Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

на правах рукопису

Нестеренко Василь Володимирович

УДК 517.51

АНАЛОГИ НЕПЕРЕРВНОСТІ: ЗВ'ЯЗКИ МІЖ НАРІЗНИМИ І СУКУПНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ ТА ТЕОРЕМИ ПРО ДЕКОМПОЗИЦІЮ

01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант:
Маслюченко Володимир Кирилович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Чернівці – 2 0 1 5

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ **5**

ВСТУП **7**

1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ **13**

1.1. Квазінеперервність та її різновиди 13
1.2. Майже неперервні функції 21
1.3. Властивість Дарбу та її аналоги 22
1.4. Функції із замкненим графіком 26
1.5. Інші ослаблення неперервності 29
1.6. Точки сукупної неперервності функцій багатьох змінних 31
1.7. Сукупні властивості нарізно ослабленно неперервних функцій . 35
1.8. Загальні підходи до означення різних ослаблень неперервності . 41
1.9. Операції над різними ослаблено неперервними функціями . . . 43
1.10. Декомпозиція неперервності та її аналогів 49
1.11. Многозначні відображення 52

2. ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ **57**

2.1. Множини точок $\mathcal{A}$-квазінеперервності 57
2.2. Псевдоквазінеперервність та її аналоги 57
2.3. Характеризація різних ослаблень неперервності через замикання 60
2.4. Перехідність та її різновиди 62
2.5. Застосування перехідності 65
2.6. Узагальнення теореми Калбрі-Троалліка 68
2.7. Характеризація властивості Гана 72
2.8. Сукупні властивості нарізно ослаблено неперервних функцій . . 75
2.9. Характеризація сукупної квазінеперервності та її аналогів . . . 79
2.10. Декомпозиція неперервності 81
2.11. Сукупні властивості многозначних відображень 83

3. РІЗНІ ОСЛАБЛЕННЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ ТА ЗВ'ЯЗКИ МІЖ НИМИ **85**

3.1. Множина точок майже неперервності 85

3.2. Точки $\mathcal{A}$-квазінеперервності 88

3.3. Нові характеризіції деяких ослаблень неперервності 90

3.4. Характеризація різних ослаблень неперервності за допомогою операцій замикання та внутрішності 101

3.5. Ослаблена неперервність оберненого відображення 110

3.6. Псевдоквазінеперервність та аналоги 115

3.7. Класифікація точок розриву деяких аналогів неперервності . . 123

Висновки до розділу 3. **127**

4. ЗВ'ЯЗКИ МІЖ СУКУПНИМИ ТА НАРІЗНИМИ ОСЛАБЛЕННЯМИ НЕПЕРЕРВНОСТІ **129**

4.1. Характеризація сукупної квазінеперервності 129

4.2. Сукупні властивості функцій, які монотонні відносно першої змінної 134

4.3. Слабка горизонтальна квазінеперервність 139

4.4. Про симетричну квазінеперервність та її аналоги. 145

4.5. Достатні умови існування точок симетричної квазінеперервності та кліковості функцій двох змінних 152

4.6. Необхідні умови існування точок симетричної кліковості та квазінеперервності функцій двох змінних 156

4.7. Сукупні властивості відображень, які пов'язані із замкненістю графіка 162

4.8. Нарізні та сукупні властивості деяких аналогів кліковості . . . 171

Висновки до розділу 4. **179**

5. РІЗНОВИДИ КВАЗІНЕПЕРЕРВНОСТІ ТА ТОЧКИ НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ **181**

5.1. Розвиток теореми Калбрі-Троалліка. Властивість Гана. 181

5.2. Два класи відображень, які володіють властивістю Гана 185

5.3. Точки сукупної неперервності та великі коливання 190

5.4. Нове узагальнення теореми Калбрі-Троалліка 197

5.5. Характеризація властивості Гана 205
5.6. Одностайна кліковість та характеризація властивості Гана . . . 210

Висновки до розділу 5. **216**

6. ПЕРЕХІДНІСТЬ ТА ДЕКОМПОЗИЦІЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ І ЇЇ АНАЛОГІВ **217**

6.1. Декомпозиція неперервності та перехідні відображення 217
6.2. Аналоги перехідності та декомпозиція неперервності 229
6.3. Слабка властивість Дарбу і перехідність лінійних відображень у топологічних векторних просторах 240
6.4. Розриви двосторонньо квазінеперервних перехідних функцій . . 250
6.5. Подальші застосування перехідності 261

Висновки до розділу 6. **267**

7. МНОГОЗНАЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ **269**

7.1. Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних мультифункцій 269
7.2. Характеризація сукупної квазінеперервності многозначних відображень 272

Висновки до розділу 7. **278**

ВИСНОВКИ **279**

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ **283**

ПОКАЖЧИК ТЕРМІНІВ **316**

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Нехай X та Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – відображення, $x \in X$ і Q – деяка властивість відображення в точці. Через $Q(f)$ позначимо множину точок $x \in X$, таких, що властивість Q виконується для відображення f. Зокрема, позначимо через:

$C(f)$ – множину точок неперервності відображення f;

$D(f)$ – множину точок розриву відображення f;

$K(f)$ – множину точок квазінеперервності відображення f;

$L(f)$ – множину точок ледь неперервності відображення f;

$A(f)$ – множину точок кліковості відображення f;

$B(f)$ – множину точок двосторонньої квазінеперервності відображення f;

$Dar(f)$ – множину точок, в яких відображення f має властивість Дарбу;

$H(f)$ – множину точок, в яких відображення f має замкнений графік.

Покладемо $Q(X, Y) = \{f \in Y^X : Q(f) = X\}$. Зокрема, позначимо через:

$C(X, Y)$ – клас неперервних відображень з X в Y;

$K(X, Y)$ – клас квазінеперервних відображень з X в Y;

$A(X, Y)$ – клас клікових відображень з X в Y;

$P(X, Y)$ – клас точково розривних відображень з X в Y;

$M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ – клас монотонних відображень з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Нехай X, Y та Z – топологічні простори, $f : X \times Y \to Z$ – відображення, $(x, y) \in X \times Y$, Q – деяка властивість відображення, $A \subseteq X$ і $B \subseteq Y$. Покладемо:

$Q_B(f) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq Q(f)\}$;

$Q^A(f) = \{y \in Y : A \times \{y\} \subseteq Q(f)\}$;

$X_Q(f) = \{x \in X : f^x \in Q(Y, Z)\}$;

$Y_Q(f) = \{y \in Y : f_y \in Q(X, Z)\}$.

У випадку, коли $B = \{y\}$ коротко будемо позначати $Q_{\{y\}}(f) = Q_y(f)$.

Нехай Q і R – деякі властивості відображень. Покладемо:

$QR(X \times Y, Z) = \{f \in Z^{X \times Y} : X_R(f) = X, Y_Q(f) = Y\}$;

$\overline{Q}R(X \times Y, Z) = \{f \in Z^{X \times Y} : X_R(f) = X, \overline{Y_Q(f)} = Y\}$;

$\tilde{Q}R(X \times Y, Z) = \{f \in Z^{X \times Y} : X_R(f) = X, Y_Q(f) -$ залишкова в $Y\}$.

Введемо ще додаткові позначення. Через $K^s(f)$, $L^s(f)$ та $A^s(f)$ ми будемо позначати множину точок симетричної квазінеперервності, симетричної ледь неперервності та симетричної кліковості відображення f відносно x відповідно. А через $K^s(X \times Y, Z)$, $L^s(X \times Y, Z)$ чи $A^s(X \times Y, Z)$ позначимо множину відображень $f : X \times Y \to Z$, які симетрично квазінеперервні, ледь неперервні чи симетрично клікові відносно x відповідно.

Не відповідає загальній системі позначень властивість горизонтальної квазінеперервності відображень від двох змінних. Через $K_hQ(X \times Y, Z)$ ми будемо позначати сукупність відображень $f : X \times Y \to Z$, які горизонтально квазінеперервні та для для кожного $x \in X$ відображення $f^x \in Q(Y, Z)$.

ВСТУП

Актуальність теми. Неперервність – це одне з центральних понять математики, яке інтенсивно вивчається, починаючи з класичних робіт О.Коші та Б.Больцано, протягом останніх двохсот років. Ще в XIX столітті виникли перші аналоги неперервності: точкова розривність, вимірність за Бером, квазінеперервність. У XX столітті з'явилося дуже багато (понад 150) аналогів і послаблень неперервності (майже неперервність, ледь неперервність, кліковість, графічна неперервність, замкненість графіка, тощо) і накопичилось досить багато матеріалу. Є огляди, в яких викладається частина отриманих результатів (Т.Нойбрунна [235] про квазінеперервність, З.Пьотровського [249] про зв'язки між нарізними і сукупними ослабленнями неперервності, Т.Натканєца [216] про майже неперервність, Т.Натканєца і Р.Ґібсона [96] про властивість Дарбу). Крім того, була спроба оглянути всі аналоги неперервності у праці Д.Ґаулда, С.Ґрінвуда і І.Райлі [93] (їх там близько 100). Але повного огляду результатів про аналоги неперервності поки що ще не написано.

Дослідження властивостей аналогів неперервності групується навколо двох великих тем: зв'язки між нарізними і сукупними властивостями різних ослаблень неперервності та теореми про декомпозицію неперервності та її аналогів.

Зв'язки між нарізними і сукупними ослабленнями неперервності вивчалися в працях С.Кемпістого, Н.Мартіна, Дж.Бреккенріджа і Т.Нішіури, В.Маслюченка, З.Пьотровського, З.Ґранде та багатьох інших. Т.Нойбрунн, М.Матейдес, Ж.Еверт та інші вивчали аналоги неперервності для многозначних відображень. Розвиваючи дослідження К.Беґеля В.Маслюченко і В.Нестеренко [342] ввели поняття горизонтальної квазінеперервності та отримали багато результатів, пов'язаних з цим поняттям, які потім дістали значний розвиток. Деякі з цих досліджень були підсумовані у кандидатській дисертації В.Нестеренка "Різні типи квазінеперервності та їх застосування" [381].

Дослідження різних аналогів неперервності активно проводяться і в наш час, зараз з цієї тематики нараховується більше тисячі публікацій.

Та, незважаючи на їх велике число, залишається ще багато напрямків, які потребують подальшої розробки і розвитку. Наприклад, актуально отримати найзагальніші умови на відображення $f : X \times Y \to Z$, які гарантують наявність у них точок сукупної неперервності, причому бажано, щоб вони були як достатніми, так і необхідними, розвиваючи при цьому деякі нещодавно отримані результати, що стосуються властивості Гана. Так само важливо знайти теорему, яка б охоплювала недавно отримані результати В.Маслюченка і В.Нестеренка та А.Бузіада і Ж.-П.Троалліка щодо узагальнення відомої теореми Калбрі-Троалліка. Зовсім недослідженими є питання про сукупні властивості відображень монотонних відносно однієї змінної чи тих, що мають замкнений графік відносно однієї змінної. Недостатньо вивчені зв'язки між нарізними і сукупними аналогами неперервності для многозначних відображень.

Під декомпозицією в широкому сенсі деякої властивості (A) функцій розуміють теореми типу $(B) \wedge (C) \Rightarrow (A)$, де (B) і (C) якісь інші властивості функцій. Сюди, зокрема, належать класичні теореми функціонального аналізу про те, що кожне адитивне і неперервне відображення буде однорідним, а значить, лінійним, і кожне лінійне відображення із замкненим графіком у банахових просторах неперервне (теорема Банаха про замкнений графік). Після цього багато математиків (Дж.Дуґунджі [73], О.Алас [5], З.Пьотровський і А.Шиманський [258], К.Бурґес [52], І.Баґґс [7], Я.Добош [65], М.Р.Вуйцік і М.С.Вуйцік [313]) отримали ряд теорем про декомпозицію неперервності, коли однією з умов виступає замкненість графіка. У праці В.Маслюченка і В.Крецу [323] було введено нове поняття перехідності для функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і показано, що воно може з успіхом замінити наявність у функції замкненого графіка. Актуальною задачею стало перенесення поняття перехідності на довільні відображення $f : X \to Y$ і отримання відповідних теорем про декомпозицію неперервності з участю перехідності. Крім того, на часі розглянути всі теореми, де фігурує умова замкненості графіка і вивчити, коли її можна замінити перехідністю.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науково-дослідними програмами "Різні класи операторів в абстрактних просторах" (номер державної реєстрації – 0110U001560) та "Векторні ґратки та зв'язки між нарізними та сукупними

властивостями функцій багатьох змінних" (номер державної реєстрації – 0109U002242), які ведуться на кафедрі математичного аналізу ЧНУ.

Мета і завдання досліджень. *Метою* дисертації є дослідження зв'язків між різними функціональними класами, опис множини точок неперервності різних аналогів неперервності, встановлення зв'язків між нарізними та сукупними аналогами неперервності, одержання результатів про декомпозицію неперервності та її аналогів.

Завданнями дослідження є:

- встановлення взаємозв'язків між різними аналогами неперервності;
- опис множин точок розриву функцій з різних функціональних класів;
- вивчення зв'язків між нарізними та сукупними властивостями різних аналогів неперервності;
- встановлення необхідних і достатніх умов для сукупної квазінеперервності, кліковості та інших аналогів неперервності;
- вивчення властивостей аналогів неперервності многозначних відображень;
- дослідження зв'язків між різними класами просторів, що пов'язані з нарізно неперервними функціями, зокрема, знаходження необхідних і достатніх умов для виконання властивості Гана;
- перенесення поняття перехідності на випадок відображень зі значеннями в топологічних просторах, вивченню його властивостей і аналогів;
- встановлення нових результатів про декомпозицію неперервності, квазінеперервності та інших аналогів неперервності;
- дослідження можливості заміни умови замкненості графіка на перехідність у різних результатах функціонального аналізу і теорії функцій.

Предмет і об'єкт досліджень. *Предметом* досліджень є квазінеперервні відображення та їх різновиди, функції типу Дарбу, функції із замкненим графіком та перехідні відображення, різні ослаблення неперервності многозначних відображень, нарізно неперервні функцій,

нарізно квазінеперервні функції. Основні *об'єкти* досліджень – множина точок розриву функцій з різних функціональних класів, сукупні та нарізні властивості аналогів неперервності, декомпозиції неперервності та різних ослаблень неперервності, зв'язки між різними класами функцій.

Методи дослідження. В дослідженнях використовується категорний метод, координатний метод та інші методи загальної теорії функцій і функціонального аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Здобувач *вперше* дав характеризацію властивості Гана, сукупної квазінеперервності та сукупної кліковості функцій від двох змінних. Використовуючи нове поняття перехідності для відображень між топологічними просторами встановлено новий результат про декомпозицію неперевності. В дисертаційній роботі отримано наступні нові результати:

- введено нові поняття псевдоквазінеперервності знизу та покриттєвої категорної кліковості знизу, з допомогою яких отримано найзагальнішу теорему про сукупну неперервність функцій двох змінних, яка охоплює результати Р.Бера, Г.Гана, К.Беґеля, Н.Мартіна, Р.Фейока, Дж.Бреккенріджа та Т.Нішіури, Ж.Калбрі та Ж.-П.Троалліка, В.Маслюченка, А.Бузіада та Ж.-П.Троалліка на цю тему;

- для берівського простору X, компактного чи локально компактного простору Y, що задовольняє другу аксіому зліченності і метричного простору Z вперше вказані необхідні і достатні умови на відображення $f : X \times Y \to Z$ для того, щоб воно мало властивість Гана про залишковість множини $C_Y(f)$ тих точок $x \in X$, що f сукупно неперервне у кожній точці множини $\{x\} \times Y$, в той час коли в працях багатьох авторів (Р.Бер, Е. ван Влек, Г.Ган, К.Беґель, Р.Фейок, Дж.Бреккенрідж та Т.Нішіура, Ж.Калбрі та Ж.-П.Троаллік, В.Маслюченка, І.Наміока, Р.Христенсен, Ж.-П.Сан-Ремо та інші) були отримані лише достатні умови;

- для берівського простору X, топологічного простору Y із зліченною псевдобазою і регулярного простору Z доведено, що кожне горизонтально квазінеперервне відображення $f : X \times Y \to Z$, яке квазінеперервне відносно другої змінної для всіх значень $x \in X$

за вийнятком деякої множини першої категорії, буде сукупно квазінеперервним, що є найкращим узагальненням відомого результату С.Кемпістого про квазінеперервність нарізно квазінеперервних функцій, над розвитком якого працювало багато математиків (Н.Мартін, Т.Нойбрун, З.Пьотровський, В.Маслюченко та інші); разом з тим у тому випадку коли простори Y та Z мають зліченну базу доведена необхідність вказаних вище умов для сукупної квазінеперервності;

- введено поняття перехідності відображень $f : X \to Y$ між довільними топологічними просторами, з допомогою якого встановлена теорема про декомпозицію неперервності, частинними випадками якої є попередні результати В.Крецу та В.Маслюченка, М.Р.Вуйціка та М.С.Вуйціка, Р.Мімни і Р.Мімни та Д.Розе, і теорема про декомпозицію сукупної неперервності, яка значно покращує результати З.Пьотровського, М.С.Вуйціка і Р.Мімни; як наслідок отримана нова теорема про неперервність скінченновимірних лінійних відображень із замкненим графіком;

- вперше дано характеризацію різних ослаблень неперевності з допомогою операторів замикання та внутрішності, тим самим узагальнено результати Р.Мімни, Я.Борсіка та П.Келлера на цю тему;

- досліджено величину множини точок сукупної неперервності нарізно монотонних функцій, зокрема встановлено, що кожна нарізно монотонна функція є точково розривною, що дало відповідь на питання О.Скасківа;

- отримано найкращу теорему про великі коливання для функцій двох змінних;

- для просторів досить загального типу новим методом отримано характеризацію множини точок симетричної квазінеперервності функцій двох змінних, що розвиває результат Е.Котліки та А.Малізевського для функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

- розроблено новий метод побудови розривних двосторонньо квазінеперервних перехідних функцій, який показав, що в результаті Й.Добоша про неперервність двосторонньо квазінеперервних функцій умову замкненості графіка не можна замінити на перехідність;

- поняття горизонтальної квазінеперервності перенесено на мультифункції і отримано нові теореми про сукупну неперервність та квазінеперервність, які узагальнюють відповідні результати Ґ.Дебса та Т.Нойбрунна.

Наукове та практичне значення одержаних результатів. Дисертація носить теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в загальній теорії функцій, функціональному аналізі і знаходяться на передньому краї сучасних досліджень з цієї тематики.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, включені в дисертацію, одержані здобувачем особисто. Зі спільних праць [196–197, 343, 348, 351–352, 354, 391] до дисертації включені тільки ті результати, які належать автору особисто. В спільних працях [196, 197, 343, 348, 352, 354] В.Маслюченку належить постановка задач та загальне керівництво, а в праці [351] В.Маслюченко запропонував ідею застосування $(2, 3)$-схем.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на різного рівня конференціях [224–229, 344–345, 347, 349, 361, 366–368, 370, 372, 374, 375–376, 379–380, 385, 387–388, 390, 392].

Публікації. Всього за темою дисертації написано 58 праць, які не увійшли до кандидатської дисертації автора. Серед них 30 – це статі у фахових математичних журналах, а 28 – тези та матеріали міжнародних конференцій. Основні результати дисертації опубліковані в працях [82, 196, 197, 226, 230, 343, 348, 351–352, 354, 359–360, 362–365, 369, 371, 375, 378, 382–384, 386, 389, 391, 393], серед яких 18 написані без співавторів. В працях [194, 338, 353] додатково відображаються результати дисертації.

Структура та обсяг роботи. Дана робота складається з переліку умовних позначень, вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел та покажчика термінів. Загальний обсяг роботи – 320 с. Головна частина (без списку використаних джерел і покажчика термінів) займає 282с.

Висловлюю велику вдячність своєму науковому керівнику Володимиру Кириловичу Маслюченку за постановку задач і постійну увагу до цієї роботи.

РОЗДІЛ 1.
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1.1. Квазінеперервність та її різновиди

1.1.1. Поняття квазінеперервності виникло при дослідженні зв'язків між нарізною та сукупною неперервністю. Часто трапляється так, що нарізно неперервні функції є квазінеперервними за сукупністю змінних. Термін квазінеперервність першим увів у вжиток Стефан Кемпістий в [153]. Він показав наскільки корисною буває квазінеперервність при дослідженні сукупної неперервності нарізно неперервних функцій багатьох змінних.

Відображення $f : X \to Y$ топологічного простору X у топологічний простір Y називається *квазінеперервним у точці* $x \in X$, якщо для будь-яких околів V точки $f(x)$ в Y і U точки x в X існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Відображення f *квазінеперервне*, якщо воно є таким у кожній точці простору X. Квазінеперервність нарізно неперервних функцій двох дійсних змінних уперше виявив В.Вольтерра. На це вказує Р. Бер [10, с.94], який виводить цю властивість з наявності у таких функцій на кожній горизонталі щільної множини точок сукупної неперервності. Г.Ган [127] (теорема III) встановив, що нарізно неперервні функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є квазінеперервними. Але лише С.Кемпістий [153] усвідомив важливість цієї властивості, що була відкрита до нього, підібрав для неї влучну назву, розглянувши разом з тим різноманітні модифікації квазінеперервності.

В.Бледзой в [20] увів околову властивість функцій, які діють між метричними просторами. Функція $f : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ називається *околовою в точці* $x_0 \in M_1$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існують $\delta > 0$ і точка $a \in M_1$, такі, що $d_1(x_0, x) + d_2(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ для всіх x, для яких $d_1(x, a) < \delta$, і просто *околовою*, якщо вона є такою в кожній точці. В [191] С.Маркус встановив, що поняття квазінеперервності та околовості є еквівалентними. Там же було перенесено поняття квазінеперервності на випадок довільних топологічних просторів, яке в С.Кемпістого було дано лише для дійсних функцій, визначених на параллелепипедах в $\mathbb{R}^n$.

Н.Левін в [164] увів поняття напівнеперервної функції, використавши

поняття напіввідкритої множини (також вживається термін квазівідкрита множина). Множина A топологічного простору X *напіввідкрита* (інша назва *квазівідкрита*), якщо $A \subseteq \overline{intA}$. Відображення $f : X \to Y$ називається *напівнеперервним* [164], якщо прообраз довільної відкритої множини є напіввідкритою множиною. В [237] А.Нойбрунова показала, що поняття квазінеперервності та напівнеперервності є еквівалентними.

Цікава характеризація квазінеперервності дана в [235] та [331]: відображення $f : X \to Y$ є квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли

$$f(U) \subseteq \overline{f(A)}$$

для довільних відкритої множини U в X та множини $A \subseteq X$, таких, що $U \subseteq \overline{A}$. Зауважимо, що в [159, лема 4] В.Кульпа і А.Шиманський це включення використовували лише тільки як необхідну умову квазінеперервності. Саме ж поняття квазінеперервності відображення в них фігурує як ручне (tame) відображення і $\mathcal{P}-$клікове.

Також в термінах замикання образу В.Маслюченко [339] увів поняття сильної квазінеперервності. Відображення $f : X \to Y$ називається *сильно квазінеперервним*, якщо $f(U) \subseteq \overline{f(U \cap C(f))}$ для довільної відкритої непорожньої множини U в X. Там же в [339] було встановлено, що сильна квазінеперервність рівносильна одночасній квазінеперервності та точковій розривності.

При вивченні різних ослаблень неперервності природно виникає питання про вивчення типу множини їх точок неперервності, тобто з'ясування наскільки далеко вони відійшли від неперервності. В.Бледзой [20] і С.Маркус [191] з'ясували, що у квазінеперервного відображення $f : X \to Y$ зі значеннями в метричному просторі просторі Y множина $D(f)$ точок розриву є першої категорії (С.Маркус насправді розглядав відображення з усюди щільною множиною точок кліковості), а Н.Левін [164] показав, що те ж саме вірно, коли Y задовольняє другу аксіому зліченності. З.Пьотровський в [256] поставив питання: для берівського простору X знайти "великі"простори Y, такі, що кожне квазінеперервне відображення $f : X \to Y$ має непорожню множину $C(f)$ точок неперервності. Під терміном "великі"простори розуміються неметризовні простори без зліченної бази. Як приклад того, що не для всіх просторів Y квазінеперервна функція має непорожню множину точок неперервності наводиться пряма

Зоргенфрея $\mathbb{L}$ і тотожня функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{L}, f(x) = x, x \in \mathbb{R}$, яка є квазінеперервною і $C(f) = \varnothing$. Певний крок в напрямку було зроблено в [138], де встановлено, що для берівського простору X, слабко вичерпного простору Y та квазінеперервного відображення $f : X \to Y$ множина $C(f)$ є всюди щільною та типу G_δ.

В [346] В.Маслюченко та В.Нестеренко встановили, що кожна F_σ множина першої категорії на осі є множиною точок розриву деякої квазінеперервної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Т.Салат в [286] поставив питання про опис множини $C(f)$ квазінеперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ для загальних топологічних просторів X. Для $X = \mathbb{R}^2$ характеризацію одержав З.Ґранде в [122]. Я.Борсік у [30] встановив, що для берівського псевдометризовного (або берівського досконало нормального локально зв'язного) простору X множина M є множиною точок розриву деякої квазінеперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли M є F_σ-множиною першої категорії. В [193] О.Маслюченком була дана характеризація множини точок неперервності квазінеперервної функції для не тільки берівських просторів. Так, зокрема, за допомогою поняття σ-стичної множини встановлено, що для спадково нормального простору X множина E є множиною точок розриву деякої квазінеперервної функції тоді і тільки тоді, коли E є σ-стичною множиною. Також множини точок неперервності квазінеперервних відображень досліджувалися в [154], де для їх вивчення застосовувалася теорія топологічних ігор.

Множину точок квазінеперервності відображення f будемо позначати $K(f)$. Вивчення множини точок квазінеперервності було розпочато в праці Я.Липинського та Т.Салата [169], де встановлено, що для повного метричного щільного в собі простору X і метричного простору Y з принаймні однією точкою накопичення множина $E \subseteq X$ буде множиною точок кваізнеперервності деякої функції $f : X \to Y$ тоді і тільки тоді, коли $int\overline{E} \setminus E$ є множиною першої категорії. В [373] було встановлено, що для берівського простору X, який задовольняє другу аксіому зліченності, метризовного простору Y, відображення $f : X \to Y$ та відкритої непорожньої множини G в X виконується альтернатива: або множина A не є щільною в G, або множина $(X \setminus A) \cap G$ першої категорії.

1.1.2. Термін кліковість був введений Г.Тільманом в [301], хоча властивість кліковості розглядалася ще В.Бледзоєм в [20]. Нехай X – топологічний

простір, Y – метричний простір з метрикою $|\circ-\circ|$. Для непорожньої множини $A \subseteq Y$ та функції $f : X \to Z$ позначимо через $\omega_f(A) = \sup\limits_{u,v\in A} |f(u) - f(v)|$ *коливання функції* f *на множині* A. Функція $f : X \to Y$ називається *кліковою в точці* $x \in X$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільного околу U точки x в X існує відкрита непорожня множина G, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_f(G) < \varepsilon$, і просто *кліковою*, якщо вона є такою в кожній точці. Очевидно, що кожна квазінеперервна функція зі значеннями в метричному просторі є кліковою. Там же в [301] повідомлено, що множина точок розриву клікової функції з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ є першої категорії.

С.Маркус в [191] встановив, що для берівського простору X та метричного простору Y множина $D(f)$ точок розриву клікової функції $f : X \to Y$ є першої категорії. Пізніше Й.Добош та Т.Салат [70] одержали характеризацію клікових функцій через множину точок розриву. Вони встановили, що для берівського простору X та метричного простору Y функція $f : X \to Y$ є кліковою тоді і тільки тоді, коли множина $D(f)$ є першої категорії. З цього факту випливає, що для вказаних просторів кліковість рівносильна *точковій розривності*, тобто наявності у відображення всюди щільної множини точок неперервності.

Відмітимо, що коли множина $A(f)$ точок кліковості деякої функції f є всюди щільна, то функція f клікова. Я.Ліпінський та Т.Салат в [169] встановили, що для довільного топологічного простору X та метричного простору Y множина $A(f)$ довільної функції $f : X \to Y$ є замкненою. Там же встановлено наступну характеризацію множини точок кліковості: для метричних просторів X та Y, причому простір X без ізольованих точок, а в просторі Y існує фундаментальна послідовність з різних елементів, множина $A \subseteq X$ є множиною точок кліковості деякої функції $f : X \to Y$ тоді і тільки тоді, коли множина A є замкненою в X.

Я.Борсік у [30] поставив задачу про вивчення трійки множин $(C(f), K(f), A(f))$, а саме: знайти умови на простори X та Y, що для довільних підмножина $C \subseteq K \subseteq A$ в X, де C множина типу G_δ, A – замкнена множина і $A \setminus C$ – множина першої категорії, існує функція $f : X \to Y$, така, що $C(f) = C$, $K(f) = K$ і $A(f) = A$. Він відзначає, що Я.Еверт та Я.Ліпінський в [80] встановили, що згадана вище умова виконується для нормованих просторів X та Y, де X до того ж є берівським. Сам Борсік

у [30] розв'язує сформульовану ним проблему для $Y = \mathbb{R}$ і простору X, який є берівським псевдометризовним без ізольованих точок або розкладним досконало нормальним локально зв'язним. Також у [30] дано характеризацію множини точок кліковості відображень $f : X \to Y$, де X – довільний топологічний простір, а Y – метричний простір з принаймні однією точкою накопичення.

Пізніше в [31] Борсік дає описи четвірок $(C(f), K(f), E(f), A(f))$, де $E(f)$ – множина точок квазінеперервності зверху та знизу функції f, для $X = Y = \mathbb{R}$, а у [29] – у випадку, коли X – берівський метричний простір без ізольованих точок та $Y = \mathbb{R}$.

Крім самого поняття кліковості існує велика кількість його аналогів (див. [268, 269, 356]).

1.1.3. Поняття двосторонньої квазінеперервності було введене З.Ґранде та Т.Наткацєцем в [123] у зв'язку з дослідженням наявності у оберненого відображення властивостей, які має пряме відображення. Кажуть, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *квазінеперервна справа /зліва/ в точці* x_0, якщо для довільних додатних чисел ε і δ існує відкрита непорожня множина G, така , що $G \subseteq [x_0, x_0 + \delta)$ $/G \subseteq (x_0 - \delta, x_0]/$ і $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ на G. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається *двосторонньо квазінеперервною в точці* x_0, якщо вона в ній одночасно квазінеперервна і справа, і зліва. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається *квазінеперервною справа, зліва чи двосторонньо квазінеперервною*, якщо вона є такою в кожній точці $x \in \mathbb{R}$. Позначимо через $B(f)$, $K^+(f)$ і $K^-(f)$ множини точок двосторонньої квазінеперервності, квазінеперервності справа і квазінеперервності зліва відповідно. Зрозуміло, що $B(f) = K^+(f) \cap K^-(f) \subseteq K(f)$.

В [23] Я.Борсік охарактеризував набір $(C(f), B(f), K^+(f), K^-(f), K(f), A(f))$ для функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$: для того, щоб для підмножин C, B, K_1, K_2, K, A з $\mathbb{R}$ існувала функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, така, що $C(f) = C, B(f) = B, K^+(f) = K_1$, $K^-(f) = K_2, K(f) = K, A(f) = A$ необхідно і досить, щоб

$$C \subseteq B \subseteq K_1 \cap K_2 \subseteq K_1 \cup K_2 \subseteq K \subseteq A,$$

множина C була типу G_σ, A – замкнена, $A \setminus C$ – першої категорії і $K \setminus B$ – зліченна.

Поняття двосторонньої квазінеперервності переноситься на випадок довільних топологічних просторів. Так, Я.Борсік в [23], увів поняття

B-квазінеперервності, S-квазінеперервності та T-квазінеперервності для відображень $f : X \to Y$ між двома топологічними просторами, які для $X = \mathbb{R}$ еквівалентні двосторонній квазінеперервності. Відображення $f : X \to Y$ називається *B-квазінеперервним у точці* $x \in X$, якщо для довільного околу V точки $y = f(x)$ в Y і довільної області O в X, такої, що $x \in \overline{O}$ існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq O$ і $f(G) \subseteq V$. Якщо відображення B-квазінеперервне у кожній точці, то воно називається *B-квазінеперервним.* Зауважимо, що якщо в означенні B-квазінеперервності вимагати від множини O лише відкритості, то таке означення буде еквівалентне неперервності. Множину точок B-квазінеперервності позначимо через $K_B(f)$.

Характеризація множини точок B-квазінеперервності для деяких типів топологічних просторів була дана в [23]: для локально зв'язного досконало нормального майже розкладного топологічного простору X множина $B \subseteq X$ буде множиною точок B-квазінеперервності деякої функції $f : X \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли множина $\overline{B} \setminus B$ першої категорії. Подібний результат там же встановлено і для множини точок S-квазінеперервності.

Аналогічно тому, як було введено двосторонню квазінеперервність, в [28, 86] вводиться поняття двосторонньої кліковості та подано опис множини точок двосторонньої кліковості.

Сукупні властивості аналогів двосторонньої квазінеперервності вивчалися в [106].

1.1.4. Поняття ледь неперервності з'явилося при дослідженні інваріантності берівських просторів у статті З.Фроліка [83]. Відображення $f : X \to Y$ між двома топологічними просторами називається *ледь неперервним у точці* $x \in X$, якщо для довільного околу V точки $f(x)$ в Y існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $f(G) \subseteq V$, і просто *ледь неперервним*, якщо є таким в кожній точці. Легко бачити, що кожне квазінеперервне відображення є ледь неперервним, але не навпаки. Позначимо через $L(f)$ множину точок ледь неперервності відображення f, а клас всіх ледь неперервних відображень між топологічними просторами X та Y через $L(X, Y)$.

В [83] встановлено, що коли X є сепарабельним простором, а відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне і сюр'єктивне, то простір Y теж сепарабельний.

Також там встановлено, що коли бієкція $f : X \to Y$ між двома топологічними просторами, така, що відображення f і f^{-1} ледь неперервні, то простір X берівський тоді і тільки тоді, коли простір Y берівський. Результати на цю тему опубліковано також в [94, 232].

Що стосується точок неперервності ледь неперервних відображень, то в праці [321] був наведений приклад ледь неперервної та скрізь розривної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.1.5. В 1969 році Н.Бісвас [19] увів поняття просто відкритої множини і простої неперервності та вивчав їх властивості. Множина A топологічного простору називається *просто відкритою*, якщо вона є об'єднанням відкритої і ніде не щільної множин. Відображення $f : X \to Y$ називається *просто неперервним*, якщо прообраз кожної відкритої множини є просто відкритою множиною. Очевидно, що кожне квазінеперервне відображення є просто неперервним.

Поняття простої неперервності в точці було введено Я.Борсіком та Й.Добошом в [39]. Відображення $f : X \to Y$ називається *просто неперервним в точці* $x \in X$, якщо для довільного околу V точки $f(x)$ в Y і довільного околу U точки x в X множина $f^{-1}(V) \setminus int(f^{-1}(V))$ є ніде не щільною в U. Множину точок простої неперервності відображення f будемо позначати $N(f)$. В [39] описано множину точок простої неперервності: для берівського досконало нормального розкладного простору X та метричного простору Y, який має принаймні одну точку накопичення і є сепарабельним або цілком обмеженим, множина $N \subseteq X$ є множиною точок простої неперервності деякого відображення $f : X \to Y$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{intN} \subseteq N$ і множина $\overline{N} \setminus N$ першої категорії.

Зв'язок між простою неперервністю та кліковістю досліджувався в [39, 68, 237].

1.1.6. Далі розглянемо два ослаблення неперервності, які за певних умов на простір значень випливають з кліковості. Першим ослабленням є м'яка неперервність. М'яка неперервність була введена Я.Борсіком та Й.Добошом в [38] для покращення теореми про декомпозицію неперервності майже неперервних відображень. Через S_f позначимо множину точок $x \in X$, для яких існує база $\mathcal{V}$ околів точки $f(x)$ в Y, така, що для кожного $V \in \mathcal{V}$ і для кожного околу U точки x в X множина $f^{-1}(V) \setminus intf^{-1}(V)$ є ніде не

щільною в U. Якщо множина S_f є всюди щільною в X, то відображення f називається *м'яко неперервним.* М'яко неперервні відображення можуть бути скрізь розривними.

Множина A топологічного простору X має *властивість Бера* [325, с. 93], якщо існує відкрита множина U в X, така, що $A \triangle U = (A \setminus U) \cup (U \setminus A)$ є множиною першої категорії в X. Очевидно, що кожна відкрита множина має властивість Бера. Клас всіх множин з властивістю Бера утворює σ-алгебру. Відображення $f : X \to Y$ має *властивість Бера* [325, с. 408], якщо прообраз кожної відкритої множини має властивість Бера. В [301] Г.Тілманом було встановлено, що кожна клікова функція $f : X \to \mathbb{R}$ має властивість Бера.

1.1.7. Для функцій від декількох змінних можна розширити ряд понять, подібних до квазінеперервності. С.Кемпістий в [153] увів поняття симетричної квазінеперервності для для відображень визначених на n-вимірних паралелепіпедах. Н.Мартін в [192] переніс поняття симетричної квазінеперервності на випадок відображень $f : X \times Y \to Z$ зі значеннями в метричному просторі Z, хоча насправді його природніше формулювати в загальній ситуації, коли X, Y і Z – топологічні простори. Відображення $f : X \times Y \to Z$ *симетрично квазінеперервне відносно x в точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо для кожного околу W точки $z = f(p)$ в Z і будь-яких околів U точки x в X і V точки y в Y існують окіл G точки x в X і відкрита непорожня множина H в Y, такі, що $G \times H \subseteq U \times V$ і $f(G \times H) \subseteq W$. Аналогічно вводиться поняття симетричної квазінеперервності відносно y. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *симетрично квазінеперервним в точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо воно симетрично квазінеперервне відносно x і відносно y в точці p. Відображення називається *симетрично квазінеперервним, симетрично квазінеперервним відносно x чи симетрично квазінеперервним відносно y*, якщо воно є таким в кожній точці.

Легко зрозуміти, що коли відображення $f : X \times Y \to Z$ симетрично квазінеперервне відносно x чи симетрично квазінеперервності відносно y в точці p, то воно квазінеперервне за сукупністю змінних у точці p.

Аналогічно до симетричної квазінеперервності З.Ґранде в [119] увів поняття симетричної кліковості. Для метричного простору Z і топологічних просторів X та Y функція $f : X \times Y \to Z$ *симетрично кліковою відносно x в точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо кожного $\varepsilon > 0$ і будь-яких околів U точки x в

X і V точки y в Y існують окіл G точки x в X і відкрита непорожня множина H в Y, такі, що $G \times H \subseteq U \times V$ і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$, і просто *симетрично кліковою відносно* x, якщо вона є такою в кожній точці $p \in X \times Y$. Так само вводиться поняття *симетричної кліковості відносно* y і *симетричної кліковості.*

Досліджуючи множину точок неперервності функцій від декількох змінних К.Беґель в [42] для функцій, визначених на добутку паралелепіпедів, увів властивість, слабшу за сукупну квазінеперервність, під назвою умова (A). В [350], введену К.Беґелем умову (A), В.Маслюченко та В.Нестеренко перенесли на випадок довільних топологічних просторів під назвою горизонтальна квазінеперервність. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним у точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо для кожного околу W точки $z = f(p)$ в Z і будь-яких околів U точки x в X і V точки y в Y існують точка $b \in V$ і відкрита непорожня множина G в X, такі, що $G \subseteq U$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq W$, і просто *горизонтально квазінеперервним*, якщо воно є таким, у кожній точці добутку $X \times Y$.

З метою покращення результатів про сукупну неперервність відображень від двох змінних А.Бузіад та Ж.-П.Троаллік в [44] ввели поняття квазінеперервності знизу відносно змінної x. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *квазінеперервним знизу відносно* x *у точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо для кожного околу W точки $z = f(p)$ в Z і будь-яких околів U точки x в X і V точки y в Y існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(\{x\} \times V) \cap W \neq \varnothing$ для кожної точки $x \in G$, і просто *квазінеперервним знизу відносно* x, якщо воно є таким, у кожній точці добутку $X \times Y$. Легко переконатися, що коли відображення горизонтально квазінеперервне в точці, то воно є і квазінеперервним знизу відносно x в цій точці.

1.2. Майже неперервні функції

1.2.1. Поняття майже неперервності природно виникає при доведенні теорем про відкрите відображення та замкнений графік [270] і теореми Блумберґа [21]. Відображення $f : X \to Y$ називається *майже неперервним в точці* $x \in X$, якщо для будь-якого околу V точки $f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $\overline{A}$ – окіл точки x в X і $f(A) \subseteq V$. Якщо відображення майже неперервне в кожній точці, то воно називається *майже неперервним.*

Г.Блумберґ в [21] вводить поняття майже неперервності для евклідових просторів, називаючи майже неперервні функції щільно наближувальними, і доводить, що кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є майже неперервною на щільній множині в $\mathbb{R}$. Інша назва майже неперервності – переднеперервність [172].

Тип множини точок неперервності майже неперервних відображень для деяких типів просторів встановлено в [319]: для довільного простору X множина $E \subseteq X$ є множиною точок розриву деякої майже неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$, де G_n – відкриті множини в розкладному ядрі простору X. Крім того, там підмічено, що множина точок розриву майже неперервного відображення зі значеннями в регулярному просторі не може мати ізольованих точок.

Майже неперервність не повязана з квазінеперервністю, тобто існують майже неперервні відображення, які не є квазінеперервними і навпаки.

1.2.2. Як модифікацію понять квазінеперервності та майже неперервності в [38] було введено майже квазінеперервність. Відображення f називається *майже квазінеперервним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y і для кожного околу U точки x в X існує множина A в X, така, що $\varnothing \neq int\overline{A} \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$, і просто *майже квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці. Зрозуміло, що кожне квазінеперервне чи майже неперервне відображення є майже квазінеперервним.

В літературі поняття майже квазінеперервності зустрічається також під назвою β-неперервність [1]. Підмножина A топологічного простору X називається β-відкритою [1], якщо $A \subseteq \overline{int\overline{A}}$. Відображення $f : X \to Y$ називається *β-неперервним* [1], якщо прообраз кожної відкритої множини є β-відкритою множиною.

В [26] і [78] подано опис множини точок майже квазінеперервності.

Властивості майже неперервності та її аналогів досліджувалися в [64, 140, 265, 287, 303].

1.3. Властивість Дарбу та її аналоги

1.3.1. Властивість Дарбу є узагальненням на топологічні простори добре відомої властивості проміжного значення для функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Нагадаємо, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має *властивість проміжного значення*, якщо для

довільних чисел a та b, таких, що $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$ і довільного числа y, яке лежить між числами $f(a)$ та $f(b)$ існує число x, що лежить між числами a та b і $f(x) = y$. Згідно з теоремою Больцано-Коші кожна неперервна функція має властивість проміжного значення. Ґ.Дарбу в [61] показав, що існують розривні функції, які мають властивість проміжного значення. Там же було встановлено, що кожна похідна функція має властивість проміжного значення.

Відображення $f : X \to Y$ між двома топологічними просторами має *властивість Дарбу*, якщо образ кожної зв'язної множини є зв'язною множиною [48]. Множина точок неперервності функцій з властивістю Дарбу може бути порожньою [48, приклад 3.2].

В [48] було введено поняття властивості Дарбу в точці. Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ позначимо через $C^+(f, x)$ правосторонню граничну множину для функції f в точці x, тобто множину точок y, для кожної з яких існує послідовність (x_n), така, що $x < x_n$, $x_n \to x$ і $f(x_n) \to f(x)$. Аналогічно вводиться поняття лівосторонньої граничної множини $C^-(f, x)$ для функції f в точці x. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має *властивість Дарбу в точці x справа*, якщо $f(x) \in C^+(f, x)$ і для довільних чисел $A, B \in C^+(f, x)$, $A < B$, довільного числа $C \in (A, B)$ та $\varepsilon > 0$ існує точка $c \in (x, x + \varepsilon)$, така, що $f(c) = C$. Аналогічно вводиться поняття властивості Дарбу у точці зліва. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має *властивість Дарбу в точці x*, якщо вона має властивість Дарбу справа і зліва в цій точці. Множину точок з властивістю Дарбу функції f позначимо $Dar(f)$. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має властивість Дарбу тоді і тільки тоді, коли $Dar(f) = \mathbb{R}$ [60]. В [276] встановлено, що для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множина $Dar(f)$ є типу G_δ. Обернену задачу розв'язано в [167] і [54], де встановлено, що для довільних G_δ підмножин A та B в $\mathbb{R}$, таких, що $A \subseteq B$ існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої $C(f) = A$ і $Dar(f) = B$.

