підмножини B простору Y, для якої існує послідовність відкритих в Y множин V_n, така, що для кожного $y \in B$ система $\{V_n : y \in V_n\}$ є базою околів точки y в Y, вони встановлюють, що для довільних топологічних просторів X і Y, метризовного простору Z, нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to Z$ і множини B зліченного типу в Y, множина $C_B(f) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C(f)\}$ є залишковою в X. Аналогу загальної теореми Калбрі-Троалліка для множин зліченного типу довгий час не було знайдено ні для KC-функцій, ні, тим більше, для K_hC-функцій. В підрозділі 5.3 теорему Калбрі-Троалліка узагальнено не лише для K_hC-функції, а й для функції з ширшого класу $\mathcal{N}$.

Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *$\mathcal{N}$-відображенням*, якщо воно задовольняє такі властивості:

(i) для довільних відкритих непорожніх множин U і V відповідно в X і Y та довільної множини A в X, для якої $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G \times V) \subseteq \overline{f((G \cap A) \times V)}$;

(ii) для кожного $\varepsilon > 0$ множина $Q_\varepsilon(f) = \{(x, y) \in X \times Y : \omega_{f_y}(x) < \varepsilon\}$ всюди щільна в просторі $X \times Y$;

(iii) множина $X_C(f) = \{x \in X : f^x$ – неперервне$\}$ є залишковою в X.

Теорема 5.3.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, B – множина зліченного типу в Y і $f : X \times Y \to Z$ – $\mathcal{N}$-відображення. Тоді множина $C_B(f)$ є залишковою в X.*

Також в підрозділі 5.3 одержано теорему про великі коливання для відображень з класу $\mathcal{N}$.

Теорема 5.3.3. *Нехай X – берівський простір, Y – метризовний компакт, Z – метричний простір і $f \in \mathcal{N}(X \times Y, Z)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ множина $pr_X(D^\varepsilon(f))$ є замкненою і ніде не щільною в X.*

В підрозділі 5.4 з допомогою поняття псевдоквазінеперервності знизу та покриттєвої категорної кліковості знизу отримано найзагальнішу теорему про сукупну неперервність функцій двох змінних, яка охоплює результати

Р.Бера, Г.Гана, К.Беґеля, Н.Мартіна, Р.Фейока, Дж.Бреккенріджа та Т.Нішіури, Ж.Калбрі та Ж.-П.Троалліка, В.Маслюченка, А.Бузіада та Ж.-П.Троалліка на цю тему.

Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *псевдоквазінеперервним знизу*,

- якщо для кожної непорожньої відкритої множини U в X і довільної підмножини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $F(G) \subseteq \overline{F(A)}$;

- *покриттєво категорно кліковим знизу*, якщо для кожного відкритого покриття $\mathcal{V}$ простору Y і довільної множини E другої категорії в X існують десь щільна в X множина A і множина $V \in \mathcal{V}$, такі, що $A \subseteq E$ і $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для всіх $x \in A$.

Нехай $\mathcal{V}$ – деяка система множин у просторі Y. Для точки $y \in Y$ покладемо

$$\mathcal{V}(y)=\{V \in \mathcal{V} : V - \text{окіл точки } y \text{ в } Y\} \text{ і}$$

$$B(\mathcal{V})=\{y \in Y : \mathcal{V}(y) - \text{база околів точки } y \text{ в } Y\}.$$

Теорема 5.4.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метризовний простір, $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – не більш, ніж зліченна система множин в Y, $f : X \times Y \to Z$ – таке відображення, що для кожної множини $V \in \mathcal{V}$, для якої $V \cap B(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, відображення $F_V : X \ni x \mapsto F_V(x) = f^x(V) \subseteq Z$ псевдоквазінеперервне знизу та покриттєво категорно клікове знизу. Тоді множина*

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

є залишкова в X.

В підрозділах 5.5 та 5.6 подано дві характеризації властивості Гана, тобто одержано необхідні та достатні умови на відображення $f : X \times Y \to Z$ для того, щоб воно мало властивість Гана.

Нехай X і Y – топологічні простори, а Z – метричний простір. Многозначне відображення $F : X \to Z$:

- *задовольняє умову (A)*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$, довільної відкритої непорожньої множини U в X і довільної множини $E \subseteq X$, щільної в U, для яких $diam(F(E)) < \varepsilon$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $diam(F(G)) < \varepsilon$;

- називається *категорно кліковим знизу*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільної множини E другої категорії в X існують десь щільна в X множина A і відображення $g : A \to Z$, такі, що $A \subseteq E$, $g(x) \in F(x)$ для кожного $x \in A$ і $diam(g(A)) < \varepsilon$.