В деяких теоремах про декомпозицію неперервності відображень з властивістю Дарбу достатньо вимагати у відображення наявності слабкої властивості Дарбу [347] (інша назва O-зв'язність [205]). Відображення $f : X \to Y$ між двома топологічними просторами має *слабку властивість Дарбу*, якщо образ кожної зв'язної відкритої множини, тобто області в X, є зв'язною множиною в Y.

1.3.2. Поняття зв'язного відображення було введене Дж.Нешем у [215]

у зв'язку з вивченням напівзамкнених множин. *Графіком відображення* f між топологічними просторами X та Y називається множина $Gr(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$. Відображення $f : X \to Y$ між двома топологічними просторами X та Y називається *зв'язним*, якщо графік $Gr(f|_A)$ звуження $f|_A$ відображення f на довільну зв'язну множину $A \subseteq X$ є зв'язною множиною в $X \times Y$. В своїй роботі 1956 року [215] Дж.Неш поставив питання: чи буде вірна теорема Брауера про нерухому точку для зв'язних функцій? О.Гамільтон в [129] дав ствердну відповідь на поставлене Дж.Нешом питання. Однак, Дж.Стеллінґз помітив, що доведення О.Гамільтона містить помилку. В праці [294] Дж.Стеллінґз показав, що помилку О.Гамільтона можна нівелювати, врахувавши той факт, що образ замкненої множини при зв'язному відображенні є напівзамкненою множиною.

Аналогічно до того як вводилось поняття точкової властивості Дарбу, в [92] було введено поняття зв'язності відображення в точці. Там же було досліджено множину точок зв'язності довільного відображення.

Окремий підклас зв'язних відображень займають відображення зі зв'язним графіком, тобто відображення $f : X \to Y$, для яких множина $Gr(f)$ є зв'язною в $X \times Y$. Кожна функція з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, що має зв'язний графік, має і властивість Дарбу. Якщо функції визначені на $\mathbb{R}^2$, то це вже не так. Прикладом служить функція Шварца $sp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка визначена так: $sp(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ для $(x, y) \neq (0, 0)$ і $sp(0, 0) = 0$.

1.3.3. Поняття S-неперервності було введено в [294] Дж.Стеллінґзом, у зв'язку з узагальненням теореми Брауера про нерухому точку. Відображення $f : X \to Y$ називається *S-неперервним*, якщо для кожної відкритої множини W в $X \times Y$, такої, що $Gr(f) \subseteq W$ існує таке неперервне відображення $g : X \to Y$, що $Gr(g) \subseteq W$. У Дж.Стеллінґза ця властивість відображення фігурує під назвою "майже неперервність". Оскільки під терміном майже неперервності у нас задіяна інша властивість, то введену Дж.Стеллінґзом ослаблену неперервність ми тут будемо називати S-неперервністю.

Кажуть, що топологічний простір X має *властивість нерухомої точки*, якщо кожна неперервна функція $f : X \to X$ має нерухому точку. В [294] Дж.Стеллінґз встановив наступний результат: якщо X – гаусдорфовий простір з властивістю нерухомої точки, то кожне S-неперервне відображення

$f : X \to X$ має нерухому точку.

К.Келлум в [150] помітив, що S-неперервних функцій з $[a, b]$ в $\mathbb{R}$ настільки багато, що кожна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ є сумою двох S-неперервних функцій. Крім того, існують скрізь розривні S-неперервні функції з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Також відмітимо, що в [118] З.Ґранде було наведено приклад нарізно неперервної функції $f : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$, яка не є S-неперервною. Пізніше в [323] В.Крецу та В.Маслюченком було запропоновано загальний метод побудови нарізно неперервних не S-неперервних функцій $f : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$, який показує, що крім прикладу З.Ґранде і класична нарізно неперервна функція Шварца не є S-неперервною.

Зауважимо, що кожна S-неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є зв'язною функцією, а отже, має властивість Дарбу і тому множина точок неперервності S-неперервної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ може бути порожньою.

Локальна характеризація S-неперервності для функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ була дана в [143]. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається *S-неперервною справа в точці x*, якщо:

1) $f(x) \in C^+(f, x)$;

2) існує число $\varepsilon > 0$, таке, що для відкритої множини W в $\mathbb{R}^2$, такої, що $Grf|_{[x,+\infty)} \subseteq W$, довільної точки $y \in (\underline{\lim}_{t\to x+0} f(f), \overline{\lim}_{t\to x+0} f(f))$, довільного околу O точки (x, y) в $\mathbb{R}^2$ і довільної точки $t \in (x, x + \varepsilon)$ існує неперервна функція $g : [x, x + \varepsilon] \to \mathbb{R}$, така, що $Grg \subseteq W \cup O$, $g(x) = y$ і $g(t) = f(t)$.

Аналогічно вводиться поняття *S-неперервності зліва в точці*. Якщо функція f S-неперервна справа і зліва в точці x, то вона називається *S-неперервною в точці x*. В [143] встановлено, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ S-неперервна тоді і тільки тоді, коли f S-неперервна для кожного $x \in \mathbb{R}$. Там же встановлено, що множина точок S-неперервності довільної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є типу G_δ, а також розв'язано обернену задачу.

1.3.4. Для функцій першого класу Бера властивість Дарбу еквівалентна іншим властивостям [96]. В 1907 році Дж.Юнґ [315] розглянув таку властивість функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: для кожної точки $x \in \mathbb{R}$ існують послідовності (x'_n) і (x''_n), такі, що $x'_n < x'_{n+1} < x < x''_{n+1} < x''_n$ для кожного номера n, $x'_n \to x$, $x''_n \to x$, $f(x'_n) \to f(x)$ і $f(x''_n) \to f(x)$. Таку властивість функції називають *властивістю Юнґа*. В [315] Дж.Юнґ встановив, що для функцій першого класу Бера властивість Дарбу і властивість Юнґа

еквівалентні.

Узагальненням властивості Юнґа на випадок довільних топологічних просторів стала периферійна неперервність, яка була введена О.Гамільтоном в [129]. Відображення $f : X \to Y$ називається *периферійно неперервним в точці* $x \in X$, якщо для довільних околів U і V точок x в X і $y = f(x)$ в Y, відповідно, існує відкритий окіл G точки x в X, такий, що $G \subseteq U$ і $f(fr(G)) \subseteq V$, де $fr(G)$ означає межу множини G, і просто *периферійно неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці $x \in X$.

Всі функції з введеними в цьому підрозділі властивостями називаються функціями типу Дарбу. До функцій типу Дарбу також відносяться розширювальні функції [294]. Для дійсних функцій до типу Дарбу відносять функції з досконалим шляхом [201], властивістю проміжного значення Кантора [100] та сильною (слабкою) властивістю проміжного значення Кантора [99, 279].

Деякі результати, пов'язані з функціями типу Дарбу досліджувались в [219, 141, 46, 90, 47, 187, 151, 81, 174, 300, 168, 245, 246, 58, 59, 91, 148, 98, 56, 97, 175, 104, 108, 277, 128, 247, 190, 142, 179, 291, 100, 124, 311, 152, 55, 220].

1.4. Функції із замкненим графіком

1.4.1. Властивості відображень з замкненим графіком добре вивченні і їм присвячена чимала література. Зокрема, серед великої кількості результатів, пов'язаних з умовою замкненості графіка, слід відзначити теорему Банаха про замкнений графік [318, с. 35, теорема 7], яка твердить, що для довільних F-просторів X та Y кожне адитивне відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком є неперервним. У XX ст. ця теорема дістала значний розвиток у працях різних математиків (див. [158] і вказану там літературу).

Легко переконатися, що не кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною. Однак, за певних умов на простори відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком буде неперервним. Наприклад, добре відомий такий результат [73, с. 228]: якщо X – гаусдорфовий простір і Y – компакт, то відображення $f : X \to Y$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно має замкнений графік. Інші результати на цю тему є в статтях [270, 5, 258, 307, 272]. Сюди ж слід долучити і результат К.Е.Барґеса [52]:

кожна локально обмежена функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною.

Зауважимо, що функції з замкненим графіком самі по собі не дуже розривні. А саме, І.Баґґс [7] показав, що підмножина числової прямої $\mathbb{R}$ є множиною точок розриву функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком тоді і тільки тоді, коли вона замкнена і ніде не щільна в $\mathbb{R}$. Результат Баґґса Й.Добош [67] переніс на функції $f : X \to \mathbb{R}$, що задані на берівських метризовних просторах. Крім того, він встановив, що для довільного топологічного простору X множина $D(f)$ точок розриву функції $f : X \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є замкненою множиною першої категорії в X і, навпаки, кожна замкнена множина першої категорії в досконало нормальному просторі X є множиною точок розриву деякої функції $f : X \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком. Ці дослідження були ним продовжені у праці [65], в якій, зокрема, доведено, що кожна двосторонньо квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною.

Тип множини точок неперервності функції із замкненим графіком досліджувався в [8, 66].

В працях [130, 244] було введено поняття замкненості графіка в точці. Для відображення $f : X \to Y$ покладемо $C(f, x) = \bigcap\{\overline{f(U)} : U-$ окіл точки $x\}$. Множина $C(f, x)$ називається граничною множиною функції f у точці x. Відображення $f : X \to Y$ має *замкнений графік в точці* $x \in X$, якщо $C(f, x) = \{f(x)\}$. Множину $C(f, x)$ називають*граничною множиною* f *у точці* x. Позначимо через $H(f)$ множину точок, у яких відображення f має замкнений графік. Множину $H(f)$ описано в [24]: для майже розкладного топологічного простору X підмножина H буде множиною точок замкненності графіка деякої функції $f : X \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли H є G_δ-множиною.

1.4.2. Умова замкненності графіка багатьма математиками, для одержання точніших результатів в деяких декомпозиційних теоремах замінюється на її слабші (для багатьох типів просторів) аналоги. Так в [163] Н.Левін вводить поняття w^*-неперервності і доводить, що для довільних топологічних просторів X і Y відображення $f : X \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно слабко неперервне і w^*-неперервне. Відображення $f : X \to Y$ називається w^**-неперервним*, якщо множина $f^{-1}(fr(V))$ є замкненою в X для кожної відкритої множини V в Y. Р.Мімна і Д.Розе

узагальнили поняття w^*-неперервності, увівши в [208] поняття локальної w^*-неперервності. Відображення $f : X \to Y$ називається *локально w^*-неперервним*, якщо існує база $\mathcal{B}$ відкритих множин простору Y, така, що множина $f^{-1}(fr(B))$ є замкненою в X для кожного $B \in \mathcal{B}$. Можна показати, що з локальної w^*-неперервності випливає w^*-неперервність, але не навпаки. Локальна w^*-неперервність застосовувалася Р.Мімною в [205] для заміни умови замкненності графіка в теоремі про неперервність відображень із замкненим та зв'язним графіком.

Продовжуючи ланцюжок послаблень, Р.Мімна та Д.Розе в [209] вводять поняття локальної відносної неперервності для одержання нового результату про декомпозицію неперервності. Відображення $f : X \to Y$ називається *локально відносно неперервним*, якщо існує база $\mathcal{B}$ відкритих множин простору Y, така, що множина $f^{-1}(B)$ є відкритою у підпросторі $f^{-1}(\overline{B})$ для кожного $B \in \mathcal{B}$. Ще слабшим виявилося поняття w^*-квазінеперервності, яке було введене М.Матейдесом в [199], однак його вже не достатньо для одержання неперервності w^*-квазінеперервних відображень зі зв'язним графіком. Відображення $f : X \to Y$ називається *w^*-квазінеперервним у точці $x \in X$*, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існують відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y і квазівідкрита множина A в X, такі, що $W \subseteq V$, $x \in A$ і $A \cap f^{-1}(fr(W)) = \varnothing$ і просто *w^*-квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці x з X.

Поняття перехідності функцій $f : X \to \mathbb{R}$, яке було введене В.Крецу та В.Маслюченком в [323] для встановлення неперервності S-неперервних функцій із замкненим графіком, теж є ослабленням умови замкненності графіка. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *перехідною зверху /знизу/ в точці x*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існують окіл U точки x і точка $y \in (f(x), f(x) + \varepsilon)$ $/y \in (f(x) - \varepsilon, f(x))/$, такі, що $U \cap f^{-1}(y) = \varnothing$. Якщо функція перехідна зверху і знизу в точці x, то вона називається *перехідною в точці x*. Функція називається *перехідною /зверху, знизу/*, якщо вона є такою в кожній точці x з X.

1.4.3. Графічна неперервність була введена З.Ґранде в [120] під назвою F-неперервність як ослаблення умови замкненності графіка. Там З.Ґранде вивчав властивості F-неперервних з $[0, 1]$ в $\mathbb{R}$, де, зокрема, встановив, що довільна функція $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ є сумою двох F-неперервних, добутком

двох F-неперервних чи поточковою границею послідовності F-неперервних функцій. Пізніше А.Захареску в [316] назвав цей тип узагальненної неперервності графічною неперервністю. Відображення $f : X \to Y$ називається *графічно неперервне*, якщо існує неперервне відображення $g : X \to Y$, таке, що $Gr(g) \subseteq \overline{Gr(f)}$. Аналогічно до графічної неперервності в [204] А.Мікукка вводиться поняття графічної квазінеперервності.

Багато питань, пов'язаних з графічною неперервністю та її аналогами розглянуто в працях [267, 281, 103, 203, 283, 284, 285].

1.5. Інші ослаблення неперервності

Поняття α-неперервності було введене в [240] Т.Ноірі під назвою сильна напівнеперервність у зв'язку з вивченням образів зв'язних просторів. Сам термін α-неперервність з'явився в [171]. Відображення $f : X \to Y$ називається *α-неперервним*, якщо для кожної відкритої множини V в Y прообраз $f^{-1}(V)$ є α-відкритою множиною в X. Множина A *α-відкрита* [223], якщо $A \subseteq int(\overline{intA})$.

Екстремальна майже неперервність, екстремальна β-неперервність, LC-неперервність, суб-LC-неперервність та ic-неперервність були введені для одержання нових декомпозиційних теорем. Підмножина A простору X називається:

- *локально замкненою* [89], якщо $A = U \cap F$, де U – відкрита множина в X і F – замкнена множина в X;
- *внутрішньо-замкнена* [88], якщо множина $intA$ замкнена в A.

Відображення $f : X \to Y$ називається:

- *екстремально майже неперервним* [71], якщо f майже неперервне і множина S_f замкнена в X;
- *екстремально β-неперервним* [71], якщо відображення f майже неперервне чи квазінеперервне в кожній точці з X і S_f – замкнена множина в X;

- *LC-неперервним в точці $x \in X$* [89], якщо для кожної відкритої множини V в Y прообраз $f^{-1}(V)$ є локально замкненою множиною в X;

- *суб-LC-неперервним в точці $x \in X$* [89], якщо існує база $\mathcal{B}$ простору Y, така, що для кожної множини $V \in \mathcal{B}$ прообраз $f^{-1}(V)$ є локально замкненою множиною в X;

- *ic-неперервним в точці $x \in X$* [88], якщо для кожної відкритої множини V в Y прообраз $f^{-1}(V)$ є внутрішньо-замкненою множиною в X.

Поняття функції типу Чезаро було введено в [293], також як необхідна умова неперервності в декомпозиційній теоремі. Відображення $f : X \to Y$ називається *функцією типу Чезаро*, якщо існують відкриті непорожні множини U в X і V в Y, що для кожного $y \in V$ множина $f^{-1}(y)$ щільна в U.

В [147] П.Келлер увів поняття щільної властивості відображення для характеризації омега-граничних множин функцій з властивістю Дарбу. Відображення $f : X \to Y$ має *щільну властивість відображення*, якщо для кожної підмножини A в X, такої, що множина $\overline{A}$ зв'язна в X маємо, що $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. В [207] Р.Мімна довів, що для функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ щільна властивість відображення рівносильна двосторонній квазінеперервності.

Поняття функції Ґібсона та слабкої функції Ґібсона увів К.Келлум для встановлення неперервності функцій $f : X \to \mathbb{R}$, у яких множина $(X \times \mathbb{R}) \setminus Grf$ незв'язна. Відображення $f : X \to Y$ називається *функцією Ґібсона*, якщо $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$ для всіх відкритих множин U в X. Відображення $f : X \to Y$ називається *слабкою функцією Ґібсона*, якщо $f(\overline{O}) \subseteq \overline{f(O)}$ для довільної області (відкритої та зв'язної множини) O в X.

Крім S-неперервних функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ в [294] Дж.Стеллінґз розглядав вужчий клас так званих розширювльних функцій. Відображення $f : X \to Y$ називається *розширювальне*, якщо існує зв'язне відображення $g : X \times [0, 1] \to Y$, таке, що $f(x) = g(x, 0)$ для всіх $x \in X$.

Як модифікація майже неперервності та ледь неперервності виникло поняття майже ледь неперервності [249]. Відображення $f : X \to Y$ називається *майже ледь неперервним в точці $x \in X$*, якщо кожного для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що

$int\overline{A} \neq \varnothing$ і $f(A) \subseteq V$.

Слабка неперервність, яка було введена Н.Левіним в [163], в парі з w^*-неперервністю утворюють декомпозицію неперервності. Відображення $f : X \to Y$ називається *слабко неперервним*, якщо для довільної відкритої множини V в Y маємо, $f^{-1}(V) \subseteq int(f^{-1}(\overline{V}))$.

Інші ослаблення неперервності подано в [93].

1.6. Точки сукупної неперервності функцій багатьох змінних

1.6.1. В дослідженнях множини $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to Z$ та їх аналогів, що беруть свій початок від класичних працях Р.Бера [10] та В.Осгуда [243], розставлені ще далеко не всі крапки над "і", навіть у тому випадку, коли простір Z метризовний, а на простір Y накладаються певні умови зліченності чи розглядаються їх модифікації, як-от множини зліченного типу, які були введені у праці Дж.Калбрі та Ж.-П. Троалліка [53]. Історію розвитку цієї тематики у XX столітті найповніше висвітлено у дисертації В.К.Маслюченка [331], а новітні результати – в дисертаціях В.В.Михайлюка [358], О.Маслюченка [327] та О.Філіпчук [394]. У цих працях наводяться інтригуючі питання, на багато з яких і досі не знайдено відповіді. Далі ми проаналізуємо лише окремі результати з даної тематики.

Нехай X, Y та Z – топологічні простори. Для відображення $f : X \times Y \to Z$ будемо розглядати розрізи $f^x : Y \to Z$, $x \in X$, і $f_y : X \to Z$, $y \in Y$, де $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *нарізно неперервним в точці* $p = (x, y)$, якщо відображення f^x неперервне в точці y і відображення f_y неперервне в точці x. Якщо відображення $f : X \times Y \to Z$ нарізно неперервне в кожній точці з $X \times Y$, то воно називається *нарізно неперервним*. Клас нарізно неперервних відображень, які визначені на $X \times Y$ зі значеннями в Z, позначають $CC(X \times Y, Z)$.

Відправним пунктом даного дослідження є праця Дж.Калбрі та Ж.-П. Троалліка [53]. В ній автори вводять поняття *множини зліченного типу*, тобто такої підмножини B простору Y, для якої існує послідовність відкритих в Y множин V_n, така, що для кожного $y \in B$ система $\{V_n : y \in V_n\}$ є базою

околів точки y в Y. За допомогою цього поняття вони встановлюють, що для довільних топологічних просторів X і Y, метризовного простору Z, нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to Z$ і множини B зліченного типу в Y, множина $C_B(f) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C(f)\}$ є залишковою в X. Як негайний наслідок цього, в [53] отримано такі результати: якщо X – топологічний простір, простір Y задовольняє першу /другу/ аксіому зліченності, а Z – метричний простір і $f \in CC(X \times Y, Z)$, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = C_{\{y\}}(f)$ залишкова /множина $C_Y(f)$ залишкова/ в X.

Результат Дж.Калбрі та Ж.-П. Троалліка було модифіковано В.Маслюченком в [355] для класу $\overline{C}C(X \times Y, Z)$ майже нарізно неперервних відображень, тобто відображень $f : X \times Y \to Z$, для яких відображення f^x неперервне для всіх $x \in X$, а відображення f_y неперервне для всіх значень y з деякої всюди щільної множини в Y. Зрозуміло, що $CC(X \times Y, Z) \subseteq \overline{C}C(X \times Y, Z)$ для довільних топологічних просторів X, Y та Z.

Інший клас $KC(X \times Y, Z)$ функцій $f : X \times Y \to Z$, які квазінеперервні відносно змінної x і неперервні відносно змінної y, розглянув Н.Мартін в [192]. Цей клас також ширший за клас $CC(X \times Y, Z)$. Н.Мартін встановив наступний результат про наявність точок сукупної неперервності: якщо X – зліченно компактний, квазірегулярний, берівський T_1-простір, простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z – метризовний простір і $f \in KC(X \times Y, Z)$, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ щільна в X. Послабити умови на простір X, у згаданому результаті Н.Мартіна, вдалося Дж.Бреккенріджу та Т.Нішіурі в [45] і З.Пьотровському в [250], де від простору X вимагається лише беровість. А в [329] В.Маслюченко для класу $\overline{K}C(X \times Y, Z)$ функцій $f : X \times Y \to Z$, для яких відображення f^x неперервне для всіх $x \in X$, а відображення f_y квазінеперервне для всіх значень y з деякої всюди щільної множини в Y, встановив, що коли X – топологічний простір, простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z – метризовний простір і $f \in \overline{K}C(X \times Y, Z)$, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ залишкова в X.

Як уже зазначалося в підрозділі 1.1.7, К.Беґель в [42] для функцій визначених на добутках паралелепіпедів увів певне ослаблення поняття квазінеперервності під назвою умова (A), за допомогою якого встановив, що кожна функція від двох змінних, яка визначена на добутку паралелепіпедів,

задовольняє умову (A) і неперервна відносно другої змінної має на кожній горизонталі всюди щільну множину точок неперервності [42, лема 3]. Результат К.Беґеля узагальнив Г.Ган в [125] на той випадок, коли в ролі X і Y розглядаються метричні простори. В.Маслюченко та В.Нестеренко в [350, 342, 353] перенесли результат К.Беґеля його ж методом на випадок загальних топологічних просторів, при цьому замінивши умову (A) її топологічним аналогом – горизонтальною квазінеперервністю: якщо X – топологічний простір, простір Y задовольняє першу /другу/ аксіому зліченності, Z – метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – горизонтально квазінеперервне і неперервне відносно другої змінної відображення, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ /$C_Y(f)$/ залишкова в X. Клас горизонтально квазінеперервних і неперервне відносно другої змінної відображень $f : X \times Y \to Z$ будемо позначати через $K_hC(X \times Y, Z)$.

Однак, аналогу загальної теореми Калбрі-Труалліка для множин зліченного типу довгий час не було знайдено ні для KC-функцій, ні, тим більше, для K_hC-функцій.

1.6.2. Кажуть [339], що відображення $f : X \times Y \to Z$ має *властивість Гана*, якщо множина $C_Y(f)$ залишкова в X. Клас відображень $f : X \times Y \to Z$ з властивістю Гана будемо позначати через $H(X \times Y, Z)$. Як вже зазначалося вище В.Маслюченко встановив, що $H(X \times Y, Z) \supseteq \overline{C}C(X \times Y, Z)$ для топологічного простору X, простору Y, який задовольняє другу аксіому зліченності та метризовного простору Z. Результат, пов'язаний з властивістю Гана, було одержано в [45] Дж.Бреккенріджем та Т.Нішіурою: якщо X – берівський простір, Y і Z – метризовні простори, E – щільна підмножина Y, відображення $f : X \times Y \to Z$, таке, що f^x рівномірно неперервне для всіх $x \in X$, f_y – квазінеперервне для всіх $y \in E$ і проекція множини $D(f)$ на Y є сепарабельною підмножиною, то існує множина A першої категорії в X, така, що $D(f) \subseteq A \times Y$.

Як уже зазначалося в підрозділі 1.6.1, В.Маслюченко та В.Нестеренко встановили, що якщо X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – горизонтально квазінеперервне і неперервне відносно другої змінної відображення, то $f \in H(X \times Y, Z)$.

В [44] А.Бузіад та Ж.-П.Троаллік, використавши поняття

квазінеперервності знизу для многозначних відображень, отримали такий результат.

Теорема 1.6.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, $f : X \times Y \to Z$ – відображення і $\mathcal{B}$ – не більш ніж зліченна система непорожніх підмножин Y, така, що для кожного $V \in \mathcal{B}$ многозначне відображення $F_V : X \to Z$, $F_V(x) = f(\{x\} \times V)$, квазінеперервне знизу. Тоді існує залишкова множина R в X, така, що для кожного $x \in R$ і довільного $y \in Y$ з того, що відображення f^x неперервне в точці y і система $\mathcal{B}(y) = \{V \in \mathcal{B} : V$ – окіл точки $y\}$ – база околів точки y в Y, випливає, що f сукупно неперервне в точці (x, y).*

Як наслідок маємо, що коли X – топологічний простір, простір Y задовольняє першу /другу/ аксіому зліченності, Z – метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – слабко горизонтально квазінеперервне і неперервне відносно другої змінної відображення, то то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ залишкова в X $/f \in H(X \times Y, Z)/$.

1.6.3. В [261] З.Пьотровський та Е. Вінґлер встановили, що коли X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, причому $X \times Y$ – берівський простір, Z – метричний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ неперервне відносно першої змінної і точково розривне відносно другої змінної, то $C(f)$ – щільна G_δ підмножина в $X \times Y$.

Відмітимо два результати В.Маслюченка, В.Михайлюка та В.Нестеренка з [338] про точки сукупної неперервності відображення від двох змінних за участю горизонтальної казінеперервності:

1) якщо X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метризовний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне і множина $\{x \in X : D(f^x) -$ першої категорії$\}$, то множина $C(f)$ залишкова в $X \times Y$, а якщо $X \times Y$ берівський, то відображення f точково розривне;

2) якщо X – топологічний простір, Y – берівський простір, який має зліченну псевдобазу, Z – метризовний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне і f^x – точково розривне для всіх $x \in X$, то множина $\{x \in X : \overline{\{y \in Y : (x, y) \in C(f)\}} = Y\}$ залишкова в X, а якщо $X \times Y$ берівський, то відображення f точково розривне.

В завершення цього підрозділу нагадаємо питання З.Пьотровського з [251]

на цю тему: якщо $X \times Y$ – берівський простір, причому простір X з першою аксіомою зліченності, Y – повний за Чехом простір, Z – метричний простір і відображення $f : X \times Y \to Z$, таке, що f^x точково розривне для кожного $x \in X$ і f_y неперервне для кожного $y \in Y$, то чи обов'язково $C(f) \neq \varnothing$? Відповіді на це питання поки не має.

1.7. Сукупні властивості нарізно ослабленно неперервних функцій

1.7.1. Одним з небагатьох ослаблень неперервності, яке при наявності у відображення нарізних властивостей гарантує сукупну властивість, є квазінеперервність. Ще В.Вольтерра наприкінці XIX століття виявив, що кожна нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ має властивість, яку С.Кемпістий в [153] назвав квазінеперервністю. На пріоритет В.Вольтерри вказує Р.Бер, який в своїй дисертації [10], використовуючи той факт, що у нарізно неперервної функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ на кожній горизонталі існує всюди щільна множина точок неперервності, встановив, що нарізно неперервна функція з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$ є квазінеперервною за сукупністю змінних. Квазінеперервність нарізно неперервних функцій $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ вперше встановив Г.Ган в [125].

С.Кемпістий в [153], крім введення самого терміну квазінеперервність, дав не тільки значно простіше доведення теореми Гана про квазінеперервність нарізно неперервних функцій $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, але й встановив, що і нарізно квазінеперервні (тобто, квазінеперервні відносно кожної змінної) функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ будуть квазінеперервними. Результат С.Кемпістого Н.Мартін в [192] переніс на випадок загальних топологічних просторів: якщо X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – нарізно квазінеперервне відображення, то f квазінеперервне за сукупністю змінних. Клас нарізно квазінеперервних відображень з $X \times Y$ в Z будемо позначати $KK(X \times Y, Z)$.

Ще до результату Н.Мартіна в [202] Й.Мібу встановив наступні два результати про сукупну неперервність: для берівського простору X, метричного простору Y і відображення $f : X \times Y \to Z$:

1) якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності і

$f \in \overline{C}C(X \times Y, Z)$, або

2) якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, f_y неперервне для всіх $y \in Y$ і f^x квазінеперервне для всіх x з X за винятком множини першої категорії (клас таких відображень позначається $C\widetilde{K}(X \times Y, Z)$),
то відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних.

Квазінеперервність нарізно квазінеперервних функцій досліджувалася багатьма математиками XX століття. Загальний результат, який у різних формах фігурує у Т.Нойбруна [231, 234], Дж.Бреккенріджа та Т.Нішіури [45], С.Наймпалі [213] формулюється так: якщо X – k-берівський простір, простір Y має базу топології потужності k і Z – регулярний простір, то кожне відображення $f \in KK(X \times Y, Z)$ є квазінеперервне за сукупністю змінних.

Подальше узагальнення результату С.Кемпістого відбулося завдяки заміні умови квазінеперервності відносно першої змінної на горизонтальну квазінеперервність. Клас відображень $f : X \times Y \to Z$, які горизонтально квазінеперервні і неперервні відносно другої змінної позначають $K_hK(X \times Y, Z)$. Спочатку в [353] В.Маслюченко та В.Нестеренко встановили, що для берівського простору X, простору Y з другою аксіомою зліченності, цілком регулярного простору Z кожне відображення $f \in K_hK(X \times Y, Z)$ є квазінеперервне за сукупністю змінних. В [331] В.Маслюченко для сукупної квазінеперервності відображень $f \in K_hK(X \times Y, Z)$ вимагав щоб простір X був берівським, простір Y мав зліченну псевдобазу, простір Z був метризовним. Далі в [381] включення $K_hK(X \times Y, Z) \subseteq K(X \times Y, Z)$ було встановлене для берівського простору X, простору Y з другою аксіомою зліченності і регулярного простору Z, а в [333] та [375] замість наявності у простору Y зліченної бази вимагалося лише, щоб простір Y мав зліченну псевдобазу. Крім того, в [375] квазінеперервність відображень f^x вимагалася не для всіх $x \in X$, а лише для x з деякої залишкової множини в X.

В [211] А.Мірмостафаїє перевідкрив результат В.Маслюченка з [333]. Там же він одержав результат про сукупну квазінеперервність відображень від двох змінних із застосуванням теорії топологічних ігор. Нехай Y – топологічний простір і $y_0 \in Y$. Розглянемо топологічну гру $\mathcal{G}(Y, y_0)$ між двома гравцями $\mathcal{O}$ і $\mathcal{P}$. Спочатку гравець $\mathcal{O}$ вибирає відкритий окіл V_1 точки y_0. Гравець $\mathcal{P}$ вибирає точку $y_1 \in V_1$. На n-му кроці гравець $\mathcal{O}$

вибирає відкритий окіл V_n точки y_0, а гравець $\mathcal{P}$ вибирає точку $y_n \in V_n$. Кажуть, що гравець $\mathcal{O}$ виграє, якщо $y_n \to y_0$. Простір Y називається W-простором / w-простором/, якщо для кожного $y \in Y$ гравець $\mathcal{O}$ має виграшну стратегію /гравець $\mathcal{P}$ не має виграшної стратегії/ в грі $\mathcal{G}(Y, y)$. А.Мірмостафайє встановив наступне: якщо X – берівський простір, Y – W-простір, Z – регулярний простір, то $K_h K(X \times Y, Z) \subseteq K(X \times Y, Z)$.

Цікавий результат про сукупну квазінеперервність встановлено в [44] А.Бузіадом та Ж.-П.Троаліком: якщо X – берівський простір, для кожної точки $y \in Y$ деякий її окіл має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, $f : X \times Y \to Z$ і виконується одна з умов:

1) для кожного $x \in X$ відображення f^x квазінеперервне і існує щільна множина $D_x \subseteq Y$, така, що f_y квазінеперервне в точці x для кожного $y \in D_x$ (клас таких відображень позначається $\overline{K}_w K(X \times Y, Z)$);

2) для кожного $y \in Y$ відображення f_y квазінеперервне і існує щільний берівський підпростір $Q_y \subseteq X$, такий, що що f^x квазінеперервне в точці y для кожного $x \in Q_y$ (клас таких відображень позначається $K\widetilde{K}_w(X \times Y, Z)$); то відображення f квазінеперервне.

Сукупну квазінеперервність відображень від двох змінних досліджував і М.Матейдес в [199]. Там він, використовуючи поняття w^*-квазінеперервності, встановив, шо для локально зв'язних просторів X та Y, простору Z з другою аксіомою зліченності, відображення $f : X \times Y \to Z$, яке має слабку властивість Дарбу відносно кожної із змінних, відображення f буде w^*-квазінеперервним у всіх точках крім можливо множини першої категорії тоді і тільки тоді, коли f квазінеперервне у всіх точках крім можливо множини першої категорії.

Деякі результати про сукупну квазінеперервність подано також в [159].

1.7.2. В [153] С.Кемпістий крім звичайної квазінеперервності, для функцій визначених на добутку n-вимірного паралелепіпеда та інтервалу, вводить поняття симетричної квазінеперервності і встановлює, що функцій f з класу $KC(X \times Y, \mathbb{R})$, де X – n-вимірний паралелепіпед, а Y – інтервал, є симетрично квазінеперервною відносно відносно першої змінної. Н. Мартін в [192] переніс теорему Кемпістого про симетричну квазінеперервність на відображення $f \in KC(X \times Y, Z)$ у тому випадку, коли X – берівський простір, простір Y задовольняє першу аксіому зліченності і Z – метризовний

простір. Крім цього, узагальнення класичного результату С.Кемпістого про симетричну квазінеперервність зустрічається в роботах Дж.Бреккенріджа та Т.Нішіури [45], З.Пьотровського [253, 254], Дж. Лі та З.Пьотровського [162] і в найзагальнішому вигляді формулюється так [235]: якщо X – k-берівський простір, для кожної точки $y \in Y$ існує база околів потужності k і Z – регулярний простір, то кожне відображення $f : X \times Y \to Z$, яке квазінеперервне відносно змінної x для всіх y, що пробігають щільну в Y множину H та f^x неперервне в кожній точці з H для всіх x, є симетрично квазінеперервне відносно змінної y в кожній точці $(a, b) \in X \times H$.

Легко зрозуміти, що коли відображення $f : X \times Y \to Z$ симетрично квазінеперервне відносно змінної x в точці $(a, b) \in X \times Y$, то відображення f^a квазінеперервне в точці b. На відміну від сукупної неперервності сукупна квазінеперервність не гарантує нарізної квазінеперервності. Однак виявляється, що квазінеперервні відображення будуть симетрично квазінеперервними в багатьох точках, а отже, нарізно квазінеперервним в цих точках. Це показує наступний результат з [337]: якщо простір X задовольняє другу аксіому зліченності, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності або метризовний, Z – сепарабельний метризовний простір і відображення $f : X \times Y \to Z$ сукупно квазінеперервне, то існує в Y залишкова множина B, така, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно змінної y в кожній точці множини $X \times B$. Як наслідок звідси випливає, що при вказаних вище умовах на простори для квазінеперервного відображення $f : X \times Y \to Z$ існує залишкова множина B в Y, така, що відображення f_y квазінеперервне для кожного $y \in B$. Подібний результат був отриманий в [157] Е.Котлікою та А. Малізевським: якщо функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ квазінеперервна (клікова), то множини

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f^x \text{ не є квазінеперервна}\}(B = \{x \in \mathbb{R} : f^x \text{ не є клікова}\})$$

першої категорії. Результати, пов'язані з квазінеперервністю нарізно квазінеперервних відображень та симетричною квазінеперервністю широко розглянуті в [235].

Слід також відзначити результат А.Мірмостафайє [212], що був отриманий з допомогою топологічних ігор. В [212] встановлено, що для регулярного простору Z, берівського простору X і W-простору Y, або α-сприятливого простору X і w-простору Y, кожне відображення $f \in KC(X \times Y, Z)$ є

симетрично квазінеперервним відносно y.

1.7.3. Оскільки кожна точково розривна функція зі значеннями в метричному просторі є кліковою, то всі результати з підрозділу 1.6, в яких $\overline{C(f)} = X \times Y$, є результатами і про сукупну кліковість.

На відміну від квазінеперервності ні кліковість, ні точкова розривність відносно кожної із змінних не гарантують сукупної кліковості чи тим більше точкової розривності. Однак, якщо замінити умову кліковості відносно однієї змінної квазінеперервністю відносно цієї змінної, то можна одержати результат про сукупну кліковість функції від двох змінних. Це зробив Л.Фудалі в [84]: якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, для функції $f : X \times Y \to Z$ розрізи f_y квазінеперервні для всіх $y \in Y$ і розрізи f^x клікові для всіх $x \in X$, то f клікова за сукупністю змінних.

Результат Л.Фудалі трохи покращили А.Бузіад та Ж.-П.Троалік в праці [44], де вони встановили, що якщо X – берівський простір, для кожної точки $y \in Y$ деякий її окіл має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$, таке, що для кожного $y \in Y$ відображення f_y квазінеперервне і існує щільна множина D в Y, для кожної точки y якої існує щільний берівький підпростір Q_y в X, такий, що відображення f^x клікове в точці y для кожного $x \in Q_y$, то відображення f клікове за сукупністю змінних.

Ще один цікавий результат про сукупну кліковість встановив М.Матейдес у [199]: якщо X – берівський простір, Y – берівський простір, кожна відкрита непорожня множина якого містить відкриту зв'язну множину зі зліченною псевдобазою, Z – сепарабельний метричний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$, таке, що f^x має слабку властивість Дарбу та w^*-квазінеперервне для всіх $x \in X$ за винятком множини першої категорії і f_y – квазінеперервне для всіх $y \in Y$, то f клікове.

1.7.4. Зв'язок між нарізними та сукупними властивостями таких ослаблень неперервності як майже неперервність, ледь неперервність та майже ледь неперервність досліджував в своїй праці [249] З.Пьотровський, де в таблиці 3 він показав для яких ослаблень неперервності з сукупних властивостей випливають нарізні і навпаки. Однак, деякі комірки згаданої таблиці залишилися ним не заповненими. Так, за умови того, що простір X берівький,

простір Y з другою аксіомою зліченності, Z – метричний простір (навіть, якщо $X = Y = Z = \mathbb{R}$) З.Пьотровському було не відомо чи буде майже ледь неперервним за сукупністю змінних відображення $f : X \times Y \to Z$, якщо виконується одна з умов:

1) f нарізно ледь неперервне,

2) f нарізно майже неперервне,

3) f нарізно майже ледь неперервне.

Приблизно в один час Я.Борсік [26] та О.Ванксо [309] дали відповіді на питання З.Пьотровського. Ними було встановлено результати, які в загальному вигляді формулюються так: якщо X – берівський простір, простору Y має зліченну псевдобазу, Z – довільний топологічний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$, таке, що f_y ледь неперервне для кожного $y \in Y$ і f^x ледь неперервне для всіх $x \in X$ за винятком множини першої категорії, то f сукупно майже ледь неперервне. Таким чином, відповідь на перше питання З.Пьотровського є позитивною. Приклади Я.Борсік та О.Ванксо (які є дуже схожими) дають негативні відповіді на питання 2) і 3) З.Пьотровського.

Відмітимо ще один результат Я.Борсіка з цієї ж праці [26] про сукупну майже квазінеперервність: якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – довільний топологічний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$, таке, що f_y квазінеперервне для кожного $y \in Y$ і f^x майже квазінеперервне для всіх $x \in X$ за винятком множини першої категорії, то f сукупно майже квазінеперервне.

Також на перше питання З.Пьотровського була дана позитивна відповідь О.Вітренко та В.Маслюченком в роботі [321]. Пізніше В.Маслюченко помічає, що в теоремі про квазінеперервність нарізно квазінеперервних відображень і теоремі про майже ледь неперервність нарізно ледь неперервних відображень використовується категорний метод і схожі класифікаційні процедури. В [333] він, використовуючи поняття горизонтальної ледь неперервності і змішану майже ледь неперервність, встановлює загальний результат, наслідками якого є теореми про сукупну квазінеперервність, майже квазінеперервність і майже ледь неперервність: якщо X – берівський простір, Y – топологічний простір, який має зліченну псевдобазу, Z – довільний топологічний простір, $f : X \times Y \to Z$, то:

(i) якщо f горизонтально ледь неперервне і f^x майже ледь неперервне для

всіх $x \in X$, то f майже ледь неперервне;

(ii) якщо f горизонтально квазінеперервне і f^x майже квазінеперервне для всіх $x \in X$, то f майже квазінеперервне;

(iii) якщо простір Y регулярний, f горизонтально квазінеперервне і f^x ледь неперервне для всіх $x \in X$, то f ледь неперервне;

(iv) якщо простір Y регулярний, f горизонтально квазінеперервне і f^x квазінеперервне для всіх $x \in X$, то f квазінеперервне.

1.7.5. У [109] З.Гранде досліджував властивості функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, вертикальні розрізи $f^x = f(x, \cdot)$ яких мають замкнений графік. Зокрема, там встановлено, що при відповідних умовах на простори, якщо у функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, всі вертикальні x-розрізи f^x якої мають замкнений графік, а всі y-розрізи $f_y = f(\cdot, y)$ одностайно неперервні (мають властивість Бера, клікові чи вимірні за Лебеґом), то функція f має замкнений графік (має властивість Бера, клікова чи вимірна за Лебеґом) як функція від двох змінних.

1.7.6. Р.Мімна в [205] встановив, що для локально зв'язних просторів X та Y нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ має слабку властивість Дарбу. Пізніше, в своїй дисертації [206] цей же результат Р.Мімна доводить для довільного топологічного простору Y. Результат Р.Мімни М.Матейдес покращив в [199]: якщо X та Y – локально зв'язні простори, Z – довільний топологічний простір і відображення $f : X \times Y \to Z$ має слабку властивість Дарбу відносно кожної із змінних, то f має слабку властивість Дарбу і за сукупністю змінних.

Деякі результати про сукупні властивості певних типів ослабленної неперервності відображень від двох змінних подано в [105, 161, 159, 260, 43, 210, 199, 250, 233, 236, 195, 340, 44, 202, 251, 114, 200, 115, 252, 253, 254, 313, 119, 198, 257, 212, 121, 117, 12].

1.8. Загальні підходи до означення різних ослаблень неперервності

1.8.1. У зв'язку з тим, що різноманітних ослаблень неперервності є дуже велика кількість і багато з них мають спільні риси, природно виникло питання про введення загальних означень, з яких як часткові випадки одержують ті

чи інші поняття.

В [336] було введено поняття $\mathcal{A}$-квазінеперервності. Нехай $\mathcal{A}$ – деяка система непорожніх підмножин топологічного простору X. Відображення $f : X \to Y$ називається *$\mathcal{A}$-квазінеперервним у точці* $x \in X$, якщо для довільних околів U та V точок x в X та y в Y відповідно існує множина $A \in \mathcal{A}$, така, що $A \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$, і просто *$\mathcal{A}$-квазінеперервним*, якщо воно є таким в кожній точці. Якщо $\mathcal{A}$ – система всіх відкритих непорожніх підмножин в X, то $\mathcal{A}$-квазінеперервність рівносильна звичайній квазінеперервності, а коли $\mathcal{A}$ – система всіх десь щільних підмножин в X, то $\mathcal{A}$-квазінеперервність – це майже квазінеперервність.

Ще загальніше означення було введено Ж. Вільмом та Е.Розасом в [310]. Нехай T – топологічний простір з топологією $\mathcal{T}$. Відображення $\alpha : \mathcal{T} \to 2^T$ називається *оператором на* $(T, \mathcal{T})$, якщо $U \subseteq \alpha(U)$ для кожного $U \in \mathcal{T}$. Нехай X і Y – топологічні простори з топологіями $\mathcal{G}$ і $\mathcal{H}$ відповідно, α, β – оператори на $(X, \mathcal{G})$, θ, ∂ – оператори на $(Y, \mathcal{H})$ і $\mathcal{I}$ – власний ідеал $(X, \mathcal{G})$. Відображення $f : X \to Y$ називається *$(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-неперервним*, якщо для довільної множини $V \in \mathcal{H}$ маємо, що

$$\alpha(f^{-1}(\theta(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\partial(V))) \in \mathcal{I}.$$

Якщо α, θ, ∂ – тотожні оператори, $\beta(U) = int\overline{U}$ для кожного $U \in \mathcal{G}$ і $\mathcal{I} = \{\varnothing\}$, то $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-неперервність є майже неперервністю. У випадку коли α, θ, ∂ – тотожні оператори, $\beta(U) = intU$ для кожного $U \in \mathcal{G}$ і $\mathcal{I}$ – система ніде не щільних непорожніх підмножин в X, то $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-неперервність рівносильна квазінеперервності.

О.Маслюченко в [326] увів поняття $\mathcal{A}$-неперервності та дослідив множину точок розриву $\mathcal{A}$-неперервних функцій. Нехай $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$ – сім'я непорожніх систем в X. Відображення $f : X \to Y$ називається *$\mathcal{A}$-неперервним в точці* $x \in X$, якщо для довільного околу V точки $f(x)$ в Y існує множина $A \in \mathcal{A}_x$, така, що $f(A) \subseteq V$. Якщо відображення є $\mathcal{A}$-неперервним в кожній точці, то воно називається $\mathcal{A}$-неперервним.

Подібне узагальнення неперервності було введене в [271] Х.Ріхтером під назвою $\mathcal{O}_*$-неперервність. Нехай $\mathcal{O}_* \subseteq 2^X$. Відображення $f : X \to Y$ називається *$\mathcal{O}_*$-неперервним*, якщо $f^-(V) \in \mathcal{O}_*$ для довільної відкритої множини V в X.

Інші підходи до означення різних ослаблень неперервності подано в [32, 102].

1.9. Операції над різними ослаблено неперервними функціями

1.9.1. Легко переконатися, що сума двох квазінеперервних функцій не зобов'язана бути квазінеперервною. Однак, сума двох клікових функцій є кліково. В 1985 році З.Ґранде [121] встановив, що кожна клікова функція f, яка визначена на $\mathbb{R}$, є сумою чотирьох квазінеперервних функцій, а у випадку, коли f локально обмежена, є сумою трьох квазінеперервних функцій. Є.Стронська в [295] показала, що кожна клікова функція f, яка визначена на $\mathbb{R}^n$ є сумою шести квазінеперервних функцій, а пізніше встановила, що для сепарабельного метризовного берівського простору X без ізольованих точок кожна клікова функція $f : X \to \mathbb{R}$ є сумою трьох квазінеперервних функцій.

Пізніше Я.Борсік та Й.Добош [37] довели, що кожна клікова функція, яка визначена на $\mathbb{R}^n$, є сумою двох просто неперервних функцій, кожна з яких, в свою чергу, може бути записана як сума двох квазінеперервних функцій. Потім Я.Борсік в [35] встановив, що кожна клікова функція $f : X \to \mathbb{R}$, яка визначена на сепарабельному метризовному просторі X, є сумою трьох квазінеперервних функцій, а в [22] умова сепарабельності X була знята.

З.Ґранде в [113] показав, що кожна клікова функція, яка визначена на $\mathbb{R}$, є сумою двох квазінеперервних функцій, а в [186] (див. також [181]) А.Малізевський встановив цей результат для функцій $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Нарешті Я.Борсік [36] довів, що кожна клікова функція, яка визначена на псевдометризовному просторі, є сумою двох квазінеперервних функцій.

Для функцій типу Дарбу відомо, що кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є сумою двох двох функцій з властивістю Дарбу (А.Лінденбаум [166]), зв'язних функцій (Д.Філліпс [248]), S-неперервних функцій (К.Келлум [150]), функцій з досконалим шляхом (К.Банажевський [13]) чи периферійно неперервних функцій (К.Банажевський [13]).

Сума та добуток двох функцій із замкненим графіком не обов'язково має замкнений графік. Однак, сума двох невід'ємних функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ із

замкненим графіком є функцією із замкненим графіком. Цей факт встановив Й.Добош в [67]. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається *функцією першого із зірочкою класу Бера*, якщо для кожної непорожньої замкненої множини $F \subseteq \mathbb{R}$ існує непорожня відкрита в F множина G, така, що звуження $f|_F$ функції f на F неперервне в кожній точці з G. В [69] Й.Добош встановив, що кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ першого із зірочкою класу Бера є різницею двох невід'ємних функцій $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком, причому $D(f_1) \cup D(f_2) \subseteq \overline{D(f)}$.

В [34] Я.Борісік встановив, що для досконало нормального простору X функція $f : X \to \mathbb{R}$ є сумою двох функцій із замкненим графіком тоді і тільки тоді, коли f є кусково неперервною. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *кусково неперервною*, якщо існує послідовність (X_n) замкнених підмножин простору X, така, що $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ і звуження $f|_{X_n}$ є неперервним для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Раніше, в [41], Я.Борсік, Й.Добош та М.Репіський встановили, що якщо X – сепарабельний метричний берівський простір, то для функції $f : X \to \mathbb{R}$ наступні умови еквівалентні:

1) f є сумою трьох квазінеперервних функцій із замкненим графіком;

2) f є кусково неперервною;

3) f є першого із зірочкою класу Бера.

Нарешті, в [288] В.Сіґ встановив, що для метричного простору X, якщо множина $D(f)$ точок розриву функції $f : X \to \mathbb{R}$ є "досить малою", то f є сумою двох квазінеперервних функцій із замкненим графіком. Подібний результат отримали Т.Пореда і В.Пореда в [264].

Дослідження пов'язані з властивостями суми деяких ослаблень неперервності подано в [173, 289, 183, 182, 285, 220, 180, 145].

1.9.2. Історія дослідження сімей функцій, яка може бути записані як добуток квазінеперервних функцій, набагато коротша. В 1990 році Т.Натканєц [222] довів наступну теорему: функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ може бути подана у вигляді скінченного добутку квазінеперервних функцій тоді і тільки тоді, коли f клікова і

($\star$) кожна з множин $f^{-1}((-\infty, 0))$, $f^{-1}(0)$ і $f^{-1}((0, +\infty))$ є об'єднанням відкритої множини і ніде не щільної множини (тобто, є просто відкритою множиною).

Однак, зображення Т.Натканєца містило вісім квазінеперервних функцій.

Пізніше Я.Борсік в [33] довів, що кожна дійсна клікова функція $f : X \to \mathbb{R}$, яка визначена на сепарабельному метричному просторі X і задовольняє умову $(\star)$, є добутком трьох квазінеперервних функцій. Крім того, він показав, що в припущенні беровості простору X в класі клікових функцій умова $(\star)$ рівносильна такій умові: $f^{-1}(0)$ є об'єднанням відкритої множини і ніде не щільної множини. Також в [33] встановлено, що для сепарабельного метризовного простору X кожна клікова функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої множини $f^{-1}((-\infty, 0))$ і $f^{-1}((0, +\infty))$ просто відкриті, є добутком трьох квазінеперервних функцій. Як наслідок звідси одержуємо, що при згаданих умовах на X кожна просто неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ є добутком трьох квазінеперервних функцій. Нарешті А.Малізевський в [186] (див. також [181]) встановив, що $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ може бути подана як добуток двох квазінеперервних функцій тоді і тільки тоді, коли f клікова і задовольняє умову $(\star)$.

Для функцій типу Дарбу відомо, що кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є добутком двох S-неперервних функцій (Т.Натканєц [218]), зв'язних функцій (А.Малізевський [184]) чи функцій з властивістю Дарбу (Дж. Сідр [54]) тоді і тільки тоді, коли f має нуль у кожному відрізку, на якому змінює знак.

Я.Борсік в [34] встановив, що добуток двох невід'ємних функцій із замкненим графіком має замкнений графік. Покладемо

$$\mathcal{H} = \{h : X \to \mathbb{R} : h^{-1}(0) \text{ – замкнена множина і } X \setminus h^{-1}(0) \subseteq H(h)\}.$$

Я.Борсіком в [34] було показано, що для метричного простору X кожна функція $h \in \mathcal{H}$ є добутком двох функцій із замкненим графіком і навпаки.

Добутки різних типів ослабленної неперервності вивчалися в [289, 178, 189, 298, 182, 284, 185].

1.9.3. Спочатку зауважимо, що $\max(f, g)$ та $\min(f, g)$ двох клікових функцій f і g (як і $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$), визначених на довільному топологічному просторі, є кліковими функціями. В [221] Т.Натканєц дав характеризацію максимумів дійсних квазінеперервних функцій: кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є максимумом двох квазінеперервних функцій тоді і тільки тоді, коли множина $\mathbb{R} \setminus K(f)$ ніде не щільна і $\lim\limits_{x \to x_0} \sup\limits_{x \in C(f)} f(x) \geq f(x_0)$ для кожного $x_0 \in \mathbb{R} \setminus K(f)$. Там же Т.Натканєц встановив, що якщо X – регулярний простір з другою

аксіомою зліченності без ізольованих точок, то кожна функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої множина $X \setminus K(f)$ ніде не щільна, є максимумом і мінімумом двох квазінеперервних функцій. Характеризаційний результат Т.Натканєца узагальнив Я.Борсік в [25] (див. також [22]) для випадку відображень $f : X \to \mathbb{R}$, де X – регулярний простір з другою аксіомою зліченності.

Максимум та мінімум внутрішньо квазінеперервних функцій (квазінеперервних функцій, у яких множина точок розриву ніде не щільна) досліджували М.Марціняк і П.Щука [188].

Також в [25] Я.Борсік встановив, що коли простір X задовольняє наступну умову:

- якщо $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ покриття простору X, таке, що для $M \subseteq \mathbb{N}$ множина $\bigcup\limits_{n\in M} X_n$ є просто відкритою і G – відкрита непорожня підмножина X, то $G \cap intX_n \neq \varnothing$ для деякого $n \in \mathbb{N}$,

то $\max(f, g)$ і $\min(f, g)$ є просто неперервними функціями для довільних просто неперервних функцій $f, g : X \to \mathbb{R}$.

В [217] Т.Натканєц встановив, що кожна функція $f : [0, 1] \to [0, 1]$ може бути записана як $f = \min(\max(f_1, f_2), \max(f_3, f_4))$, де f_i – розширювальна функція для $i = 1, 2, 3, 4$. Зауважимо, що такий же результат можна довести і для дійсних функцій, які визначені на $\mathbb{R}$ (див. [57, 278]). Дійсні функції, визначені на $\mathbb{R}$, що є максимумом функцій з властивістю Дарбу, були охарактеризовані Дж. Седером в [50]. Також функції, що є максимумом функцій з досконалим шляхом, описані К.Банажевським в [13].

Максимум S-неперервних функцій частково описано в [216] Т.Натканєцом, де встановлено, що кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої $\overline{f^{-1}(y)} = \mathbb{R}$ для кожного $y \in \mathbb{R}$, подається як максимум двох S-неперервних функцій. Також А.Малізевський в [176] встановив, що кожна функція, яка є максимумом двох функцій з властивістю Дарбу, є також максимумом двох S-неперервних функцій.

Питання, пов'язані з максимумами та мінімумами різних типів ослабленої неперервності досліджувалися в [289, 188, 297, 299, 112, 177].

1.9.4. Стандартне доведення (як і для неперервних функцій) показує, що рівномірна границя послідовності (f_n) квазінеперервних функцій є квазінеперервною функцією. Простий приклад послідовності (f_n), де

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, ...$, $f_n(x) = x^n$, показує, що поточкова границя послідовності квазінеперервних функцій не зобов'язана бути квазінеперервною (навіть майже ледь неперервною). Однак, В.Бледзой в [20] показав, що для топологічного простору X та метричного простору Y множина $D(f)$ точок розриву функції $f : X \to Y$, яка є поточковою границею послідовності (f_n) квазінеперервних функцій $f_n : X \to Y$, є першої категорії в X. Як наслідок з цього результату в [79] Я.Еверт встановлює, що у випадку беровості простору X, за вище згаданих умов, функція f буде кліковою. Умови, за яких границя послідовності квазінеперервних функцій буде квазінеперервною, встановлено в [51].

Деякі питання, які пов'язані з поточковою границею послідовності квазінеперервних функцій, вивчались в [79] та [15].

В [137] Л.Гола та Д.Голий вводять поняття одностайної квазінеперервності послідовності функцій. Нехай (f_n) послідовність функцій, які визначені на топологічному просторі X. Послідовність (f_n) функцій називається *одностайно квазінеперервною в точці* x_0, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ та довільного околу U точки x_0 в X існує номер n_0 та відкрита непорожня множина W в X, такі, що $W \subseteq U$ і $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ для всіх точок $x \in W$ та кожного $n \geq n_0$. Використовуючи це поняття Л.Гола та Д.Голий встановили, що для берівського простору X і послідовності функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, ...$, яка поточково збігається до функції $f : X \to \mathbb{R}$, квазінеперервність функції f еквівалентна одностайній квазінеперервності послідовності (f_n).

В [77] Я.Еверт досліджувала границі послідовностей клікових та просто неперервних функцій. Нею встановлено, що для досконалого берівського простору X, метричного сепарабельного простору Y функція $f : X \to Y$:

1) є кліковою тоді і тільки тоді, коли вона є рівномірною границею послідовності просто неперервних функцій;

2) має властивість Бера тоді і тільки тоді, коли вона є поточковою границею послідовності просто неперервних функцій;

3) має властивість Бера тоді і тільки тоді, коли вона є поточковою границею послідовності клікових функцій.

Границі послідовностей майже квазінеперервних функцій досліджували А.Нойбруннова та Т.Салат в [239]. Ними встановлено, що для топологічного

простору X і метричного простору Y границя $f : X \to Y$ рівномірно збіжної послідовності майже квазінеперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, ...$, є майже квазінеперервною. Там же наведено приклад трансфінітної послідовності $(f_\xi)_{\xi<\omega}$ майже квазінеперервних функцій $f_\xi : X \to Y$, границя $f : X \to Y$ якої не є майже квазінеперервною, де ω – перший незліченний ординал, X – простір з другою аксіомою зліченності, у якого кожна відкрита непорожня множина незліченна, а Y – метричний простір, який містить принаймні дві різні точки.

Кожна дійснозначна функція, яка визначена на деякому інтервалі, є поточковою границею послідовності функцій з властивістю Дарбу (А.Лінденбаум [166]), зв'язних функцій (Д.Філліпс [248]) чи S-неперервних функцій (К.Келлум [150]). Що стосується рівномірної границі послідовностей функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ типу Дарбу, то класи функцій з властивістю Дарбу (В.Серпінський [290]), S-неперервних функцій (К.Келлум [150]) і зв'язних функцій (К.Келлум [150]) не є замкненими відносно рівномірної границі. А класи периферійно неперервних функцій (Р.Ґібсон та Ф.Руш [101]) та функцій з досконалим шляхом (К.Банашевський [13]) замкнені відносно рівномірної границі.

В [63] Й.Добош показав, що для метричного простору X рівномірна границя послідовності функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком має замкнений графік. З. Ґранде в [110] довів, що для повного метричного простору X поточкова границя послідовності функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є поточковою границею послідовності неперервних функцій, тобто, є функцією першого красу Бера.

Рівномірна границя послідовності графічно неперервних функцій не зобов'язана бути графічно неперервною (див. [120]). В [316] А.Захареску встановив, що рівномірна границя $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ послідовності графічно неперервних функцій $f_n : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ є графічно неперервною, якщо $C(f)$ всюди щільна. К.Сакалова в [282] довела, що для топологічного простору X і метричного простору Y функція $f : X \to Y$, яка є рівномірною границею послідовності (f_n) графічно неперервних функцій $f_n : X \to Y$, неперервна тоді і тільки тоді, коли f квазінеперервна.

Властивості границь послідовностей різних типів ослабленої неперервності досліджено в [40, 238, 111, 116, 107, 76, 70, 78, 281].

1.9.5. Добре відомою є теорема про те, що для неперервної бієкції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обернена функція теж є неперервною. Для квазінеперервних функцій аналогічного результату немає. В [123] З.Ґранде та Т.Натканєц навели приклад квазінеперервної бієкції $f : [0,1] \to [0,1]$, для якої функція f^{-1} не є квазінеперервною. Там же було одержано умови на відображення $f : X \to Y$, за яких відображення f^{-1} буде квазінеперервним /кліковим/:

1) якщо X та Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – квазінеперервна бієкція і відображення f^{-1} ледь неперервне, то відображення f^{-1} квазінеперервне;

2) якщо X та Y – метричні простори, $f : X \to Y$ – бієкція і функції f та f^{-1} ледь неперервні, то функції f та f^{-1} клікові.

1.10. Декомпозиція неперервності та її аналогів

1.10.1. Під декомпозицією неперервності розуміють теореми, в яких встановлюється неперервність функції при виконанні кількох інших умов, слабших за неперервність. Такими умовами виступають різні ослаблення неперервності (нарізна неперервність, квазінеперервність, майже неперервність, властивість Дарбу, наявність замкненого графіка, тощо).

Спочатку розглянемо результати про декомпозицію неперервності, в яких однією з умов є умова замкненості графіка або її аналог.

Напевно, першою теоремою про декомпозицію неперервності була теорема Банаха про замкнений графік [318, с. 35, теорема 7], яка твердить, що для довільних F-просторів X і Y кожне адитивне відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком є неперервним. У XX ст. ця теорема дістала значний розвиток у працях різних математиків (див. [158] і вказану там літературу).

У працях [313, 144] згадується результат: кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із зв'язним і замкненим графіком є неперервною. У [144] навіть подано доведення цієї теореми, яке базується на одній теоремі Баґґса [9] про неперервність переферійно неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком. У праці [259] було наведено питання Риль-Нардзєвського: чи кожна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ із зв'язним і замкненим графіком буде неперервною? Негативну відповідь на це питання отримав Ї.Єлінек [144].

У своїй дисертації М.Р. Вуйчик подав такий результат [312, с. 15, наслідок

18]: якщо X – локально зв'язний простір, Y – локально компактний простір і $f : X \to Y$ – функція із замкненим графіком, яка має властивість Дарбу, то функція f неперервна. Р.А.Мімна [205] увів поняття локальної w^*-неперервності і отримав таку теорему про декомпозицію неперервності: якщо простір X локально зв'язний, Y – довільний топологічний простір і $f : X \to Y$ – локально w^*-неперервне відображення, що має слабку властивість Дарбу, то f – неперервне (див. також [208]). Пізніше в [209] умова локальної w^*-неперервності в останньому результаті була замінена на локальну відносну неперервність.

В [65] Й.Добош встановив, що двосторонньо квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною.

П.Е.Лонґ і Е.Е.Макґегі [170], А.І.Бернер [18] та Л.Гола [135] вказали умови на простори X і Y, які гарантують неперервність майже неперервних відображень $f : X \to Y$ із замкненим графіком (див також праці [14, 165, 274]).

В.І.Крецу і В.К.Маслюченко [323] з'ясували, що кожна неперервна за Стеллінґзом функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною. Для цього було введено нову властивість функцій, яка дістала назву перехідність (її мають функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком), і доведено, що кожна перехідна і неперервна за Стелінґзом функція є неперервною.

1.10.2. Крім вище згаданих результатів про неперервність майже неперервних відображень із замкненим графіком, існує багато декомпозиційних теорем за участю майже неперервності. Так в [293] Б.Д.Сміт встановив таку теорему: функція $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ буде неперервною тоді і тільки тоді, коли вона S-неперервна, майже неперервна і не є типу Чезаро. Пізніше, Дж.Смітал і Е.Станова [292], перенесли цей результат на випадок функцій $f : X \to \mathbb{R}$, де X – берівський локально зв'язний T_3-простір. Нарешті, в 1997 році Р.Ґібсон [95] замінив умову S-неперервності на властивість Дарбу і отримав наступний результат: якщо X – берівський локально зв'язний T_3-простір, то функція $f : X \to \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли вона має властивість Дарбу, майже неперервна і не є типу Чезаро.

В [257, 263] встановлено, що для регулярного простору Y і довільного топологічного простору X відображення $f : X \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно майже неперервне і квазінеперервне. Слід

зауважити, що умова регулярності простору Y тут є істотною, а також згаданий результат не виконується точково. Л.Гола в [136] покращили згаданий результат, замінивши умову квазінеперервності відображення f в кожній точці на квазінеперервність f в точках деякої всюди щільної множини. Як наслідок, звідси одержується результат про неперервність майже неперервного і точково розривного відображення зі значеннями в регулярному просторі, про який згадує А.І.Бернер в [18]. Також в [292, 84], для метричного простору значень, умова точкової розривності замінена на кліковість.

Згадаємо тут і результат М.Ґанстера і І.Райллі [89] про те, що відображення f між двома топологічними просторами буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно майже неперервне та суб-LC-неперервне.

Ще більше послабити умову квазінеперервності вдалось Я.Борсіку та Я.Добошу в [38], де встановлено, що відображення $f : X \to Y$ зі значеннями в регулярному просторі є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно майже неперервне і м'яко неперервне.

1.10.3. Як пару до квазінеперервності для встановлення декомпозиції неперервності К.Сакалова в [282] використала графічну неперервність: для топологічного простору X та гаусдорфового простору Y відображення $f : X \to Y$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно квазінеперервне і графічно неперервне.

Ще один результат про декомпозицію неперервності за участю квазінеперервності встановлено в [88], де показано, що відображення f між двома топологічними просторами буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно квазінеперервне та ic-неперервне.

1.10.4. Перейдемо до декомпозиції неперервності відображень від двох змінних. Достеменно не відомо кому належить результат про те, що кожна нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною. З. Пьотровський і Е. Вінглер [261] навели приклади нарізно неперервних відображень з замкненим графіком, які є розривним, і показали, що для топологічного простору X, локально зв'язного простору Y і локально компактного простору Z кожне відображення $f : X \times Y \to Z$ із замкненим графіком, яке неперервне відносно першої змінної і має властивість Дарбу відносно другої змінної, є неперервним. Інший результат на цю тему подали

М.Р. Вуйцик і М.С. Вуйцик [313]: якщо X – локально зв'язний простір, Y – зв'язний і локально зв'язний простір, Z – локально компактний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ має замкнений графік, f^x – неперервне для всіх $x \in X$ і f_y – неперервне для деякого $y \in Y$, то f є неперервним за сукупністю змінних.

У двох наступних результатах умова замкненності графіка замінюється на її аналоги, слабші для багатьох типів просторів. Спочатку Р.Мімна та Д.Розе в [208] встановили, що для локально зв'язного простору X, довільних топологічних просторів Y та Z відображення $f : X \times Y \to Z$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно нарізно неперервне і локально w^*-неперервне. Потім вони ж в [209] покращили цей результат, замінивши локальну w^*-неперервність на локальну відносну неперервність, а вимогу неперервності відносно першої змінної замінили властивістю Дарбу.

1.10.5. Тепер розглянемо декомпозиційні теореми для деяких ослаблень неперервності. В [38] Я.Борсік та Й. Добош встановили, що для довільного топологічного простору X і метричного простору Y функція $f : X \to Y$ квазінеперервна тоді і тільки тоді, коли вона майже квазінеперервна і клікова. Для відображення $f : X \to Y$ через L_f позначимо множину точок $x \in X$, для яких існує база $\mathcal{V}$ околів точки $f(x)$ в Y, така, що для кожного $V \in \mathcal{V}$ існує окіл U точки x в X, такий, що множина $f^{-1}(V) \setminus int f^{-1}(V)$ є ніде не щільною в U. Також в [38] встановлено і таку декомпозицію квазінеперервності: для довільного топологічного простору X і регулярного простору Y відображення $f : X \to Y$ буде квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли воно майже квазінеперервна і множина L_f всюди щільна в X.

Багато результатів про декомпозицію різних ослаблень неперервності подано в [16, 241, 87, 266, 4, 131, 133, 302, 273, 11, 275, 3, 155, 6, 305, 280, 314, 242, 306, 74, 132, 72].

1.11. Многозначні відображення

1.11.1. Нехай X та Y – множини. Кажуть, що задано *многозначне відображення* $F : X \to Y$, якщо кожному елементу x з множини X поставлено у відповідність деяку непорожню підмножину $F(x)$ множини Y. Таким чином, многозначне відображення $F : X \to Y$ – це звичайне

відображення множини X у множину $2^Y \setminus \{\varnothing\}$. Многозначні відображення називають ще *мультифункціями*.

Нехай $F : X \to Y$ – многозначне відображення і $A \subseteq X$. Покладемо $F(A) = \bigcup\limits_{x \in A} F(x)$. Множину $F(A)$ називають *образом множини A при відображенні F*. Для множини $B \subseteq Y$ розглядають два прообрази $F^+(B) = \{x \in X : F(x) \subseteq B\}$ і $F^-(B) = \{x \in X : F(x) \cap B \neq \varnothing\}$.

Нехай X і Y – топологічні простори і $x \in X$. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *неперервним зверху /знизу/ в точці x*, якщо для кожної відкритої в Y множини V, такої, що $F(x) \subseteq V$ $/F(x) \cap V \neq \varnothing/$, множина $F^+(V)$ $/F^-(V)/$ є околом точки x в X. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *неперервним у точці x*, якщо воно неперервне у цій точці як зверху, так і знизу. Через $C^+(F)$, $C^-(F)$ і $C(F)$ ми позначаємо множину всіх точок x з X, в яких F відповідно неперервне зверху, знизу чи просто неперервне. Якщо $C^+(F) = X$, $C^-(F) = X$ чи $C(F) = X$, то F називається *неперервним зверху*, *знизу* чи просто *неперервним*. Неперервність многозначного відображення $F : X \to Y$ – це те саме, що й неперервність його як однозначного відображення $F : X \to Y$, коли на 2^Y розглядати топологію Віторіса [139, с.36].

Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Так само як і для однозначного відображення многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ називається *нарізно неперервним*, якщо для кожного $x \in X$ і для кожного $y \in Y$ відображення $F^x : Y \to Z$ і $F_y : X \to Z$ є неперервними. Під неперервністю відображення $F : X \times Y \to Z$ добутку топологічних просторів X і Y у топологічний простір Z у точці $p = (x, y) \in X \times Y$ ми розуміємо сукупну неперервність у точці p, тобто неперервність F у точці p відносно топології добутку на $X \times Y$. У відповідності з цим множина $C(F)$ для такого відображення F – це множина його точок сукупної неперервності.

Серед робіт, які пов'язані з дослідженням множини точок сукупної неперервності, зустрічаються і праці, в яких досліджуються і многозначні відображення, хоча їх число невелике. Першою з таких робіт вважається праця Ґ.Дебса [62], в якій він встановлює наступний результат: якщо X – берівський простір, Y – простір із зліченною базою, Z – метричний простір і $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне відображення, яке є неперервним знизу відносно першої змінної і неперервним зверху відносно другої змінної, і якщо,

крім того, Y або Z – компакт, то існує всюди щільна в X множина A типу G_δ, така, що F неперервне зверху в кожній точці $A \times Y$.

Оскільки в теоремі Дебса на відображення F накладаються змішані умови (неперервність знизу відносно першої змінної і неперервність зверху відносно другої змінної), то природно постало питання: чи кожне нарізно неперервне зверху /знизу/ компактнозначне відображення $F : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ буде неперервним зверху /знизу/ хоча б в одній точці $p \in [0,1]^2$? У [324] дано негативні відповіді на обидва питання.

Питання про множину точок $C(F)$ сукупної неперервності нарізно неперервних многозначних відображень вивчалися в [395]. Зокрема там встановлений такий результат: якщо X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне нарізно неперервне відображення, то якщо Y задовольняє першу /другу/ аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(F)$ залишкова в X /множина $C_Y(F)$ залишкова в X/. Умову компактнозначності відображення F у згаданому вище результаті вдалось послабити для множини $C_y(F)$ у [341, теорема 4]: якщо X – топологічний простір, Y – топологічний T_1-простір з першою аксіомою зліченності, Z – метризовний локально компактний σ-компактний простір і $F : X \times Y \to Z$ – замкненозначне нарізно неперервне відображення, то множина $C_y(F)$ залишкова в X для кожного $y \in Y$.

1.11.2. Поняття квазінеперервності для многозначних відображень вперше було введено В.Попою в [262]. Нехай X і Y – топологічні простори. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *квазінеперервним зверху /знизу/ в точці* $x \in X$, якщо для довільної відкритої непорожньої множини V в Y, такої, що $F(x) \subseteq V$ /$F(x) \cap V \neq \varnothing$/ і довільного околу U точки $x \in X$ маємо, що $intF^+(V) \cap U \neq \varnothing$ /$intF^-(V) \cap U \neq \varnothing$/. Многозначне відображення називається *квазінеперервним зверху* чи *квазінеперервним знизу*, якщо воно є таким у кожній точці.

Результат С.Кемпістого про сукупну квазінеперервність однозначних нарізно квазінеперервних відображень Т.Нойбрунн в [234] переніс на випадок многозначних відображень і одержав такі два результати:

1) якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – регулярний простір, $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення, для якого відображення F_y квазінеперервне зверху та знизу для кожного $y \in Y$ і F^x

квазінеперервне знизу для кожного $x \in X$, то F – квазінеперервне знизу за сукупністю змінних;

2) якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – нормальний, простір, $F : X \times Y \to Z$ – замкненозначне відображення, для якого F_y квазінеперервне зверху та знизу для кожного $y \in Y$ і F^x квазінеперервне зверху для кожного $x \in X$. Тоді F квазінеперервне зверху за сукупністю змінних.

При доведенні цих тверджень Т.Нойбрун використовував результати про сукупну ледь неперервність многозначних відображень. Поняття ледь неперервності для многозначного відображення природним чином було введене Т.Нойбруном у [234]. Нехай X і Y – топологічні простори. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *ледь неперервним зверху /знизу/ в точці* $x \in X$, якщо для довільної відкритої непорожньої множини V в Y, такої, що $F(x) \subseteq V$ $/F(x) \cap V \neq \varnothing/$ маємо, що $intF^+(V) \neq \varnothing$ $/intF^-(V) \neq \varnothing/$, і просто *ледь неперервним зверху /знизу/*, якщо воно є таким в кожній точці. Т.Нойбрун встановив такі результати про сукпну ледь неперервність многозначних відображень:

1) якщо X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – регулярний простір, $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення, для якого відображення F_y ледь неперервне знизу та квазінеперервне зверху кожного $y \in Y$ і F^x ледь неперервне знизу для кожного $x \in X$, то F ледь неперервне знизу за сукупністю змінних;

2) якщо X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – нормальний, простір, $F : X \times Y \to Z$ – замкненозначне відображення, для якого F_y ледь неперервне зверху та квазінеперервне знизу для кожного $y \in Y$ і F^x ледь неперервне зверху для кожного $x \in X$, то F ледь неперервне зверху за сукупністю змінних.

Згадаємо ще результат про точки симетричної квазінеперервності многозначного відображення. Нехай X, Y та Z – топологічні простори. Многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ називається *симетрично квазінеперервним зверху /знизу/ відносно* x *в точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо для довільної відкритої непорожньої множини W в Z, такої, що $F(p) \subseteq W$ $/F(p) \cap W \neq \varnothing/$ і довільних околів U та V точок $x \in X$ та $y \in Y$ відповідно, існують окіл G точки x в X і відкрита непорожня множина H в Y, такі, що

$G \times H \subseteq U \times V$ і $F(q) \subseteq W$ $/F(q) \cap W \neq \varnothing/$ для всіх $q \in G \times H$, і просто *симетрично квазінеперервним зверху /знизу/*, якщо воно є таким в кожній точці.

В [381] було встановлено, що коли простір X метричний або задовольняє другу аксіому зліченності, простори Y та Z задовольняють другу аксіому зліченності і відображення $F : X \times Y \to Z$ квазінеперервне знизу, то існує залишкова в X множина A, така, що відображення F симетрично квазінеперервне знизу відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.

РОЗДІЛ 2.
ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

2.1. Множини точок $\mathcal{A}$-квазінеперервності

2.1.1. Добре відомо, що множина точок неперервності будь-якого відображення із значеннями в метризовному просторі є множиною типу G_δ. Про опис множин точок деяких ослаблень неперервності йшлося в першому розділі даної роботи.

В [348] було дано опис множини точок майже неперервності, ледь неперервності і майже квазінеперервності. В даній роботі цим питання присвячено підрозділ 3.1. Так в теоремах 3.1.1 та 3.1.3 встановлено, що множина точок майже неперервності відображення $f : X \to Y$, а отже, і майже квазінеперервності, є залишковою для довільного топологічного простору X та простору Y з другою аксіомою зліченності, а теорема 3.1.2 розв'язує обернену задачу. В теоремі 3.1.4 встановлено, що для функції з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ множина точок її ледь неперервності може бути довільною підмножиною $\mathbb{R}$.

2.1.2. Основним інструментом у доведенні того, що множина точок неперевності відображення із значеннями в метризовному просторі є множиною типу G_δ, виступає коливання функції. В [363] за допомогою узагальнення поняття коливання отримано певну інформацію про множини точок деяких ослаблень неперервності (теорема 3.2.1). З цією метою було введено загальне поняття так званої $\mathcal{A}$-квазінеперервності, яке охоплює деякі конкретні ослаблення неперервності (неперервність, квазінеперервність, майже неперервність, майже квазінеперервність, тощо).

Результати підрозділів 3.1 та 3.2 опубліковано в [363, 348, 344].

2.2. Псевдоквазінеперервність та її аналоги

2.2.1. Поняття псевдоквазінеперервності виникло, як послаблення характеристичної властивості квазінеперервності: відображення $f : X \to Y$

квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли $f(U) \subseteq \overline{f(E)}$ для кожної відкритої множини Uв X та щільної в U множини E. Відображення $f : X \to Y$ називається *псевдоквазінеперевним*, якщо для довільної відкритої множини U в X та довільної множини E в X, такої, що $U \subseteq \overline{E}$ існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq \overline{f(E)}$. Зрозуміло, що кожне квазінеперервне відображення є псевдоквазінеперервним. Простий приклад 3.6.1 показує, що обернене твердження не вірне.

Теорема 3.6.2 говорить про те, що для псевдоквазінеперервного відображення $f : X \to Y$, яке діє між топологічним простором X та топологічним простором Y, який задовольняє другу аксіому зліченності, множина $D(f)$ точок розриву є першої категорії. Звідси негайно випливає (теорема 3.6.3), що якщо X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ – псевдоквазінеперевне відображення, то відображення f точково розривне, а отже, клікове.

Виявляється (теорема 3.6.4), що псевдоквазінеперервність рівносильна простій неперервності. Також відмітимо, що кожна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка має замкнений графік, псевдоквазінеперервна (твердження 3.6.3).

Ці та інші властивості псевдоквазінеперервності подано в підрозділі 3.6, результати якого були опубліковані в [228], [359] та [377].

2.2.2. Послаблення в такий же спосіб сукупної квазінеперервності у випадку відображень від двох змінних приводить до кількох понять. Перше з них – це горизонтальна квазінеперевність. В [333] було встановлено, що якщо X, Y і Z – топологічні простори, $f : X \times Y \to Z$ – горизонтально квазінеперервне відображення, U – відкрита непорожня множина в X, V – відкрита непорожня множина в Y, множина A міститься в X і така, що $U \subseteq \overline{A}$, то

$$f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}.$$

Обернене твердження не вірне, тому ця властивість не є характеристичною для горизонтальної квазінеперервності. Характеристичною властивістю для горизонтально квазінеперервності є така: для топологічних просторів X, Y та Z відображення $f : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли

$$f(U \times V) \subseteq \overline{f(\bigcup_{y \in V} (A_y \times \{y\}))},$$

для довільних відкритих непорожніх множин U і V відповідно в X і Y та довільних множин A_y в Y, причому $U \subseteq \overline{A_y}$, для кожного $y \in V$.

Послаблення горизонтальної квазінеперервності з [333] одержало назву слабка горизонтальна квазінеперервність. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *слабко горизонтально квазінеперервним*, якщо для довільних відкритих множин U і V в X і Y відповідно та множини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$ виконується включення $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.

Горизонтальна квазінеперервність та слабка горизонтальна квазінеперервність використовувалися для уточнення результатів про точки сукупної неперервності та квазінеперервності. Подальші покращення цих результатів привели до нових понять.

Так, в [354] для відображень $f : X \times Y \to Z$ було введено поняття $\mathcal{N}$-відображення, одна з умов якого така (умова (i)): для довільних відкритих непорожніх множин U і V відповідно в X і Y та довільної множини A в X, для якої $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G \times V) \subseteq \overline{f((G \cap A) \times V)}$. Пізніше, в [196], умова (i) для $\mathcal{N}$-відображень стала основою нового поняття – псевдоквазінеперервності знизу, для многозначних відображень. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *псевдоквазінеперервним знизу*, якщо для кожної непорожньої відкритої множини U в X і довільної підмножини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $F(G) \subseteq \overline{F(A)}$. Для відображення $f : X \times Y \to Z$, яке задовольняє умову (i), та непорожньої відкритої множини V в Y, псевдоквазінеперервним знизу є таке многозначне відображення: $F : X \to Z$, $F(x) = f^x(V)$, $x \in X$.

В [389] було знайдено необхідні та достатні умови того, щоб відображення $f : X \times Y \to Z$ має властивість Гана. Там для многозначних відображень зі значеннями в метричному просторі було введена умова (A), яка для відображень $f : X \times Y \to Z$ може бути переформульована так: для довільного $\varepsilon > 0$, довільної відкритої непорожньої множини U в X, довільної відкритої непорожньої множини V в Y і довільної множини $E \subseteq X$, щільної в U, для яких $\omega_f(A \times V) < \varepsilon$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_f(G \times V)) < \varepsilon$.

Ще два послаблення горизонтальної квазінеперервності було введено в працях [360] та [226]. Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Відображення

$f : X \times Y \to Z$ *задовольняє умову* (B^*), якщо для довільної десь щільної множини A в X і довільної відкритої непорожньої множини V в Y існують відкриті непорожні множини G в X та H в Y, такі що $G \subseteq \overline{A}$, $H \subseteq V$ і $f(G \times H) \subseteq \overline{f((A \times V)}$. А для метричного простору Z умова (B) дала можливість одержати характеризацію кліковості. Функція $f : X \times Y \to Z$ *задовольняє умову* (B), якщо для довільного $\varepsilon > 0$, довільних відкритих непорожніх множин U в X і V в Y та довільної множини $E \subseteq X$ щільної в U, для яких $\omega_f(E \times V) < \varepsilon$, існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y, такі, що $G \subseteq U$, $H \subseteq V$ і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$.

2.3. Характеризація різних ослаблень неперервності через замикання

2.3.1. Добре відомою є характеризація неперервності відображення в термінах замикання образу: відображення f між топологічними просторами X та Y є неперервним тоді і тільки тоді, коли

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \tag{$*$}$$

для довільної підмножини A простору X.

Зрозуміло, що коли вимагати виконання умови $(*)$ не для всіх підмножин простору X, а лише для деяких, то включення $(*)$ буде означати певне ослаблення неперервності. Наприклад, введене К.Келлумом у [149] поняття функції Ґібсона, як показали в [146] О.Карлова та В.Михайлюк, рівносильне поняттю майже неперервності.

Якщо виконання $(*)$ вимагати лише для підмножин D простору X, замикання яких $\overline{D}$ є зв'язними множинами, то ми одержимо введену в [147] П.С.Келлером властивість щільності відображення. Р.Мімна в [207] встановив, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є двосторонньо квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли вона має властивість щільності відображення. В [23] Я.Борсіком було показано, що якщо відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X та Y має властивість щільного відображення, то f є B-квазінеперервним, а також наведено приклад функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка є B-квазінеперервною, але не має властивості щільного відображення. В теоремі 3.3.5 буде описано систему множин $\mathcal{O}_p$, для кожної з яких виконання

умови $(*)$ буде рівносильна B-квазінеперервності.

Також в [207] Р.Мімна показав, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{N}) \subseteq \overline{f(N)}$ для довільної ніде не щільної множини N. Результат Р.Мімни буде розширено в твердженні 3.3.1 на випадок відображень, що діють між топологічними просторами.

В [364] було досліджено які ослаблення неперервності допускають подібну характеризацію з допомогою включення $(*)$, що виконується для множини A з певної системи $\mathcal{A}$. Там для топологічних просторів X і Y, відображення $f : X \to Y$ та деякої системи $\mathcal{A}$ підмножин простору X було введено поняття $\mathcal{A}$-неперервності. Однак, що в роботі [326] під терміном $\mathcal{A}$-неперервність розуміють зовсім іншу властивість відображень. Тому $\mathcal{A}$-неперервність з [364] ми будемо тут називати неперервністю відносно системи $\mathcal{A}$. Отже, відображення f називається *неперервним відносно системи* $\mathcal{A}$, якщо включення $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ виконується для довільної множини $A \in \mathcal{A}$.

Результат О.Карлової та В.Михайлюка доповнено наступним (теорема 3.3.2): якщо X та Y – топологічні простори, $\mathcal{G}_s$ – система квазівідкритих множин в X, то відображення $f : X \to Y$ є майже неперервним тоді і тільки тоді, коли воно є неперервним відносно системи $\mathcal{G}_s$.

Для функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ встановлено (наслідок 3.3.2), що слабка властивість Ґібсона рівносильна властивості Юнґа. Для відображень між загальними топологічними просторами подібного результату встановити не вдалося, а одержано тільки (теорема 3.3.4), що якщо X – T_1-простір, Y – топологічний простір, $\mathcal{C}$ – система зв'язних множин в X і $f : X \to Y$ – периферійно неперервне відображення, то f є неперервним відносно системи $\mathcal{C}$.

Теорема 3.3.5 дає характеризацію B-квазінеперервності для випадку довільних топологічних просторів і тим самим узагальнює результат Я.Борсіка з [23]. В [27] Я.Борсік встановив, що коли функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є квазінеперервною і має властивість Дарбу, то вона двосторонньо квазінеперервна. Цей результат покращено в теоремі 3.3.6, яка до того ж є декомпозицією B-квазінеперервності: якщо X – локально зв'язний простір і Y – топологічний простір, то відображення $f : X \to Y$ є B-квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли воно квазінеперервне і є слабкою функцією Ґібсона.

Також в підрозділі 3.3 охарактеризовано поняття α-неперервності (теорема

3.3.7), ледь неперервності (теорема 3.3.8) та майже ледь неперервності (теорема 3.3.9) в термінах неперервності відносно системи.

2.3.2. В [391] було встановлено зв'язок між поняттям $\mathcal{A}$-неперервності з [326] та поняттям неперервності відносно системи з [364]. Для топологічного простору X, сім'ї $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ непорожніх систем $\mathcal{A}_x \subseteq 2^X$ і системи $\mathcal{B}$ в X було введено поняття системи, яка спряжена з сім'єю. За допомогою цього поняття було встановлено (теорема 3.4.1), що коли X та Y – топологічні простори, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$ – сім'я непорожніх систем $\mathcal{A}_x \subseteq 2^X$ і $\mathcal{B}$ – система в X, яка спряжена з сімє'ю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x\in X}$, то відображення $f : X \to Y$ є $\mathcal{A}$-неперервним тоді і тільки тоді, коли f неперервним відносно системи $\mathcal{B}$.

Далі в підрозділі 3.4 подано характеризації різних ослаблень неперервності за допомогою операцій замикання та внутрішності. Зокрема встановлено (теорема 3.4.2), що для довільних топологічних просторів X та Y відображення $f : X \to Y$:

- квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли $f(int\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$;
- майже неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(A)}$;
- α-неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{int\overline{A}}) \subseteq \overline{f(A)}$;
- майже квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли $f(int\overline{(intA)}) \subseteq \overline{f(A)}$;

для довільної підмножини $A \subseteq X$.

Результати підрозділів 3.3 та 3.4 опубліковано в [364, 390, 391].

2.4. Перехідність та її різновиди

2.4.1. Властивість перехідності для функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ була введена в [323]. Без особливих змін вона переноситься на випадок дійснозначних функцій, заданих на довільних топологічних просторах. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *перехідною зверху /знизу/ в точці* x, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існують окіл U точки x і точка $y \in (f(x), f(x) + \varepsilon)$ $/y \in (f(x) - \varepsilon, f(x))/$, такі, що $U \cap f^{-1}(y) = \varnothing$. Якщо функція перехідна зверху і знизу в точці x, то вона називається *перехідною в точці* x. Функція називається *перехідною /зверху, знизу/*, якщо вона є такою в кожній точці x з X. Перехідність є досить простою умою, кожна функція $f : X \to \mathbb{R}$ є сумою двох перехідних

функцій (твердження 6.1.2). Також кожна монотонна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є перехідною (твердження 6.1.3). Хоча умова перехідності і є досить слабкою, однак існують функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які її не задовольняють (приклад 6.1.1).