Теорема 5.5.3. *Нехай X – берівський простір, Y – компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, $\mathcal{V}$ – база простору Y, Z – метричний простір. Тоді для того, щоб функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняла властивість Гана необхідно і досить, щоб для кожної множини $V \in \mathcal{V}$ відображення F_V задовольняло умову (A) та було категорно клікове знизу і множина $X_C(f)$ була залишкова в X.*

Зауважимо, що даний результат дає характеризацію властивості Гана, в той час коли в працях багатьох авторів (Р.Бер, Е. ван Влек, Г.Ган, К.Беґель, Р.Фейок, Дж.Бреккенрідж та Т.Нішіура, Ж.Калбрі та Ж.-П.Троаллік, В.Маслюченка, І.Наміока, Р.Христенсен, Ж.-П.Сан-Ремо та інші) були отримані лише достатні умови. Тим самим, для просторів X, Y і Z, що задовольняють умови теореми 5.5.3, завершено понад столітній шлях у напрямку узагальнення теореми Бера про проекцію.

Нехай X і Y – топологічні простори, а Z – метричний простір. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається:

- *одностайно кліковим відносно y*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і для кожної непорожньої відкритої множини U в X існує непорожня відкрита множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_{f_y}(G) < \varepsilon$ для всіх $y \in Y$;

- *локально одностайно кліковим відносно y в точці $(a, b) \in X \times Y$*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує окіл V точки b в Y, такий, що для кожного околу U точки a в X існує непорожня відкрита множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_{f_y}(G) < \varepsilon$ для всіх $y \in V$

і просто *одностайно кліковим* чи *локально одностайно кліковим відносно y*, якщо воно є таким в кожній точці. Очевидно, що з одностайної кліковості відносно y випливає локальна одностайна кліковість відносно y.

Теорема 5.6.9. *Нехай X – берівський простір, Y – компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності і Z – метричний простір. Відображення $f : X \times Y \to Z$ має властивість Гана тоді і тільки тоді, коли f одностайно клікове відносно y і множина $X_C(f)$ залишкова в X.*

Теорема 5.6.10. *Нехай X – берівський простір, Y – локально компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності і Z – метричний простір. Відображення $f : X \times Y \to Z$ має властивість*

Гана тоді і тільки тоді, коли f локально одностайно клікове відносно y і множина $X_C(f)$ залишкова в X.

Шостий розділ присвячений вивченню поняття перехідності та його аналогів. Поняття перехідності було введене В.Маслюченом та В.Крецу (2007) для функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Без особливих ускладнень воно переноситься на випадок функцій $f : X \to \mathbb{R}$. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *перехідною зверху (знизу) в точці* x, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існують окіл U точки x і точка $y \in (f(x), f(x) + \varepsilon)$ ($y \in (f(x) - \varepsilon, f(x))$), такі, що $U \cap f^{-1}(y) = \varnothing$. Якщо функція перехідна зверху і знизу в точці x, то вона називається *перехідною в точці* x. Функція називається *перехідною (зверху чи знизу)*, якщо вона є такою в кожній точці x з X.

Для топологічних просторів X і Y відображення $f : X \to Y$ називається *перехідним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y, такі, що $W \subseteq V$ і $f(U) \subseteq W \sqcup (Y \setminus \overline{W})$, і просто *перехідним*, якщо воно є таким у кожній точці з X.

Одним із основних результатів шостого розділу є теорема 6.1.8, яка узагальнює багато результатів про декомпозицію неперервності такого типу. Відображення $f : X \to Y$ *має слабку властивість Дарбу*, якщо образ $f(G)$ кожної області G в X, тобто відкритої і зв'язної множини, є зв'язною множиною в Y.

Теорема 6.1.8. *Нехай X – локально зв'язний простір, Y – топологічний простір, відображення $f : X \to Y$ має слабку властивість Дарбу і є перехідним. Тоді f – неперервне відображення.*

Частинними випадками теореми 6.1.8 є результати В.Крецу та В.Маслюченка, М.Р.Вуйчика та М.С.Вуйчика, Р.Мімни і Р.Мімни та Д.Розе на цю тему.

Подібний результат має місце і для відображень від двох змінних.

Теорема 6.1.9. *Нехай X і Y – локально зв'язні простори, Z – топологічний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ має слабку властивість Дарбу відносно кожної змінної і є перехідним за сукупністю змінних. Тоді відображення f неперервне за сукупністю змінних.*

В підрозділі 6.2 вивчається зв'язок між різними аналогами перехідності. Крім того, там одержано кілька декомпозиційних теорем. Зокрема, дві теореми про декомпозицію неперервності узагальнюють відповідні результати Б.Д.Сміта, Дж.Смітала і Е.Станової, Р.Ґібсона та М.Матейдеса.

Відображення $f : X \to Y$ називається:

- *w^*-квазінеперервним у точці $x \in X$*, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існують відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y і квазівідкрита множина A в X, такі, що $W \subseteq V$, $x \in A$ і $A \cap f^{-1}(fr(W)) = \varnothing$;

- *слабко квазіперехідним у точці x з X*, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ у просторі Y і кожного околу U точки x в X існують непорожня відкрита множина G в X і точка $b \in V$, такі, що $G \subseteq U$ і $G \cap f^{-1}(b) = \varnothing$.