В [343] поняття перехідності було перенесено на випадок довільних топологічних просторів. Для топологічних просторів X і Y відображення $f : X \to Y$ називається *перехідним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y, такі, що $W \subseteq V$ і $f(U) \subseteq W \sqcup (Y \setminus \overline{W})$, і просто *перехідним*, якщо воно є таким у кожній точці з X. Вже для такого загального поняття встановлено, що для довільних топологічних просторів X та Y кожне неперервне відображення $f : X \to Y$ є перехідним (твердження 6.1.4), а у випадку коли Y – гаусдорфовий локально компактний простір, то кожне відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком є перехідним (теорема 6.1.2).

Як аналог перехідності зверху /знизу/ функцій зі значенням в $\mathbb{R}$ можна ввести подібне ослаблення перехідності у випадку відображень зі значеннями в довільних топологічних просторах. Нехай X і Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *слабко перехідним у точці* x з X, якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ у просторі Y існують окіл U точки x в X і точка $b \in V$, такі, що $U \cap f^{-1}(b) = \varnothing$, і просто *слабко перехідним*, якщо f має цю властивість у кожній точці x простору X. Зрозуміло, що функція $f : X \to \mathbb{R}$ буде слабко перехідною в точці x тоді і тільки тоді, коли вона перехідна зверху або знизу в точці x. В загальному випадку зв'язок між перехідністю та слабкою перехідністю встановлено в твердженні 6.1.5.

Ще більшим послабленням перехідності (для певних просторів) є склабка квазіперехідність. Відображення $f : X \to Y$ називається *слабко квазіперехідним у точці* x з X, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ у просторі Y і кожного околу U точки x в X існують непорожня відкрита множина G в X і точка $b \in V$, такі, що $G \subseteq U$ і $G \cap f^{-1}(b) = \varnothing$. Якщо ця властивість виконується для кожної точки x з X, то f називається просто *слабко квазіперехідним*. Легко переконатися, що кожне слабко перехідне відображення є слабко квазіперехідним. Виявляється, що слабка квазіперехідність повязана з відомим поняттям – властивістю типу Чезаро (теорема 6.1.3): відображення $f : X \to Y$ буде мати властивість типу Чезаро тоді і тільки тоді, коли воно не є слабко квазіперехідним.

Також відмітимо приклад функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка є типу Чезаро, і не є слабко квазіперехідною, а отже, і перехідною, в жодній точці $x \in \mathbb{R}$ (теорема 6.1.4). Разом з цим теорема 6.1.5 показує, що для топологічного простору X, топологічного простору Y, який має не більш ніж зліченну псевдобазу, і слабко квазіперехідного відображення $f : X \to Y$ множина B всіх тих точок x з X, в яких f буде слабко перехідною є залишковою в X. Для функцій із значеннями в $\mathbb{R}$ можна встановить більше (теорема 6.1.6): якщо X – топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – слабко квазіперехідна функція, то множини B, B^+ і B^- всіх тих точок x з X, в яких f буде відповідно перехідною, перехідною зверху чи перехідною знизу, є залишковими в X.

Результати цього підпункту опубліковано в [343], [347] та [366].

2.4.2. Як зазначалося в попередньому підпункті, кожне відображення із замкненим графіком зі значеннями в гаусдорфовому локально компактному просторі є перехідним. В підпункті 1.4.2 йшлося про про деякі властивості відображень, які є слабшими за умову замкненості графіка. Тому природно постало питання про порівняння цих понять.

В твердженні 6.1.9 було встановлено, що для довільних топологічних просторів X і Y кожне локально w^*-неперервне відображення $f : X \to Y$ є перехідним. Обернене твердження не вірне (приклад 6.1.3). Властивість локальної відносної неперервності є слабшою за локальну w^*-неперервність. Однак, на момент публікації статті [343] її автори про цю властивість не знали. Тому порівняння її з перехідністю відбулося в праці [197]. В твердженні 6.2.1 встановлено, що для довільних топологічних просторів X і Y кожне локально відносно неперервне відображення $f : X \to Y$ є перехідним. Обернене твердження не вірне (твердження 6.2.2).

На відміну від таких ослаблень як локальна w^*-неперервність чи локальна відносна неперервність, w^*-квазінеперервність вже є слабшою за перехідність. Це демонструє твердження 6.2.3 та приклад 6.2.2. Слід також зауважити, що означення перехідності та w^*-квазінеперервності на диво схожі. Як з неперервності випливає перехідність, так і з квзінеперервності випливає w^*-квазінеперервність (твердження 6.2.4).

Як симбіоз понять квазінеперервності та перехідності, в [197] було введене поняття квазіперехідності. Відображення $f : X \to Y$ називається *квазіперехідним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$

в Y, для кожного околу U точки x в X існують відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y і відкрита непорожня множина G в X, такі, що $W \subseteq V$, $G \subseteq U$ і $G \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$, і просто *квазіперехідним*, якщо воно є таким у кожній точці. Аналогічно до того, як вводилось поняття перехідності зверху чи знизу для функції $f : X \to \mathbb{R}$ можна розглядати квазіперехідність зверху чи знизу.

Твердження 6.2.5 і приклад 6.2.10 показують, що квазіперехідність є слабшим поняттям ніж w^*-квазінеперервність. В твердженні 6.2.6 вказано умови на простори X та Y, при яких кожне квазіперехідне відображення є слабко квазіперехідним. Крім того, для функцій із значенням в $\mathbb{R}$ кожна слабко квазіперехідна функція $f : X \to \mathbb{R}$ є квазіперехідною (твердження 6.2.8). Однак, як показано в твердженні 6.2.9, те, що функція в твердженні 6.2.8 набуває значення в $\mathbb{R}$ є істотною умовою.

Відзначимо умови на простори X та Y, при яких кожне відображення $f : X \to Y$ є перехідним. Так, в твердженні 6.2.11 встановлено, що коли X – топологічний простір і Y – топологічний простір, який має базу з відкрито-замкнених множин, то кожна функція $f : X \to Y$ є перехідною. Також кожна функція $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ є перехідною (твердження 6.2.12).

Аналогічно до теорем 6.1.5 та 6.1.6 можна встановити, що коли X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ – w^*-квазінеперервне відображення, то множина точок перехідності відображення f є залишковою в X (теорема 6.2.1).

Результати цього підпункту опубліковано в [197], [367] та [366].

2.5. Застосування перехідності

2.5.1. Поняття перехідності було введено В.Крецу та В.Маслюченком в [323] як допоміжний інструмент при встановленні неперервності S-неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком. В [343] цей результат вдалося узагальнити для відображень між топологічними просторами, при цьому замінивши S-неперервність на слабку властивість Дарбу (теорема 6.1.8): якщо X – локально зв'язний простір, Y – топологічний простір, відображення $f : X \to Y$ має слабку властивість Дарбу і є перехідним, то f – неперервне відображення. Цей результат узагальнює всі попередні результати на цю тему, зокрема, добре відомий результат про неперервність

дійсної функції із замкненим і зв'язним графіком.

У праці [197], використовуючи локальний аналог теореми 6.1.8 теорему 6.1.7, одержано нові результати про множину точок розриву w^*-квазінеперервних відображень. В теоремі 6.2.2 встановлено, що якщо X – локально зв'язний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і w^*-квазінеперервне відображення $f : X \to Y$ має слабку властивість Дарбу, то множина $D(f)$ першої категорії. А у слабко квазіперехідних функцій з слабкою властивістю Дарбу, які діють з локально зв'язного простору в $\mathbb{R}$, множина $D(f)$ першої категорії (теорема 6.2.3).

У зв'язку з теоремою 6.1.8 виникло природне бажання дослідити, в яких відомих теоремах (зокрема декомпозиційних теоремах) умову замкненості графіка можна замінити на перехідність. Про випадки успішної заміни умови замкненості графіка на перехідність ми поговоримо в підрозділі 2.10.

Однак, не завжди умову замкненості графіка вдається замінити перехідність. Як зазначалося в підрозділі 1.10.1 Й.Добош в [65] встановив, що двосторонньо квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною. Такого самого результату з заміною умови замкненості графіка на перехідність встановити не можна. Це було показано в праці [351]. Зокрема, встановлено, що для довільного скінченного або нескінченного проміжку $J \subseteq \mathbb{R}$ і довільної ніде не щільної досконалої в J множини F існує така двосторонньо квазінеперервна перехідна функція $f : J \to \mathbb{R}$, що множина $D(f)$ точок розриву функції f рівна F (теорема 6.4.5).

Результати цього підрозділу опубліковано в [343], [347], [197], [367], [351] та [366].

2.5.2. В [123] З.Ґранде та Т.Натканєц побудували приклад квазінеперервної бієкції $f : [0, 1] \to [0, 1]$, для якої функція f^{-1} не є квазінеперервною. В праці [365] було досліджено існування у оберненого відображення властивостей прямого відображення для різних типів ослабленої неперервності. В даній роботі ці результати відображено в підрозділах 3.5 та 6.5.1.

Модифікуючи конструкцію з [123] в твердженні 3.5.1 встановлено, що існує квазінеперервна бієкція $f : [0, 1] \to [0, 1]$, для якої функція f^{-1} не є майже ледь неперервною. Також одержано три результати, які дають достатні умови існування певних типів ослабленої неперервності у оберненого відображення. Нехай X і Y – топологічні простори:

- якщо $f : X \to Y$ – квазінеперервна бієкція і f^{-1} – майже ледь неперервне відображення, то f^{-1} – майже квазінеперервне відображення;
- якщо $f : X \to Y$ – майже квазінеперервна бієкція, f і f^{-1} – ледь неперервні відображення, то f^{-1} – квазінеперервне;
- якщо $f : X \to Y$ – бієкція, f і f^{-1} – ледь неперервні відображення, то відображення f і f^{-1} псевдоквазінеперервні.

В твердженні 3.5.5 встановлено, що існує бієктивна функція $f : [0, 1] \to [0, 1]$, яка майже неперервна, але f^{-1} не є майже неперевною.

Використовуючи поняття перехідності вдалось встановити ряд результатів про наявність у оберненого відображення властивостей типу Дарбу. Спочатку в твердженні 6.5.1 встановлено, що для топологічного простору X, який задовольняє аксіому T_1, кожна бієкція $f : X \to \mathbb{R}$ є перехідною функцією. Істотність того, що функція f в твердженні 6.5.1 набуває значення в $\mathbb{R}$ показано в твердженні 6.5.2. Використовуючи властивості перехідності в твердженні 6.5.3 встановлено: якщо X – локально зв'язний простір, який задовольняє аксіому T_1 і $f : X \to \mathbb{R}$ – бієкція, яка має слабку властивість Дарбу, то f – неперервне відображення. Як наслідок в твердженні 6.5.4 одержано, що для кожної бієкції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка є функцією типу Дарбу, функція f^{-1} теж є типу Дарбу.

Частково результати цього підрозділу опубліковано в [361], [365], [366] та [376].

2.5.3. Як вже зазначалося, перехідність є ослабленням умови замкненності графіка для деяких типів просторів. В підрозділі 6.5.2 вивчаються зв'язки між сукупною властивістю замкненності графіка та нарізною для відображень від двох змінних. Неважко зрозуміти, що коли відображення $f : X \times Y \to Z$ має замкнений графік, то для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ відображення f^x і f_y мають замкнені графіки. Обернене твердження не вірне. В теоремі 6.5.2 встановлено, що коли X – берівський простір, Y – топологічний простір, що має зліченну псевдобазу, Z – сепарабельний метричний, в якому кожна обмежена множина має компактне замикання, і функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови:

(1) f^x має замкнений графік для всіх x з деякої залишкової множини M в X;

(2) f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$,
то f є кліковою, а якщо простір Y берівський, то і точково розривною.

Приклад 6.5.2 показує, що перехідність за сукупністю змінних та нарізна замкненість графіка не гарантує сукупної замкненності графіка. Однак такі умови мають багато спільних властивостей з умовою замкненності графіка. Так, зокрема, в теремі 6.5.3 встановлено, що коли $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – перехідна за сукупністю змінних функція, для якої розрізи f^x і f_y мають замкнені графіки для всіх $x, y \in \mathbb{R}$, то $D(f)$ – замкнена ніде не щільна множина.

2.6. Узагальнення теореми Калбрі-Троалліка

2.6.1. У зв'язку з дослідженнями множини точок сукупної неперервності, які були описано в підрозділі 1.6, виник новий клас просторів. Кажуть [334], що топологічний простір Y є *простором Гана*, якщо для довільного топологічного простору X і довільного метризовного простору Z кожне відображення f з класу $\overline{C}C(X \times Y, Z)$ має властивість Гана. Зрозуміло, що кожний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, є простором Гана. В прикладі 5.1.1 підрозділу 5.1 показано, що клас просторів Гана ширший ніж клас просторів з другою аксіомою зліченності.

Результат з [350, 342] про включення $K_hC(X \times Y, Z) \subseteq H(X \times Y, Z)$ розширено в теоремі 5.1.2 на випадок, коли X – топологічний простір, Y – сепарабельний з першою аксіомою зліченності простір Гана, Z – метризовний.

У двох наступних результатах умова горизонтальної квазінеперервності заміняється на сильнішу умову сукупної квазінеперервності, але при цьому в першій теоремі (теорема 5.1.3) послабляються умови на простір Y, а в другій теоремі (теорема 5.2.2) умову неперервності відносно другої змінної замінено на майже неперервність відносно другої змінної. Відображення $f : X \times Y \to Z$ має властивість Гана, якщо виконуються одна з наступних умов:

- простір X задовольняє другу аксіому зліченності, Y – берівський простір, який є простором Гана і кожна всюди щільна в Y множина є сепарабельною, Z – метризовний сепарабельний простір і відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних і неперервне відносно другої змінної;

- X – топологічний простір, Y – сепарабельний з першою аксіомою

зліченності простір Гана, Z – метризовний простір, $f : X \times Y \to Z$ – сукупно казінеперервне відображення і f^x – майже неперервне для всіх x з деякої залишкової в X множини.

Зауважимо, що при доведенні теореми 5.2.2 використовувалася теорема 5.2.1 із застосуванням множини зліченного типу: якщо X та Y – топологічні простори, Z – метризовний простір, B – множина зліченного типу в Y, $f : X \times Y \to Z$ – сукупно казінеперервне відображення і f^x – майже неперервне для всіх x з деякої залишкової в X множини, то існує залишкова в X множина A, така, що $A \times B \subseteq C(f)$.

2.6.2. О.Скасків звернув увагу на клас нарізно монотонних функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Зокрема, він поставив питання: чи будуть нарізно монотонні функції точково розривними? В [371] було дано ствердну відповідь на це питання. Однак повний опис множини точок розриву таких функцій поки що невідомий. У зв'язку з цими дослідженнями в поле нашого зору потрапив клас функцій $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, які монотонні відносно першої змінної і неперервні відносно другої змінної при значеннях першої з деякої залишкової множини. Виявляється, що цей клас також має властивість Гана за деяких умов на простір Y. Спочатку в теоремі 5.2.4 встановлюється, що для топологічного простору Y, множини B зліченного типу в Y, відображення $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, яке монотонне відносно першої змінної і неперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в $\mathbb{R}$ (коротше, $f \in M\tilde{C}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R})$), існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що $A \times B \subseteq C(f)$. Використовуючи цей факт в теоремі 5.2.5 доведено, що коли Y – сепарабельний з першою аксіомою зліченності простір Гана, то $M\tilde{C}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R}) \subseteq H(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R})$.

Результати підрозділів 5.1 і 5.2 опубліковано в [371, 368, 369, 229].

2.6.3. Як вже зазначалось в підрозділі 1.6. аналогу загальної теореми Калбрі-Труалліка для множин зліченного типу довгий час не було знайдено ні для KC-функцій, ні, тим більше, для K_hC-функцій. В [354] було заповнено цю прогалину, узагальнивши теорему Калбрі-Труалліка не лише на K_hC-функції, а й на функції з ширшого класу $\mathcal{N}$, наклавши умови на функцію f, які гарантують залишковість множини $C_B(f) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C(f)\}$. При цьому там був застосовуємо новий метод, який використовує категорні міркування і не спирається, як у [10], на теорему Бера про точки розриву

напівнеперервних функцій.

Результати праці [354] подано в підрозділі 5.3. Зокрема там встановлено (теорема 5.3.1): якщо X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, B – множина зліченного типу в Y і $f : X \times Y \to Z$ – $\mathcal{N}$-відображення, то множина $C_B(f)$ є залишковою в X. Як наслідок звідси одержується, що коли до умов теореми 5.3.1 добавити наявність у простора Y зліченної бази, то ми одержимо, що $\mathcal{N}$-відображення мають властивість Гана. В прикладі 5.3.2 побудована функцію $f : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, яка не входить в клас $\mathcal{N}$, але має властивість Гана, тобто для неї множина $C_Y(f)$ залишкова з $\mathbb{R}$. Тим самим, приклад 5.3.2 показує, що клас $H(\mathbb{R} \times (0, +\infty), \mathbb{R})$ ширший, за клас $\mathcal{N}$.

Друга тема, що її обговорювали в [354], була пов'язана з великими коливаннями. Для функції $f : P \to Z$, що задана на топологічному просторі P і набуває значень у метричному просторі Z з метрикою $|\circ - \circ|_Z$ коливання на непорожній множині $E \subseteq P$ і в точці $p \in P$, як відомо, вводиться відповідно формулами:

$$\omega_f(E) = \sup_{p',p''\in E} |f(p') - f(p'')| \text{ і } \omega_f(p) = \inf_{p\in intU} \omega_f(U).$$

Очевидно, що $C(f) = \{p \in P : \omega_f(p) = 0\}$. Тому для множини $D(f) = P \setminus C(f)$ всіх розривів функції f маємо: $D(f) = \{p \in P : \omega_f(p) > 0\}$. Для довільного $\varepsilon > 0$ покладемо $D^\varepsilon(f) = \{p \in P : \omega_f(p) \geq \varepsilon\}$. Якщо ε фіксоване, то про точки з множини $D^\varepsilon(f)$ кажуть, як про такі, що мають великі коливання. Оскільки функція $\omega_f : P \to [0, +\infty]$ неперервна зверху, то множини $D^\varepsilon(f)$ завжди замкнені в P. Якщо $P = X \times Y$ – це добуток двох топологічних просторів, то можна розглянути проекцію $pr_X(D^\varepsilon(f))$ множини $D^\varepsilon(f)$ на простір X, яка згідно з теоремою Куратовського [322, с. 200] про проекцію теж буде замкненою, якщо простір Y компактний. Ще Р.Бер довів [10, с. 88 – 94], що у випадку $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$ і $Z = \mathbb{R}$ для кожної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to Z$ і кожного $\varepsilon > 0$ проекція $pr_X(D^\varepsilon(f))$ ніде не щільна в X. Метод Бера був проаналізований у праці [335] і відповідним чином узагальнений, що дало змогу отримати такий же результат у тому випадку, коли простір X сильно зліченно повний і регулярний, Y – метризовний компакт, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – $\overline{C}C$-функція, у якої всі x-розрізи $f^x = f(x, \cdot) : Y \to Z$ неперервні і множина $Y_C(f)$ всіх тих $y \in Y$, для яких

y-розрізи $f_y = f(\cdot, y) : X \to Z$ неперервні, щільна в Y. У праці [45] ніде не щільність проекції $pr_X(D^\varepsilon(f))$ була доведена у випадку, коли простір X берівський, Y і Z – метричні простори і $f : X \times Y \to Z$ – CU-відображення, яке неперервне відносно першої змінної і рівномірно неперервне відносно другої, а в [329] цей результат іншим методом був перенесений на $\overline{C}U$-функції. Ці теореми постали в результаті розвитку попередніх підходів з праць [308] і [126]. Г.Ган у своїй монографії [125, с. 337] подав одну теорему про ніде не щільність проекції множини $D^\varepsilon(f)$ для нарізно неперервних функцій від n змінних, аналіз доведення якої привів до такого результату [331, теорема 3.4.2]: якщо X – берівський простір, Y – метризовний компакт, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – K_hC-функція, то для кожного $\varepsilon > 0$ множина $pr_X(D^\varepsilon(f))$ ніде не щільна в X. Скажемо ще, що з теореми Наміоки [214] випливає, що це ж має місце, коли простір X сильно зліченно повний і регулярний, Y – компакт, Z – метричний простір і відображення $f : X \times Y \to Z$ нарізно неперервне.

В [354] одержано теорему про великі коливання для відображень з класу $\mathcal{N}$ (теорема 5.3.3): якщо X – берівський простір, Y – метризовний компакт, Z – метричний простір і $f \in \mathcal{N}(X \times Y, Z)$, то для кожного $\varepsilon > 0$ множина $pr_X(D^\varepsilon(f))$ є замкненою і ніде не щільною в X.

Крім того, на завершення підрозділу 5.3 в прикладі 5.3.3 побудовано відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яке квазінеперервне відносно першої змінної і рівномірно неперервне відносно другої, у якого проекція множини $D^\varepsilon(f)$ на перший співмножник при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ всюди щільна, бо збігається з $\mathbb{Q}$. Це показує, що результат Брекенріджа-Нішіури з [45] не можна перенести з CU-функцій на KU-функції. Результати підрозділу 5.3 опубліковано в [354].

2.6.4. В працях [44] і [354] були одержані схожі результати про множину точок сукупної неперервності відображення від двох змінних. Обидва вони мають своїм джерелом теорему Калбрі-Троалліка [53], в обидвох дано далеке узагальнення цього результату, отримане застосуванням нових методів. Про результати з [44] говорилося в підрозділі 1.6.2, а про результати з [354] – в 2.6.3. В [196] було порівняно результати з [44] і [354]. Це дослідження викладено в підрозділі 5.4.

Простий приклад $\mathcal{N}$-відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 0$ при $x \neq 0$ і $f(0, y) = 1$ для довільного $y \in \mathbb{R}$, для якого відображення F_V не буде

квазінеперервним знизу в точці 0 для довільної непорожньої множини V, показує, що результат з [354] не випливає з результату праці [44].

Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається:

- *псевдоквазінеперервним знизу*, якщо для кожної непорожньої відкритої множини U в X і довільної підмножини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $F(G) \subseteq \overline{F(A)}$;

- *покриттєво категорно кліковим знизу*, якщо для кожного відкритого покриття $\mathcal{V}$ простору Y і довільної множини E другої категорії в X існують десь щільна в X множина A і множина $V \in \mathcal{V}$, такі, що $A \subseteq E$ і $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для всіх $x \in A$.

Нехай $\mathcal{V}$ – деяка система множин у просторі Y. Для точки $y \in Y$ покладемо

$$\mathcal{V}(y)=\{V \in \mathcal{V} : V - \text{окіл точки } y \text{ в } Y\} \text{ і}$$

$$B(\mathcal{V})=\{y \in Y : \mathcal{V}(y) - \text{база околів точки } y \text{ в } Y\}.$$

Модифікуючи метод з [44] і розвиваючи поняття, застосовані в [354], було отримуємо загальну теорему, і показано, що результати з [44] і [354] є її наслідками (теорема 5.4.1): якщо X і Y – топологічні простори, Z – метризовний простір, $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – не більш, ніж зліченна система множин в Y, $f : X \times Y \to Z$ – таке відображення, що для кожної множини $V \in \mathcal{V}$, для якої $V \cap B(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, відображення $F_V : X \ni x \mapsto F_V(x) = f^x(V) \subseteq Z$ псевдоквазінеперервне знизу та покриттєво категорно клікове знизу, то множина

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

є залишкова в X.

Результати підрозділу 5.4. опубліковано в працях [349] та [196].

2.7. Характеризація властивості Гана

2.7.1. Як вже було описано вище, починаючи з умови нарізної неперервності відображень $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, знайдено велику кількість достатніх умов існування у відображення $f : X \times Y \to Z$ властивості Гана. Ці умови

стосуються як самого відображення f, так і просторів X, Y та Z. Питання про необхідні і достатні умови існування у відображення властивості Гана довгий час не розглядалися. Однак, тенденція узагальнення результатів, пов'язаних з наявністю у відображення властивості Гана, рано чи пізно в певній мірі повинна була завершитись.

В [389] було знайдено необхідні та достатні умови того, щоб відображення $f : X \times Y \to Z$ має властивість Гана. Результати праці [389] викладено в підрозділі 5.5.

Нехай X і Y – топологічні простори, а Z – метричний простір. Многозначне відображення $F : X \to Z$:

- *задовольняє умову* (A), якщо для довільного $\varepsilon > 0$, довільної відкритої непорожньої множини U в X і довільної множини $E \subseteq X$, щільної в U, для яких $diam(F(E)) < \varepsilon$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $diam(F(G)) < \varepsilon$;

- називається *категорно кліковим знизу* [349, 196], якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільної множини E другої категорії в X існують десь щільна в X множина A і відображення $g : A \to Z$, такі, що $A \subseteq E$, $g(x) \in F(x)$ для кожного $x \in A$ і $diam(g(A)) < \varepsilon$.

Зазначимо, що коли Z – сепарабельний метричний простір, то довільне многозначне відображення $F : X \to Z$ є категорно кліковим знизу. В твердженні 5.5.1 встановлено, що якщо X – топологічний простір, Z – метричний простір і $F : X \to Z$ – многозначне відображення, то

(1) якщо F – псевдоквазінеперервне знизу, то F – задовольняє умову (A);

(2) якщо F – покриттєво категорно клікове знизу, то F – категорно клікове знизу.

Приклад 5.5.1 показує, що для многозначних відображень з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ умова (A) слабша за псевдоквазінеперервність знизу.

Теорема 5.5.1 є узагальненням теореми 5.4.1 та багатьох інших результатів такого типу: якщо X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – не більш, ніж зліченна система множин в Y, $f : X \times Y \to Z$ – така функція, що для кожної множини $V \in \mathcal{V}$, для якої $V \cap B(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, відображення F_V задовольняє умову (A) і є категорно клікове

знизу, то множина

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

залишкова в X.

Як наслідок з теореми 5.5.1 одержуємо такий результат (наслідок 5.5.2): якщо X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, $\mathcal{V}$ – база простору Y, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$, така, що для кожної множини $V \in \mathcal{V}$ відображення F_V задовольняє умову (A) та є категорно клікове знизу і множина $M = \{x \in X : C(f^x) = Y\}$ залишкова в X, то f має властивість Гана.

В теоремі 5.5.2 вдалось одержати і обернений результат до наслідку 5.5.2: якщо X – берівський простір, Y – компактний простір, Z – метричний простір, $f : X \times Y \to Z$ – функція, яка має властивість Гана, то для довільної непорожньої множини V в Y многозначне відображення F_V задовольняє умову (A) та є категорно клікове знизу і множина $M = \{x \in X : C(f^x) = Y\}$ залишкова в X.

Результати підрозділу 5.5 опубліковані в [389], [388] та [370].

2.7.2. Інші характеризації властивості Гана подано в підрозділі 5.6. Нехай X і Y – топологічні простори, а Z – метричний простір. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається:

- *одностайно кліковим відносно* y, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і для кожної непорожньої відкритої множини U в X існує непорожня відкрита множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_{f_y}(G) < \varepsilon$ для всіх $y \in Y$;

- *локально одностайно кліковим відносно* y *в точці* $(a, b) \in X \times Y$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує окіл V точки b в Y, такий, що для кожного околу U точки a в X існує непорожня відкрита множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_{f_y}(G) < \varepsilon$ для всіх $y \in V$;

і просто *локально одностайно кліковим відносно* y, якщо воно є таким в кожній точці.

Одержано наступні характеризації властивості Гана (теореми 5.6.9 та 5.6.10): якщо X – берівський простір, Y – компактний /локально компактний/ простір, який задовольняє другу аксіому зліченності і Z – метричний простір, то $f : X \times Y \to Z$ має властивість Гана тоді і тільки

тоді, коли f одностайно клікове /локально одностайно клікове/ відносно y і множина $X_C(f)$ залишкова в X.

2.8. Сукупні властивості нарізно ослаблено неперервних функцій

2.8.1. Для функцій двох змінних монотонність відносно однієї змінної забезпечує певні сукупні властивості. Наприклад, добре відомий результат Юнґа про те, що нарізно неперервна функція, яка монотонна відносно однієї змінної, є сукупно неперервною. В.Михайлюк у [357] встановив, що монотонна відносно першої змінної і неперервна відносно другої змінної функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера. Як уже зазначалося в підрозділі 2.6.2, що функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, яка монотонна відносно першої змінної і неперервна відносно другої змінної при значеннях першої змінної з деякої залишкової множини в $\mathbb{R}$, має властивість Гана (теорема 5.2.5). У зв'язку з цим результатом природно виникло бажання перевірити, чи мають місце аналогічні результати для функцій, які монотонні відносно першої змінної і мають певну властивість ослабленої неперервності відносно другої змінної. Такі дослідження були проведені в праці [386] і тут вони подані в підрозділі 4.2.

Встановлено (теорема 4.2.1), що для простору Y, який має зліченну псевдобазу і функції $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, яка монотонна відносно першої змінної і квазінеперервна відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в $\mathbb{R}$ (клас таких відображень будемо позначати через $M\tilde{K}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R})$), існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що функція f симетрично квазінеперервна відносно x у кожній точці множини $A \times Y$. Аналогічні теореми мають місце для ледь неперервності (теорема 4.2.2) та кліковості (теорема 4.2.3). Класи таких відображень будемо позначати через $M\tilde{L}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R})$ та $M\tilde{A}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R})$ відповідно.

Крім того, встановлено результат і про сукупну квазінеперервність (теорема 4.2.5): якщо Y – довільний топологічний простір, функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ горизонтально та вертикально квазінеперервна і монотонна відносно першої змінної, то функція f квазінеперервна за сукупністю змінних.

Результати підрозділу 4.2 опубліковано в [386] та [387].

2.8.2. В підрозділі 4.7 продовжено дослідження сукупних властивостей відображень від двох змінних, які мають замкнений графік відносно однієї зі змінних, які були розпочаті З.Ґрадне в [109].

Спочатку в теоремі 4.7.2 встановлюється, що якщо X – топологічний простір, простір Y задовольняє першу аксіому зліченності /другу/, Z – гаусдорфовий локально компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, відображення $f : X \times Y \to Z$ таке, що розріз f^x неперервний для кожного x з деякої залишкової множини M в X і розріз f_y має замкнений графік для кожного $y \in Y$, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ /$C_Y(f)$/ залишкова в X.

Далі подібний результат одержується для квазінеперервності (теорема 4.7.4): якщо X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – гаусдорфовий локально компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, відображення $f : X \times Y \to Z$ таке, що f^x квазінеперервне для всіх з деякої залишкової в X множини M і f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$, то існує така залишкова в X множина A, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.

Також подано результат (теорема 4.7.6) про сукупну квазінеперервність, який аналогічний до теореми 4.2.5: якщо X – берівський простір, функція $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ горизонтально і вертикально квазінеперервна та для всіх x з деякої залишкової множини в X функція f^x має має границі зліва і справа в кожній точці, то функція f є квазінеперервною за сукупністю змінних.

На завершення буде узагальнено результат З.Ґранде з [109] на випадок функцій зі значеннями в метричних просторах. Ми уточнимо його і використаємо при цьому інший метод (теорема 4.7.9): якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – сепарабельний метричний, в якому кожна обмежена множина має компактне замикання, а функція $f : X \times Y \to Z$ така, що f^x клікова для всіх з деякої залишкової множини в X і f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$, то функція f клікова.

Результати підрозділу 4.7 опубліковано в [372] та [384].

2.8.3. В підрозділах 2.8.1 та 2.8.2 йшлося про результати, в яких за певних умов для відображення $f : X \times Y \to Z$ існує залишкова в X множина A, така, що відображення f симетрично квазінеперервне /клікове/ відносно x в

кожній точці добутку $A \times Y$. Очевидно, що коли відображення $f : X \times Y \to Z$ симетрично квазінеперервне /клікове/ відносно x в кожній точці вертикалі $\{a\} \times Y$, то відображення f^a квазінеперервне /клікове/. Також очевидно, що з сукупної квазінеперервності чи кліковості ніяк не випливає монотонність чи наявність замкненого графіка у відображень f_y для $y \in Y$. У зв'язку з цим виникла задача про відшукання мінімальних умов на відображення $f : X \times Y \to Z$, за яких буде існувати залишкова в X множина A, така, що відображення f має симетричну властивість певного ослаблення неперервності відносно x в кожній точці добутку $A \times Y$.

Першим результатом такого типу є теорема 4.1.3, яка є уточненням відповідного результату з [337]: якщо X – топологічний простір, простори Y і Z задовольняють другу аксіому зліченності і відображення $f : X \times Y \to Z$ квазінеперервне за сукупністю змінних, то існує залишкова в X множина A, така, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці добутку $A \times Y$.

Подібний результат має місце і для кліковості (теорема 4.4.4): якщо X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевбобазу, Z – метричний простір і функція $f : X \times Y \to Z$ сукупно клікова, то існує залишкова в X множина A, така, що функція f симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$. Зауважимо, що наслідки 4.1.1 та 4.4.1 з цих двох результатів узагальнюють відповідні результати Е.Котлікки та А. Малізевського з [157].

Ще одним результатом на цю тему є теорема 4.4.5: якщо простір X має зліченну псевдобазу, Y – берівський простір, який має зліченну псевдобазу, Z – меричний простір і функція $f : X \times Y \to Z$ клікова відносно першої змінної і квазінеперервна відносно другої змінної, то існує залишкова в X множина A, така, що функція f симетрично квазінеперервна відносно x в кожній точці множини $A \times Y$. Ця теорема є аналогом відповідного результату Л.Фудалі з [84].

Що стосується деяких інших ослаблень неперервності, то в теоремах 4.4.1–4.4.3 вказано умови, при яких для відображення $f : X \times Y \to Z$ буде існувати залишкова в X множина A, така, що відображення f сукупно майже неперервне (майже квазінеперервне, майже ледь неперервне) в кожній точці множини $A \times Y$.

Ці результати опубліковано в [375], [378] та [227].

2.8.4. Відточення достатніх умов наявності у відображення $f : X \times Y \to Z$ залишкової в X множини A, такої, що відображення f симетрично квазінеперервне /клікове/ відносно x в кожній точці добутку $A \times Y$ було продовжене в праці [360]. З цією метою там було введено дві нові властивості.

Нехай X, Y та Z – топологічні простори. Відображення $f : X \times Y \to Z$ *задовольняє умову* (B^*), якщо для довільної десь щільної множини A в X і довільної відкритої непорожньої множини V в Y існують відкриті непорожні множини G в X та H в Y, такі, що $G \subseteq \overline{A}$, $H \subseteq V$ і $f(G \times H) \subseteq \overline{f((A \times V)}$. Для метричного простору Z функція $f : X \times Y \to Z$ *задовольняє умову* (C), якщо для кожного $\varepsilon > 0$, для довільної множини E другої категорії в X і довільної відкритої непорожньої множини V в Y існують множина E_1 десь щільна в X і функція $g : E_1 \to V$, такі що $E_1 \subseteq B$ і $\omega_f(Gr(g)) < \varepsilon$.

Як вже зазначалося в підрозділі 1.7.1 в [381] включення $K_hK(X \times Y, Z) \subseteq K(X \times Y, Z)$ було встановлене для берівського простору X, простору Y з другою аксіомою зліченності і регулярного простору Z. Використовуючи теорему 4.1.3 можна довести, що для берівського простору X, простору Y з другою аксіомою зліченності і метризовного сепарабельного простору Z для відображення $f : X \times Y \to Z$ з класу $K_hK(X \times Y, Z)$ існує залишкова в X множина A, така, що функція f симетрично квазінеперервна відносно x в кожній точці множини $A \times Y$. Однак, з урахуванням того факту, що горизонтально квазінеперервне відображення задовольняє умову (B^*) (див. лему 4.1.1) має місце точніший результат (теорема 4.5.3): якщо X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B^*) та (C) і f^x – квазінеперервна для всіх x з деякої залишкової множини M в X, то існує залишкова в X множина E, така, що функція f симетрично квазінеперервна відносно x в кожній точці множини $E \times Y$.

Подібний результат справедливий і для симетричної кліковості (теорема 4.5.1): якщо X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B^*) та (C) і f^x – клікова для всіх x з деякої залишкової множини M в X, то існує залишкова в X множина A, така, що функція f – симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.

За допомогою умови (B^*) вдалося одержати достатні умови

псевдоквазінеперервності та м'якої неперервності функцій від двох змінних. Так, в теоремі 4.8.4 встановлено, що коли X та Y – берівські простори, причому простір Y має зліченну псевдобазу, Z – сепарабельний метризовний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умову (B^*) і $E = \{x \in X : f^x -$ псевдоквазінеперервне$\}$ – залишкова множина в X, то відображення f псевдоквазінеперервне. Для м'якої неперервності має місце такий результат (теорема 4.8.5): якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метризовний сепарабельний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умову (B^*) і $M = \{x \in X : f^x -$ м'яко неперервне$\}$ – залишкова множина в X, то відображення f м'яко неперервне за сукупністю змінних.

Ці результати опубліковано в [360], [374], [372], [225], [225], [385] і [379].

2.9. Характеризація сукупної квазінеперервності та її аналогів

2.9.1. Як зазначалося в підрозділі 1.7.1 квазінеперервність є одним з небагатьох ослаблень неперервності, з нарізних властивостей якого випливають сукупні. Однак, вже сукупна квазінеперервність відображення від декількох змінних не гарантує квазінеперервності відносно деякої змінної (приклад 4.1.3). В [375] було вказано необхідні та достатні умови для відображення $f : X \times Y \to Z$, при яких воно буде квазінеперервним за сукупністю змінних.

В теоремі 4.1.1 доведено, що для берівського простору X, топологічного простору Y, який має зліченну псевдобазу, регулярного простору Z, відображення $f : X \times Y \to Z$ з класу $K_h\tilde{K}(X \times Y, Z)$ є квазінеперервним за сукупністю змінних. Приклад 4.1.1 показує, що горизонтально і вертикально квазінеперервні відображення не зобов'язані бути сукупно квазінеперервними. Навіть наявність у таких відображень всюди щільної множини точок неперервності не гарантує сукупної квазінеперервності (приклад 4.1.2).

Використовуючи наслідок 4.1.1 теореми 4.1.3 одержано таку характеризацію сукупної квазінеперервності функцій від двох змінних (теорема 4.1.4): якщо X – берівський простір, простір Y задовольняє

другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір, то $K_h\tilde{K}(X \times Y, Z) = K(X \times Y, Z)$.

Введене в [380] поняття слабкої горизонтальної квазінеперервності дало можливість уточнити теореми 4.1.1 та 4.1.4, замінивши горизонтальну квазінеперервність цим слабшим поняттям.

Ці результати опубліковано в [375], [372], [380] та [382].

2.9.2. Ще одне поняття дало можливість охарактеризувати сукупну кліковість функцій від двох змінних. Нехай X та Y – топологічні простори, а Z - метричний простір. Ми кажемо, що функція $f : X \times Y \to Z$ *задовольняє умову* (B), якщо для довільного $\varepsilon > 0$, довільних відкритих непорожніх множин U в X і V в Y та довільної множини $E \subseteq X$ щільної в U, для яких $\omega_f(E \times V) < \varepsilon$, існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y, такі, що $G \subseteq U$, $H \subseteq V$ і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$.

Зауважимо, що умови (B) і (C) слабші за слабку горизонтальну квазінеперервність (твердження 4.6.1 та приклад 5.6.1). Має місце такий результат (наслідок 4.6.1): якщо X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B) та (C) і f^x – клікова для всіх x з деякої залишкової множини в X, то існує залишкова в X множина A, така, що функція f симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.

Виявляється, що наявність у функції $f : X \times Y \to Z$ залишкової в X множина A, такої, що функція f симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$ рівносильна сукупній кліковості (наслідок 4.6.3): якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, то для того щоб функція $f : X \times Y \to Z$ була кліковою необхідно і досить, щоб існувала залишкова в X множина A, така, що функція f симетрично клікова відносно x за сукупністю змінних в кожній точці з множини $A \times Y$.

З наслідків 4.6.3 і 4.6.2 одержуємо такий результат (наслідок 4.6.4): якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – функція, то для того, щоб функція f була кліковою необхідно і досить, щоб функція f задовольняла умови (B) та (C) і множина $\{x \in X : f^x$ клікова $\}$ була залишкова в X.

Характеризацію точкової розривності встановлено в наслідку 4.8.2: якщо

X та Y – берівські простори, причому простір Y має зліченну псевдобазу і Z – метричний простір, то функція $f : X \times Y \to Z$ точково розривна тоді і тільки тоді, коли функція f задовольняє умови (B) та (C) і $M = \{x \in X : \overline{C(f^x)} = Y\}$ – залишкова множина в X.

Також знайдено необхідні та достатні умови існування у відображення $f : X \times Y \to Z$ залишкової в X множини A, такої, що функція f є симетрично квазінеперервною відносно x у кожній точці множини $A \times Y$ (наслідок 4.6.5): якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – функція, то для того щоб існувала залишкова в X множина A, така, що функція f була симетрично квазінеперервною відносно x у кожній точці множини $A \times Y$, необхідно і досить, щоб функція f задовольняла умови (B) та (C) і множина $M = \{x \in X : f^x$ – квазінеперервна$\}$ була залишковою в X.

Результати цього підрозділу опубліковано в [226], [230], [385] і [370].

2.10. Декомпозиція неперервності

2.10.1. Під декомпозицією певної властивості відображення, як вже зазначалося в підрозділі 1.10, розуміють теореми, в яких ця властивість встановлюється при виконанні кількох слабших за неї властивостей.

Перша декомпозиційна теорема про неперервність за участю перехідності була встановлена в [343] і про ней вже йшлося в підрозділі 2.5.1 (теорема 6.1.8). Там же було перенесено цей результат на випадок відображень від двох змінних (теорема 6.1.9): якщо X і Y – локально зв'язні простори, Z – топологічний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ має слабку властивість Дарбу відносно кожної змінної і є перехідним за сукупністю змінних, то відображення f неперервне за сукупністю змінних. Цей результат розвиває результати праць [313] та [261], де розглядалися відображення з замкненим графіком (див. підрозділ 1.10.4).

Наступним декомпозиційним об'єктом для застосування перехідності стала класична теорема про замкнений графік Стефана Банаха [318, с. 35, теорема 7], яка у спрощеному вигляді формулюється так: для довільних банахових просторів X і Y кожне лінійне відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком є неперервним. Виявляється, що кожне лінійні

відображення $f : X \to Y$, де X і Y – довільні топологічні векторні простори (скорочено: ТВП), має слабку властивість Дарбу (теорема 6.3.1). Тому з теореми 6.1.8 про декомпозицію неперервності негайно випливає, що лінійні відображення $f : X \to Y$ будуть перехідними тоді і тільки тоді, коли вони неперервні (теорема 6.3.2). Втім, неперервність перехідного лінійного відображення в ТВП легко встановлюється і безпосередньо на основі того, що в довільному ТВП існує база заокруглених околів нуля. Крім того, наведено приклад лінійного оператора, який має замкнений графік, але не є неперервним, а тому згідно з теоремою 6.3.2 не є і перехідним.

Нескладно перевірити, що для гаусдорфового ТВП Y скінченновимірні лінійні відображення $f : X \to Y$ із замкненим графіком обов'язково перехідні, а значить, неперервні (теорема 6.3.3), зокрема, неперервними будуть і лінійні функціонали $f : X \to \mathbb{K}$ із замкненим графіком (теорема 6.3.4). Виявляється, що замкненість графіка лінійного функціонала f рівносильна замкненості його ядра $kerf$. Тому отриманий результат еквівалентний відомому критерію неперервності лінійного функціонала в термінах його ядра [328, с. 15]. Встановлюємо також, що для скінченновимірних лінійних відображень $f : X \to Y$ наступні умови еквівалентні: (i) f – неперервне; (ii) $\ker f$ замкнене; (iii) Grf замкнений (теорема 6.3.5).

В [197] було встановлено ще дві теореми про декомпозицію неперервності за участю аналогів перехідності. Перша з них (теорема 6.2.6) розвиває результат М.Матейдеса з [199]: якщо X – берівський локально зв'язний простір, Y – сепарабельний метризовний простір і відображення $f : X \to Y$ w^*-квазінеперервне, має слабку властивість Дарбу і майже неперервне, то відображення f неперервне. А теорема 6.2.7 покращує результат Р.Ґібсон з [95]: якщо X – берівський локально зв'язний простір, функція $f : X \to \mathbb{R}$ слабко квазіперехідна, має слабку властивість Дарбу і майже неперервна, то вона неперервна.

Ці результати опубліковано в [343], [347], [197], [367], [352] і [345].

2.10.2. В [362] для функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ було проаналізовано типи точок розриву різних ослаблень неперервності. Для одержання декомпозиції неперервності достатньо було вибрати два ослаблення неперервності, у яких тип можливих точок розриву різний. Наприклад, для монотонної функцій існує скінченна

границя зліва, або справа у можливих точках розриву. А для точок розриву майже неперервних функцій границі справа, або зліва не існує. Тому майже неперервна монотонна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною.

Кажуть [17], що $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є *регульованою функцією*, якщо існують скінченні правосторонні та лівосторонні границі функції f в кожній точці. Тоді регульована функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка має властивість Юнґа, є неперервною (теорема 3.7.1).

Ці результати опубліковано в [362].

2.11. Сукупні властивості многозначних відображень

2.11.1. Результат про сукупну неперервність однозначних відображень $f : X \times Y \to Z$, які горизонтально квазінеперервні і неперервні відносно другої змінної з [353] можна перенести і на випадок многозначних відображень.

Нехай X, Y, Z – топологічні простори. Многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним зверху /знизу/ в точці* $p_0 \in X \times Y$, якщо для довільної відкритої непорожньої множини W в Z, такої, що $F(p_0) \subseteq W$ $/F(p_0) \cap W \neq \varnothing/$ і довільних околів U та V точок $x_0 \in X$ та $y_0 \in Y$ відповідно, існують відкрита непорожня множина G в X і точка y_1 в Y, такі, що $G \subseteq U, y_1 \in V$ і $F(p) \subseteq W$ $/F(p) \cap W \neq \varnothing/$ для всіх $p \in G \times \{y_1\}$. Многозначне відображення називається *горизонтально квазінеперервним зверху /знизу/*, якщо воно є таким в кожній точці. Многозначне відображення називається *компактнозначним*, якщо образ кожної точки є компактною множиною.

Справедливі такі теореми: якщо X і Y – топологічні простори, B – множина зліченного типу в Y, Z – метризовний сепарабельний простір,

- многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне зверху і F^x неперервне знизу для x з деякої залишкової множини в X, то множина $C_B^-(F)$ залишкова в X (теорема 7.1.1);

- компактнозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне знизу і F^x неперервне зверху для x з деякої залишкової множини M в X, то множина $C_B^+(F)$ залишкова в X (теорема 7.1.2).

Ці результати опубліковано в [393] та [392].

2.11.2. Результат з [375] про сукупну квазінеперервність відображень з класу $K_h\tilde{K}(X \times Y, Z)$ в [383] перенесено на випадок многозначних відображень. Тим сами було покращено відповідні результати Т.Нойбруна з [234], про які йшлося в підрозділі 1.11.2. Пізніше, в [82] результати з [383] були уточнені і подані в такому вигляді:

- якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – регулярний простір, $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення, яке горизонтально квазінеперервне зверху та знизу і множина $\{x \in X : F^x -$ квазінеперервне знизу $\}$ – залишкова множина в X, то F – квазінеперервне знизу за сукупністю змінних (7.2.3);

- якщо X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – нормальний, простір і $F : X \times Y \to Z$ замкненозначне відображення, яке горизонтально квазінеперервне зверху та знизу і множина $\{x \in X : F^x -$ квазінеперервне зверху $\}$ – залишкова множина в X, то F – квазінеперервне зверху за сукупністю змінних (7.2.4).

Також в підрозділі 7.2 знайдено необхідні та достатні умови того, що многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ буде квазінеперервним зверху (теорема 7.2.5) /знизу (теорема 7.2.5)/.

Ці результати опубліковано в [383], [82] та [224].

РОЗДІЛ 3.
РІЗНІ ОСЛАБЛЕННЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ ТА ЗВ'ЯЗКИ МІЖ НИМИ

3.1. Множина точок майже неперервності

3.1.1. Починаємо з дослідження множини точок майже неперервності, майже квазінеперервності та ледь неперервності.

Теорема 3.1.1. *Нехай X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ – відображення. Тоді множина точок майже неперервності є залишковою множиною.*

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного. Нехай множина точок майже неперервності не є залишковою. Тоді множина E точок, в яких f не є майже неперервною, є множиною другої категорії. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Y. Для кожного номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in E : f(x) \in V_n, x \notin int\overline{f^{-1}(V_n)}\}.$$

Покажемо, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Візьмемо довільну точку $x \in E$. Оскільки відображення f не є майже неперервним в точці x, то існує окіл V точки $f(x)$ в Y, такий, що $x \notin int\overline{f^{-1}(V)}$. Для околу V точки $f(x)$ існує номер n, такий, що $f(x) \in V_n \subseteq V$. Зрозуміло, що $int\overline{f^{-1}(V_n)} \subseteq int\overline{f^{-1}(V)}$ і тому $x \notin int\overline{f^{-1}(V_n)}$. Отже, $x \in A_n$.

Оскільки множина E другої категорії в X, то існує номер m, такий, що множина A_m десь щільна. Тоді $int\overline{A_m} \neq \varnothing$. Візьмемо довільну точку $a \in int\overline{A_m} \cap A_m$. Оскільки $f(A_m) \subseteq V_m$, то $A_m \subseteq f^{-1}(V_m)$ і $int\overline{A_m} \subseteq int\overline{f^{-1}(V_m)}$. Отже, $a \in int\overline{f^{-1}(V_m)}$. Це суперечить тому, що $a \in A_m$. Отже, наше припущення хибне. □

Доведемо обернену теорему.

Теорема 3.1.2. *Нехай X – топологічний простір, Y – гаусдорфовий топологічний простір із збіжною послідовністю різних точок, A –*

залишкова множина в X. Тоді існує відображення $f : X \to Y$, таке, що множина його точок майже неперервності – це множина A.

Доведення. Візьмемо точку $a \in Y$ і послідовність (a_n) в Y, такі, що $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $a_i \neq a$, для довільних $i, j \in \mathbb{N}$ і $a_n \to a$ при $n \to \infty$. Оскільки множина A залишкова в X, то існує диз'юнктна послідовність ніде не щільних в X множин A_n, така, що $X \setminus A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Покладемо $f(x) = a$, якщо $x \in A$ і $f(x) = a_n$, якщо $x \in A_n$.

Нехай $x_0 \in A$. Тоді $f(x_0) = a$. Візьмемо довільний окіл V точки a в Y. Оскільки послідовність (a_n) збігається до a, то поза околом V є лише скінченна кількість елементів послідовності (a_n). Таким чином, $f^{-1}(V)$ є всюди щільною множиною в X, бо доповнення до $f^{-1}(V)$ будучи скінченним об'єднанням тих множин A_n, що $a_n \notin V$, є ніде не щільною множиною. Отже, f є майже неперервним у точці x_0.

Нехай $x_0 \notin A$. Тоді існує номер n_0, такий, що $x_0 \in A_{n_0}$ і $f(x_0) = a_{n_0}$. Оскільки $a \neq a_{n_0}$, то існують околи V точки a і V_0 точки a_{n_0} в Y, такі, що $V \cap V_0 = \emptyset$. Через те, що $a_n \to a$, при $n \to \infty$, існує номер N, такий, що для всіх $n > N$ маємо $a_n \in V$. Оскільки $a_{n_0} \neq a_n$ для $n \neq n_0$, то існують околи V_n точки a_{n_0}, такі, що $a_n \notin V_n$. Зрозуміло, що $G = V_0 \cap (\bigcap\limits_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{N} V_n)$ є околом точки a_{n_0} і $a_n \notin G$ для $n \neq n_0$. Тому $f^{-1}(G) = A_{n_0}$ – ніде не щільна множина. Отже, відображення f не є майже неперервним в точці x_0. □

Наступний приклад показує, що наявність зліченної бази у просторі Y теореми 3.1.1 є істотною.

Приклад 3.1.1. *Існує функція $f : \mathbb{R} \to l_\infty$ з порожньою множиною точок майже неперервності.*

Побудова прикладу. Нехай T – система всіх непорожніх підмножин натурального ряду і $e_\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – характеристична функція множини $\tau \in T$. Добре відомо, що існує бієкція $x \to \tau_x$ числової прямої $\mathbb{R}$ на множину T. Позначимо через V_τ кулю радіуса $\frac{1}{3}$ з центром в точці e_τ в банаховому просторі l_∞. Розглянемо відображення $f : \mathbb{R} \to l_\infty$, яке діє за правилом $f(x) = e_{\tau_x}$. Тоді для кожного $x \in \mathbb{R}$ маємо $f^{-1}(V_{\tau_x}) = \{x\}$. Оскільки одноточкова множина в просторі $\mathbb{R}$ є ніде не щільною множиною, то відображення f не є майже неперервним в жодній точці $x \in \mathbb{R}$. □

В [321] було показано, що множина точок майже ледь неперервності будь-якого відображення із значеннями в просторі, що задовольняє другу аксіому зліченності, є залишковою. Результат з [321] є наслідком теореми 3.1.1, адже множина точок майже неперервності міститься в множині точок майже ледь неперервності. Оскільки множина точок майже квазінеперервності містить множину точок майже неперервності, то як наслідок з теореми 3.1.1 одержуємо такий результат.

Теорема 3.1.3. *Нехай X і Y – топологічні простори, що задовольняють другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ – довільне відображення. Тоді множина всіх точок майже квазінеперервності відображення f є залишковою в X.*

3.1.2. Тепер покажемо, що множина точок ледь неперервності функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є довільною.

Лема 3.1.1. *Нехай X і Y - топологічні простори, відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне в точці $a \in X$ і $f(a) = f(b)$, де $b \in X$. Тоді відображення f є ледь неперервним в точці b.*

Доведення. Візьмемо довільний окіл V точки $f(b)$ в Y. Оскільки $f(b) = f(a)$ і відображення f ледь неперервне в точці a, то існує відкрита непорожня множина U в X, така, що $f(U) \subseteq V$. Це означає, що f ледь неперервне в точці b. □

Теорема 3.1.4. *Нехай A – довільна підмножина числової прямої $\mathbb{R}$. Тоді існує відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, таке, що A є множиною точок ледь неперевності f.*

Доведення. Прикладом відображення, у якого множина точок ледь неперервності є порожньою, є функція Діріхле.

Візьмемо довільну непорожню множину A в $\mathbb{R}$ і точку $a \in A$. Побудуємо шукане відображення так: покладемо $f(x) = 0$, якщо $x \in A$, $f(x) = x - a$, якщо $x \in ((\mathbb{Q} \cap (a, +\infty)) \cup ((-\infty, a) \setminus \mathbb{Q})) \setminus A$ і $f(x) = a - x$, якщо $x \in ((\mathbb{Q} \cap (-\infty, a)) \cup ((a, +\infty) \setminus \mathbb{Q})) \setminus A$.

Спочатку покажемо, що відображення f є ледь неперервним в точці a. Зрозуміло, що $f(a) = 0$. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Тоді для всіх x, які задовольняють умову $|x - a| < \varepsilon$ маємо, $|f(x)| < \varepsilon$. Це означає, що відображення f є

навіть неперервним в точці a. Згідно з лемою 3.1.1 відображення f є ледь неперервним в кожній точці з множини A.

Візьмемо $x_0 \notin A$. Нехай спочатку $x_0 \in \mathbb{Q}$. Легко бачити, що тоді $y_0 = f(x_0) > 0$. Візьмемо $0 < \varepsilon < y_0$ і покладемо $V_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| < \varepsilon\}$. Зрозуміло, що кожна точка з V_ε більша нуля. Оскільки множина ірраціональних точок числової прямої є всюди щільною в $\mathbb{R}$ і відображення f в ірраціональних точках набуває недодатних значень, то не існує відкритої множини в $\mathbb{R}$, образ якої при відображенні містився би в околі V_ε. Аналогічні міркування проводяться і для $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Таким чином, відображення f не є ледь неперервним для $x \notin A$. $\square$

3.2. Точки $\mathcal{A}$-квазінеперервності

3.2.1. Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – відображення, $x \in X$ і $\mathcal{A}_x$ – система множин в X. Відображення f *називається* $\mathcal{A}_x$-*квазінеперервним в точці* x, якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y і для кожного околу U точки x в X існує множина $A \in \mathcal{A}_x$, така, що $A \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$. Нехай $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$ – сім'я систем в X. Ми кажемо, що відображення $f : X \to Y$ є $\mathcal{A}$-*квазінеперервним в точці* $x \in X$, якщо воно є $\mathcal{A}_x$-квазінеперервним у точці x. Відображення $f : X \to Y$ називається $\mathcal{A}$-*квазінеперервним*, якщо воно є $\mathcal{A}$-квазінеперервним у кожній точці з X. Надалі будемо вважати, що сім'я множин $\mathcal{A}$, задовольняють таку умову (N): для кожної точки $x \in X$, для кожної множини $A \in \mathcal{A}_x$ і для будь-якої точки $y \in A$ множина A належить до $\mathcal{A}_y$.

Якщо для кожного $x \in X$ система $\mathcal{A}_x$ збігається з системою $\mathcal{U}_x$ всіх околів точки x в X, то $\mathcal{A}$-неперервність є звичайною неперервністю. Якщо для кожного $x \in X$ система $\mathcal{A}_x$ – це система $\mathcal{G}$ всіх відкритих непорожніх множин в X, то $\mathcal{A}$-неперервність є звичайною квазінеперервністю. Якщо $\mathcal{A}_x = \{A \subseteq X : (\exists\, U \in \mathcal{U}_x,)(A \subseteq U \subseteq \overline{A})\}$ для кожного $x \in X$, то $\mathcal{A}$-неперервність є майже неперервністю. Якщо ж $\mathcal{A}_x = \{A \subseteq X : (\exists\, G \in \mathcal{G})(A \subseteq G \subseteq \overline{A})\}$, то $\mathcal{A}$-неперервність є майже квазінеперервністю. Зауважимо, що всі сім'ї $\mathcal{A}$, що тут зустрічаються, задовольняють умову (N).

Множина B простору X називається $\mathcal{A}$-відкритою, якщо для кожного

$x \in B$ і для кожного околу U точки x існує множина $A \in \mathcal{A}_x$, така, що $A \subseteq U \cap B$. Нехай $f : X \to Y$ – відображення, де Y – метричний простір з метрикою $|\circ - \circ|$ і $\mathcal{A}_{x_0}$ – деяка система множин для $x_0 \in X$. Введемо позначення

$$\omega_{f,x_0}(A) = \sup_{x',x'' \in A \cup \{x_0\}} |f(x') - f(x'')|,$$

де $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ і

$$\omega_{f,x_0}(\mathcal{A}_{x_0}) = \sup_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \inf_{\substack{A \in \mathcal{A}_{x_0} \\ A \subseteq U}} \omega_{f,x_0}(A).$$

Твердження 3.2.1. *Для того, щоб відображення $f : X \to Y$, де X – топологічний простір, а Y – метричний, було $\mathcal{A}$-квазінеперервним в точці x необхідно і досить, щоб $\omega_{f,x}(\mathcal{A}_x) = 0$.*

Доведення. Нехай відображення f є $\mathcal{A}$-квазінеперервне в точці x_0. Покажемо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо $\omega_{f,x_0}(\mathcal{A}_{x_0}) \leq \frac{1}{n}$. Візьмемо $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо $\frac{1}{2n}$-окіл точки $y_0 = f(x_0)$ в Y. Оскільки відображення f є $\mathcal{A}$-квазінеперервне в точці x_0, то для кожного околу U точки x_0 існує множина $A \in \mathcal{A}_{x_0}$, така, що $A \subseteq U$ і образ множини A міститься в $\frac{1}{2n}$-околі точки y_0, тобто для кожного $x \in A$ маємо $|f(x_0) - f(x)| < \frac{1}{2n}$. Тоді для будь-яких x' і x'' з множини $A \cup \{x_0\}$ маємо $|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{n}$. Отже, $\sup\limits_{x',x'' \in A \cup \{x_0\}} |f(x') - f(x'')| \leq \frac{1}{n}$. Тоді $\inf\limits_{\substack{A \in \mathcal{A}_{x_0} \\ A \subseteq U}} \omega_{f,x_0}(A) \leq \frac{1}{n}$, для $n \geq 1$. Отже, $\omega_{f,x_0}(\mathcal{A}_{x_0}) \leq \frac{1}{n}$, для кожного $n \geq 1$. Перейдемо до границі по n до ∞. Тоді $\omega_{f,x_0}(\mathcal{A}_{x_0}) = 0$.

Навпаки, нехай $x_0 \in X$ і $\omega_{f,x_0}(\mathcal{A}_{x_0}) = 0$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і довільний окіл U точки x_0. Оскільки $\omega_{f,x_0}(\mathcal{A}_{x_0}) = 0$, то існує $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ така, що $A \subseteq U$ і $\omega_{f,x_0}(A) < \varepsilon$. Отже, маємо $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ для кожного $x \in A$. Це означає, що образ множини A міститься в ε-околі точки $y_0 = f(x_0)$. □

Твердження 3.2.2. *Нехай X – топологічний простір, Y – метричний, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$ – сім'я систем в X і $f : X \to Y$ – відображення. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ множини $B_\varepsilon = \{x \in X : \omega_{f,x}(\mathcal{A}_x) < \varepsilon\}$ є $\mathcal{A}$-відкритою.*

Доведення. Нехай $x_0 \in B_\varepsilon$. Тоді для кожного відкритого околу U точки x_0 існує множина $A \in \mathcal{A}_{x_0}$, така, що $A \subseteq U$ і $\omega_{f,x_0}(A) < \varepsilon$. Оскільки U – відкрита, то для кожної точки $x \in A$, множина U є її околом. Крім того, сім'я $\mathcal{A}$ має властивість (N). Тому $A \in \mathcal{A}_x$ для кожного $x \in A$. Це означає,

що $\omega_{f,x}(\mathcal{A}_x) < \varepsilon$ для кожного $x \in A$. Тому $\omega_{f,x}(\mathcal{A}_x) < \varepsilon$ для $x \in A$. Отже, $A \subseteq B_\varepsilon$. Таким чином, множина B_ε – $\mathcal{A}$-відкрита. □

Теорема 3.2.1. *Нехай X – топологічний простір, Y – метризовний і $f : X \to Y$ – відображення. Тоді множина точок $\mathcal{A}$-квазінеперервності є зліченним перетином $\mathcal{A}$-відкритих множин.*

Доведення. Розглянемо множини $B_{\frac{1}{n}} = \{x \in X : \omega_{f,x}(\mathcal{A}_x) < \frac{1}{n}\}$ для кожного натурального n. Згідно з твердженням 3.2.2 множини $B_{\frac{1}{n}}$ є $\mathcal{A}$-відкриті. Легко бачити, що

$$\{x \in X : \omega_{f,x}(\mathcal{A}_x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \omega_{f,x}(\mathcal{A}_x) < \frac{1}{n}\}.$$

Оскільки множини $B_{\frac{1}{n}}$ – $\mathcal{A}$-відкриті, то згідно з твердженням 3.2.1 теорема доведена. □

3.3. Нові характеризіції деяких ослаблень неперервності

3.3.1. Нехай X і Y – топологічні простори, $\mathcal{A}$ – деяка система підмножин простору X і $f : X \to Y$ – відображення. Ми кажемо, що відображення f є *неперервним відносно системи* $\mathcal{A}$, якщо $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \in \mathcal{A}$.

Спочатку перенесемо результат Р.Мімни з [207] на випадок топологічних просторів.

Твердження 3.3.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, причому простір X задовольняє умову:*

($\star$) *для довільної підмножини A в X і точки $x \in \overline{A} \setminus A$ існує ніде не щільна множина N в X, така, що $N \subseteq A$ і $x \in \overline{N}$,*

і $\mathcal{N}$ – система ніде не щільних підмножин простору X. Відображення $f : X \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли f є неперервним відносно системи $\mathcal{N}$.

Доведення. Необхідність є очевидною. Встановимо достатність. Припустимо, що відображення f є неперервним відносно системи $\mathcal{N}$ і не є неперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y,

такий, що для довільного околу U точки x_0 в X існує точка $x_U \in U$, така, що $f(x_U) \in Y \setminus V$. Розглянемо множину $A = \{x_U \in X : U -$ окіл точки $x_0\}$. Очевидно, що $x_0 \in \overline{A} \setminus A$ і $f(A) \subseteq Y \setminus V$. Тоді за умовою $(\star)$ існує ніде не щільна множина N в X, така, що $N \subseteq A$ і $x_0 \in \overline{N}$. Оскільки відображення f неперервне відносно системи $\mathcal{N}$, множина $Y \setminus V$ замкнена і $N \subseteq A$, то

$$f(x_0) \in f(\overline{N}) \subseteq \overline{f(N)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Однак, $f(x_0) \in V$, що приводить до суперечності. □

Зауважимо, що якщо простір має ізольовані точки, то він не задовольняє умову $(\star)$. Те, що простір X в твердженні 3.3.1 не має ізольованих точок, є істотною умовою. Це показує наступний приклад.

Приклад 3.3.1. *Існує неперервна відносно системи $\mathcal{N}$, але розривна функція.*

Побудова прикладу. Нехай $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ – простір з індукованою з $\mathbb{R}$ топологією. Визначимо функцію $f : X \to \mathbb{R}$ так: $f(x) = 0$, якщо $x \neq 0$ і $f(0) = 1$. Так визначена функція є розривною в точці $x = 0$. Єдиною непорожньою ніде не щільною множиною в X є одноточкова множина $N = \{0\}$. Зрозуміло, що $\overline{N} = N$. Тоді

$$f(\overline{N}) = f(N) = \{1\} = \overline{\{1\}} = \overline{f(N)}.$$

Отже, функція f є $\mathcal{N}$-неперервною, але розривною. □

Твердження 3.3.2. *Кожний метризовний простір без ізольованих точок задовольняє умову $(\star)$.*

Доведення. Зафіксуємо метрику $|\circ - \circ|$ на просторі X, яка породжує його топологію. Нехай $A \subseteq X$ і $x \in \overline{A} \setminus A$. Покладемо $d_1 = 1$. Візьмемо довільну точку $x_1 \in A$, таку, що $|x - x_1| < d_1$. Це можливо, адже $x \in \overline{A}$. Для $d_2 = \min\{\frac{1}{2}, |x - x_1|\}$ візьмемо точку $x_2 \in A$, таку, що $|x - x_2| < d_2$. Продовживши цей процес до нескінченності ми одержимо послідовність (x_n) різних точок з множини A і таких, що $x_n \to x$. Покладемо $N = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Зрозуміло, що $N \subseteq A$, $x \in \overline{N}$ і множина N ніде не щільна. □

3.3.2. О.Карлова та В.Михайлюк в [146] встановили наступний результат.

Теорема 3.3.1. *Нехай X та Y – топологічні простори і $\mathcal{G}$ – система відкритих підмножин простору X. Відображення $f : X \to Y$ є майже неперервне тоді і тільки тоді, коли f є функцією Ґібсона (те саме, що f є неперервним відносно системи $\mathcal{G}$).*

Цю теорему можна доповнити таким чином.

Теорема 3.3.2. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{G}_s$ – система напіввідкритих множин в X. Відображення $f : X \to Y$ є майже неперервним тоді і тільки тоді, коли f є неперервним відносно системи $\mathcal{G}_s$.*

Доведення. Якщо f – майже неперервне, то за теоремою 3.3.1 f є функцією Ґібсона, тобто $f(\overline{G}) \subseteq \overline{f(G)}$ для кожної відкритої множини G, а тоді для кожної напіввідкритої множини A маємо, що

$$f(\overline{A}) \subseteq f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(intA)} \subseteq \overline{f(A)},$$

бо множина $G = intA$ відкрита і $A \subseteq \overline{intA}$.

Навпаки, нехай відображення f є неперервним відносно системи $\mathcal{G}_s$. Оскільки $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_s$ і відображення f є неперервним відносно системи $\mathcal{G}_s$, то відображення f є неперервним відносно системи $\mathcal{G}$. Тоді з теореми 3.3.1 випливає, що f є майже неперервним. □

З теорем 3.3.1 та 3.3.2 одержуємо наступний очевидний результат.

Наслідок 3.3.1. *Для топологічних просторів X та Y і відображення $f : X \to Y$ наступні умови рівносильні:*

(1) f – майже неперервне;

(2) f є функцією Ґібсона;

(3) f є неперервним відносно системи $\mathcal{G}_s$.

3.3.3. Далі перейдемо до властивості Юнґа.

Теорема 3.3.3. *Нехай $\mathcal{O}$ – система всіх областей в $\mathbb{R}$ (тобто, система всіх інтервалів в $\mathbb{R}$). Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має властивість Юнґа тоді і тільки тоді, коли f є неперервною відносно системи $\mathcal{O}$.*

Доведення. Нехай f має властивість Юнґа і $A \in \mathcal{O}$. Розглянемо довільну точку $y \in f(\overline{A})$ і окіл V точки y. Нехай x – це така точка, що $x \in \overline{A}$ і $f(x) = y$.

Якщо $x \in A$, то $y \in f(A) \subseteq \overline{f(A)}$. Нехай $x \notin A$. Оскільки A є відкритим інтервалом і $x \in \overline{A} \setminus A$, то $A = (x, \omega)$, де $x < \omega \leq +\infty$, або $A = (\omega, x)$, де $-\infty \leq \omega < x$. Припустимо, що $A = (x, \omega)$. Оскільки f має властивість Юнґа, то існує послідовність (x_n), така, що $x_n \geq x_{n+1} > x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Тоді існує такий номер N, що $x_N \in A$ і $f(x_N) \in V$. Тому $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і $y \in \overline{f(A)}$. Аналогічно міркується у випадку $A = (\omega, x)$. Отже, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Таким чином, f є неперервною відносно системи $\mathcal{O}$.

Навпаки, нехай функція f є неперервною відносно системи $\mathcal{O}$. Припустимо, що функція f не має властивості Юнґа. Тоді існують точка x_0, відкритий окіл V точки $f(x_0)$ та інтервали $A = (x_0, x_0+\delta)$, або $A = (x_0, x_0+\delta)$, де $\delta > 0$, такі, що $f(A) \subseteq \mathbb{R} \setminus V$. Оскільки $x_0 \in \overline{A}$, $A \in \mathcal{O}$, функція f є неперервною відносно системи $\mathcal{O}$ і множина $\mathbb{R} \setminus V$ замкнена, то

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{\mathbb{R} \setminus V} = \mathbb{R} \setminus V.$$

Це суперечить тому, що V є околом точки x_0. Одержана суперечність завершує доведення. □

Наслідок 3.3.2. *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має властивість Юнґа тоді і тільки тоді, коли f є слабкою функцією Ґібсона.*

Теорема 3.3.4. *Нехай X – T_1-простір та Y – топологічний простір, $\mathcal{C}$ – система зв'язних множин в X і $f : X \to Y$ – периферійно неперервне відображення. Тоді f є неперервним відносно системи $\mathcal{C}$.*

Доведення. Нехай відображення f периферійно неперервне. Розглянемо зв'язну множину A в X. Нехай $y \in f(\overline{A})$, V – окіл точки y в Y, точка $x \in \overline{A}$, така, що $f(x) = y$.

Якщо для довільного околу U точки x маємо, що $U \cap A \supseteq A$, то $A = \{x\}$. Справді, якщо $A \neq \{x\}$, то існує точка $a \in A$, так, що $a \neq x$. Оскільки простір X задовольняє аксіому T_1, то існує окіл U_a точки x, такий, що $a \notin U_a$ і тоді $U_a \not\supseteq A$. А це суперечить тому, що $U \cap A \supseteq A$ для довільного околу U точки x. Таким чином, якщо для довільного околу U точки x маємо, що $U \cap A \supseteq A$, то $A = \{x\}$ і тому $y = f(x) \in f(A) \subseteq \overline{f(A)}$.

Нехай існує відкритий окіл U_0 точки x, такий, що $U_0 \cap A \not\supseteq A$. З периферійної неперервності відображення f в точці x випливає, що існує відкритий окіл G точки x в X, такий, що $G \subseteq U_0$ і $f(frG) \subseteq V$. Оскільки

$G \cap A \neq \varnothing$, бо $x \in \overline{A}$, $G \not\supseteq A$, бо $G \subseteq U_0$ і множина A є зв'язною, то $frG \cap A \neq \varnothing$. Візьмемо точку $a \in frG \cap A$. Тоді $f(a) \in f(frG) \subseteq V$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і тому $y \in \overline{f(A)}$.

В обох випадках ми одержуємо, що $y \in \overline{f(A)}$, отже $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Таким чином, f є неперервним відносно системи $\mathcal{C}$. $\square$

Обернене твердження не вірне.

Приклад 3.3.2. *Існує неперервна відносно системи $\mathcal{C}$ функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка не є периферійно неперервною.*

Побудова прикладу. Визначимо функцію $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ так:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Функція f не є периферійно неперервною в жодній точці вертикалі $\{0\} \times \mathbb{R}$. Справді, нехай $p_y = (0, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}$. Тоді $f(p_y) = 0$. Розглянемо окіл $V = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ точки $f(p_y)$, довільний обмежений відкритий окіл U точки p_y в $\mathbb{R}^2$ і множину $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\} \times \mathbb{R})$. Зауважимо, що $p_y \in \overline{A}$ і $f(A) = \{1\}$. Оскільки $p_y \in \overline{A}$ і U – окіл точки p_y, то $U \cap A \neq \varnothing$. Тоді існує номер m, такий, що $U \cap (\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi m}\} \times \mathbb{R}) \neq \varnothing$. Оскільки вертикаль $\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi m}\} \times \mathbb{R}$ – зв'язна множина в $\mathbb{R}^2$, то і $frU \cap (\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi m}\} \times \mathbb{R}) \neq \varnothing$. Тоді $f(frU) \supseteq \{1\}$, а значить $f(frU) \not\subseteq V$. Отже, f не є периферійно неперервною в точці p_y.

Покажемо тепер, що функція f є неперервною відносно системи $\mathcal{C}$. Покладемо $g(x) = f(x, 0)$ і $pr : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – проекція площини $\mathbb{R}^2$ на вісь абсцис. Згідно побудови функції f маємо, що $g(prE) = f(E)$ для довільної множини $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Розглянемо довільну зв'язну множину E в $\mathbb{R}^2$. Нехай $A = prE$. Оскільки проекція є неперервним відображення, а при неперервному відображенні образ зв'язної множини є зв'язним, то множина A зв'язна. Також з неперервності проекції випливає, що $pr\overline{E} \subseteq \overline{prE} = \overline{A}$, і тому

$$f(\overline{E}) = g(pr\overline{E}) \subseteq g(\overline{A}).$$

Зауважимо, що зв'язним множинами в $\mathbb{R}^2$ є лише проміжки, або одноточкові множини. Якщо множина A одноточкова, то $\overline{A} = A$, і тому $g(\overline{A}) = \overline{g(A)}$. Якщо ж A – невироджений проміжок, то розглянемо випадки, коли $0 \notin \overline{A}$ і

$0 \in \overline{A}$. У випадку коли $0 \notin \overline{A}$ скористаємося тим, що функція g неперервна на множині $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, і тому для неперервної функції маємо, що $g(\overline{A}) \subseteq \overline{g(A)}$. Коли ж $0 \in \overline{A}$, то $g(\overline{A}) = \overline{g(A)} = [0, 1]$. Таким чином, в обох випадках ми маємо, що $g(\overline{A}) \subseteq \overline{g(A)}$. Тоді

$$f(\overline{E}) = g(pr\overline{E}) \subseteq g(\overline{A}) \subseteq \overline{g(A)} = \overline{f(E)}.$$

Отже, функція f є неперервною відносно системи $\mathcal{C}$.

□

Наслідок 3.3.3. *Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наступні умови еквівалентні:*

(1) f має властивість Юнґа;

(2) f є слабкою функцією Ґібсона;

(3) f периферійно неперервна;

(4) f є неперервною відносно системи $\mathcal{C}$.

Доведення. Еквівалентність (1) $\Leftrightarrow$ (2) випливає з наслідку 3.3.3. Те, що (1) $\Leftrightarrow$ (3) встановлено у [96, с. 495]. Імплікація (3) $\Rightarrow$ (4) випливає з теореми 3.3.4. З означення неперервності відносно системи $\mathcal{C}$ легко вивести, що (4) $\Rightarrow$ (2). □

3.3.4. Підмножина A простору X називається *передвідкритою*, якщо $A \subseteq int\overline{A}$.

Лема 3.3.1. *Якщо O – область у топологічному просторі X, $A \subseteq X$ і $A \subseteq O \subseteq \overline{A}$, то $int\overline{A}$ – область в X.*

Доведення. Якби множина $int\overline{A}$ була не зв'язною, то існували б відкриті непорожні множини U_1 та U_2, такі, що $U_1 \cap int\overline{A} \neq \varnothing$, $U_2 \cap int\overline{A} \neq \varnothing$ і $int\overline{A} \subseteq U_1 \sqcup U_2$. Зрозуміло, що тоді б $U_i \cap \overline{A} \neq \varnothing$ при $i = 1, 2$. Оскільки $\overline{A} = \overline{O}$, то $U_i \cap \overline{O} \neq \varnothing$ при $i = 1, 2$. З властивості множини U_i випливає, що $U_i \cap O \neq \varnothing$ при $i = 1, 2$. Оскільки $O \subseteq int\overline{A}$ і $int\overline{A} \subseteq U_1 \sqcup U_2$, то $O \subseteq U_1 \sqcup U_2$. Тоді $O = (U_1 \cap O) \sqcup (U_2 \cap O)$, що суперечить зв'язності множини O. Отже, множина $int\overline{A}$ зв'язна. Таким чином, $int\overline{A}$ – область. □

Теорема 3.3.5. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{O}_p = \{A \in 2^X : A$ – передвідкрита множина і $int\overline{A}$ – область$\}$. Відображення $f : X \to Y$ є B-квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли f є неперервним відносно системи $\mathcal{O}_p$.*

Доведення. Нехай спочатку відображення f є B-квазінеперервним і $A \in \mathcal{O}_p$, тобто, A – передвідкрита множина, така, що $int\overline{A}$ – область. Візьмемо довільну точку $y \in f(\overline{A})$ та окіл V точки y. Нехай x – це така точка з множини $\overline{A}$, що $f(x) = y$. Покажемо, що $x \in \overline{int\overline{A}}$. Справді, нехай U – довільний окіл точки x. Оскільки $x \in \overline{A}$, то $U \cap A \neq \varnothing$. Але з передвідкритості множини A випливає, що $\varnothing \neq U \cap A \subseteq U \cap int\overline{A}$. Отже, $x \in \overline{int\overline{A}}$.

За умовою $int\overline{A}$ є областю. Тоді з B-квазінеперервності відображення f випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq int\overline{A}$, а отже, $G \subseteq \overline{A}$, і $f(G) \subseteq V$. Оскільки G – відкрита непорожня множина і $G \subseteq \overline{A}$, то $G \cap A \neq \varnothing$. Тому $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і, таким чином, $y \in \overline{f(A)}$. Оскільки y була довільною точкою множини $f(\overline{A})$, то $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Це означає, що відображення f є неперервним відносно системи $\mathcal{O}_p$.

Навпаки, нехай тепер відображення f є неперервним відносно системи $\mathcal{O}_p$. Покажемо, що f – B-квазінеперервне відображення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай відображення f не є B-квазінеперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді існують відкритий окіл V точки $y_0 = f(x_0)$ в Y і область O в X, для якої $x_0 \in \overline{O}$, такі, що для довільної відкритої непорожньої множини $G \subseteq O$ маємо, що $f(G) \not\subseteq V$. Таким чином, для довільної відкритої непорожньої множини G в X, такої, що $G \subseteq O$, існує точка $x_G \in G$, що $f(x_G) \notin V$. Розглянемо множину $A = \{x_G \in X : G-$відкрита непорожня множина в X і $G \subseteq O\}$. Зрозуміло, що $f(A) \subseteq Y \backslash V$.

Зауважимо, що $A \subseteq O \subseteq \overline{A}$. Тоді $O = intO \subseteq int\overline{A}$ і $A \subseteq O \subseteq int\overline{A}$. Отже, множина A передвідкрита, а згідно з лемою 3.3.1 множина $int\overline{A}$ зв'язна.

Оскільки відображення f є неперервним відносно системи $\mathcal{O}_p$, то

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Але з другого боку, $f(x_0) \in V$, бо V – окіл точки $f(x_0)$. Одержана суперечність завершує доведення. □

Теорема 3.3.6. *Нехай X – локально зв'язний простір і Y – топологічний простір. Відображення $f : X \to Y$ є B-квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли f квазінеперервне і є слабкою функцією Ґібсона.*

Доведення. Нехай відображення $f : X \to Y$ є B-квазінеперервним. Перевіримо спочатку, що f є слабкою функцією Ґібсона. Розглянемо довільну область O в просторі X. Оскільки множина O відкрита, то $O \subseteq int\overline{O}$ і тому

O – передвідкрита множина. Згідно з лемою 3.3.1 множина $int\overline{O}$ є областю. Таким чином, $O \in \mathcal{O}_p$. Тоді з B-квазінеперервності відображення f випливає, що

$$f(\overline{O}) \subseteq \overline{f(O)}.$$

Це означає, що f є слабкою функцією Ґібсона.

Тепер встановимо квазінеперервність. Розглянемо довільну точку $x \in X$ та околи U і V точок x в X і $f(x)$ в Y відповідно. Існує відкритий зв'язний окіл O точки x, такий, що $O \subseteq U$. Таким околом буде компонента зв'язності будь-якого відкритого околу точки x, що містить цю точку і міститься в U. Оскільки відображення f B-квазінеперервне, то існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq O$ і $f(G) \subseteq V$. Отже, відображення f квазінеперервне в точці x.

Навпаки, нехай відображення $f : X \to Y$ квазінеперервне і є слабкою функцією Ґібсона. Розглянемо довільну точку $x \in X$, відкритий окіл V точки $f(x)$ в Y і область O в X, таку, що $x \in \overline{O}$. З означення слабкої функції Ґібсона випливає, що $f(\overline{O}) \subseteq \overline{f(O)}$. Оскільки $x \in \overline{O}$, то $f(x) \in \overline{f(O)}$, і тому $V \cap f(O) \neq \varnothing$. Тоді існує точка $x_1 \in O$, така, що $f(x_1) \in V$. З квазінеперервності відображення f і того, що множини O і V є околами точок x_1 в X і $f(x_1)$ в Y відповідно, випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq O$ і $f(G) \subseteq V$. Отже, f – B-квазінеперервне в точці x. □

З теореми 3.3.6 одержуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.3.4. *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є двосторонньо квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли f є квазінеперервною і має властивість Юнґа.*

3.3.5. Тепер дамо характеризацію α-неперервності.

Лема 3.3.2. *Нехай $(A_s)_{s\in S}$ – система передвідкритих множин в X. Тоді множина $A = \bigcup\limits_{s\in S} A_s$ передвідкрита.*

Доведення. Нехай $x \in A$. Тоді існує $s \in S$, що $x \in A_s$. Оскільки множина A_s передвідкрита, то $x \in int\overline{A_s}$. Тоді $x \in int\overline{A_s} \subseteq int\overline{A}$. Отже, A – передвідкрита множина. □

Теорема 3.3.7. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{G}_p$ – система всіх передвідкритих множин в X. Відображення $f : X \to Y$ є α-неперервним тоді і тільки тоді, коли f є неперервним відносно системи $\mathcal{G}_p$.*

Доведення. Нехай спочатку відображення $f : X \to Y$ є α-неперервним. Розглянемо довільну множину $A \in \mathcal{G}_p$, точку $y \in f(\overline{A})$ і V – окіл точки y в Y. Тоді існує точка $x \in \overline{A}$, така, що $f(x) = y$. Оскільки відображення f є α-неперервним в точці x, то існує α-відкрита множина E, така, що $x \in E$ і $f(E) \subseteq V$. З α-відкритості множини E випливає, що існують відкрита множина U в X і ніде не щільна множина N в X, такі, що $E = U \setminus N$. Зрозуміло, що U – окіл точки x. Оскільки $x \in \overline{A}$, то $U \cap A \neq \varnothing$. З передвідкритості множини A випливає, що $\varnothing \neq U \cap A \subseteq U \cap int\overline{A}$. Покладемо $G = U \cap int\overline{A}$. Оскільки $G \subseteq int\overline{A} \subseteq \overline{A}$, то множина A щільна в множині G. Тоді $A \cap (G \setminus N) \neq \varnothing$, бо множина N ніде не щільна. З того, що $G \subseteq U$ ми одержуємо, що і $A \cap (U \setminus N) \neq \varnothing$, отже, $A \cap E \neq \varnothing$. Тоді існує точка $a \in A \cap E$, а тому $f(a) \in V$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і $y \in \overline{f(A)}$. Таким чином, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, і значить, відображення f неперервне відносно системи $\mathcal{G}_p$.

Навпаки, нехай f неперервне відносно системи $\mathcal{G}_p$. Припустимо, що f не є α-неперервним у деякій точці x_0. Тоді існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільного околу U точки x_0 і довільної ніде не щільної множини N в X існує точка $x_N \in U \setminus N$, така, що $f(x_N) \notin V$. Розглянемо множину $A_U = \{x_N : N -$ ніде не щільна підмножина $U\}$. Множина A_U десь щільна, бо якби вона була ніде не щільна, то існувала б точка $x_{A_U} \in U \setminus A_U$, яка за означенням множини A_U мала б їй належати. Таким чином, існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільного околу U точки x_0 існує десь щільна в U множина A_U, така, що $A_U \subseteq U$ і $f(A_U) \subseteq Y \setminus V$.

Для кожного відкритого околу U точки x_0 розглянемо множину $E_U = A_U \cap int\overline{A_U}$. Зрозуміло, що $E_U \neq \varnothing$ і $E_U \subseteq U$. Покажемо, що множина E_U є передвідкритою. Для цього треба встановити, що $E_U \subseteq int\overline{E_U}$. Зауважимо, що оскільки $G = int\overline{A_U} \subseteq \overline{A_U}$, то

$$G \subseteq \overline{A_U \cap G} = \overline{A_U \cap int\overline{A_U}} = \overline{E_U}.$$

З відкритості множини G випливає, що $G = intG \subseteq int\overline{E_U}$. Таким чином,

$$E_U = A_U \cap int\overline{A_U} = A_U \cap G \subseteq int\overline{E_U}.$$

Отже, множина E_U передвідкрита.

Розглянемо множину

$$A = \bigcup\{E_U : U - \text{ відкритий окіл точки } x_0\}.$$

Зрозуміло, що $x_0 \in \overline{A}$. Згідно з лемою 3.3.2 множина A є передвідкритою. Тому за припущенням маємо, що

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} \subseteq Y \setminus V.$$

А це суперечить тому, що $f(x_0) \in V$. □

3.3.6. Ледь неперервність та майже ледь неперервність також можна охарактеризувати в термінах замикання.

Теорема 3.3.8. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{D} = \{A \in 2^X : \overline{A} = X\}$. Відображення $f : X \to Y$ є ледь неперервним тоді і тільки тоді, коли f є неперервним відносно системи $\mathcal{D}$.*

Доведення. Досить встановити, що відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ для всіх всюди щільних в X множин A.

Нехай відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне і A – всюди щільна в X множина. Розглянемо $x \in X$, $f(x) = y$ і V – окіл точки y. З ледь неперервності відображення f випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $f(G) \subseteq V$. Оскільки $\overline{A} = X$, то $G \cap A \neq \varnothing$. Візьмемо точку $a \in G \cap A$. Тоді $f(a) \in V$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і $y \in \overline{f(A)}$. Таким чином, $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$.

Навпаки, нехай $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ для всіх всюди щільних в X множин A. Припустимо, що $f : X \to Y$ не є ледь неперервним в деякій точці x_0. Тоді існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$, такий, що для довільної відкритої непорожньої множини G в X існує точка $x_G \in G$, така, що $f(x_G) \in Y \setminus V$. Розглянемо множину $A = \{x_G : G - \text{ відкрита непорожня в } X\}$. Очевидно, що множина A всюди щільна в X. Тоді

$$f(x_0) \in f(X) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V$$

і разом з тим $f(x_0) \in V$. Одержана суперечність завершує доведення. □

Теорема 3.3.9. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{D}_n = \{X \setminus N : N -$ ніде не щільна множина в $X\}$. Відображення $f : X \to Y$ є майже ледь неперервним тоді і тільки тоді, коли f є неперервним відносно системи $\mathcal{D}_n$.*

Доведення. Як і при доведенні теореми 3.3.8 досить встановити, що відображення $f : X \to Y$ майже ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ для всіх множин $A = X \setminus N$, де N – ніде не щільна в X.