Відображення $f : X \to Y$ називається *w^*-квазінеперервним* чи *слабко квазіперехідним*, якщо воно є таким у кожній точці x з X.

Теорема 6.2.6. *Нехай X – берівський локально зв'язний простір, Y – сепарабельний метризовний простір і відображення $f : X \to Y$ задовольняє умови:*
1) f w^*-квазінеперервне;
2) f має слабку властивість Дарбу;
3) f майже неперервне.
Тоді відображення f неперервне.

Теорема 6.2.7. *Нехай X – берівський локально зв'язний простір і функція $f : X \to \mathbb{R}$ задовольняє умови:*
1) f слабко квазіперехідна;
2) f має слабку властивість Дарбу;
3) f майже неперервна.
Тоді функція f неперервна.

Підрозділи 6.3 та 6.4 присвячені вивченню можливості заміни у відображення умови замкненості графіка на перехідність у двох декомпозиційних теоремах. Перша теорема – це відома теорема Банаха про замкнений графік, а друга – це результат Й.Добоша про те, що двосторонньо квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною. У першому випадку заміну зробити можливо, а в другому – ні.

Теорема 6.3.2. *Лінійне відображення $f : X \to Y$, що діє в довільних ТВП, буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно перехідне.*

Оскільки кожне лінійне відображення має слабку властивість Дарбу, то теорема 6.3.2 є простим наслідком теореми 6.1.8. Втім, її нескладно довести і безпосередньо.

Крім того, в підрозділі 6.3 отримано наступний варіант теореми про замкнений графік, який узагальнює відомий критерій неперервності лінійного функціонала в термінах його ядра.

Теорема 6.3.6. *Нехай X і Y – ТВП, причому простір Y гаусдорфовий, $f : X \to Y$ – лінійне скінченновимірне відображення. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) f – неперервне відображення;

(ii) Grf замкнений в $X \times Y$;

(iii) $\ker f$ замкнене в X.

Кажуть, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *квазінеперервна справа (зліва) в точці* x_0, якщо для довільних додатних чисел ε і δ існує відкрита непорожня множина G, така , що $G \subseteq [x_0, x_0+\delta)$ $(G \subseteq (x_0-\delta, x_0])$ і $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ на G. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається *двосторонньо квазінеперервною в точці* x_0, якщо вона в ній одночасно квазінеперервна і справа, і зліва. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається *квазінеперервною справа, зліва чи двосторонньо квазінеперервною*, якщо вона є такою в кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 6.4.5. *Для довільного скінченного або нескінченного проміжку $J \subseteq \mathbb{R}$ і довільної ніде не щільної досконалої в J множини F існує така двосторонньо квазінеперервна перехідна функція $f : J \to \mathbb{R}$, у якої множина її точок розриву $D(f) = F$.*

У **сьомому розділі** перенесено деякі результати про точки сукупної неперервності та квазінеперервності відображень від двох змінних на випадок многозначних відображень. Ці результати узагальнюють відповідні результати Ґ.Дебса та Т.Нойбрунна. Нехай $F : X \to Y$ – многозначне відображення і $A \subseteq X$. Покладемо $F(A) = \bigcup\limits_{x \in A} F(x)$. Множину $F(A)$ називають *образом множини A при відображенні F*. Для множини $B \subseteq Y$ розглядають два прообрази $F^+(B) = \{x \in X : F(x) \subseteq B\}$ і $F^-(B) = \{x \in X : F(x) \cap B \neq \varnothing\}$.

Нехай X і Y – топологічні простори і $x \in X$. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *неперервним зверху (знизу) в точці* x, якщо для кожної відкритої в Y множини V, такої, що $F(x) \subseteq V$ $(F(x) \cap V \neq \varnothing)$, множина $F^+(V)$ $(F^-(V))$ є околом точки x в X. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *неперервним у точці* x, якщо воно неперервне у цій точці як зверху, так і знизу. Через $C^+(F)$, $C^-(F)$ і $C(F)$ ми позначаємо множину всіх точок x з X, в яких F відповідно неперервне зверху, знизу чи просто неперервне.

Многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним зверху (знизу) в точці* $p_0 \in X \times Y$, якщо для довільної відкритої непорожньої множини W в Z, такої, що $F(p_0) \subseteq W$ $(F(p_0) \cap W \neq \varnothing)$ і довільних околів U та V точок $x_0 \in X$ та $y_0 \in Y$ відповідно, існують відкрита непорожня множина G в X і точка y_1 в Y, такі, що $G \subseteq U, y_1 \in V$ і $F(p) \subseteq W$ $\quad (F(p) \cap W \neq \varnothing)$ для всіх $p \in G \times \{y_1\}$.

Многозначне відображення називається *горизонтально квазінеперервним зверху (знизу)*, якщо воно є таким в кожній точці.

Для множини $B \subseteq Y$ покладемо $C_B^+(F) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C^+(F)\}$, $C_B^-(F) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C^-(F)\}$.