Нехай відображення $f : X \to Y$ майже ледь неперервне і $A = X \setminus N$, де N – ніде не щільна в X. Розглянемо $x \in X$, $f(x) = y$ і V – окіл точки y. З майже ледь неперервності відображення f випливає, що існує десь щільна множина E в X, така, що $f(E) \subseteq V$. Оскільки N – ніде не щільна в X, $A = X \setminus N$ і множина E десь щільна в X, то $E \cap A \neq \varnothing$. Візьмемо точку $a \in E \cap A$. Тоді $f(a) \in V$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і тому $f(X) = \overline{f(A)}$.

Навпаки, нехай $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$ для всіх множин $A = X \setminus N$, де N – ніде не щільна в X. Припустимо, що $f : X \to Y$ не є майже ледь неперервним в деякій точці x_0. Тоді існують відкритий окіл V точки $f(x_0)$ та множина $A = X \setminus N$, де N – ніде не щільна в X, такі, що $f(A) \in Y \setminus V$. В такому разі

$$f(x_0) \in f(X) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V,$$

і разом з тим $f(x_0) \in V$. Отримана суперечність, яка і завершує доведення. □

3.3.7. Узагальнюючи поняття B-квазінеперервності, введемо нове поняття. Нехай $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ – деякі системи підмножин простору X. Відображення $f : X \to Y$ називається *неперервним відносно пари систем* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *в точці* $x \in X$, якщо для довільного околу V точки $f(x)$ і довільної непорожньої множини $A \in \mathcal{A}$, з умови $x \in \overline{A}$ випливає, що існує множина $B \in \mathcal{B}$, така, що $B \subseteq A$ і $f(B) \subseteq V$. Відображення f називається *неперервним відносно пари систем* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, якщо воно є таким в кожній точці.

В [23] було показано, що відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y є неперервним в точці $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли для довільного околу V точки $f(x)$ і довільної відкритої множини U в X з умови $x \in \overline{U}$ випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Звідси випливає, що відображення $f : X \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно є неперервним відносно пари систем $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$.

З означення B-квазінеперервності випливає, що відображення $f : X \to Y$ є B-квазінеперервним тоді і тільки, коли f є неперервним відносно пари систем $(\mathcal{O}, \mathcal{G})$.

Очевидною є наступна проста характеризація неперервності відносно системи $\mathcal{A}$.

Теорема 3.3.10. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{A}$ – система підмножин простору X. Відображення $f : X \to Y$ є неперервним відносно системи $\mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли для для кожної точки $x \in X$, довільного околу V точки $f(x)$ в Y та довільної множини $A \in \mathcal{A}$ в X, такої, що $x \in \overline{A}$ існує точка $a \in A$, що $f(a) \in V$.*

Позначимо через $\mathcal{P}$ – систему всіх одноточкових множин в X. Використовуючи теорему 3.3.10 та встановлені вище результати ми одержуємо, що для відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X і Y:

майже неперервність рівносильна неперервності відносно пари $(\mathcal{G}_s, \mathcal{P})$ (теорема 3.3.2);

B-квазінеперервність рівносильна неперервності відносно пари $(\mathcal{O}_p, \mathcal{P})$ (теорема 3.3.5);

α-неперервність рівносильна неперервності відносно пари $(\mathcal{G}_p, \mathcal{P})$ (теорема 3.3.7);

ледь неперервність рівносильна неперервності відносно пари $(\mathcal{D}, \mathcal{P})$ (теорема 3.3.8);

майже ледь неперервність рівносильна неперервності відносно пари $(\mathcal{D}_n, \mathcal{P})$ (теорема 3.3.9).

Якщо простір X задовольняє умову $(\star)$ з підрозділу 3.3.1, то для відображення $f : X \to Y$ неперервність рівносильна неперервності відносно пари $(\mathcal{N}, \mathcal{P})$ (твердження 3.3.1);

Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ властивість Юнґа рівносильна неперервності відносно пари $(\mathcal{O}, \mathcal{P})$ (теорема 3.3.3).

3.4. Характеризація різних ослаблень неперервності за допомогою операцій замикання та внутрішності

3.4.1. Нехай X – топологічний простір, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$ – сім'я непорожніх систем $\mathcal{A}_x \subseteq 2^X$ і $\mathcal{B}$ – деяка система в X. Системи $\mathcal{B}$ називається *спряженою з сім'єю* $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$, якщо виконуються такі дві умови:

1) для кожної множина $B \in \mathcal{B}$, кожної точки $x \in \overline{B} \setminus B$ і для кожної множини $A \in \mathcal{A}_x$ маємо, що $A \cap B \neq \varnothing$;

2) для кожної точки $x \in X$ і довільної сім'ї $(C_A)_{A \in \mathcal{A}_x}$ підмножин C_A простору X, такої, що $A \setminus C_A \notin \mathcal{A}_x$ для кожного $A \in \mathcal{A}_x$, існує сім'я $(B_A)_{A \in \mathcal{A}_x}$ підмножин B_A простору X, така, що $B_A \subseteq C_A$ для кожного $A \in \mathcal{A}_x$, $B = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}_x} B_A \in \mathcal{B}$ і $x \in \overline{B}$.

Розглянемо приклади систем, які спряжені з деякими сім'ями.

Твердження 3.4.1. *Нехай X – довільний топологічний простір, $\mathcal{U}_x$ – система всіх околів точки x в X і $\mathcal{B} = 2^X$. Тоді система $\mathcal{B}$ спряжена з сімє'ю $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_x)_{x \in X}$.*

Доведення. Нехай $B \in \mathcal{B}$, $x \in \overline{B} \setminus B$ і U – окіл точки x. Оскільки $x \in \overline{B}$, то $U \cap B \neq \varnothing$. Отже, умова 1) виконується.

Перевіримо, що виконується умова 2). Нехай $x \in X$ і $(C_U)_{U \in \mathcal{U}_x}$ – така сім'я множин $C_U \in 2^X$, що $U \setminus C_U \notin \mathcal{U}_x$ для кожного $U \in \mathcal{U}_x$.

Нехай $U \in \mathcal{U}_x$. Покладемо $B_U = C_U$. Оскільки $U \setminus B_U$ – не є околом точки x, то $x \in \overline{B_U}$. Справді, якби $x \notin \overline{B_U}$, то відкрита множина $U_0 = X \setminus \overline{B_U}$ була б околом точки x, для якого $U_0 \cap B_U = \varnothing$. Але тоді $U \setminus B_U$ – це окіл точки x, що неможливо.

Таким чином, $x \in \overline{B_U}$ для кожного $U \in \mathcal{U}_x$, а значить,

$$x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} \overline{B_U} \subseteq \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{U}_x} B_U}.$$

Крім того, зрозуміло, що $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}_x} B_U \in \mathcal{B}$. □

Твердження 3.4.2. *Нехай X – довільний топологічний простір, для кожного $x \in X$ система $\mathcal{A}_x$ – це система $\mathcal{G}$ всіх непорожніх відкритих підмножин в X і $\mathcal{B}$ – система всіх всюди щільних підмножин в X. Тоді система $\mathcal{B}$ спряжена з сімє'ю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$.*

Доведення. Нехай $B \in \mathcal{B}$, $x \in \overline{B} \setminus B$ і G – відкрита непорожня множина в X. Оскільки множина B всюди щільна, то $B \cap G \neq \varnothing$. Отже, умова 1) виконується.

Нехай $x \in X$ і кожній множині G з $\mathcal{G}$ співставлено множину $C_G \in 2^X$, таку, що $G \setminus C_G \notin \mathcal{G}$. Покладемо $B_G = C_G$ для кожного $G \in \mathcal{G}$ і $B = \bigcup\limits_{G \in \mathcal{G}} B_G$.

Оскільки $G \setminus B_G = G \setminus C_G \neq G$, то $G \cap B_G \neq \varnothing$ для кожної непорожньої відкритої множини G. Тому множина B всюди щільна в X, тобто $B \in \mathcal{B}$. Крім того, з всюди щільності множини B випливає, що $x \in \overline{B}$. Отже, і умова 2) виконується. $\square$

Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$ – сім'я непорожніх систем $\mathcal{A}_x \subseteq 2^X$ і $\mathcal{B}$ – деяка система в X. Відображення $f : X \to Y$ називається *$\mathcal{A}$-неперервним в точці* $x \in X$, якщо для довільного околу V точки $f(x)$ в Y існує множина $A \in \mathcal{A}_x$, така, що $f(A) \subseteq V$. Відображення f називається *$\mathcal{A}$-неперервним*, якщо воно є таким в кожній точці $x \in X$.

Теорема 3.4.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$ – сім'я непорожніх систем $\mathcal{A}_x \subseteq 2^X$ і $\mathcal{B}$ – система в X, яка спряжена з сімє'ю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$. Відображення $f : X \to Y$ є $\mathcal{A}$-неперервним тоді і тільки тоді, коли f неперервним відносно системи $\mathcal{B}$.*

Доведення. Нехай відображення $f : X \to Y$ – $\mathcal{A}$-неперервне, $B \in \mathcal{B}$, $y \in f(\overline{B})$ і V – окіл точки x в X. Розглянемо точку $x \in \overline{B}$, таку, що $f(x) = y$. Будемо вважати, що $x \in \overline{B} \setminus B$. З $\mathcal{A}$-неперервності відображення f в точці x випливає, що існує множина $A \in \mathcal{A}_x$, така, що $f(A) \subseteq V$. Оскільки система $\mathcal{B}$ спряжена з сім'ю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$, то з умови 1) маємо, що $A \cap B \neq \varnothing$. Тоді $f(B) \cap V \neq \varnothing$ і тому $y \in \overline{f(B)}$. Отже, відображення f є неперервним відносно системи $\mathcal{B}$.

Навпаки, нехай відображення f є неперервним відносно системи $\mathcal{B}$. Припустимо, що відображення f не є $\mathcal{A}$-неперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Це означає, що існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільної множини $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ маємо, що $f(A) \not\subseteq V$. Для кожного $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ покладемо $C_A = A \setminus f^{-1}(V)$. Оскільки $A \setminus C_A = A \cap f^{-1}(V)$, то $f(A \setminus C_A) \subseteq V$, отже, $A \setminus C_A \notin \mathcal{A}_{x_0}$. Оскільки система $\mathcal{B}$ спряжена з сім'ю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$, то з умови 2) випливає, що для кожної множини $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ існує множина $B_A \subseteq C_A$, така, що $B = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}_{x_0}} B_A \in \mathcal{B}$ і $x_0 \in \overline{B}$. Скориставшись неперервність відносно системи $\mathcal{B}$ відображення f отримаємо, що

$$f(x_0) \in f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)} = \overline{f(\bigcup_{A \in \mathcal{A}_{x_0}} B_A)} \subseteq$$

$$\subseteq \overline{f(\bigcup_{A \in \mathcal{A}_{x_0}} C_A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Одержали суперечність. Отже, відображення f є $\mathcal{A}$-неперервне. $\square$

Наступний наслідок теореми 3.4.1 – це добре відоме твердження.

Наслідок 3.4.1. *Нехай X та Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли*

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

для $A \in 2^X$.

Доведення. Відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли воно $\mathcal{A}$-неперервне, де $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$ і $\mathcal{A}_x = \mathcal{U}_x$ – система всіх околів точки x в X. З твердження 3.4.1 випливає, що система $\mathcal{B} = 2^X$ є спряженою з сім'єю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$. Згідно з теоремою 3.4.1 відображення f неперервне відносно системи $\mathcal{B}$. Тому

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

для $A \in 2^X$. □

Ще одним наслідком теореми 3.4.1 є теорема 3.3.8.

Наслідок 3.4.2. *Нехай X та Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли*

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

для довільної всюди щільної множини A в X.

Доведення. Відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне тоді і тільки тоді, коли воно $\mathcal{A}$-неперервне і $\mathcal{A}_x = \mathcal{G}$ – система всіх непорожніх відкритих множин в X для кожного $x \in X$. З твердження 3.4.2 випливає, що система $\mathcal{B}$ всіх всюди щільних підмножин в X є спряженою з сім'єю $\mathcal{A}$. З теореми 3.4.1 випливає, що відображення f буде ледь неперервним тоді і тільки тоді, коли воно буде неперервним відносно системи $\mathcal{B}$, тобто коли

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

для довільної всюди щільної множини A в X. □

3.4.2. Далі ми перейдемо до встановлення характеризаційних теорем деяких типів ослабленної неперервності. Нам будуть потрібні наступні леми.

Лема 3.4.1. *Нехай X і Y – топологічні простори. Якщо відображення $f : X \to Y$ не є квазінеперервним в точці $x_0 \in X$, то існують відкриті околи U і V точок x_0 і $f(x_0)$ в просторах X і Y відповідно та щільна в U множина A, така, що $f(A) \subseteq Y \setminus V$.*

Доведення. Оскільки відображення f не є квазінеперервним в точці x_0, то існують відкриті околи U і V точок x_0 і $f(x_0)$ в просторах X і Y відповідно, такі, що для кожної відкритої непорожньої множини $G \subseteq U$ існує точка $x_G \in G$, така, що $f(x_G) \in Y \setminus V$. Покладемо $A = \{x_G : G$ – відкрита непорожня підмножина в $U\}$. Тоді множина A щільна в U і $f(A) \subseteq Y \setminus V$. □

Лема 3.4.2. *Нехай X і Y – топологічні простори. Якщо відображення $f : X \to Y$ не є майже неперервним в точці $x_0 \in X$, то існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільного околу U точки x_0 в X існує відкрита непорожня множина G_U в X, така, що $G_U \subseteq U$ і $f(G_U) \subseteq Y \setminus V$.*

Доведення. Оскільки відображення $f : X \to Y$ не є майже неперервним в точці $x_0 \in X$, то існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільної множини E в X, такої, що $x_0 \in int\overline{E}$, маємо, що $f(A) \not\subseteq V$. Припустимо, що існує відкритий окіл U точки x_0, такий, що для довільної відкритої непорожньої множини G в X, існує точка $x_G \in G$, така, що $f(x_G) \in V$. Покладемо $E = \{x_G : G$ – відкрита непорожня підмножина в $U\}$. Оскільки $x_0 \in U \subseteq \overline{E}$, то $x_0 \in int\overline{E}$. Крім того, $f(E) \subseteq V$. Одержали суперечність з тим, що відображення $f : X \to Y$ не є майже неперервним в точці $x_0 \in X$. Отже, наше припущення не вірне. □

Лема 3.4.3. *Нехай X і Y – топологічні простори. Якщо відображення $f : X \to Y$ не є α-неперервним в точці $x_0 \in X$, то існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в просторі Y, такий, що для довільного відкритого околу U точки x_0 в X існує множина E_U в X, така, що $E_U \subseteq U$, $int\overline{E_U} \neq \varnothing$ і $f(E_U) \subseteq Y \setminus V$.*

Доведення. Оскільки відображення $f : X \to Y$ не є α-неперервним в точці $x_0 \in X$, то існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільної α-відкритої множини A в X, такої, що $x_0 \in A$, одержуємо, що $f(A) \not\subseteq V$. Припустимо, що існує відкритий околу U точки x_0 в X, такий, що множина $N = U \cap f^{-1}(Y \setminus V)$ – ніде не щільна в X. Тоді множина $E = U \setminus N$ α-відкрита

і $f(E) \subseteq V$. Це суперечить тому, що відображення f не є α-неперервним в точці $x_0 \in X$. Отже, наше припущення не вірне. $\square$

Лема 3.4.4. *Нехай X і Y – топологічні простори. Якщо відображення $f : X \to Y$ не є майже квазінеперервним в точці $x_0 \in X$, то існують відкриті околи U та V точок x_0 та $f(x_0)$ в просторах X та Y відповідно і ніде не щільна в X множина N, такі, що $f(U \setminus N) \subseteq Y \setminus V$.*

Доведення. Оскільки відображення f не є майже квазінеперервним в точці $x_0 \in X$, то існують відкриті околи U та V точок x_0 та $f(x_0)$ в просторах X та Y відповідно, такі, що для довільної множини A в X, з умови $\varnothing \neq int\overline{A} \subseteq U$ випливає, що $f(A) \not\subseteq V$. Покладемо $N = U \cap f^{-1}(V)$. З того, що відображення f не є майже квазінеперервним в точці $x_0 \in X$ випливає, що множина N ніде не щільна в X. Тоді $f(U \setminus N) \subseteq Y \setminus V$. $\square$

Теорема 3.4.2. *Нехай X та Y – топологічні простори. Тоді відображення $f : X \to Y$*

1) *квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли $f(int\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$;*

2) *майже неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$;*

3) *α-неперервне тоді і тільки тоді, коли $f(\overline{int\overline{A}}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$;*

4) *майже квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли $f(int\overline{(intA)}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$.*

Доведення. 1) Нехай відображення f квазінеперервне і $A \subseteq X$. Розглянемо довільну точку $y \in f(int\overline{A})$ і її окіл V в Y. Нехай точка $x \in int\overline{A}$, така, що $f(x) = y$. Множина $U = int\overline{A}$ є околом точки x в X і тому з квазінеперервності відображення f випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Оскільки $G \subseteq \overline{A}$, бо $U \subseteq \overline{A}$, і множина G відкрита, то $G \subseteq \overline{G \cap A}$, але $G \neq \varnothing$, отже, і $G \cap A \neq \varnothing$. Але $f(G \cap A) \subseteq V$ і значить, $f(A) \cap V \neq \varnothing$. Отже, $y \in \overline{f(A)}$.

Навпаки, нехай $f(int\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$. Припустимо, що відображення f не є квазінеперервним в деякій точці $x_0 \in X$.

Згідно з лемою 3.4.1 існують відкриті околи U і V точок x_0 і $f(x_0)$ в просторах X і Y відповідно та щільна в U множина A, така, що $f(A) \subseteq Y \setminus V$. Оскільки $U \subseteq \overline{A}$, то $x_0 \in U = intU \subseteq int\overline{A}$ і тому

$$f(x_0) \in f(U) = f(intU) \subseteq f(int\overline{A}) \subseteq$$

$$\subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} \subseteq Y \setminus V.$$

Одержали суперечність.

2) Нехай відображення f майже неперервне і $A \subseteq X$. Розглянемо довільну точку $y \in f(\overline{intA})$, її окіл V в Y і точку $x \in \overline{intA}$, таку, що $f(x) = y$. Оскільки відображення f майже неперервне в точці x, то існує множина E в X, така, що $x \in int\overline{E}$ і $f(E) \subseteq V$. Множина $U = int\overline{E}$ є околом точки x і тому $U \cap intA \neq \varnothing$. Оскільки $U \subseteq \overline{E}$, то $\overline{E} \cap intA \neq \varnothing$. Тому $E \cap intA \neq \varnothing$ і $E \cap A \neq \varnothing$. Звідси випливає, що $f(A) \cap V \neq \varnothing$. Отже, $y \in \overline{f(A)}$.

Навпаки, нехай $f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$. Припустимо, що відображення f не є майже неперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді згідно з лемою 3.4.2 існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільного околу U точки x в X існує відкрита непорожня множина G_U в X, така, що $G_U \subseteq U$ і $f(G_U) \subseteq Y \setminus V$. Покладемо $A = \bigcup\{G_U : U -$ окіл x_0 в $X\}$. Зрозуміло, що A – це відкрита множина, $x_0 \in \overline{A}$ і $f(A) \subseteq Y \setminus V$. Тоді

$$f(x_0) \in f(\overline{A}) = f(\overline{intA}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq$$

$$\subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Одержали суперечність, адже V – це окіл точки $f(x_0)$.

3) Нехай відображення f α-неперервне і $A \subseteq X$. Розглянемо довільну точку $y \in f(\overline{int\overline{A}})$ і її окіл V в Y. Нехай точка $x \in \overline{int\overline{A}}$, така, що $f(x) = y$. Оскільки відображення f α-неперервне в точці x, то існує α-відкрита множина $U \setminus N$, де U – відкрита множина в X, а N – ніде не щільна, така, що $x \in U \setminus N$ і $f(U \setminus N) \subseteq V$. Зрозуміло, що $x \in U$ і тому $U \cap int\overline{A} \neq \varnothing$. Звідси випливає, що множина A десь щільна в U і тому $(U \setminus N) \cap A \neq \varnothing$. Оскільки $f(U \setminus N) \subseteq V$, то $f(A) \cap V \neq \varnothing$. Отже, $y \in \overline{f(A)}$.

Нехай $f(\overline{int\overline{A}}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$. Припустимо тепер, що відображення f не є α-неперервним в точці $x_0 \in X$. Тоді згідно з лемою 3.4.3 існує відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в просторі Y, такий, що

для довільного відкритого околу U точки x_0 в X існує множина E_U в X, така, що $E_U \subseteq U$, $int\overline{E_U} \neq \varnothing$ і $f(E_U) \subseteq Y \setminus V$. Розглянемо множину $A = \bigcup\{E_U : U$ – окіл точки x_0 в $X\}$. Покажемо, що $x_0 \in \overline{int\overline{A}}$. Візьмемо довільний окіл G точки x_0 в X. Оскільки $E_G \subseteq A \cap G$, то $int\overline{E_G} \subseteq int\overline{A}$. З того, що $E_G \cap int\overline{E_G} \neq \varnothing$ випливає, що $G \cap int\overline{A} \neq \varnothing$. Отже, $x_0 \in \overline{int\overline{A}}$. Тоді

$$f(x_0) \in f(\overline{int\overline{A}}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq$$

$$\subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Одержали суперечність.

4) Нехай відображення f майже квазінеперервне і A – довільна підмножина в X, така, що $int\overline{(intA)} \neq \varnothing$. Розглянемо довільну точку $y \in f(int\overline{(intA)})$ і її окіл V в Y. Нехай точка $x \in int\overline{(intA)}$, така, що $f(x) = y$. Зрозуміло, що множина $U = int\overline{(intA)}$ є відкритим околом точки x в X. Оскільки відображення f майже квазінеперервне в точці x, то існує множина E в X, така, що $\varnothing \neq int\overline{E} \subseteq U$ і $f(E) \subseteq V$. Тоді $int\overline{E} \subseteq \overline{intA}$. Звідси випливає, що $G = int\overline{E} \cap intA \neq \varnothing$. Оскільки $G \cap E \neq \varnothing$ і $G \subseteq intA \subseteq A$, то $E \cap A \neq \varnothing$. Тому і $f(E) \cap f(A) \neq \varnothing$. Отже, $f(A) \cap V \neq \varnothing$ і $y \in \overline{f(A)}$.

Навпаки, нехай $f(int\overline{(intA)}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної підмножини $A \subseteq X$. Припустимо, що відображення f не є майже квазінеперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді згідно з лемою 3.4.4 існують відкриті околи U та V точок x_0 та $f(x_0)$ в просторах X та Y відповідно і ніде не щільна в X множина N, такі, що $f(U \setminus N) \subseteq Y \setminus V$. Оскільки $int(U \setminus N) = U \setminus \overline{N}$, множини N та $\overline{N}$ ніде не щільні, а множина U відкрита, то

$$\overline{int(U \setminus N)} = \overline{U \setminus \overline{N}} = \overline{U}.$$

З того, що множина U є відкритим околом точки x_0 в X випливає, що

$$x_0 \in int\overline{U} = int\overline{(int(U \setminus N))}.$$

Таким чином,

$$f(x_0) \in f(int\overline{U}) = f(int\overline{(int(U \setminus N))}) \subseteq$$

$$\subseteq \overline{f(U \setminus N)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Одержали суперечність. □

Отримана в теоремі 3.4.2 умова в 1) тісно пов'язана з характеризацією квазінеперервності, згідно з якою відображення $f : X \to Y$ буде квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритої в X множини G і підмножини $A \subseteq X$, з того, що $G \subseteq \overline{A}$ випливає, що $f(G) \subseteq \overline{f(A)}$.

Зауважимо, ще К.Куратовский в [160] встановив, що за допомогою операцій замикання та внутрішності, які застосовуються до множини A, можна одержати лише сім різних множин. Тому крім теорем 3.4.2 – 3.4.5 інших результатів такого типу встановити не можна.

На завершення цього підрозділу ми доведемо відомий результат про декомпозицію α-неперервності, використовуючи наведені вище характеризації α-неперервності, квазінеперервності та майже неперервності.

Теорема 3.4.3. *Нехай X та Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ – α-неперервне тоді і тільки тоді, коли воно квазінеперервне і майже неперервне.*

Доведення. Нехай відображення f α-неперервне і A – довільна підмножина простору X. Оскільки $int\overline{A} \subseteq \overline{int\overline{A}}$, то з α-неперервності відображення f випливає, що

$$f(int\overline{A}) \subseteq f(\overline{int\overline{A}}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

З теореми 3.4.2 (випадок 1)) випливає, що відображення f квазінеперервне. Очевидно, що $\overline{intA} \subseteq \overline{int\overline{A}}$. Оскільки відображення f f α-неперервне, то

$$f(\overline{intA}) \subseteq f(\overline{int\overline{A}}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

З теореми 3.4.2 (випадок 2)) випливає, що відображення f майже неперервне.

Навпаки, нехай відображення f квазінеперервне і майже неперервне. Нехай A – довільна підмножина простору X. Зрозуміло, що $\overline{int\overline{A}} = \overline{int(int\overline{A})}$. Тоді з майже неперервності та квазінеперервності відображення f випливає, що

$$f(\overline{int\overline{A}}) = f(\overline{int(int\overline{A})}) \subseteq$$
$$\subseteq \overline{f(int\overline{A})} \subseteq \overline{\overline{f(A)}} = \overline{f(A)}.$$

З теореми 3.4.2 (випадок 3)) випливає, що відображення f α-неперервне. $\square$

3.5. Ослаблена неперервність оберненого відображення

3.5.1. Наступний приклад будується з допомогою модифікації конструкції з [123].

Твердження 3.5.1. *Існує квазінеперервна бієкція $f : [0,1] \to [0,1]$, для якої функція f^{-1} не є майже ледь неперервною.*

Доведення. Нехай α – ірраціональне число з відрізка $[0,1]$ і $\mathbb{Q} \cap [0,\alpha] = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ – множина раціональних чисел відрізка $[0,\alpha]$. Для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ розглянемо неперервну справа функцію $g_n : [0,\alpha] \to [0,1]$, для якої $g_n(x) = 0$ для $x < r_n$ і $g_n(x) = 1$ для $x \geq r_n$. Покладемо $f_0(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(x)$. Оскільки рівномірно збіжний ряд з неперервних справа функцій є неперервною справа функцією, то функція f_0 неперервна справа на $[0,\alpha]$, а отже, квазінеперервна на $[0,\alpha)$. Функція f_0 неперервна в усіх ірраціональних точках відрізка $[0,\alpha]$ і розривна в усіх раціональних точках цього відрізка. Тому f_0 неперервна зліва в точці α, а отже, f_0 квазінеперервна на $[0,\alpha]$. Зауважимо, що функцію f_0 можна записати ще так: $f_0(x) = \sum\limits_{r_n \leq x} \frac{1}{2^n}$. Також зазначимо, що функція f_0 строго монотонно зростає на $[0,\alpha]$.

Легко переконатися, що для множини $B = f_0([0,\alpha])$ і чисел $b_n = f_0(r_n) = \sum\limits_{r_m \leq r_n} \frac{1}{2^m}$, $a_n = f_0(r_n) - \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{r_m < r_n} \frac{1}{2^m}$ маємо, що

$$[0,1] \setminus B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n).$$

Нехай (α_n) – строго спадна послідовність чисел, така, що $\alpha_1 = 1$ і $\alpha_n \to \alpha$. Покладемо

$$V_n = [a_n, b_n)$$

і

$$U_n = (\alpha_{n+1}, \alpha_n]$$

для $n \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що

$$[0,1] = [0,\alpha] \sqcup (\bigsqcup_{n=1}^{\infty} U_n)$$

і

$$[0,1] = B \sqcup (\bigsqcup_{n=1}^{\infty} V_n).$$

Для кожного номера n позначимо через f_n гомеоморфізм U_n на V_n.

Множина B ніде не щільна в $[0,1]$. Справді, візьмемо довільну відкриту непорожню множину V в $[0,1]$. Нехай $B \cap V \neq \varnothing$. Тоді існує точка $x_0 \in [0,\alpha]$, така, що $f_0(x_0) \in V$. Покажемо, що існує таке раціональне число $r = r_n$, що $f_0(r_n) \in V$. Якщо $x_0 < \alpha$, то з неперервності справа функції f_0 в точці x_0 випливає, що існує таке $\delta > 0$, що $x_0 + \delta < \alpha$ і $f_0(x) \in V$, як тільки $x_0 < x < x_0 + \delta$. Оскільки в інтервалі $(x_0, x_0 + \delta)$ є раціональне число r, то воно і буде шуканим. Якщо $x_0 = \alpha$, то з неперервності зліва функції f_0 в точці α аналогічно знаходиться раціональне число r_n, що $f_0(r_n) \in V$. Тоді

$$V_n \cap B = \varnothing.$$

Зауважимо, що $b_n = f_0(r_n) \in V$. Тому відкрита в $[0,1]$ множина

$$H = (a_n, b_n) \cap V$$

непорожня. Крім того, $H \cap B = \varnothing$ і $H \subseteq V$. Це означає, що множина B ніде не щільна в $[0,1]$.

Визначимо функцію $f : [0,1] \to [0,1]$ так:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \in [0,\alpha], \\ f_n(x), & x \in U_n. \end{cases}$$

Легко переконатися, що функція f є бієкцією відрізка $[0,1]$ на себе. Оскільки функція f неперервна на кожному з проміжків U_n, то вона квазінеперервна на $(\alpha, 1]$. Також функція f квазінеперервна на $[0,\alpha]$, бо функція f_0 квазінеперервна на $[0,\alpha]$. Оскільки множина B ніде не щільна в $[0,1]$, то і $f([0,\alpha])$ ніде не щільна в $[0,1]$. Тому функція f^{-1} не є майже ледь неперервною. $\square$

Твердження 3.5.2. *Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – квазінеперервна бієкція і f^{-1} – майже ледь неперервне відображення. Тоді f^{-1} – майже квазінеперервне відображення.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $y_0 \in Y$. Покажемо, що відображення $g = f^{-1} : Y \to X$ майже квазінеперервне у точці y_0. Візьмемо довільні околи U та V точок $x_0 = g(y_0)$ та y_0 відповідно у просторах X та Y. Оскільки відображення f квазінеперервне у точці x_0, то існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. З майже ледь неперервності

відображення g випливає, що в Y існує множина B, така, що $int\overline{B} \neq \varnothing$ і $g(B) \subseteq G$. Множина B міститься у V, бо $B = f(g(B)) \subseteq f(G)$ і $f(G) \subseteq V$. Це означає, що відображення $g = f^{-1}$ майже квазінеперервне у точці y_0. $\square$

Твердження 3.5.3. *Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – майже квазінеперервна бієкція, f і f^{-1} – ледь неперервні відображення. Тоді f^{-1} – квазінеперервне відображення.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $y_0 \in Y$. Покажемо, що відображення $g = f^{-1} : Y \to X$ квазінеперервне у точці y_0. Розглянемо окіл U точки $x_0 = g(y_0)$ в X і відкритий окіл V точки y_0 в Y. Оскільки f майже квазінеперервне у точці x_0, то в X існує множина A, така, що $U_1 = int\overline{A} \neq \varnothing$, $A \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$. З ледь неперервності відображення g випливає, що існує відкрита непорожня множина V_1 в Y, така, що $g(V_1) \subseteq U_1$.

Розглянемо відкриту множину $V_2 = V \cap V_1$. Для доведення квазінеперервності g у точці y_0 досить показати, що $V_2 \neq \varnothing$ і $g(V_2) \subseteq U$. Оскільки $V_2 \subseteq V_1$ і $g(V_1) \subseteq U_1$, то

$$g(V_2) \subseteq g(V_1) \subseteq U_1 \subseteq U.$$

З ледь неперервності відображення f випливає, що існує відкрита непорожня множина U_2 в X, така, що $f(U_2) \subseteq V_1$, тобто $U_2 \subseteq g(V_1)$. Отже, $U_2 \subseteq U_1$. З означення множини U_1 випливає, що $U_2 \cap A \neq \varnothing$. Оскільки $f(U_2) \subseteq V_1$ і $f(A) \subseteq V$, то $V_2 = V \cap V_1 \neq \varnothing$. $\square$

3.5.2. В [123] було встановлено, що для бієкції $f : X \to Y$ між метричними просторами X та Y з умови, що f і f^{-1} – ледь неперервні функції, випливає, що f і f^{-1} – клікові. Наступне твердження є модифікацією цього результату. Будемо називати відображення $f : X \to Y$ *псевдоквазінеперевним*, якщо для довільної відкритої множини U в X та довільної множини E в X, такої, що $U \subseteq \overline{E}$ існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq \overline{f(E)}$.

Твердження 3.5.4. *Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – бієкція, f і f^{-1} – ледь неперервні відображення. Тоді відображення f і f^{-1} псевдоквазінеперервні.*

Доведення. Покажемо, що відображення f псевдоквазінеперервне. Припустимо, що це не так. Тоді існує існують відкрита непорожня множина

U в X та щільні в U множини A_1 і A_2, такі, що

$$f(A_2) \subseteq Y \setminus \overline{f(A_1)}.$$

Оскільки відображення f^{-1} ледь неперервне, то $V = intf(U) \neq \varnothing$. Можливі два випадки: або $(Y \setminus \overline{f(A_1)}) \cap V \neq \varnothing$, або $V \subseteq \overline{f(A_1)}$.

Припустимо спочатку, що $V \subseteq \overline{f(A_1)}$. Оскільки відображення f ледь неперервне, то

$$G = intf^{-1}(V) \neq \varnothing.$$

Крім того, $G \subseteq U$. Оскільки $\overline{A_2} \supseteq U$, то $\overline{A_2} \supseteq G$. Візьмемо довільну точку $a \in A_2 \cap G$. Тоді з одного боку

$$f(a) \in f(A_2) \subseteq Y \setminus \overline{f(A_1)},$$

а з іншого боку

$$f(a) \subseteq f(G) \subseteq V \subseteq \overline{f(A_1)}.$$

Нехай тепер

$$V_1 = (Y \setminus \overline{f(A_1)}) \cap V \neq \varnothing.$$

Оскільки відображення f ледь неперервне і сюр'єктивне, то $G = intf^{-1}(V_1) \neq \varnothing$. Крім того, $G \subseteq U$. Оскільки $\overline{A_1} \supseteq U$, то $\overline{A_1} \supseteq G$. Візьмемо довільну точку $a \in A_1 \cap G$. Тоді з одного боку $f(a) \in f(A_1)$, а з іншого боку

$$f(a) \subseteq f(G) \subseteq V_1 \subseteq Y \setminus \overline{f(A_1)}$$

і тому $f(a) \notin f(A_1)$. Одержали суперечність. Знову одержали суперечність. $\square$

3.5.3. В цьому підрозділі побудуємо приклад майже неперервної бієкції $f : [0,1] \to [0,1]$, для якої обернена функція f^{-1} не є майже неперевною.

Лема 3.5.1. *Нехай X та Y – топлологічні простори, A та B – всюди щільні диз'юнктні підмножини в X і $f, g : X \to Y$ – неперервні відображення. Тоді відображення $h : X \to Y$, для якого $h(x) = f(x)$ для $x \in A$ і $h(x) = g(x)$ для $x \in B$, є майже неперервне.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $x \in X$. Нехай $x \in A$ і V – окіл точки x в X. Оскільки $h(x) = f(x)$ і відображення f неперервне у точці x, то існує

окіл U точки x в X, такий, що $f(U) \subseteq V$. З всюди щільності множини A випливає, що $x \in int\overline{A \cap U}$. Крім того,

$$h(A \cap U) = f(A \cap U) \subseteq V.$$

Отже, відображення h майже неперервне у точці x. Те саме буде і у випадку, коли $x \in B$. $\square$

Твердження 3.5.5. *Існує бієктивна функція $f : [0,1] \to [0,1]$, яке майже неперервна, але f^{-1} не є майже неперевною.*

Доведення. Розглянемо функцію $f : [0,1] \to [0,1]$, яка визначена так:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{1}{2}], \\ x + \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}, \\ -x + 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ -x + \frac{3}{2}, & x \in \mathbb{Q} \cap (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Перевіримо майже неперервність функції f. З леми 3.5.1 випливає, що функція f майже неперервна на проміжках $[0, \frac{1}{2}]$ та $(\frac{1}{2}, 1]$. Залишилось перевірити майже неперервність функції f у точці $x = \frac{1}{2}$. Зауважимо, що $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Для $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ розглянемо довільний окіл $V = (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$ точки $\frac{1}{2}$ в $[0,1]$ і множину

$$A = V \cap ((\mathbb{Q} \cap [0, \tfrac{1}{2}]) \cup ((\tfrac{1}{2}, 1] \setminus \mathbb{Q})) =$$

$$= ((\mathbb{Q} \cap (\tfrac{1}{2} - \varepsilon, \tfrac{1}{2}]) \cup ((\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \varepsilon] \setminus \mathbb{Q})).$$

Легко переконатися, що $V = int\overline{A}$ і

$$f(A) = (\tfrac{1}{2} - \varepsilon, \tfrac{1}{2}] \subseteq V.$$

Це означає, що функція f майже неперервна і у точці $x = \frac{1}{2}$.

Тепер покажемо, що функція $g = f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ не є майже неперервною у точці $y = \frac{1}{2}$. Справді, $g(y) = \frac{1}{2}$ і для околу $U = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ точки $g(y)$ маємо, що

$$g^{-1}(U) = f(U) = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}]$$

і множина

$$int\overline{g^{-1}(U)} = (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2})$$

не є околом точки $y = \frac{1}{2}$ в $[0,1]$. $\square$

3.6. Псевдоквазінеперервність та аналоги

3.6.1. Добре відомою є наступна характеризація квазінеперервності (див. [235] та [331]).

Теорема 3.6.1. *Нехай X і Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ буде квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритої непорожньої множини U в X та щільної в U множини E маємо, що $f(U) \subseteq \overline{f(E)}$.*

Відображення $f : X \to Y$ *псевдоквазінеперевним*, якщо для довільної відкритої множини U в X та довільної множини E в X, такої, що $U \subseteq \overline{E}$ існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq \overline{f(E)}$.

З теореми 3.6.1 легко випливає наступний результат.

Наслідок 3.6.1. *Нехай X і Y – топологічні простори і $f : X \to Y$ – квазінеперервне відображення. Тоді відображення f псевдоквазінеперевне.*

Обернене твердження не вірне.

Приклад 3.6.1. *Існує псевдоквазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не є квазінеперервною.*

Побудова прикладу. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ при $x \neq 0$ і $f(0) = 1$, не є квазінеперервною в точці $x = 0$, однак вона псевдоквазінеперервна. □

Теорема 3.6.2. *Нехай X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ – псевдоквазінеперевне відображення. Тоді множина $D(f)$ точок розриву функції f першої категорії.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай множина $D(f)$ другої категорії в X. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Y. Через $\mathcal{U}_x$ позначимо систему околів точки $x \in X$.

Для кожного номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in D(f) : (f(x) \in V_n)(\forall U \in \mathcal{U}_x)(\exists u_x \in U)(f(u_x) \subseteq Y \setminus V_n)\}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = D(f)$. Оскільки множина $D(f)$ другої категорії, то існує номер m, такий, що множина A_m десь щільна в X. Нехай A_m щільна в деякій відкритій непорожній множині U, тобто $U \subseteq \overline{A_m}$.

Розглянемо множину $E = \{x \in U : f(x) \in Y \setminus V_m\}$. Покажемо, що множина E щільна в U. Візьмемо довільну відкриту множину U' в X, таку, що $U' \subseteq U$. Оскільки множина A_m щільна в U, то існує точка $x' \in U' \cap A_m \subseteq D(f)$. З визначення множини A_m і того, що U' є околом точки x' випливає, що існує точка $u_{x'} \in U'$, така, що $f(u_{x'}) \in Y \setminus V_m$. Таким чином, $u_{x'} \in U' \cap E$.

З псевдоквазінеперевності відображення f випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq \overline{f(E)} \subseteq \overline{Y \setminus V_m} = Y \setminus V_m$. Візьмемо довільну точку $a \in G \cap A_m$. Оскільки $a \in A_m$, то $f(a) \in V_m$. З іншого ж боку $f(a) \in f(G) \subseteq Y \setminus V_m$. Одержали суперечність. Наше припущення хибне, отже, множина $D(f)$ першої категорії. □

Як наслідок одержуємо наступний результат.

Теорема 3.6.3. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ – псевдоквазінеперевне відображення. Тоді відображення f точково розривне.*

Наслідок 3.6.2. *Нехай X – берівський простір, Y – сепарабельний метричний простір і $f : X \to Y$ – псевдоквазінеперевна функція. Тоді функція f клікова.*

Доведення. Оскільки точково розривна функція є кліковою, то з теореми 3.6.3 випливає, що функція f є кліковою. □

В [39, приклад 2] наведено приклад, який демонструє, що умова беровості простору X у наслідку 3.6.2 є істотною.

Умова беровості простору X у теоремі 3.6.3 є істотною. Це демонструє наступний приклад.

Приклад 3.6.2. *Існує псевдоквазінеперервна функція $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, для якої $C(f) = \varnothing$.*

Побудова прикладу. Покладемо $X = \mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$, $Y = \mathbb{R}$ і визначимо функцію $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ так:

$$f(x) = \sum_{r_n \leq x} 2^{-n}.$$

Функція f є неперервною справа, а отже, квазінеперервною. Тоді з наслідку 3.6.1 випливає, що функція f псевдоквазінеперевна. Крім того, $C(f) = \varnothing$. □

3.6.2. Нагадаємо, що через $K(f)$ ми позначаємо множину точок квазінеперервності відображення $f : X \to Y$. Зрозуміло, що $K(f) \supseteq C(f)$. З теореми 3.6.2 одержуємо наступний результат.

Наслідок 3.6.3. *Нехай X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ – псевдоквазінеперевне відображення. Тоді множина $X \setminus Q(f)$ першої категорії. Якщо до того ж простір X берівський, то множина $Q(f)$ всюди щільна в X.*

Обернене твердження не вірне.

Приклад 3.6.3. *Існує не псевдоквазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої множина $\mathbb{R} \setminus Q(f)$ першої категорії.*

Побудова прикладу. Нехай $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел. Визначимо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді $C(f) = Q(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Однак f не є псевдоквазінеперервною, бо для $U = \mathbb{R}$ і $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ маємо, що $\overline{f(E)} = f(E) = \{0\}$, а для довільної відкритої множини G в $\mathbb{R}$ маємо, що $f(G) \supset \{0\}$. □

Оскільки функція з прикладу 3.6.1 є функцією першого класу Бера (поточковою границею неперервних функцій), то це означає, що не кожна функція першого класу Бера є псевдоквазінеперервною.

Твердження 3.6.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – відображення і множина $X \setminus Q(f)$ ніде не щільна в X. Тоді відображення f псевдоквазінеперевне.*

Доведення. Розглянемо довільну відкриту непорожню U в X та множину E в X, таку, що $U \subseteq \overline{E}$. Оскільки множина $X \setminus Q(f)$ ніде не щільна, то існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U \cap Q(f)$. Розглянемо відображення $g = f_{|G}$. Відображення g квазінеперервне в кожній точці з G. Оскільки множина E щільна в U, то $\overline{E \cap G} \supseteq G$ і з властивості квазінеперервності відображення g маємо, що

$$f(G) = g(G) \subseteq \overline{g(E \cap G)} = \overline{f(E \cap G)} \subseteq \overline{f(E)}.$$

Отже, відображення f псевдоквазінеперевне. □

Обернене твердження не вірне. Це випливає з наступного прикладу, який подано в [39, приклад 1].

Приклад 3.6.4. *Існує псевдоквазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої множина $\mathbb{R} \setminus Q(f)$ всюди щільна в $\mathbb{R}$.*

Побудова прикладу. Нехай $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ – множина раціональних чисел. Визначимо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} + x, & x = r_n, \\ x, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Як показано в [39, приклад 1] функція f є псевдоквазінеперервною і $\mathbb{R} \setminus Q(f) = \mathbb{R} \setminus C(f) = \mathbb{Q}$. □

3.6.3. Нагадаємо, що відображення f називається *ледь неперервним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $f(G) \subseteq V$. Множину точок ледь неперервності відображення f позначаємо через $L(f)$.