Теорема 7.1.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, B – множина зліченного типу в Y, Z – метризовний сепарабельний простір, мультифункція $F : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервна зверху і F^x неперервна знизу для x з деякої залишкової множини M в X. Тоді множина $C_B^-(F)$ залишкова в X.*

Теорема 7.1.2. *Нехай X і Y – топологічні простори, B – множина зліченного типу в Y, Z – метризовний сепарабельний простір, компактнозначна мультфункція $F : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервна знизу і F^x неперервна зверху для x з деякої залишкової множини M в X. Тоді множина $C_B^+(F)$ залишкова в X.*

Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *квазінеперервним зверху (знизу) в точці* $x \in X$, якщо для довільної відкритої непорожньої множини V в Y, такої, що $F(x) \subseteq V$ $(F(x) \cap V \neq \varnothing)$ і довільного околу U точки $x \in X$ маємо, що $intF^+(V) \cap U \neq \varnothing$ $(intF^-(V) \cap U \neq \varnothing)$. Многозначне відображення називається *квазінеперервним зверху* чи *квазінеперервним знизу*, якщо воно є таким у кожній точці.

Теорема 7.2.5. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір, $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення. Відображення F – квазінеперервне знизу за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли F – горизонтально квазінеперервне зверху та знизу і F^x – квазінеперервне знизу для кожного x з деякої залишкової множини M в X.*

Теорема 7.2.6. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір, $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне многозначне відображення. Відображення F – квазінеперервне зверху за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли F – горизонтально квазінеперервне зверху та знизу і F^x – квазінеперервне зверху для кожного x з деякої залишкової множини M в просторі X.*

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі досліджуються властивості різних аналогів неперервності відображень як від однієї, так і від двох змінних. Зокрема

вивчаються нарізні та сукупні властивості таких ослаблень неперервності. Крім того, встановлено ряд нових декомпозиційних результатів.

В дисертації отримано такі нові наукові результати:

- введено поняття $\mathcal{A}$-квазінеперервності, що охоплює деякі ослаблення неперервності, а також вивчено тип множини точок $\mathcal{A}$-квазінеперервності;
- введено поняття неперервності відносно системи, яке охоплює велику кількість вже відомих ослаблень неперервності;
- перенесено на випадок загальних топологічних просторів результат Р.Мімни про характеризацію двосторонньої квазінеперервності в термінах замикання образа;
- встановлено теорему про декомпозицію B-квазінеперервності, яка узагальнює відповідний результат Я.Борсіка;
- вказано умови, за яких неперервність відносно системи рівносильна $\mathcal{A}$-неперервності та дано нові характеризації деяких ослаблень неперервності за допомогою операторів замикання та внутрішності;
- досліджено властивості бієкції деяких типів ослабленої неперервності, зокрема побудовано приклад квазінеперервної бієкції $f : [0,1] \to [0,1]$, для якої функція f^{-1} не є майже ледь неперервною, а також вказано умови, за яких для бієкції $f : X \to Y$ обернене відображення f^{-1} буде квазінеперервне, майже квазінеперервне чи псевдоквазінеперервне;
- встановлено, що для топологічного простору X, просторів Y і Z, що задовольняють другу аксіому зліченності і квазінеперервного відображення $f : X \times Y \to Z$ існує залишкова множина A в X, така, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$, тим самим узагальнивши відповідний результат Е.Котліки та А. Малізевського;
- дано характеризацію сукупної квазінеперервності відображення від двох змінних. Зокрема, вказано достатні умови на простори X, Y і Z при яких має місце рівність класів $K_h\tilde{K}(X \times Y, Z) = K(X \times Y, Z)$;
- встановлено, що горизонтально і вертикально квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, яка монотонна відносно першої змінної, є квазінеперервною за сукупністю змінних, тим самим одержано аналог теореми Юнґа про сукупну неперервність нарізно неперервних функцій, які монотонні відносно однієї із змінних;

- дано характеризацію сукупної квазінеперервності відображення від двох змінних за участю слабкої горизонтальної квазінеперервності;

- знайдено необхідні та достатні умови, при яких для відображення $f : X \times Y \to Z$ існує залишкова в X множина A, така, що відображення f симетрично клікове відносно x чи симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$;

- вивчено сукупні властивості функцій $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, які мають замкнений графік відносно першої змінної;

- знайдено характеризацію точкової розривності відображення від двох змінних;

- встановлено, що кожна нарізно монотонна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є точково розривною;

- введено нові властивості многозначних відображень, з допомогою яких новим методом отримано загальну теорему про сукупну неперервність, яка значно розвиває теорему Калібрі-Троалліка і недавній результат Бузіада-Троалліка;

- введено дві нові властивості многозначних відображень, які дали змогу охарактеризувати відображення, що мають властивість Гана, заданих на добутку берівського простору і метризовного компакту зі значеннями в метричному просторі;