Твердження 3.6.2. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ – псевдоквазінеперевне відображення. Тоді множина $X \setminus L(f)$ ніде не щільна в X.*

Доведення. Припустимо, що множина $E = X \setminus L(f)$ щільна в деякій відкритій непорожній множині U в X. З теореми 3.6.3 випливає, що множина $C(f)$ теж щільна в U. Тоді згідно з псевдоквазінеперервністю функції f маємо, що існує відкрита непорожня в X множина G, така, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq \overline{f(C(f))}$. Візьмемо довільну точку $x \in E \cap G$ і будь-який її відкритий окіл V точки $f(x)$ в Y. Тоді $V \cap f(C(f)) \neq \varnothing$. Отже, існує точка $x_0 \in C(f)$ та її окіл U_0, такі, що $f(x_0) \in V$ і $f(U_0) \subseteq V$. Це суперечить тому, що відображення f не є ледь неперервним в точці x. Отже, припущення про десь щільність множини A є хибним. □

Теорема 3.6.4. *Нехай X і Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ буде псевдоквазінеперервним тоді і тільки тоді, коли воно просто неперервне.*

Доведення. Необхідність. Нехай відображення f псевдоквазінеперервне, але не є просто неперервним. Оскільки відображення f не є просто

неперервним, то існує відкрита непорожня множина V в Y, така, що множина $fr(f^{-1}(V))$ щільна в деякій відкритій непорожній множині U в X. Тоді $fr(f^{-1}(V)) = \overline{fr(f^{-1}(V))} \supseteq U$. Оскільки $fr(f^{-1}(V)) = \overline{f^{-1}(V)} \cap \overline{X \setminus f^{-1}(V)}$, то $\overline{f^{-1}(V)} \supseteq U$ і $\overline{X \setminus f^{-1}(V)} \supseteq U$. З псевдоквазінеперервності f випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і

$$f(G) \subseteq \overline{f(X \setminus f^{-1}(V))} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

З іншого боку $f(G) \cap V \neq \varnothing$, бо $\overline{f^{-1}(V)} \supseteq U$ і $G \subseteq U$. Одержана суперечність завершує доведення необхідності.

Достатність. Нехай відображення f просто неперервне, але не є псевдоквазінеперервним. Тоді існує відкрита непорожня множина U в X і щільна в U множина E, така, що для довільною відкритої непорожньої множини $G \subseteq U$ існує точка $x_G \in G$, така, що $x_G \notin \overline{f(E)}$. Розглянемо відкриту множину $V = Y \setminus \overline{f(E)}$ і множину $A = \{x_G : G$ – відкрита множина, яка мівститься в $G\}$. Тоді $\overline{A} \supseteq U$ і $A \cap E = \varnothing$. Оскільки відображення f просто неперервне, то множина $fr(f^{-1}(V)) = \overline{f^{-1}(V)} \cap \overline{X \setminus f^{-1}(V)}$ ніде не щільна. Однак $f^{-1}(V) \supseteq A$ і тому $\overline{f^{-1}(V)} \supseteq \overline{A} \supseteq U$. Крім того, $X \setminus f^{-1}(V) \supseteq E$ і $\overline{X \setminus f^{-1}(V)} \supseteq \overline{E} \supseteq U$. Отже, $fr(f^{-1}(V)) \supseteq U \neq \varnothing$, що неможливо, бо множина $fr(f^{-1}(V))$ ніде не щільна. Отже припущення не вірне. □

Твердження 3.6.3. *Якщо функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має замкнений графік, то вона псевдоквазінеперервна.*

Доведення. Добре відомо [67], що множина $D(f)$ ніде не щільна. Тоді згідно з теоремою 3.6.1 функція f є псевдоквазінеперервною. □

Твердження 3.6.4. *Існує монотонна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не є псевдоквазінеперервною.*

Доведення. Покладемо $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Розглянемо функції $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які визначені так:

$$f(x) = \sum_{r_n \leq x} 2^{-n},$$

$$g(x) = \begin{cases} 2^{-n-1}, & x = r_n \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

і $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. В [123] показано, що функція f монотонно зростає і неперервна справа (отже, квазінеперервна). Функцію h можна записати так:

$$h(x) = \begin{cases} \sum\limits_{r_m < x} 2^{-m} + 2^{-n-1}, & x = r_n \in \mathbb{Q}, \\ \sum\limits_{r_m < x} 2^{-m}, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функція h строго зростає і при цьому вона не є квазінеперервною в кожній точці з $\mathbb{Q}$. Розглянемо відкриту множину

$$V = \bigcup_{n=1} (\sum_{r_k < r_n} 2^{-k}, \sum_{r_k \leq r_n} 2^{-k}).$$

Тоді множина $h^{-1}(V) = \mathbb{Q}$ не є s-відкритою. Отже, h не є псевдоквазінеперервною. □

3.6.4. Далі встановимо два результати про декомпозицію неперервності та квазінеперервності за участю псевдоквазінеперервності.

Теорема 3.6.5. *Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір. Тоді відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли f майже неперервне і псевдоквазінеперевне.*

Доведення. Необхідність очевидна. Доведемо достатність. Будемо міркувати від супротивного. Нехай відображення f не є неперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Оскільки простір Y регулярний, то існує замкнений окіл V_0 точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільного околу U точки x_0 в X маємо, що $f(U) \not\subseteq V_0$. Оскільки відображення f майже неперервне в точці x_0, то існують окіл U_0 точки x_0 в X і щільна в U_0 множина A_0, такі, що $f(A_0) \subseteq V_0$. З розривності відображення f в точці x_0 випливає, що існує точка $x_1 \in U_0$, така, що $f(x_1) \notin V_0$, тобто $f(x_1) \in Y \setminus V_0$. Оскільки відображення f майже неперервне в точці x_1 і множина $Y \setminus V_0$ є околом точки $f(x_1)$, то існує множина A_1, така, що $x_1 \in int\overline{A_1}$, $A_1 \subseteq U_0$ і $f(A_1) \subseteq Y \setminus V_0$. Скористаємося псевдоквазінеперевністю відображення f. Оскільки $int\overline{A_1} \subseteq \overline{A}$, то існує відкрита непорожня множина $G \subseteq int\overline{A_1} \cap \overline{A}$, така, що $f(G) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{V_0} \subseteq V_0$. Оскільки $G \subseteq int\overline{A_1}$, то існує точка $a \in G \cap A_1$. З того, що $a \in A_1$ випливає, що $f(a) \in Y \setminus V_0$. Оскільки $f(G) \subseteq V_0$, то одержуємо суперечність. Отже, відображення f неперервне. □

Теорема 3.6.6. *Нехай X та Y – топологічні простори. Тоді відображення $f : X \to Y$ квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли f майже квазінеперервне і псевдоквазінеперевне.*

Доведення. Необхідність випливає з теореми 3.6.1 і очевидного факту про те, що квазінеперервне відображення є майже квазінеперервним. Встановимо достатність. Припустимо, що відображення f не є квазінеперервним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді згідно з лемою 3.4.1 існують відкритий окіл V точки $f(x_0)$ в Y, окіл U точки x_0 в X і множина A в X, такі, що $U \subseteq \overline{A}$ і $f(A) \subseteq Y \setminus V$. Оскільки відображення f майже квазінеперервне в точці x_0, то існує множина E в X, така, що $int\overline{E} \neq \varnothing$, $E \subseteq U$ і $f(E) \subseteq V$. Покладемо $G = int\overline{E}$. Оскільки $G \subseteq U$ і $U \subseteq \overline{A}$, то $G \subseteq \overline{A}$. З псевдоквазінеперервності відображення f випливає, що існує відкрита непорожня множина G_1 в X, така, що $G_1 \subseteq G$ і $f(G_1) \subseteq \overline{f(A)}$. Тоді

$$f(G_1) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V.$$

Оскільки $G = int\overline{E}$, то $G_1 \cap E \neq \varnothing$. Нехай $a \in G_1 \cap E$. Тоді з одного боку, оскільки $a \in G_1$, то $f(a) \in Y \setminus V$, а з іншого боку, оскільки $a \in E$, то $f(a) \in V$. Одержали суперечність. □

3.6.5. Сума двох псевдоквазінеперервних функцій не зобов'язана бути псевдоквазінеперервною (див. [33, лема 2]). Більше того, сума неперервної і псевдоквазінеперервної функції може не бути псевдоквазінеперервною. Це демонструє наступний приклад.

Приклад 3.6.5. *Існують неперервна і псевдоквазінеперервна функції, сума яких не є псевдоквазінеперервною.*

Доведення. Нехай $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел. Розглянемо дві функції $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які визначаються так: $g(x) = -x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, а

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \\ x, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Функція g неперервна, а тому псевдоквазінеперервна. Оскільки функція f з прикладу 3.6.4, то вона теж псевдоквазінеперервна. Однак, функція $h = f + g$ не є псевдоквазінеперервна (див. приклад 3.6.2). □

Добуток двох псевдоквазінеперервних функцій не зобов'язаний бути псевдоквазінеперервною функцією [33, лема 3]).

Максимум та мінімум псевдоквазінеперервних функцій з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ є псевдоквазінеперервною. Більше того, в [25, теорема 1] встановлено такий результат

Теорема 3.6.7. *Нехай простір X задовольняє наступну умову:*

($\star$) *якщо (X_n) покриття простору X, таке, що для $M \subseteq \mathbb{N}$ множина $\bigcup\limits_{n\in M} X_n$ є s-відкритою і G – відкрита непорожня підмножина X, то $G \cap intX_n \neq \varnothing$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Тоді $\max(f, g)$ *і* $\min(f, g)$ *є псевдоквазінеперервними функціями для довільних псевдоквазінеперервних функцій $f, g : X \to \mathbb{R}$.*

В [77, теорема 1] встановлено, що для досконалого берівського простору X і сепарабельного метричного простору Y кожна клікова функція $f : X \to Y$ є рівномірною границею послідовності псевдоквазінеперервних функцій. Звідси випливає, що рівномірна границя послідовності псевдоквазінеперервних функцій не зобов'язана бути псевдоквазінеперервною.

Твердження 3.6.5. *Нехай X, Y і Z – топологічні простори, відображення $f : Y \to Z$ неперервне і відображення $g : X \to Y$ псевдоквазінеперервне. Тоді відображення $h = f \circ g : X \to Z$ псевдоквазінеперервне.*

Доведення. Розглянемо довільну відкриту множину W в Z. Оскільки відображення f неперервне, то множина $f^{-1}(W)$ відкрита в Y. З псевдоквазінеперервності відображення g випливає, що множина $h^{-1}(W) = g^{-1}(f^{-1}(W))$ є s-відкритою. Отже, згідно з теоремою 3.6.2 відображення h псевдоквазінеперервне. □

Твердження 3.6.6. *Нехай X і Y – топологічні простори, причому простір X локально зв'язний, відображення $f : \mathbb{R} \to Y$ псевдоквазінеперервне і відображення $g : X \to \mathbb{R}$ неперервне. Тоді відображення $h = f \circ g : X \to Y$ псевдоквазінеперервне.*

Доведення. Розглянемо довільну відкриту множину W в Y. Оскільки відображення f псевдоквазінеперервне, то $f^{-1}(W) = V \cup N$, де множина

V відкрита в $\mathbb{R}$, а множина N ніде не щільна в $\mathbb{R}$. Розглянемо множину $g^{-1}(V \cup N)$. Тоді $g^{-1}(V \cup N) = g^{-1}(V) \cup g^{-1}(N)$. Оскільки відображення g неперервне, то $U = g^{-1}(V)$ – відкрита множина.

Покажемо, що $g^{-1}(N) = U_1 \cup M$, де множина U_1 відкрита в X, а множина M ніде не щільна в X. Припустимо, що це не так. Тоді існують відкрита непорожня множина G в X та щільні в G множини A_1 і A_2, такі, що $g(A_1) \subseteq N$ і $g(A_1) \subseteq \mathbb{R} \setminus N$. Оскільки множина N ніде не щільна, то і множина $\overline{N}$ теж ніде не щільна. З неперервності відображення g випливає, що $g^{-1}(\overline{N})$ – замкнена множина, і тому $g^{-1}(\overline{N}) \supseteq G$. Візьмемо довільну відкриту зв'язну множину O в X, таку, що $O \subseteq G$. Оскільки при неперервному відображенні образ зв'язної множини є зв'язна множина, то множина $g(O)$ зв'язна і $g(O) \subseteq \overline{N}$. З того, що множина $\overline{N}$ ніде не щільна в $\mathbb{R}$ і містить зв'язну підмножину випливає, що існує така точка $b \in \overline{N}$, що $g(O) = \{b\}$. Оскільки $O \subseteq G$, то множини A_1 і A_2 щільні і в O. Тоді $\{b\} = g(O \cap A_1) \subseteq N$ і $\{b\} = g(O \cap A_2) \subseteq \mathbb{R} \setminus N$. Одержали суперечність з припущенням. Отже, $g^{-1}(N) = U_1 \cup M$, де множина U_1 відкрита в X, а множина M ніде не щільна в X.

Тоді

$$h^{-1}(W) = g^{-1}(f^{-1}(W)) = g^{-1}(V \cup N) = g^{-1}(V) \cup g^{-1}(N) = U \cup U_1 \cup M,$$

де U, U_1 – відкриті множин в X, а M – ніде не щільна в X. Отже, відображення h псевдоквазінеперервне. $\square$

3.7. Класифікація точок розриву деяких аналогів неперервності

3.7.1. Точка $x \in \mathbb{R}$ називається *двосторонньою граничною точкою множини* $P \subseteq \mathbb{R}$, якщо існують послідовності $(x'_n), (x''_n) \in P$, такі, що $x'_n \nearrow x$, $x''_n \searrow x$, тобто послідовність (x'_n) зростаючи прямує до x, а послідовність (x''_n) спадаючи прямує до x. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *має досконалий шлях* [201], якщо для кожної точки $x \in \mathbb{R}$ існує досконала множина P, така, що $x \in P$, точка x є двосторонньою граничною точкою множини P і звуження $f|_P$ є неперервним у точці x.

Добре відомо [96], що для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ мають місце такі імплікації:

$$f \text{ – розширювана} \Rightarrow f \text{ – S-неперервна} \Rightarrow f \text{ – зв'язна} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ має зв'язний графік} \Rightarrow f \text{ має вл. Дарбу} \Rightarrow f \text{ має вл. Юнґа.} \qquad (*)$$

$$f \text{ – розширювана} \Rightarrow f \text{ має досконалийшлях} \Rightarrow f \text{ має вл. Юнґа.}$$

Зауважимо, що жодна з імплікацій $(*)$ не може бути повернена в інший бік.

Для точки $x \in \mathbb{R}$ позначимо через $f(x+0)$ правосторонню границю функції f в точці x, а через $f(x-0)$ – лівосторонню границю функції f в точці x. Введемо в розгляд множини $D^+(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \in D(f_{|[x,+\infty)})\}$ і $D^-(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \in D(f_{|(-\infty,x]})\}$ точок правостороннього і лівостороннього розриву відповідно. Зрозуміло, що $D(f) = D^+(f) \cup D^-(f)$.

Твердження 3.7.1. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – майже неперервна функція. Тоді функція f має властивість Юнґа.*

Доведення. З теореми 3.3.1 випливає, що кожна майже неперервна функція є функцією Ґібсона, а отже, і слабкою функцією Ґібсона. З наслідку 3.3.2 випливає, що слабка функція Ґібсона з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ має властивість Юнґа. □

Твердження 3.7.2. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – двосторонньо квазінеперервна функція. Тоді функція f має властивість Юнґа.*

Доведення. Це випливає з наслідку 3.3.4. □

Щодо зв'язків між згаданими ослабленнями неперервності слід зауважити, що в у випадку, коли функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера (подається у вигляді поточкової границі послідовності неперервних функцій), то

$$f \text{ – розширювана} \Leftrightarrow f \text{ має вл. Юнґа [96].}$$

А для функцій з властивістю Ґібсона належність до функцій першого класу Бера гарантує неперервність [75].

3.7.2. Далі ми дослідимо тип точок розриву згаданих аналогів неперервності.

Твердження 3.7.3. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функція, яка має властивість Юнґа і $x \in D^+(f)$ /$x \in D^-(f)$/. Тоді не існує правосторонньої $f(x+0)$ /лівосторонньої $f(x-0)$/ границі в точці x.*

Доведення. Нехай існує границя $f(x+0)$ і функція f має властивість Юнга. Оскільки $x \in D^+(f)$, то $f(x) \neq f(x+0)$. Покладемо $\varepsilon = \frac{|f(x)-f(x+0)|}{2}$, якщо $f(x+0)$ скінченне і $\varepsilon = 1$, якщо $f(x+0) = \infty$. Тоді існує $\delta > 0$, що $|f(t) - f(x)| > \varepsilon$ для $t \in (x, x+\delta)$. Оскільки функція f має властивість Юнга, то існує спадна послідовність (x_n), $x_n \to x$, така, що $f(x_n) \to f(x)$. Тоді існує номер N, такий, що $x_N \in (x, x+\delta)$ і $|f(x_N) - f(x)| < \varepsilon$. Одержали суперечність. Аналогічні міркування проводяться і у випадку $x \in D^-(f)$. □

Твердження 3.7.4. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функція, $x \in D^+(f)$ /$x \in D^-(f)$/ і виконується одна із наступних умов:*

1) f – розширювана;

2) f – S-неперервна;

3) f – зв'язна;

4) f має зв'язний графік;

5) f має властивість Дарбу;

6) f має досконалий шлях;

7) f майже неперервна;

8) f – двосторонньо квазінеперервна;

9) f має властивість Ґібсона.

Тоді f має властивість Юнґа.

Доведення. Якщо функція f задовольняє одну із умов 1) - 6), то згідно з імплікаціями $(*)$ вона має властивість Юнґа. Якщо ж функція f задовольняє умови 7) - 9), то згідно з твердженнями 3.7.1 - 3.7.2 вона має властивість Юнґа. □

Твердження 3.7.5. *Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ графічно неперервна і $x \in D(f)$. Тоді границя зліва чи справа існує та скінченна, або її не існує. Якщо ж існують скінченні границі $f(x+0) \in \mathbb{R}$ та $f(x-0) \in \mathbb{R}$, то $f(x+0) = f(x-0)$.*

Доведення. Нехай $f(x+0) = \infty$ чи $f(x-0) = \infty$. Припустимо, що $f(x+0) = \infty$. Оскільки функція f графічно неперервна, то існує неперервна функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, така, що $Gr(g) \subseteq \overline{Gr(f)}$. З того, що функція g неперервна в точці x випливає, що існує скінченна границя $g(x+0)$, яка рівна $g(x)$. Розглянемо множину $G = (x, x+\frac{1}{n}) \times (g(x) - \frac{1}{n}, g(x) + \frac{1}{n})$. Візьмемо довільну точку $a \in (x, x+\frac{1}{n})$. Оскільки $(a, g(a)) \in Gr(g) \subseteq \overline{Gr(f)}$ і множина G є

околом точки $(a, g(a))$, то $G \cap Gr(f) \neq \varnothing$. Тому існує точка $(x_n, f(x_n))$ графіка функції f, така, що $(x_n, f(x_n)) \in G$. Таким чином, послідовність (x_n) збігається до x, причому $x_n > x$, і $f(x_n) \to g(x)$. А це суперечить тому, що $f(x+0) = \infty$.

Нехай тепер $f(x+0) \in \mathbb{R}$ та $f(x-0) \in \mathbb{R}$ і $f(x+0) \neq f(x-0)$. Для визначенності будемо вважати, що $f(x+0) > f(x-0)$. Покладемо $\varepsilon = \frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$. Оскільки існують скінченні границі $f(x+0)$ та $f(x-0)$, то існує $\delta > 0$, таке, що $|f(u)-f(x+0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для $u \in (x, x+\delta)$ і $|f(u)-f(x-0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для $u \in (x-\delta, x)$. Зауважимо, що $f(x+0) - \frac{\varepsilon}{2} = f(x-0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Візьмемо точки $a \in (x-\delta, x)$, $b \in (x, x+\delta)$ і $c \in (f(x-0)+\frac{\varepsilon}{3}, f(x+0)-\frac{\varepsilon}{3}) \setminus \{f(x)\}$. Розглянемо множину $L = (\{a\} \times [c, +\infty)) \cup ([a, b] \times \{c\}) \cup (\{b\} \times (-\infty, c])$. Зрозуміло, що $L \cap \overline{Gr(f)} = \varnothing$. Розглянемо відкриті непорожні диз'юнктні множини $W_1 = ((-\infty, a) \times \mathbb{R}) \cup ([a, b) \times (-\infty, c])$ і $W_2 = ((a, b] \times (c, +\infty)) \cup ((b, +\infty) \times \mathbb{R})$. Тоді $\overline{Gr(f)} \subseteq W_1 \sqcup W_2$. З графічної неперервності функції f випливає, що існує неперервна функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, така, що $Gr(g) \subseteq \overline{Gr(f)}$. Зрозуміло, що $Gr(g) \subseteq W_1 \sqcup W_2$, $Gr(g) \cap W_1 \neq \varnothing$ і $Gr(g) \cap W_2 \neq \varnothing$. Це суперечить тому, що графік неперервної функції не є зв'язною множиною в $\mathbb{R}^2$. $\square$

3.7.3. Кажуть [17], що $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є *регульованою функцією*, якщо існують скінченні правосторонні та лівосторонні границі функції f в кожній точці.

Теорема 3.7.1. *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли вона регульована і має властивість Юнґа.*

Доведення. Необхідність є очевидною. Встановимо достатність. Будемо міркувати від супротивного. Нехай функція f розривна в деякій точці x. Тоді $x \in D^-(f)$ або $x \in D^+(f)$. Нехай $x \in D^+(f)$. Згідно з твердженням 3.7.3 для функції f в точці x не існує границі справа. А це суперечить регульваності функція f. $\square$

Наслідок 3.7.1. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монотонна функція, яка має властивість Юнґа. Тоді функція f неперервна.*

Доведення. Оскільки монотонна функція є регульованою, то згідно з теоремою 3.7.1 функція f неперервна. $\square$

Зауважимо, що регульована (а тим більше монотонна) функція, яка задовольняє одну з умов 1) - 9) твердження 3.7.4, згідно з теоремою 3.7.1 є неперервною.

Теорема 3.7.2. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монотонна і графічно неперервна функція. Тоді вона неперервна.*

Доведення. Нехай функція f розривна в точці x. Оскільки функція f монотонна, то існують скінченні границі $f(x-0)$ і $f(x+0)$. З графічної неперервності функції f і твердження 3.7.5 випливає, що $f(x-0) = f(x+0)$. Але тоді згідно з монотонністю f маємо, що $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$. А це суперечить розривності функції f в точці x. □

Теорема 3.7.3. *Регульована із замкненим графіком функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай x – точка розриву функції f і нехай $x \in D^+(f)$. Оскільки функція f регульована, то існує скінченна правостороння границя $f(x+0)$. Тоді з умови замкненності графіка функції f випливає, що $f(x+0) = f(x)$. Це суперечить припущенню, що $x \in D^+(f)$. □

Оскільки монотонна функція є регульованою, то одержуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.7.2. *Монотонна із замкненим графіком функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною.*

Висновки до розділу 3.

В цьому розділі вивчаються деякі властивості різних типів ослабленої неперервності відображень від однієї змінної.

Так, у **підрозділі 3.1** дано опис множин точок майже неперервності, майже квазінеперервності та майже ледь неперервності.

У **підрозділі 3.2** введено поняття $\mathcal{A}$-квазінеперервності, що охоплює деякі ослаблення неперервності, а також вивчено тип множини точок $\mathcal{A}$-квазінеперервності.

Поняття неперервності відносно системи вивчається в **підрозділі 3.3**. Це поняття охоплює велику кількість вже відомих ослаблень неперервності. Крім того, встановлено декомпозицію B-квазінеперервності.

У **підрозділі 3.4** вказано умови, за яких неперервність відносно системи рівносильна $\mathcal{A}$-неперервності. Дано нові характеризації деяких ослаблень неперервності за допомогою операторів замикання та внутрішності.

Властивості бієкції деяких типів ослабленої неперервності досліджено в **підрозділі 3.5**. Зокрема тут побудовано приклад квазінеперервної бієкції $f : [0, 1] \to [0, 1]$, для якої функція f^{-1} не є майже ледь неперервною. Також вказано умови, за яких для бієкції $f : X \to Y$ обернене відображення f^{-1} буде квазінеперервне, майже квазінеперервне чи псевдоквазінеперервне.

У **підрозділі 3.6** вивчаються властивості псевдоквазінеперервності. Вивчено множину точок неперервності псевдоквазінеперервного відображення, а також встановлено, що псевдоквазінеперервність рівносильна простій неперервності.

Підрозділ 3.7 присвячений вивченню типів точок розриву дійсних функцій для різних ослаблень неперервності і на основі цього одержано ряд результатів про декомпозицію неперервності.

РОЗДІЛ 4.
ЗВ'ЯЗКИ МІЖ СУКУПНИМИ ТА НАРІЗНИМИ ОСЛАБЛЕННЯМИ НЕПЕРЕРВНОСТІ

4.1. Характеризація сукупної квазінеперервності

4.1.1. Нам буде потрібна проста лема, яка доведена, наприклад, в [333].

Лема 4.1.1. *Нехай X, Y і Z – топологічні простори, $f : X \times Y \to Z$ – горизонтально квазінеперервне відображення, U – відкрита непорожня множина в X, V – відкрита непорожня множина в Y, множина A міститься в X і така, що $U \subseteq \overline{A}$. Тоді*

$$f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}.$$

Теорема 4.1.1. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – регулярний простір, відображення $f \in K_h\tilde{K}(X \times Y, Z)$. Тоді відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних.*

Доведення. Згідно з умовою відображення $f : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне і множина $X_K(f) = \{x \in X : f \in K(Y, Z)\}$ залишкова в X. Візьмемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Розглянемо довільний окіл W точки $f(p_0)$ в Z, замкнений окіл W_1 і відкритий окіл W_2 цієї ж точки, такі, що $W_2 \subseteq W_1 \subseteq W$. Візьмемо довільні відкриті околи U і V точок x_0 в X і y_0 в Y відповідно. Згідно з горизонтальною квазінеперервністю відображення f в точці p_0 існують відкрита непорожня множина G в X і точка $b \in V$, такі, що $G \subseteq U$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq W_2$. Оскільки множина W_2 відкрита, то W_2 є околом кожної точки множини $f(G \times \{b\})$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y, причому $V_n \neq \varnothing$. Для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$A_n = \{x \in G \cap X_K(f) : V_n \subseteq V, f^x(V_n) \subseteq W_2\}.$$

Покажемо, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = G \cap X_K(f)$. Включення $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq G \cap X_K(f)$ очевидне. Встановимо обернене включення. Візьмемо точку $x \in G \cap X_K(f)$. Оскільки

відображення f^x квазінеперервне в точці b, V – окіл точки b і W_2 – окіл точки $f(x,b)$, то існує відкрита непорожня множина H в Y, така, що $H \subseteq V$ і $f^x(H) \subseteq W_2$. З означення псевдобази випливає, що існує номер n, такий, що $V_n \subseteq H \subseteq V$. Тоді $x \in A_n$. Отже, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = G \cap X_K(f)$.

Оскільки простір X берівський, то G – це множина другої категорії в X. За умовою $X_K(f)$ – залишкова в X. Тому множина $G \cap X_K(f)$ теж другої категорії в X. Тоді існує номер m, такий, що множина A_m десь щільна. Покладемо $G_1 = int\overline{A_m}$. Оскільки $\varnothing \neq G_1 \subseteq \overline{A_m}$ і множина G_1 відкрита, то $G_1 \cap A_m \neq \varnothing$. Покладемо $G_2 = G_1 \cap G$ і $A = A_m \cap G_2$. Тоді $\varnothing \neq G_1 \cap A_m \subseteq G_1 \cap G = G_2$, отже, $G_2 \neq \varnothing$. Зрозуміло, що $G_2 \subseteq \overline{A}$ і $f(A \times V_m) = \bigcup\limits_{x \in A} f^x(V_m) \subseteq W_2$. Згідно з лемою 4.1.1 маємо, що

$$f(G_2 \times V_m) \subseteq \overline{f(A \times V_m)} \subseteq \overline{W_2} \subseteq \overline{W_1} = W_1 \subseteq W.$$

А це означає, що відображення f є квазінеперервним в точці p_0. □

Горизонтально і вертикально квазінеперервні функції вже не зобов'язані бути квазінеперервними. Це показує наступний приклад, який подано в [381, с. 71, приклад 4.1.3].

Приклад 4.1.1. *Нехай* $A_n = \{\frac{2k-1}{2^n} : k = 1, 2, .., 2^{n-1}\}$, *де* $n \in \mathbb{N}$, $A_0 = \varnothing$ *і* $B_n = \bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i$. *Визначимо функцію* $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *так:* $f(x,y) = 1$, *якщо* $x \in A_{2m-1}$ *і* $y \in [0,1] \setminus B_{2m-2}$, *де* $m \in \mathbb{N}$, *або* $y \in A_{2m-1}$ *і* $x \in [0,1] \setminus B_{2m-1}$, *де* $m \in \mathbb{N}$, *або якщо* x *і* y *не двійково раціональні;* $f(x,y) = 0$, *якщо* $x \in A_{2m}$ *і* $y \in [0,1] \setminus B_{2m-1}$, *де* $m \in N$, *або* $y \in A_{2m}$ *і* $x \in [0,1] \setminus B_{2m}$, *де* $m \in \mathbb{N}$. $[0,1]^2$.

Цей приклад показує, що горизонтально і вертикально квазінеперервна функція може не бути квазінеперервною в жодній точці.

Побудована у прикладі 4.1.1 функція скрізь розривна. Якщо множина $C(f)$ функції $f \in K_hK_v(X \times Y, Z)$ у певному сенсі велика, то такого прикладу, як показує наступна теорема з [381, с. 72, теорема 4.1.4], побудувати не можна.

Теорема 4.1.2. *Нехай* X, Y *і* Z *– топологічні простори,* $f : X \times Y \to Z$ *– горизонтально і вертикально квазінеперервне відображення і множина* $M = \{y \in Y : \overline{C_y(f)} \neq X\}$ *ніде не щільна в* Y. *Тоді відображення* f *квазінеперервне за сукупністю змінних.*

Наявність у горизонтально і вертикально квазінеперервного відображення всюди щільної множини $C(f)$ точок неперервності не гарантує сукупної квазінеперервності. Це демонструє наступний приклад.

Приклад 4.1.2. *Існує горизонтально і вертикально квазінеперервна функція на* $[0,1]^2$*, яка є точково розривною, але не є квазінеперервною за сукупністю змінних.*

Побудова прикладу. Нехай $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база в $[0,1]^2$ і $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\}$ – множина всіх точок з раціональними координатами в $[0,1]^2$. Позначимо

$$K_{n,\delta} = ((x_n - \delta, x_n + \delta) \times \{y_n\}) \cup (\{x_n\} \times (y_n - \delta, y_n + \delta)).$$

Розглянемо $k_1 = 1, \delta_1 = 1$ і непорожню відкриту підмножину B_1 в U_1, таку, що $\overline{B_1} \cap K_{k_1,\delta_1} = \emptyset$. Нехай $n > 1$. Вважаємо, що визначені номер k_i, додатне число δ_i і відкриті непорожні множини B_i для $i < n$ так, що $B_i \subseteq U_i$ $(i < n)$ і $(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} \overline{B_i}) \cap K_{n-1} = \emptyset$, де $K_{n-1} = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} K_{k_i,\delta_i}$. Розглянемо $k_n = min\{j : j \geq n, (x_i, y_i) \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} \overline{B_i})\}$ і настільки мале додатне число δ_n, що $K_{k_n,\delta_n} \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} \overline{B_i} = \emptyset$. Оскільки множина $K_n = K_{n-1} \cup K_{k_i,\delta_i}$ є ніде не щільною, то існує відкрита непорожня множина B_n, така, що $B_n \subseteq U_n$ і $K_n \cap \overline{B_n} = \emptyset$. Так визначаються k_n, δ_n і B_n для кожного n.

Покладемо $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_{k_n,\delta_n}$. Множина K ніде не щільна, $K \cap B_n = \emptyset$ і $\emptyset \neq B_n \subseteq U_n$ для кожного n. Якщо $(x_n, y_n) \in K$, то існує $\delta > 0$, таке, що $K_{n,\delta} \subseteq K$.

Визначимо функцію f як характеристичну функцію множини K. Тоді функція f горизонтально і вертикально квазінеперервна і точково розривна. Оскільки множина $f^{-1}(\{1\})$ ніде не щільна, то функція f не є сукупно квазінеперервною. □

4.1.2. Легко навести приклад сукупно квазінеперервної функції, яка не є нарізно квазінеперервною.

Приклад 4.1.3. *Існує сукупно квазінеперервна функція на* $[0,1]^2$*, яка не є квазінеперервною відносно кожної із змінних.*

Побудова прикладу. Покладемо

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, \text{якщо } (x,y)\in[0,\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2},1], \\ 1, \text{якщо } (x,y)\in(\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{1}{2}), \\ 1, \text{якщо } x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}, \\ 0, \text{ в інших точках } [0,1]^2. \end{cases}$$

Функція f квазінеперервна за сукупністю змінних, але функція $f_{\frac{1}{2}}$ не є квазінеперервною в точці $x=\frac{1}{2}$ і функція $f^{\frac{1}{2}}$ не є квазінеперервною в точці $y=\frac{1}{2}$. □

Зауважимо, що побудована у прикладі 4.1.3 функція належить до $K_h\tilde{K}([0,1]^2,\mathbb{R})$, але не належить до $K_hK([0,1]^2,\mathbb{R})$.

Наступний результат допоможе нам встановити, що сукупно квазінеперервна функція все ж має певні риси нарізної квазінеперервності. Нагадаємо, що через $K^s(f)$ ми позначаємо множину точок симетричної квазінеперервності відносно x відображення f.

Теорема 4.1.3. *Нехай X – топологічний простір, простори Y і Z задовольняють другу аксіому зліченності і відображення $f: X\times Y\to Z$ квазінеперервне за сукупністю змінних. Тоді множина*

$$K^s_Y(f)=\{x\in X:\{x\}\times Y\subseteq K^s(f)\}$$

залишкова в X.

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай множина $E=X\setminus K^s_Y(f)$ другої категорії в X. Тоді для кожного $x\in E$ відображення f не є симетрично квазінеперервним відносно відносно x в деякій точці $p_x=(x,y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x\in E$ існують околи $W(x),U(x)$ і $V(x)$ відповідно точок $z_x=f(p_x)$ в Z, x в X і y_x в Y, такі, що для кожного відкритого околу U точки x в X і для кожної відкритої непорожньої множини V в Y, для яких $U\times V\subseteq U(x)\times V(x)$, маємо, що $f(U\times V)\not\subseteq W(x)$.

Нехай $\{W_m:m\in\mathbb{N}\}$ і $\{V_n:n\in\mathbb{N}\}$ – бази просторів Z та Y відповідно. Для номерів n і m розглянемо множини $B_{n,m}$ тих точок $x\in E$, що $y_x\in V_n$, $z_x\in W_m$ і для довільного околу U точки x в X та довільної відкритої непорожньої множини V в Y з того, що $V\subseteq V_n$ маємо $f(U\times V)\not\subseteq W_m$.

Покажемо, що $\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m} = E$. Візьмемо точку $x \in E$. Оскільки відображення f не є симетрично квазінеперервним відносно першої змінної в точці (x, y_x), то існують околи $W(x), U(x)$ і $V(x)$ відповідно точок $z_x = f(x, y_x)$ в Z, x в X і y_x в Y, такі, що для кожного відкритого околу U точки x в X і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$, маємо, що $f(U \times V) \not\subseteq W(x)$. Тоді існують номери n і m, такі, що $y_x \in V_n \subseteq V(x)$ і $z_x \in W_m \subseteq W(x)$. Зауважимо, що коли $f(U \times V) \not\subseteq W(x)$ для кожного околу U, такого, що $U \subseteq U(x)$, то $f(U \times V) \not\subseteq W_m$ для довільного околу U точки x. Таким чином, для кожного відкритого околу U точки x в X і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $V \subseteq V_n$, маємо, що $f(U \times V) \not\subseteq W_m$. А це означає, що $x \in B_{n,m}$.

Оскільки множина E другої категорії в X, то існують числа m_0 і n_0, такі, що множина B_{n_0,m_0} щільна в деякій відкритій непорожній множині G. Розглянемо точку $p_x = (x, y_x)$, де $x \in B = B_{n_0,m_0} \cap G$. Оскільки відображення f квазінеперервне в точці p_x, то існують відкриті множини U і V відповідно в просторах X і Y, такі, що $U \times V \subseteq G \times V_{n_0}$ і $f(U \times V) \subseteq W_{m_0}$. З щільності множини B в G випливає, що існує точка $x_0 \in U \cap B$. Тоді множина U є околом точки x_0. Отже, $f(U \times V) \subseteq W_{m_0}$, де U – окіл точки x_0, а $V \subseteq V_{n_0}$. А це суперечить тому, що $x_0 \in B \subseteq B_{n_0,m_0}$. Одержали суперечність. Отже, наше припущення хибне. □

Наслідок 4.1.1. *Нехай X – топологічний простір, простори Y і Z задовольняють другу аксіому зліченності і відображення $f : X \times Y \to Z$ квазінеперервне за сукупністю змінних. Тоді множина $X_K(f)$ залишкова в X.*

Доведення. З того, що відображення $f : X \times Y \to Z$ симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці вертикалі $\{a\} \times Y$ випливає, що відображення f^a є квазінеперервним. Тоді $X_K(f) \supseteq K_Y^s(f)$. А оскільки з теореми 4.1.3 множина $K_Y^s(f)$, то множина $X_K(f)$ теж залишкова в X. □

4.1.3. Тепер одержимо характеризацію квазінеперервності відображення від двох змінних.

Теорема 4.1.4. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу*

аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір. Тоді

$$K_h\tilde{K}(X \times Y, Z) = K(X \times Y, Z)$$

Доведення. Зауважимо, що метризовний сепарабельний простір є регулярним з другою аксіомою зліченності. Тому включення $\subseteq$ випливає з теореми 4.1.1. Встановимо включення в інший бік. Нехай $f \in K(X \times Y, Z)$. Зрозуміло, що тоді відображення f є горизонтально квазінеперервне. З наслідку 4.1.1 випливає, що множина $X_K(f)$ залишкова в X. Отже, $f \in K_h\tilde{K}(X \times Y, Z)$. $\square$

4.2. Сукупні властивості функцій, які монотонні відносно першої змінної

4.2.1. Нам буде потрібна наступна лема.

Лема 4.2.1. *Нехай Y – топологічний простір, функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ монотонна відносно першої змінної, V – відкрита непорожня множина в Y, $\varepsilon > 0$, $A \subseteq \{x \in \mathbb{R} : \omega_{f^x}(V) < \frac{\varepsilon}{8}\}$ і A – множина другої категорії в $\mathbb{R}$. Тоді існує відкрита непорожня множина G в $\mathbb{R}$, така, що $G \subseteq \overline{A}$ і $\omega_f(G \times V) < \varepsilon$.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $y_0 \in V$. Оскільки множина A другої категорії, то вона десь щільна. Нехай $\overline{A} \supseteq G_0$, де G_0 – деяка відкрита непорожня множина в $\mathbb{R}$. З монотонності функції f_{y_0} випливає, що вона точково розривна. Тому існує відкрита непорожня множина $G \subseteq G_0$, така, що $\omega_{f_{y_0}}(G) < \frac{\varepsilon}{8}$. Покладемо $A_0 = G \cap A$. Зрозуміло, що $A_0 \neq \varnothing$ і $\omega_{f_{y_0}}(A_0) < \frac{\varepsilon}{8}$.

Розглянемо довільні точки $x_1, x_2 \in A_0$ і $y \in V$. Тоді

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq |f(x_1, y) - f(x_1, y_0)| + |f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0)| +$$

$$+|f(x_2, y_0) - f(x_2, y)| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{3\varepsilon}{8}.$$

Нехай x' і x'' довільні точки з G і $y \in V$. Буде вважати, що $x' < x''$. Оскільки множина A_0 щільна в G, то існують точки x_1 і x_2 в A_0, такі, що $x_1 < x'$ і $x_2 > x''$. Тоді користуючись монотонністю функції f_y, маємо, що

$$|f(x', y) - f(x'', y)| \leq |f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \frac{3\varepsilon}{8}.$$

таку саму нерівність одержуємо у випадку $x' > x''$. Таким чином, для довільних точок $x', x'' \in G$ і $y \in V$ маємо, що $|f(x', y) - f(x'', y)| < \frac{3\varepsilon}{8}$.

Розглянемо нарешті довільні точки $p_1 = (x_1, y_1), p_1 = (x_2, y_2) \in G \times V$ і візьмемо точку $x_0 \in A_0$. Тоді

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(x_0, y_1)| + |f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| +$$
$$+|f(x_0, y_2) - f(p_2)| < \frac{3\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{3\varepsilon}{8} = \frac{7\varepsilon}{8}.$$

Отже, $\omega_f(G \times V) < \varepsilon$. □

Теорема 4.2.1. *Нехай простір Y має зліченну псевдобазу і $f \in M\tilde{K}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R})$. Тоді множина $K_Y^s(f)$ залишкова в $\mathbb{R}$.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай множина $E_1 = \mathbb{R} \setminus K_Y^s(f)$ другої категорії в $\mathbb{R}$. Тоді для кожного $x \in E_1$ відображення f не є симетрично квазінеперервним відносно x в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Для кожної точки $x \in E_1$ існують околи $U(x)$, $V(x)$ відповідно точок x в $\mathbb{R}$, y_x в Y і число $\varepsilon > 0$, такі, що для кожного околу U точки x в $\mathbb{R}$ і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$, маємо, що $|f(p) - f(p_x)| \geq \varepsilon$ для деякого $p \in U \times V$. Оскільки множина E_1 другої категорії, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що множина E_2, яка складається з точок $x \in E_1$, що обслуговуються одним ε, є множиною другої категорії.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Згідно з умовою множина $X_K(f)$ залишкова в $\mathbb{R}$. Перетин $E = E_2 \cap X_K(f)$ – це множина другої категорії в X. Для номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in E : V_n \subseteq V(x), \omega_{f^x}(\{y_x\} \cup V_n) < \frac{\varepsilon}{16}\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E$, бо відображення f^x квазінеперервне для кожного $x \in X_K(f)$ і $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Оскільки множина E другої категорії в $\mathbb{R}$, то існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} другої категорії $\mathbb{R}$. Скориставшись лемою 4.2.1, одержимо відкриту непорожню множину G в $\mathbb{R}$, таку, що $G \subseteq \overline{A_{n_0}}$ і $\omega_f(G \times V_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Розглянемо довільну точку $x_0 \in G \cap A_{n_0}$. Тоді для кожної точки $p = (x, y) \in G \cap V_{n_0}$ маємо, що

$$|f(p) - f(p_{x_0})| \leq |f(p) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(p_{x_0})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{16} < \varepsilon.$$

А це суперечить тому, що $x_0 \in A_{n_0} \subseteq E_2$. Отже, наше припущення хибне. □

4.2.2. Аналогічні результати одержуються для симетричної ледь неперервності та симетричної кліковості. Нагадаємо, що через $L^s_Y(f)$ /$A^s_Y(f)$/ множину точок $x \in X$, таких, що відображення f симетрично ледь неперервне /симетрично клікове/ відносно x в точці (x, y) для кожної точки $y \in Y$.