- введено поняття одностайної кліковості та локальної одностайної кліковості відносно y, які дали можливість охарактеризувати відображення, що мають властивість Гана;

- введено загальне поняття перехідності для відображень зі значеннями в довільних топологічних просторах та багато їх різновидів;

- отримано нові теореми про декомпозицію неперервності, які охоплюють всі попередні результати на цю тему В.Крецу і В.Маслюченка, Р.Мімни, М.Р.Вуйчика і М.С.Вуйчика, З.Пьотровського та інших;

- перенесенню теорему Банаха про замкнений графік на випадок перехідних відображень, зокрема встановлено, що лінійне відображення $f : X \to Y$, що діє в довільних ТВП, буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно перехідне;

- встановлено теорему про замкнений графік для скінченновимірних лінійних операторів;
- побудовано приклад двосторонньо квазінеперервної перехідної розривної функцій, який демонструє, що умова замкненості графіка не може бути замінена перехідністю в декомпозиційній теоремі про неперервність двосторонньо квазінеперервної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком;
- встановлено, що кожне відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке має замкнений графік відносно кожної із змінних, є точково розривним;
- отримано нові теореми про точки сукупної неперервності та квазінеперервності многозначних відображень, які узагальнюють відповідні результати Т.Нойбрунна та Ґ. Дебса.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Нестеренко В.В. *Про множини точок майже неперервності та інші послаблення неперервності* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. **191 - 192**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2004. – С. 100–102.
2. Нестеренко В.В. *Множина точок α-неперервності* / Нестеренко В.В. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. **269**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2005. – С. 79–80.
3. Нестеренко В.В. *Про одну характеризацію сукупної квазінеперервності* / Нестеренко В.В. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Математика. - Чернівці: Рута. - 2007. – **336 - 337**. – С. 137–141.
4. Нестеренко В.В. *Сукупна квазінеперервність многозначних відображень* / Нестеренко В.В. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. **349**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2007. – С. 98–100.
5. Нестеренко В.В. *Про властивість Гана* / Нестеренко В.В. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. **374**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2008, – С. 99–102.

6. Нестеренко В.В. *Слабка горизонтальна квазінеперервність* / Нестеренко В.В. // Математичний вісник НТШ. – 2008. – **5**. – С. 177–182.

7. Нестеренко В.В. *Про симетричну квазінеперервність та її аналоги* / Нестеренко В.В. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. **485**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2009. – С. 78–83.

8. Нестеренко В.В. *Про два класи функцій, які мають властивість Гана* / Нестеренко В.В. // Мат. Студії. – 2009. – **31**, 2. – С. 183–188.

9. Нестеренко В.В. *Сукупні властивості функцій, які монотонні відносно першої змінної* / Нестеренко В.В. // Математичний вісник НТШ. - 2009. – **6**. – С. 195–201.

10. Нестеренко В.В. *Точки сукупної неперервності та великі коливання* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, N6. – С. 791–800.

11. Нестеренко В.В. *Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних мультифункцій* / Нестеренко В.В., Фотій О.Г. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Серія: математика: зб. наук. пр. – **1**, 3. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2011. – С. 72–74.

12. Нестеренко В.В. *Декомпозиція неперервності та перехідні відображення* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Математичний вісник НТШ – 2011. – **8**. – С. 132–150.

13. Нестеренко В.В. *Достатні умови існування точок симетричної квазінеперервності та кліковості функцій двох змінних* / Нестеренко В.В. // Карпатські математ. публ. – 2011. – **3**, 2. – С. 114–119.

14. Нестеренко В.В. *Класифікація точок розриву деяких аналогів неперервності та декомпозиція неперервності* / Нестеренко В.В. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Серія: математика: зб. наук. пр. – **2**, 1. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – С. 63–67.

15. Нестеренко В.В. *Слабка властивість Дарбу і перехідність лінійних відображень у топологічних векторних просторах* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Карпатські математичні публікації. – 2013. – **5**, 1. – С. 79–88.

16. Нестеренко В.В. *Нові характеризації деяких ослаблень неперервності* / Нестеренко В.В. // Буковинський математичний журнал. – 2013. – **1**, 3-4. – С. 106–113.

17. Nesterenko V. *A new generalization of Calbrix-Troallic's theorem* / Maslyuchenko V., Nesterenko V. // Topology Appl. – 2014. – **164**. – P. 162–169.

18. Нестеренко В.В. *Розриви двосторонньо квазінеперервних перехідних функцій* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Мат. Студії. – 2014. – **41**, 1. – С. 18–27.

19. Нестеренко В.В. *Характеризація властивості Гана* / Нестеренко В.В. // Доповіді НАН України. – 2014. – **2**. – С. 32–37.

20. Nesterenko V. *Separate and joint properties of some analogues of pointwise discontinuity* / Nesterenko V. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2014. – **58**. – P. 155–167.

21. Nesterenko V. *On symmetrical cliquishness and quasi-continuity of functions oftwo variables* / Nesterenko V. // Topology Appl. – 2014. – **178**. – P. 331–338.

22. Нестеренко В.В. *Характеризації різних ослаблень неперервності з допомогою замикання* / Нестеренко В.В. // Буковинський математичний журнал. – 2014. – **2**, 2-3. – С. 177–182.

23. Нестеренко В.В. *Сукупні властивості відображень, які повязані із замкненістю графіка* / Нестеренко В.В. // Мат. Студіі. – 2015. – **43**, 1. – С. 27–35.

24. Нестеренко В.В. *Властивості псевдоквазінеперервності* / Нестеренко В.В. // Укр. мат. вісник. – 2015. – 12, 2. – С. 243–256. (преклад: Nesterenko V. Properties of pseudoquasicontinuity, Journal of Mathematical Sciences, 2015, Vol. **211**, 5. – P. 684–693.)

25. Нестеренко В.В. *Ослаблена неперервність оберненого відображення* / Нестеренко В. // Бук. мат. журнал. – 2015. – **3**, 1. – С. 81–86.

26. Nesterenko V. *Characterization of quasi-continuity of multifunctions of two variables* / Fotij O., Maslyuchenko O., Nesterenko V. // Math. Slovaca. – 2016. – **66**, 1. – P. 281–286.

27. Nesterenko V. *Analogues of transitiveness and decomposition of continuity* / Maslyuchenko V., Nesterenko V. // Real Anal. Exch. – 2015. – **40**, 2. – P. 355–370.

Праці апробаційного характеру

28. Нестеренко В.В. *Множина точок α-неперервності* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.// Матеріали міжнародної конференції, присвяченої 125 річниці від дня народження Ганса Гана. – Чернівці. – 2004. – С. 63–65.

29. Нестеренко В.В. *Квазінеперервність оберненого відображення* / Нестеренко В.В. // Диф. рівняння та їх застосування. Міжн. конф., 11 - 14 жовтня 2006 року / Тези доповідей. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 116.

30. Нестеренко В.В. *Про слабку горизонтальну квазінеперервність* / Нестеренко В.В. // Міжнародна конференція, 19 серпня - 2 вересня 2007 року/ Тези доповідей. – Київ, 2007. – С. 86–87.

31. Нестеренко В.В. *Про властивість Гана* / Нестеренко В.В. // Міжнародна математична конференція ім.. В.Я. Скоробогатька, 24 - 28 вересня 2007 року/ Тези доповідей. - Львів, 2007. - С. 205.

32. Nesterenko V. *On two classes of functions with the Hahn property* / Nesterenko V. // Internat. Conf. "Analysis and Topology, June 2 - 7, 2008", Part II. Topology./ Theses of lectures. – Lviv, 2008. – P. 45–46.

33. Nesterenko V. *On symmetrically quasi-continuity and symmetrically cliquishness* / Nesterenko V. // Set Theory, Topology and Banach Spaces (Second International Topology Conference in Kielce) July 7-11, 2008 (http://at.yorku.ca/c/a/x/g/12.htm).

34. Nesterenko V. *On topological cliquishness* / Nesterenko V. // International Conference "Infinite Dimensional Analysis and Topology, May 27 - June 1, 2009" – Ivano-Frankivsk, 2009. – P. 107–108.

35. Нестеренко В.В. *Сукупні властивості функцій двох змінних, які монотонні відносно однієї із змінних* / Нестеренко В.В. // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М.Боголюбова та 70-річчя М.І.Нагнибіди, 8 - 13 червня 2009 року/ Тези доповідей. – Чернівці, 2009. – С. 124–126.

36. Нестеренко В.В. *Про декомпозицію неперервності, яка пов'язана з перехідними функціями* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Міжнародна конференція "Сучасні проблеми аналізу" присвячена 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету/ Тези доповідей. – Чернівці, 2010. – С. 106–108.

37. Нестеренко В.В. *Про симетричну квазінеперервність та кліковість функцій двох змінних* / Нестеренко В.В. // International Conference on Functional Analysis dedicated to the 90-th anniversary of V.E. Lyantse, 17-21 November 2010/ Abstracts of Reports. – Lviv, 2010. – С. 124–126.

38. Нестеренко В.В. *Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних мультифункцій* / Нестеренко В.В., Фотій О.Г. // International Conference on Functional Analysis dedicated to the 90-th anniversary of V.E. Lyantse, 17-21 November 2010/ Abstracts of Reports. – Lviv, 2010. – С. 126–127.

39. Nesterenko V. *Mild continuity of functions of two variable* / Nesterenko V. // International conference dedicated to the 70th anniversary of A.F.Grishin, August 15-18, 2011. – Kharkiv. – 2011. – P. 34.

40. Нестеренко В.В. *Характеризація властивості Гана* / Нестеренко В.В. // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 20-26 лютого 2012/ Тези доповідей. – Ворохта, 2012. – С. 45–46.
41. Нестеренко В.В. *Про одну характеризацію кліковості функцій двох змінних* / Нестеренко В.В. // Міжнародна конференція "Теорія наближень функцій та її застосування", 28 травня - 3 червня, 2012/ Тези доповідей. – Кам'янець-Подільський. – 2012. – С. 73–74.
42. Нестеренко В.В. *Про квазінеперервність функцій двох змінних* / Нестеренко В.В. // Всеукраїнська наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" присвячена 50-річчю кафедри прикладної математики Чернівецького університету/ Тези доповідей. – Чернівці, 2012. – С. 117.
43. Нестеренко В.В. *Неперервність лінійних перехідних відображень* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.// Міжнародна науково-практична конференція "Математика. Інформаційні технології. Освіта", 7 - 9 вересня 2012 / Тези доповідей. – Луцьк, 2012. – С. 22–23.
44. Nesterenko V. *Characterization of jointly quasi-continuous multifunctions* / Nesterenko V. // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, 17 - 21 September 2012./ Abstracts of Reports. – Lviv, 2012. – P. 100.
45. Нестеренко В.В. *Про нове узагальнення теореми Калбрі-Троалліка* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25 лютого - 3 березня 2013/ Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 65–66.
46. Нестеренко В.В. *Про аналоги перехідності та декомпозицію неперервності* / Нестеренко В.В. // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25 лютого - 3 березня 2013/ Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 72–74.
47. Нестеренко В.В. *Характеризація деяких ослаблень неперервності* / Нестеренко В.В. // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 24 лютого - 2 березня 2014/ Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2014. – С. 79–81.
48. Нестеренко В.В. *Про властивість Гана та сукупні властивості деяких ослаблень неперервності* / Нестеренко В.В. // IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. Тези доповідей. – Чернівецький національний університет, 2014. – С. 146–147.

49. Нестеренко В.В. *Сукупні властивості деяких аналогів точкової розривності* / Нестеренко В.В. // IX-а Літня школа. Алгебра, топологія і аналіз, 7 липня - 18 липня, 2014, Поляниця, Україна. – С. 55–57.

50. Нестеренко В.В. *Перехідність в теорії функцій* / Нестеренко В.В. // Всеукр. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу 25 лютого - 1 березня 2015, Тези доповідей. – Ворохта, 2015. – С. 50–52.

51. Нестеренко В.В. *Про псевдоквазінеперервність* / Нестеренко В.В. // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге, Тези доповідей. - Чернівці: ЧНУ, 2015. – С. 88–89.

52. Нестеренко В.В. *Про ослаблену неперервність оберненого відображення* / Нестеренко В.В. // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу 24 лютого – 27 лютого 2016 / Тези доповідей. – Ворохта, 2015. – С. 106–108.

Праці, які додатково відображають результати дисертації

53. Нестеренко В.В. *Сукупна неперервність та квазінеперервність горизонтально квазінеперервних функцій* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, 12. – С. 1711–1714.

54. Нестеренко В.В. *Точкова розривність функцій багатьох змінних* / Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Нестеренко В.В. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Математика. – Чернівці: Рута. – 2001. – 111. – С. 70–75.

55. Нестеренко В.В. *Квазінеперервність і функції зі зв'язним графіком* / Маслюченко О.В., Нестеренко В.В. // IV Всеукраїнська наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу 10 - 12 вересня 2008 року/ Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2008. – С. 63.

56. Нестеренко В.В. *Графічна неперервність майже неперервних і S-неперервних функцій* / Маслюченко О.В., Нестеренко В.В. // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу 23-28 лютого 2011/ Тези доповідей. – Ворохта, 2011. – С. 58–59.

57. Нестеренко В.В. *Продовження квазінеперервних функцій* / Маслюченко О.К., Нестеренко В.В. // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу 25 лютого - 3 березня 2013/ Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 67.

58. Nesterenko V. *On extensions of quasi-continuous functions* / Maslyuchenko O., Nesterenko V. // Modern Real Analysis. – Lódz: Lódz University Press. – 2015. – P. 161–184.

АНОТАЦІЯ

Нестеренко В.В. *Аналоги неперервності: зв'язки між нарізними і сукупними властивостями та теореми про декомпозицію.* - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2016.

В дисертаційній роботі досліджуються зв'язки між нарізними та сукупними властивостями різних аналогів неперервності, а також встановлюються декомпозиційні теореми про неперервність, квазінеперервність тощо. В ній введені загальні класи $\mathcal{A}$-квазінеперервних відображень та відображень, що неперервні відносно системи множин, які охоплюють квазінеперервні, майже неперервні, ледь неперервні функції тощо, а також введено поняття перехідності для відображень між довільними топологічними просторами. Зокрема, охарактеризовано майже неперервність, двосторонню квазінеперервність, ледь неперервність, α-неперервність, B-квазінеперервність тощо в термінах замикання образу. Дано характеризацію сукупної квазінеперервності, кліковості та точкової розривності відображення від двох змінних, а також введено нові властивості многозначних відображень, з допомогою яких новим методом отримано загальну теорему про сукупну неперервність, що узагальнює результати А.Бузіада та Ж.-П.Троалліка. Введено загальне поняття перехідності для відображень зі значеннями в довільних топологічних просторах та отримано нові теореми про декомпозицію неперервності, які охоплюють всі попередні результати на цю тему. Крім того, з допомогою перехідності отримана теорема про неперервність скінченновимірного відображення із замкненим графіком. Отримано нові теореми про точки сукупної неперервності та квазінеперервності многозначних відображень, які узагальнюють відповідні результати Т.Нойбрунна та Ґ. Дебса.

Ключові слова: неперервність; квазінеперервність; кліковість; точкова розривність; α-неперервність; майже неперервність; ледь неперервність; майже ледь неперервність; псевдоквазінеперервність; B-квазінеперервність; неперервність відносно системи; властивість Гана; одностайна кліковість; перехідність; слабка квазіперехідність.

АННОТАЦИЯ

Нестеренко В.В. *Аналоги непрерывности: связи между раздельными и совокупными свойствами и теоремы о декомпозиции.* – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2016.

В диссертационной работе исследуются связи между раздельными и совокупными свойствами различных аналогов непрерывности, а также устанавливаются декомпозиционные теоремы о непрерывности, квазинепрерывности и тому подобное. В ней введены общие классы $\mathcal{A}$-квазинепрерывных отображений и отображений, непрерывных относительно системы множеств, которые охватывают квазинепрерывные, почти непрерывные, едва непрерывные и прочие функции, а также введено понятие переходности для отображений между произвольными топологическими пространствами. В частности, дано характеризацию почти непрерывности, двусторонней квазинепрерывности, едва непрерывности, α-непрерывности, B-квазинепрерывности т.д. в терминах замыкания образа. Дано характеризацию совокупной квазинепрерывности, кликовости и точечной разрывности отображения от двух переменных, а также введены новые свойства многозначных отображений, с помощью которых новым методом получено общую теорему о совокупной непрерывность, которая обобщает результат А.Бузиада и Ж.-П.Троаллыка. Введено общее понятие переходности для отражений со значениями в произвольных топологических пространствах и получены новые теоремы о декомпозиции непрерывности, которые охватывают все предыдущие результаты на эту тему. Кроме того, с помощью переходности получено теорему о непрерывности конечномерного отображения с замкнутым графиком. Получены новые теоремы о точках совокупной непрерывности и квазинепрерывности многозначных отображений, которые обобщают соответствующие результаты Т.Нойбрунна и Г. Дебса.

Ключевые слова: непрерывность; квазинепрерывность; кликовость; точечная разрывность; α-непрерывность; почти непрерывность; едва непрерывность; почти едва непрерывность; псевдоквазинепрерывность; B-квазинепрерывность; непрерывность относительно системы; свойство Гана; равностепенная кликовость; переходность; слабая квазипереходность.

ABSTRACT

Nesterenko V.V. *Analogs of continuity: the relationship between separate and joint properties and theorems on decomposition.* – Manuscript.

Thesis for a doctor's degree by speciality 01.01.01 – mathematical analysis. Ivan Franko's L'viv National University, L'viv, 2016.

In the thesis we explore the relationships between separate and joint analogues of continuity and install decomposition theorems of continuity, quasicontinuity and more. We introduce general classes of $\mathcal{A}$-quasicontinuous mappings and mappings that are continuous relatively of system of sets covering quasicontinuous, almost continuous, almost continuous functions, etc., and also we introduce the concept of for transitional maps between arbitrary topological spaces. In particular, we give characterization of almost continuity, bilateral quasicontinuity, somewhat continuity, α-continuity, B-quasicontinuity in terms of the closure of the image. We give the characterization of joint quasicontinuity, cliquishness and pointwise discontinuity of mappings of two variables, and we introduce new properties multivalued mappings for receiving the general theorem of joint continuity. This theorem generalizes a result of A.Buziad and J.-P.Troallic. In addition, through the transition obtained a theorem on the continuity of a finite-dimensional mapping with the closed graph. We introduce the general concept of transition for maps with values in arbitrary topological spaces and we get new theorems on the decomposition of continuity, covering all previous results on the subject. We obtain new theorems about points of continuity and joint quasicontinuity multivalued mappings that generalize relevant results of T.Neubrunn and E. Debs.

Keywords: continuity; quasicontinuity; cliquishness; pointwise discontinuity α-continuity; almost continuity; somewhat continuity; almost somewhat continuity; pseudoquasicontinuity; B-quasicontinuity; continuity to respect of system; Hahn property; equicliquishness; transition; weakly quasitransition.

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №891 від 08.04.2002 р.
Підписано до друку 15.02.2016. Формат $60 \times 84/16$.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 1,64.
Обл.-вид. арк. 1,76. Зам 261. Тираж 100.
Друкарня видавництва Чернівецького національного університету
58012, Чернівці, вул. Коцюбинського 2.