Теорема 4.2.2. *Нехай простір Y має зліченну псевдобазу і $f \in M\tilde{L}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R})$. Тоді множина $L^s_Y(f)$ залишкова в $\mathbb{R}$.*

Доведення. Будемо міркувати так само, як і при доведенні попередньої теореми. Нехай множина $E_1 = \mathbb{R} \setminus L^s_Y(f)$ другої категорії в $\mathbb{R}$. Тоді для кожного $x \in E_1$ відображення f не є симетрично ледь неперервним відносно x в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x \in E_1$ існує число $\varepsilon > 0$, таке, що для кожного відкритого околу U точки x в $\mathbb{R}$ і для кожної відкритої непорожньої множини V в Y маємо, що $|f(p) - f(p_x)| \geq \varepsilon$ для деякого $p \in U \times V$. Оскільки множина E_1 другої категорії, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що множина E_2, яка складається з точок $x \in E_1$, що обслуговуються одним ε, є множиною другої категорії.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Згідно з умовою множина $X_L(f)$ залишкова в $\mathbb{R}$. Позначимо через $E = E_2 \cap X_L(f)$ множину другої категорії в X. Для номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in E : \omega_{f^x}(\{y_x\} \cup V_n) < \frac{\varepsilon}{16}\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E$, бо відображення f^x ледь неперервне для кожного $x \in X_L(f)$ і $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Оскільки множина E другої категорії в $\mathbb{R}$, то існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} другої категорії $\mathbb{R}$. Згідно з лемою 4.2.1 існує відкрита непорожня множина G в $\mathbb{R}$, така, що $G \subseteq \overline{A_{n_0}}$ і $\omega_f(G \times V_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді для довільної точки $x_0 \in A_{n_0} \cap G$ і кожного $p = (x, y) \in G \times V_{n_0}$ маємо, що

$$|f(p) - f(p_{x_0})| \leq |f(p) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(p_{x_0})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{16} < \varepsilon.$$

А це суперечить тому, що $x_0 \in A_{n_0} \subseteq E_2$. Отже, наше припущення хибне. $\square$

Теорема 4.2.3. *Нехай простір Y має зліченну псевдобазу і функція $f \in M\tilde{A}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R})$. Тоді множина $A^s_Y(f)$ залишкова в $\mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай множина $E_1 = X \setminus A^s_Y(f)$ другої категорії в $\mathbb{R}$. Тоді для кожного $x \in E_1$ функція f не є симетрично кліковим відносно першої змінної в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x \in E_1$ існують околи $U(x)$,$V(x)$ відповідно точок x в $\mathbb{R}$, y_x в Y і число $\varepsilon > 0$, такі, що для кожного околу U точки x в $\mathbb{R}$ і для кожної відкритої непорожньої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$, маємо, що $\omega_f(U \times V) \geq \varepsilon$. Оскільки множина E_1 другої категорії, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що множина E_2, яка складається з точок $x \in E_1$, що обслуговуються одним ε, є множиною другої категорії.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Згідно з умовою множина $X_A(f)$ залишкова в $\mathbb{R}$. Позначимо через $E = E_2 \cap X_A(f)$ множину другої категорії в X. Для номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in E : V_n \subseteq V(x), \omega_{f^x}(V_m) < \frac{\varepsilon}{8}\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E$, бо функція f^x клікова для кожного $x \in X_A(f)$ і $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Оскільки множина E другої категорії в $\mathbb{R}$, то існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} другою категорії в $\mathbb{R}$. Тоді згідно з лемою 4.2.1 існує відкрита непорожня множина G в $\mathbb{R}$, така, що $G \subseteq \overline{A_{n_0}}$ і $\omega_f(G \times V_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки $G \cap E_2 \neq \varnothing$, то одержуємо суперечність. Отже, наше припущення хибне. □

4.2.3. Зауважимо, що оскільки за результатами теореми 4.2.3 для функції f існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що функція f симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$, то функція f буде кліковою, адже множина A щільна в $\mathbb{R}$.

Теорема 4.2.4. *Нехай берівський простір Y має зліченну псевдобазу і $f \in M\tilde{A}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R})$. Тоді існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що для кожної точки $x \in A$ існує всюди щільна в Y множина B_x, що $\bigcup\limits_{x \in A} (\{x\} \times B_x) \subseteq C(f)$.*

Доведення. Скористаємося результатом теореми 4.2.3. Тоді множина $A = A^s_Y(f)$ залишкова в $\mathbb{R}$. З означення множини A маємо, що функція f симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$. Покажемо, що для кожної точки $x \in A$ існує всюди щільна в Y множина B_x, що

$\bigcup\limits_{x\in A}(\{x\}\times B_x)\subseteq C(f)$. Нехай це не так. Нехай існують точка $x_0\in A$ і відкрита множина G в Y, такі, що функція f розривна в кожній точці множини $\{x_0\}\times G$. Тоді існують $\varepsilon>0$ і множина E_1 в Y, яка щільна в деякій множині V, такі, що $\omega_f(x_0,y)\geq\varepsilon$ для кожної точки $y\in E_1$. Згідно з теоремою 4.2.3 існує точка $y_0\in V$, така, що $\omega_f(x_0,y_0)<\varepsilon$. Тобто, існують відкриті непорожні множини U_1 в $\mathbb{R}$ і V_1 в Y, такі, що $V_1\subseteq V$ і $\omega_f(U_1\times V_1)<\varepsilon$. Оскільки множина $E_1\cap V_1\neq\varnothing$, то існує точка $b\in E_1\cap V_1$. Тоді $\omega_f(x_0,b)<\varepsilon$. Одержуємо суперечність. □

Нагадаємо, що через $P(X,Y)$ ми позначаємо клас точково розривних відображень з X в Y.

Наслідок 4.2.1. *Нехай берівський простір Y має зліченну псевдобазу. Тоді $M\tilde{A}(\mathbb{R}\times Y,\mathbb{R})\subseteq P(\mathbb{R}\times Y,\mathbb{R})$.*

Доведення. Нехай $f\in M\tilde{A}(\mathbb{R}\times Y,\mathbb{R})$. Тоді з попередньої теореми випливає, що існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що для кожної точки $x\in A$ існує всюди щільна в Y множина B_x, що $\bigcup\limits_{x\in A}(\{x\}\times B_x)\subseteq C(f)$. Оскільки множина $\bigcup\limits_{x\in A}\{x\}\times B_x$ всюди щільна в $\mathbb{R}\times Y$, то функція f точково розривна. □

Теорема 4.2.5. *Нехай Y – довільний топологічний простір, функція $f:\mathbb{R}\times Y\to\mathbb{R}$ горизонтально та вертикально квазінеперервна і монотонна відносно першої змінної. Тоді функція f квазінеперервна за сукупністю змінних.*

Доведення. Нехай $p_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}\times Y$ і $\varepsilon>0$. Розглянемо довільні околи U і V точок x_0 та y_0. Візьмемо такий інтервал U_0, що $x_0\in U_0\subseteq U$. Оскільки функція f вертикально квазінеперервна в точці p_0, то існує точка $x_1\in U_0$ в X і відкрита непорожня множина V_1 в Y, такі, що $V_1\subseteq V$ і $|f(p_0)-f(x_1,y)|<\frac{\varepsilon}{8}$ для довільного $y\in V_1$. Розглянемо довільну точку $y_1\in V_1$. З горизонтальної квазінеперервності функції f в точці (x_1,y_1) випливає, що існують відкрита непорожня множина U_1 в $\mathbb{R}$ і точка $y_2\in V_1$ в Y, такі, що $x_1\notin U_1\subseteq U_0$ і $|f(x_1,y_1)-f(x,y_2)|<\frac{\varepsilon}{4}$ для довільного $x\in U_1$. Візьмемо довільну точку $x_2\in U_1$. Оскільки функція f вертикально квазінеперервна в точці (x_2,y_2), то існують точка $x_3\in U_1$ в X і відкрита непорожня множина V_2 в Y, такі, що $V_2\subseteq V_1$ і $|f(x_2,y_2)-f(x_3,y)|<\frac{\varepsilon}{4}$ для довільного $y\in V_2$. Тоді для довільної

точки $y \in V_2$ маємо

$$|f(x_1, y) - f(x_3, y)| \leq |f(x_1, y) - f(x_1, y_1)| + |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| +$$
$$+|f(x_2, y_2) - f(x_3, y)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Нехай U_2 – це відрізок з кінцями x_1 і x_3. Він невироджений, бо $x_1 \neq x_3$. Візьмемо довільну точку $p = (x, y) \in U_2 \times V_2$. Тоді з монотонності відносно першої змінної маємо

$$|f(p_0) - f(p)| \leq |f(p_0) - f(x_1, y)| + |f(x_1, y) - f(p)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Оскільки x_1 і x_3 належать до U_0, то і $U_2 \subseteq U_0$, отже, $U_2 \times V_2 \subseteq U \times V$. Тому функція f квазінеперервна за сукупністю змінних у точці p_0. □

4.3. Слабка горизонтальна квазінеперервність

4.3.1. Ми кажемо, що відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *слабко горизонтально квазінеперервним*, якщо для довільних відкритих множин U і V в X і Y відповідно та множини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$ виконується включення $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$. З леми 4.1.1 випливає, що горизонтально квазінеперервне відображення є слабко квазінеперервним. Обернене твердження не вірне. Це показує наступний приклад.

Приклад 4.3.1. *Існує слабко горизонтально квазінеперервна функція $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, яка не є горизонтально квазінеперервною.*

Побудова прикладу. Визначимо функцію $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ так:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \ (x, y) \in ([0, 1] \cap \mathbb{Q})^2 \cup ([0, 1] \setminus \mathbb{Q})^2, \\ 0, \text{ в інших точках } [0, 1]^2. \end{cases}$$

Кожна множина $U \times \{y\} \subseteq [0, 1]^2$, де U – відкрита непорожня в [0,1], містить точки, значення функції в яких рівні 1 і точки, в яких функція рівна 0. Тому відображення f не є горизонтально квазінепервним. Однак, для довільних відкритих непорожніх множин U і V в $[0, 1]$ і множини A в $[0, 1]$, таких, що $U \subseteq \overline{A}$ маємо, що $f(U \times V) = \{0, 1\}$ і $f(A \times V) = \{0, 1\}$. Це означає, що функція f слабко горизонтально квазінеперервна. □

Має місце наступна характеризація слабкої горизонтальної квазінеперервності.

Теорема 4.3.1. *Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Відображення $f : X \times Y \to Z$ слабко горизонтально квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли для довільної точки $p = (x, y)$ і довільних околів U, V і W точок x, y і $z = f(p)$ відповідно в просторах X, Y і Z існують відкрита непорожня множина G в X і відображення $g : G \to V$, такі, що $G \subseteq U$ і $f(Gr(g)) \subseteq W$.*

Доведення. Нехай відображення f слабко горизонтально квазінеперервне. Будемо міркувати від супротивного. Нехай існують точка $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ і відкриті околи U, V і W точок x_0, y_0 і $z_0 = f(p_0)$ відповідно в просторах X, Y і Z, такі, що для довільної відкритої непорожньої множини $G \subseteq U$ існує точка $x \in G$, така, що для довільної точки $y \in V$ маємо $f(x, y) \notin W$. Розглянемо множину $A = \{x \in U : (\forall y \in V)(f(x, y) \notin W)\}$. Згідно з припущення $U \subseteq \overline{A}$. Оскільки відображення f слабко горизонтально квазінеперервне, то

$$f(p_0) \in f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)} \subseteq \overline{Z \setminus W} \subseteq Z \setminus W.$$

Одержали суперечність, бо $f(p_0) \in W$. Отже, наше припущення не вірне.

Тепер доведемо достатність. Візьмемо довільні відкриті непорожні множини U і V відповідно в X і Y та множину A в X, таку, що $U \subseteq \overline{A}$. Розглянемо довільну точку $z_0 = f(x_0, y_0) \in f(U \times V)$ і довільний окіл W точки z_0 в просторі Z. Згідно з умовою теореми існують відкрита непорожня множина G в X і відображення $g : G \to V$, такі, що $G \subseteq U$ і $f(Gr(g)) \subseteq W$. З щільності множини A в U випливає, що існує точка $x_1 \in G \cap A$. Зрозуміло, що $f(x_1, g(x_1)) \in W$. Тоді $W \cap f(A \times V) \neq \varnothing$, а отже, $z_0 \in \overline{f(A \times V)}$. Таким чином, відображення f слабко горизонтально квазінеперервне. □

4.3.2. Для доведення основного результату нам потрібна наступна теорема, яка уточнює згадану в підрозділі 1.1 характеризацію квазінеперервності для випадку відображень від двох змінних.

Теорема 4.3.2. *Нехай X – берівський простір, простір Y володіє зліченною псевдобазою, Z – регулярний простір і $f : X \times Y \to Z$. Відображення f квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли*

($\star$) *для довільних відкритих непорожніх множин U і V відповідно в X і Y, довільної щільної в U множини A і довільних щільних в V множин B_a для кожного $a \in A$, має місце включення*

$$f(U \times V) \subseteq \overline{f(\bigcup_{a \in A}(\{a\} \times B_a))}.$$

Доведення. Доведення необхідності є очевидним враховуючи той факт, що множина $\bigcup\limits_{a \in A}(\{a\} \times B_a)$ щільна в $U \times V$. Достатність будемо доводити методом від супротивного. Нехай f не є квазінеперервним в деякій точці $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Тоді існують відкриті околи W_0, U_0 і V_0 точок $z_0 = f(p_0)$, x_0 і y_0 відповідно в просторах Z, X і Y, такі, що для довільних відкритих множин U в X та V в Y існує точка $p \in U \times V$, така, що $f(p) \notin W_0$. Візьмемо замкнений окіл W_1 точки z_0, такий, що $W_1 \subseteq W_0$.

Розглянемо множину

$$A = \{a \in U_0 : (\exists B_a | V_0 \subseteq \overline{B_a})(\forall b \in B_a)(f(a, b) \notin W_1)\}$$

і покажемо, що вона щільна в U_0. Нехай це не так. Припустимо, що в U_0 існує відкрита непорожня множина U, така, що для кожного $x \in U$ існує відкрита непорожня множина H_x в V_0, що $f(x, y) \in W_1$ для всіх $y \in H_x$. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Розглянемо множини $M_n = \{x \in U : (\forall y \in V_n)(f(x, y) \in W_1)\}$. Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n = U$. Оскільки простір X берівський, то існує номер n_0, такий, що множина M_{n_0} десь щільна в U. Нехай M_{n_0} щільна у відкритій непорожній множині $G \subseteq U$. Тоді згідно з умовою

$$f(G \times V_{n_0}) \subseteq \overline{f(M_{n_0} \times V_{n_0})} \subseteq \overline{W_1} = W_1 \subseteq W_0.$$

Одержали суперечність з припущенням. Отже, множина A щільна в U_0.

Тепер знову скориставшись умовою теореми маємо

$$f(U_0 \times V_0) \subseteq \overline{f(\bigcup_{a \in A}(\{a\} \times B_a))} \subseteq \overline{Z \setminus W_1} \subseteq$$

$$\subseteq \overline{Z \setminus intW_1} = Z \setminus intW_1.$$

Тоді точка $z_0 = f(p_0) \notin intW_1$. Але ж $intW_1$ є околом точки z_0. Одержали суперечність. Отже, наше припущення не вірне. $\square$

Умова беровості простору X в теремі 4.3.2 є істотною. Це показує наступний приклад.

Приклад 4.3.2. *Існує $f : X \times (0,1) \to \mathbb{R}$, де X – множина всіх двійково-раціональних чисел виду $\frac{2k-1}{2^n}$ для $n \in \mathbb{N}$ і $k = 1, 2, ..., 2^{n-1}$, яка задовольняє умову ($\star$) теореми 4.3.2, але не є квазінеперервною.*

Побудова прикладу. Розглянемо функцію $f : X \times (0,1) \to \mathbb{R}$, яка визначається так: $f(x,y) = 1$, якщо $x = \frac{2k-1}{2^n}, y \in (\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n})$, де $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, ..., 2^{n-1}$, $m = 1, 2, ..., 2^n$ і $f(x,y) = 0$, в інших точках. Оскільки у відкритій множині з $(0,1)$ міститься нескінченна кількість двійково-раціональних чисел, то в кожному прямокутнику виду $(a,b) \times (c,d) \subseteq X \times (0,1)$ є точки, в яких значення функції рівне 0 і точки, де функція приймає значення 1. Щоб переконатися в цьому достатньо розглянути точки з множини $\{\frac{2k-1}{2^n}\} \times (c,d)$, де $\frac{1}{2^n} < d - c$. Тому $f((a,b) \times (c,d)) = \{0,1\}$. Оскільки будь-яка десь щільна підмножина A множини двійково-раціональних чисел є нескінченна, то існують номери n і k, такі, що $\frac{2k-1}{2^n} \in A$ і $\frac{1}{2^n} < d - c$. Тоді будь-яка щільна в (c,d) множина буде містити точки, в яких значення функції рівне 0 і точки, де функція рівна 1. Тоді $f(\bigcup\limits_{x \in A} (\{x\} \times B_x)) = \{0,1\}$, де множина A щільна в (a,b), а множина B_x щільна в (c,d) для кожного $x \in A$. Однак функція f не є квазінеперервною по тій причині, що в кожному прямокутнику є точки, в яких значення функції рівне 0 і точки, де функція приймає значення рівне 1. $\square$

4.3.3. Тепер переходимо до доведення основного результату.

Теорема 4.3.3. *Нехай X – берівський простір, простір Y володіє зліченною псевдобазою, Z – регулярний простір, $f : X \times Y \to Z$ – слабко горизонтально квазінеперервне і квазінеперервне відносно другої змінної відображення. Тоді f квазінеперервне за сукупністю змінних.*

Доведення. Скористаємося теоремою 4.3.2. Візьмемо довільні відкриті непорожні множини U і V відповідно в X і Y та щільну в U множину A. Для кожної точки $a \in A$ розглянемо довільну щільну в V множину B_a. Оскільки відображення f слабко горизонтально квазінеперервне, то $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$. З квазінеперервності відносно другої змінної випливає,

що для всіх $a \in A$ має місце включення $f^a(V) \subseteq \overline{f^a(B_a)}$. Тоді

$$f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)} = \overline{f(\bigcup_{a \in A}(\{a\} \times V))} =$$

$$= \overline{\bigcup_{a \in A} f^a(V)} \subseteq \overline{\bigcup_{a \in A} \overline{f^a(B_a)}} \subseteq \overline{\overline{\bigcup_{a \in A} f^a(B_a)}} =$$

$$= \overline{f(\bigcup_{a \in A}(\{a\} \times B_a))}.$$

Отже, згідно з теоремою 4.3.2 відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних. □

Насправді в теоремі 4.3.3 досить вимагати квазінеперервності відображення f^x не для всіх $x \in X$, а лише для значень x з деякої залишкової в X множини.

Теорема 4.3.4. *Нехай X – берівський простір, простір Y володіє зліченною псевдобазою, Z – регулярний простір, $f : X \times Y \to Z$ – відображення, яке слабко горизонтально квазінеперервне і квазінеперервне відносно другої змінної при значеннях першої змінної з деякої залишкової в X множини. Тоді f сукупно квазінеперервне.*

Доведення. Згідно з умовою множина $M = X_K(f)$ залишкова в X. Розглянемо звуження $h = f_{|M \times Y}$. Оскільки підпростір M берівський, то відображення h задовольняє умови теореми 4.3.3. Тоді відображення h сукупно квазінеперервне. Покажемо, що і відображення f квазінеперервне. Розглянемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Візьмемо замкнений окіл W точки $z_0 = f(p_0)$ в Z та відкриті околи U і V точок x_0 і y_0 відповідно в X і Y. Оскільки простір X берівський, то множина M щільна в X. З слабкої горизонтальної квазінеперервності і теореми 4.3.1 випливає існування точки $p_1 \in (M \cap U) \times V$, такої, що $f(p_1) \in intW$. Оскільки відображення h квазінеперервне в точці p_1, то існують відкриті непорожні множини G та H відповідно в X та Y, такі, що $G \subseteq U$, $H \subseteq V$ і $g((G \cap M) \times H) \subseteq intW$. Тоді використовуючи слабку горизонтальну квазінеперервність відображення f маємо

$$f(G \times H) \subseteq \overline{f((G \cap M) \times H)} = \overline{g((G \cap M) \times H)} \subseteq \overline{intW} \subseteq W.$$

Отже, відображення f квазінеперервне в точці p_0. □

Оскільки кожне сукупно квазінеперервне відображення є горизонтально квазінеперервним, то з теореми 4.3.4 одержуємо наступний наслідок.

Наслідок 4.3.1. *Нехай X – берівський простір, простір Y володіє зліченною псевдобазою, Z – регулярний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ квазінеперервне відносно другої змінної при значеннях першої змінної, яка пробігає деяку залишкову в X множину. Тоді слабка горизонтальна квазінеперервність еквівалентна горизонтальній квазінеперервності.*

З теореми 4.1.4 і наслідку 4.3.1 ми одержуємо ще одну характеризаційну теорему про сукупну квазінеперервність.

Теорема 4.3.5. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір. Відображення $f : X \times Y \to Z$ є квазінеперервним за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли f слабко горизонтально квазінеперервне і квазінеперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в X.*

4.3.4. На завершення цього підрозділу подамо характеризацію горизонтальної квазінеперервності в термінах замикання.

Теорема 4.3.6. *Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Відображення $f : X \times Y \to Z$ є горизонтально квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли*

$$f(U \times V) \subseteq \overline{f(\bigcup_{y \in V} (A_y \times \{y\}))},$$

для довільних відкритих непорожніх множин U і V відповідно в X і Y та довільних множин A_y в Y, причому $U \subseteq \overline{A_y}$, для кожного $y \in V$.

Доведення. Нехай відображення $f : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне. Візьмемо довільні відкриті непорожні множини U і V відповідно в X і Y. Для кожного $y \in V$ розглянемо довільну множину A_y в Y, таку, що $U \subseteq \overline{A_y}$. Нехай $p = (x, y) \in U \times V$ і W – довільний окіл точки $f(p)$ в Z. Оскільки відображення f горизонтально квазінеперервне в точці p, то існують точка $b \in V$ і відкрита непорожня множина G в X, такі, що $G \subseteq U$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq W$. З того, що $U \subseteq \overline{A_b}$ і $G \subseteq U$ випливає, що

$G \cap A_b \neq \varnothing$. Розглянемо довільну точку $a \in G \cap A_b$. Тоді $f(a,b) \in W$. Отже, $W \cap f(\bigcup\limits_{y \in V}(A_y \times \{y\})) \neq \varnothing$. Це означає, що $f(p) \in \overline{f(\bigcup\limits_{y \in V}(A_y \times \{y\}))}$.

Перейдемо до доведення достатності. Припустимо, що відображення f не є горизонтально квазінеперервним в деякій точці $p_0 = (x_0, y_0)$. Тоді існують відкриті околи U, V і W точок x_0, y_0 і $f(p_0)$ відповідно в X, Y і Z, такі, що для довільної точки $y \in V$ і довільної відкритої непорожньої множини G в X, з того що $G \subseteq U$ випливає, що $f(G \times \{y\} \not\subseteq W$. Таким чином, для кожної точки $y \in V$ існує підмножина A_y простору X, така, що $f(A_y \times \{y\}) \subseteq Z \setminus W$. Тоді згідно умови

$$f(p_0) \in f(U \times V) \subseteq \overline{f(\bigcup_{y \in V}(A_y \times \{y\}))} \subseteq \overline{Z \setminus W} \subseteq Z \setminus W.$$

Одержали суперечність. □

4.4. Про симетричну квазінеперервність та її аналоги.

4.4.1. Нехай $f : X \times Y \to Z$, де X, Y і Z – топологічні простори, $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Позначимо $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$ і для множини $E \subseteq X \times Y$ покладемо $pr_X(E) = \{x \in X : (\forall x)(\exists y \in Y)((x,y) \in E)\}$.

Відображення f називається *симетрично майже квазінеперервним відносно x в точці* p_0, якщо для довільних околів U, V і W відповідно точок $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ і $z_0 = f(p_0) \in W$ існує множина A в $X \times Y$, така, що $A \subseteq U \times V$, $x_0 \in pr_X(int\overline{A})$ і $f(A) \subseteq W$. Відображення f називається *симетрично майже ледь неперервним відносно x в точці* p_0, якщо для довільного околу W точки $z_0 = f(p_0) \in W$ існує множина A в $X \times Y$, така, що $x_0 \in pr_X(int\overline{A})$ і $f(A) \subseteq W$. Нехай Z – метричний простір. Функція f називається *симетрично кліковою відносно x в точці* $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільних околів U, V відповідно точок $x_0 \in X$ і $y_0 \in Y$ існують окіл U_1 точки x_0 в X і відкрита непорожня множина V_1 в Y, такі, що $U_1 \times V_1 \subseteq U \times V$ і $\omega(U_1 \times V_1) < \varepsilon$. Відображення f є *симетрично майже квазінеперервне відносно x, симетрично майже ледь неперервним відносно x чи симетрично кліковим відносно x*, якщо воно є таким в кожній точці.

Аналогічно можна ввести поняття різних типів симетричної ослабленої неперервності відносно y.

Теорема 4.4.1. *Нехай X – топологічний простір, простори Y та Z задовольняють другу аксіому зліченності і відображення $f : X \times Y \to Z$ майже неперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в X. Тоді існує залишкова в X множина A, така, що відображення f сукупно майже неперервне в кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай не існує залишкової в X множини A, такої, що відображення f майже неперервне в кожній точці добутку $A \times Y$. Тоді існує множина E_1 другої категорії в X, така, що для кожного $x \in E$ відображення f не є майже неперервне в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x \in E_1$ існує окіл $W(x)$ точки $z_x = f(p_x)$ в Z, такий, що для кожної множини O в $X \times Y$, що $p_x \in int\overline{O}$ маємо $f(O) \not\subseteq W(x)$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ і $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ – бази просторів Y і Z відповідно та M – залишкова множина в X, для точок x якої функція f^x майже неперервна. Позначимо через $E = E_1 \cap M$ множину другої категорії в X. Для номерів n та m розглянемо множини

$$A_{n,m} = \{x \in E : (z_x \in W_m \subseteq W(x))(\exists B_x \subseteq V_n)$$
$$(y_x \in V_n \subseteq \overline{B_x})(f^x(B_x) \subseteq W_m)\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} = E$, бо відображення f^x майже неперервне для кожного $x \in M$, а $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ і $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ – бази просторів Y і Z відповідно. Оскільки множина E другої категорії в X, то існують номери n_0 і m_0, такі, що множина A_{n_0,m_0} щільна в деякій відкритій множині G з X. Покладемо $A_0 = A_{n_0,m_0} \cap G$. Розглянемо множину $\bigcup\limits_{x \in A_0} (\{x\} \times B_x)$. Зрозуміло, що для $x \in A_0$ маємо $p_x \in G \times V_{n_0} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x}$. Крім того, $f(\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x) \subseteq W_{m_0} \subseteq W(x)$. А це суперечить тому, що $x \in A_0 \subseteq E_1$. Отже, наше припущення хибне. □

4.4.2. Аналогічно одержуємо результати для майже квазінеперервності та майже ледь неперервності.

Теорема 4.4.2. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, простір Z задовольняє другу аксіому зліченності і відображення*

$f : X \times Y \to Z$ майже квазінеперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в X. Тоді існує залишкова в X множина A, така, що відображення f симетрично майже квазінеперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай для кожної точки x з деякої множини E_1 другої категорії в X існує точка $y_x \in Y$, така, що відображення f не є симетрично майже квазінеперервне відносно x в точці $p_y = (x, y_x) \in X \times Y$. Тоді для кожної точки $x \in E_1$ існують околи $U(x)$,$V(x)$ і $W(x)$ відповідно точок x в X, y_x в Y і $z_x = f(p_x)$ в Z, такі, що для кожної множини O в $X \times Y$, такої, що $int\overline{O} \neq \varnothing$, $x \in pr_X(int\overline{O})$ і $O \subseteq U(x) \times V(x)$ маємо, що $f(O) \not\subseteq W(x)$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y і $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Z та M – залишкова множина в X, для точок x якої функція f^x майже квазінеперервна. Позначимо через $E = E_1 \cap M$ множину другої категорії в X. Для номерів n та m розглянемо множини

$$A_{n,m} = \{x \in E : (z_x \in W_m \subseteq W(x))(V_n \subseteq V(x))$$
$$(\exists B_x \subseteq Y)(V_n \subseteq \overline{B_x})(f^x(B_x) \subseteq W_m)\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} = E$, бо відображення f^x майже квазінеперервне для кожного $x \in M$, $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y і $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Z. Оскільки множина E другої категорії в X, то існують номери n_0 і m_0, такі, що множина A_{n_0,m_0} щільна в деякій відкритій множині G з X. Покладемо $A_0 = A_{n_0,m_0} \cap G$. Розглянемо множину $\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x$. Зрозуміло, що для $x \in A_0$ маємо $p_x \in G \times V_{n_0} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x}$. Крім того, $f(\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x) \subseteq W_{m_0} \subseteq W(x)$. А це суперечить тому, що $A_0 \subseteq E_1$. Отже, наше припущення хибне. □

Теорема 4.4.3. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, простір Z задовольняють другу аксіому зліченності і відображення $f : X \times Y \to Z$ майже ледь неперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в X. Тоді існує залишкова в X множина A, така, що відображення f симетрично майже ледь неперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай не існує залишкової в X множини A, такої, що відображення f майже ледь неперервне в кожній точці добутку $A \times Y$. Тоді існує множина E_1 другої категорії в X, така, що для кожного $x \in E$ відображення f не є майже ледь неперервне в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x \in E_1$ існує окіл $W(x)$ точки $z_x = f(p_x)$ в Z, такий, що для кожної множини O в $X \times Y$, такої, що $int\overline{O} \neq \varnothing$ і $x \in pr_X(int\overline{O})$ маємо, що $f(O) \not\subseteq W(x)$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y, а $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Z і M – залишкова множина в X, для точок якої функція f^x майже ледь неперервна. Позначимо через $E = E_1 \cap M$ множину другої категорії в X. Для номерів n та m розглянемо множини

$$A_{n,m} = \{x \in E : (z_x \in W_m \subseteq W(x))(\exists B_x \subseteq Y)(V_n \subseteq int\overline{B_x})(f^x(B_x) \subseteq W_m)\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} = E$. Оскільки множина E другої категорії в X, то існують номери n_0 і m_0, такі, що множина A_{n_0,m_0} щільна в деякій відкритій множині G з X. Покладемо $A_0 = A_{n_0,m_0} \cap G$. Розглянемо множину $\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x$. Зрозуміло, що для $x \in A_0$ маємо $p_x \in G \times V_{n_0} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{x \in A_0} \{x\} \times B_x}$. Крім того,

$$f(\bigcup_{x \in A_0} \{x\} \times B_x) \subseteq W_{m_0} \subseteq W(x).$$

А це суперечить тому, що $A_0 \subseteq E_1$. Отже, наше припущення хибне. □

4.4.3. Тепер перейдемо до симетричної кліковості та симетричної квазінеперервності.

Теорема 4.4.4. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір і функція $f : X \times Y \to Z$ сукупно клікова. Тоді множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Для номера n і числа $\varepsilon > 0$ позначимо через $U_{n,\varepsilon}$ об'єднання всіх відкритих множин U, для яких існує відкрита непорожня множина V в Y, така, що $V \subseteq V_n$ і $\omega_f(U \times V) < \varepsilon$. Множини $U_{n,\varepsilon}$ відкриті для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $\varepsilon > 0$. З кліковості функції f випливає, що всі множини $U_{n,\varepsilon}$ щільні в X. Справді, розглянемо відкриту непорожню множину G в X. Оскільки функція f клікова, то існують відкриті непорожні множини U в X і V в Y, такі, що $U \subseteq G$, $V \subseteq V_n$ і

$\omega_f(U \times V) < \varepsilon$. Тому $U \subseteq U_{n,\varepsilon}$. Тому $G \cap U_{n,\varepsilon} \neq \varnothing$. Отже, множина $U_{n,\varepsilon}$ щільна в X.

Розглянемо множину

$$A = \bigcap_{n,m\in\mathbb{N}} U_{n,\frac{1}{m}}.$$

Легко бачити, що множина A залишкова в X. Покажемо, що $A \subseteq A^s_Y(f)$. Візьмемо точку $p_0 = (x_0, y_0) \in A \times Y$, $\varepsilon > 0$ і окіл $U_0 \times V_0$ точки p_0. Розглянемо номери n_0 і m_0, такі, що $V_{n_0} \subseteq V_0$ і $\frac{1}{m_0} < \varepsilon$. Оскільки $x_0 \in U_{n_0,\frac{1}{m_0}}$, то існують відкритий окіл U точки x_0 в X і відкрита непорожня множина V в Y, такі, що $U \subseteq U_0$, $V \subseteq V_{n_0} \subseteq V_0$ і $\omega_f(U \times V) < \varepsilon$. Отже, функція f симетрично клікова відносно x в точці p_0.

Таким чином, $A \subseteq A^s_Y(f)$. Оскільки множина A залишкова в X, то і множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X. □

Зауважимо, що коли функція $f : X \times Y \to Z$ симетрично клікова відносно x в кожній точці вертикалі $\{a\} \times Y$, то функція f^a є кліковою. Враховуючи цей факт з теореми 4.4.4 одержуємо такий результат.

Наслідок 4.4.1. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – клікова функція. Тоді множина $X_A(f)$ залишкова в X.*

Цей наслідок узагальнює результат з [157], де $X = Y = Z = \mathbb{R}$.

4.4.4. Наступна теорема подібна до одного результату Л.Фудалі з [84]. Нагадаємо, що через $AK(X \times Y, Z)$ ми позначаємо клас відображень $f : X \times Y \to Z$, які клікові відносно першої змінної та квазінеперервні відносно другої.

Теорема 4.4.5. *Нехай простір X має зліченну псевдобазу, Y – берівський простір, який має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір і $f \in AK(X \times Y, Z)$. Тоді множина $K^s_Y(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Нехай $|\circ - \circ|$ метрика в просторі Z, яка породжує його топологію. Будемо міркувати від супротивного. Нехай множина $E_1 = X \setminus K^s_Y(f)$ другої категорії в X. Тоді для кожного $x \in E$ відображення f не є симетрично квазінеперервним відносно першої змінної в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x \in E_1$ існують околи $U(x)$, $V(x)$ відповідно

точок x в X, y_x в Y і число $\varepsilon > 0$, такі, що для кожного відкритого околу U точки x в X і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$, маємо, що $|f(p) - f(p_x)| \geq \varepsilon$ для деякого $p \in U \times V$. Оскільки множина E_1 другої категорії, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що множина E_2, яка складається з точок $x \in E_1$, що обслуговуються одним ε, є множиною другої категорії.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Для номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in E_2 : V_n \subseteq V(x), \omega_{f^x}(\{y_x\} \cup V_n) < \frac{\varepsilon}{4}\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E_2$, бо відображення f^x квазінеперервне для кожного x і $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Оскільки множина E_2 другої категорії в X, то існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} щільна в деякій відкритій непорожній множині G в X.

Нехай $\{U_m : m \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору X. Розглянемо множини

$$B_m = \{y \in V_{n_0} : U_m \subseteq G, \omega_{f_y}(U_m) < \frac{\varepsilon}{4}\}.$$

Оскільки простір Y берівський, то множина V_{n_0} другої категорії. Через те, що функція f_y клікова для кожного $y \in Y$ і $\{U_m : m \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору X, то існує номер m_0, такий, що множина B_{m_0} щільна в деякій відкритій непорожній в Y множині H, причому $H \subseteq V_{n_0}$. Візьмемо точку $x_0 \in U_{m_0} \cap A_{n_0}$ і точку $p = (x, y) \in U_{m_0} \times H$. Оскільки відображення f^x квазінеперервне в точці y, то існує точка $y' \in B_{m_0} \cap H$, що $|f^x(y) - f^x(y')| < \frac{\varepsilon}{4}$. Тоді

$$|f(p) - f(x_0, y_{x_0})| \leq |f(p) - f(x, y')| + |f(x, y') - f(x_0, y')| + |f(x_0, y') - f(x_0, y_{x_0})| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

А це суперечить тому, що $x_0 \in A_{n_0} \subseteq E_2$. Отже, наше припущення хибне. $\square$

4.4.5. Тепер ми покажемо істотність деяких умов на простори у вище згаданих теоремах.

Приклад 4.4.1. *Існує квазінеперервна за сукупністю змінних функція $f : \mathbb{R} \times l_\infty \to \mathbb{R}$, яка не є ні симетрично майже ледь неперервною, ні симетрично кліковою відносно x в деякій точці (x, y) для кожного $x \in \mathbb{R}$.*

Побудова прикладу. Простір l_∞ не має зліченної псевдобази. Нехай T – система всіх непорожніх підмножин натурального ряду і $e_\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ – характеристична функція множини $\tau \in T$. Як добре відомо, існує бієкція $\tau \to x_\tau$ множини T на числову пряму $\mathbb{R}$. Позначимо через V_τ кулю радіуса $\frac{1}{3}$ з центром в точці e_τ в банаховому просторі l_∞. Покладемо $U_\tau = [x_\tau, +\infty)$, $E = \bigcup\limits_{\tau \in T} (U_\tau \times V_\tau)$ і нехай $f : \mathbb{R} \times l_\infty \to \mathbb{R}$ – характеристична функція множини E. Оскільки $e_{\tau'} \neq e_{\tau''}$ для $\tau' \neq \tau''$, то множини $(U_{\tau'} \times V_{\tau'}) \cap (U_{\tau''} \times V_{\tau''}) = \varnothing$ для $\tau' \neq \tau''$. Тоді всі вертикальні перерізи $f^x : l_\infty \to \mathbb{R}$ і всі горизонтальні перерізи $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – квазінеперервні. Крім того, функція f є квазінеперервною (а значить кліковою і ледь неперервною) за сукупністю змінних. Однак, функція f не є ні симетрично майже квазінеперервною, ні симетрично майже ледь неперервною, а ні симетрично кліковою відносно x в точках (x_τ, τ). $\square$

Цей приклад показує істотність наявності у простора Y зліченної псевдобази в теоремах 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 і 4.4.5.

Запропонована конструкція подібна до відповідного прикладу з [321].

Приклад 4.4.2. *Нехай Y – пряма сума континуума числових прямих. Тоді існує квазінеперервне відображення $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, яке не є симетрично майже ледь неперервною відносно x, а також не є симетрично кліковою відносно x в деякій точці (x, y) для кожного $x \in \mathbb{R}$.*

Побудова прикладу. Будуємо відображення $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, як склейку функцій $g^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, де

$$g^t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{якщо } \ t \leq x, y \in \mathbb{R}, \\ 0, \ \text{в інших точках } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Функція f буде квазінеперервною за сукупністю змінних. Функції f_y квазінеперервні для всіх $y \in Y$, а функції f^x неперервні для всіх $x \in \mathbb{R}$. Однак на кожній вертикалі $\{x\} \times Y$ є точки, в яких функція f не є симетрично майже ледь неперервною відносно x, а також не є симетрично кліковою відносно x. $\square$

Цей приклад показує істотність наявності у простора Y зліченної псевдобази в теоремах 4.4.2-4.4.5 і зліченної бази в теоремі 4.4.1. Ідея такої конструкції запозичена з [255].

Тепер покажемо істотність умови другої аксіоми зліченності на простір Z в теоремах 4.4.1, 4.4.2 та 4.4.3.

Приклад 4.4.3. *Існує функція $f : \mathbb{R}^2 \to l_\infty$, яка неперервна відносно другої змінної, але f не сукупно майже ледь неперервною в жодній точці.*

Побудова прикладу. Нехай відображення $f : \mathbb{R}^2 \to l_\infty$ визначається так: $f(x_\tau, y) = e_\tau$, де $(x_\tau, y) \in \mathbb{R}$. Для кожного $x = x_\tau \in \mathbb{R}$ функція f^{x_τ} є сталою, а отже, неперервною. Однак функція f не є навіть сукупно майже ледь неперервною, бо для довільної точки (x_τ, y) прообраз кулі $B_{\frac{1}{3}}(f(x_\tau, y))$ радіуса $\frac{1}{3}$ є множина $x_\tau \times \mathbb{R}$, яка не є відкритою множиною в $\mathbb{R}^2$. $\square$

4.5. Достатні умови існування точок симетричної квазінеперервності та кліковості функцій двох змінних

4.5.1. Нагадаємо, що для топологічних просторів X, Y та Z відображення $f : X \times Y \to Z$ *задовольняє умову* (B^*), якщо для довільної десь щільної множини A в X і довільної відкритої непорожньої множини V в Y існують відкриті непорожні множини G в X та H в Y, такі, що $G \subseteq \overline{A}$, $H \subseteq V$ і $f(G \times H) \subseteq \overline{f((A \times V)}$. Для метричного простору Z функція $f : X \times Y \to Z$ *задовольняє умову* (C), якщо для кожного $\varepsilon > 0$, для довільної множини E другої категорії в X і довільної відкритої непорожньої множини V в Y існують множина E_1 десь щільна в X і функція $g : E_1 \to V$, такі що $E_1 \subseteq B$ і $\omega_f(Gr(g)) < \varepsilon$.

Нам потрібна буде наступна лема.

Лема 4.5.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір з метрикою $|\circ - \circ|$, V – відкрита непорожня множина в Y, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B^*) та (C), $E \subseteq \{x \in X : \omega_{f^x}(V) < \varepsilon\}$ і E – множина другої категорії в X. Тоді існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y, такі що $G \subseteq \overline{E}$, $H \subseteq V$ і $\omega_f(G \times H) \leq 3\varepsilon$.*

Доведення. Згідно з умовою (C) існують десь щільна множина E_1 в X і відображення $g : E_1 \to V$, такі що $\omega_f(Gr(g)) < \varepsilon$. Покажемо, що

$\omega_f(E_1 \times V)) \leq 3\varepsilon$. Візьмемо точки $p = (x, y)$, $q = (u, v) \in E_1 \times V$. Тоді

$$|f(p)-f(q)| \leq |f(p)-f(x, g(x))|+|f(x, g(x))-f(u, g(u))|+|f(u, g(u))-f(q)| <$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Отже, $\omega_f(E_1 \times V)) \leq 3\varepsilon$. Це означає, що множина $f(E_1 \times V)$ міститься в кожній замкнені кулі радіуса 3ε з центром в довільній точці $z \in f(E_1 \times V)$.

Згідно з умовою (B^*) існують відкриті непорожні множини G і H в просторах X і Y відповідно, такі що $G \subseteq \overline{E_1} \subseteq \overline{E}$, $H \subseteq V$ і $f(G \times H) \subseteq \overline{f(E_1 \times V)}$. Оскільки множина $f(E_1 \times V)$ міститься в кожній замкнені кулі радіуса 3ε з центром в довільній точці $z \in f(E_1 \times V)$, то і множина $\overline{f(E_1 \times V)}$ міститься у цій же замкненій кулі. Тоді множина $f(G \times H)$ теж міститься у кожній замкненій кулі радіуса 3ε з центром у кожній точці $z \in f((G \cap E_1) \times H)$. Це означає, що $\omega_f(G \times H) \leq 3\varepsilon$. □

Теорема 4.5.1. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B^*) та (C) і множина $X_A(f)$ залишкова в X. Тоді множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Припустимо, що множина $E_0 = X \setminus A^s_Y(f)$ другої категорії в X. Для кожної точки $x \in E_0$ існує точка $y_x \in Y$, така, що f не є симетрично кліковою відносно x в точці $p_x = (x, y_x)$. Тоді для кожної точки $x \in E_0$ існують число $\varepsilon_x > 0$, окіл $U(x)$ точки x в X і окіл $V(x)$ точки y_x в Y, такі, що $\omega_f(U \times V) \geq \varepsilon_x$ для довільного околу U точки x і довільної відкритої непорожньої множини V, таких, що $U \subseteq U(x)$ і $V \subseteq V(x)$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Позначимо через $E_1 = E_0 \cap X_A(f)$ множину другої категорії в X. Для номерів n та m розглянемо множини

$$E_{n,m} = \{x \in E_1 : \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon_x}{3}, V_n \subseteq V(x), \omega_{f^x}(V_n) < \frac{1}{m}\}.$$

Оскільки функція f^x – клікова для всіх $x \in E_1$ і $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y, то $E_1 = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} E_{n,m}$. Тоді існують номери n_0 і m_0, такі, що множина $E = E_{n_0,m_0} \subseteq E_1$ є множиною другої категорії в X. Згідно з лемою 4.5.1, існують відкриті непорожні множини G в X та H в Y, такі, що $G \subseteq \overline{E}$, $H \subseteq V_{n_0}$ і $\omega_f(G \times H) \leq \frac{3}{m_0}$. Тоді для довільної точки $x \in G \cap E \subseteq E_0$

маємо, що $U = G \cap U(x)$ – окіл точки x, $V = H \subseteq V_{n_0} \subseteq V(x)$ і $\omega_f(U \times V) \leq \frac{3}{m_0} < 3 \cdot \frac{\varepsilon_x}{3} = \varepsilon_x$. Одержали суперечність. Отже наше припущення не вірне. □

Теорема 4.5.2. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $\{a\} \times Y$ і f^a – квазінеперервна в точці b. Тоді функція f симетрично квазінеперервна відносно x в точці (a, b).*

Доведення. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і околи U та V точок a та b відповідно в просторах X та Y. Оскільки функція f^a квазінеперервна в точці b, то існує відкрита непорожня множина V_0 в Y, така, що $V_0 \subseteq V$ і $|f^a(y) - f^a(b)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для кожної точки $y \in V_0$. З симетричної квазінеперервності відносно x функції f в кожній точці множини $\{a\} \times V_0$ випливає, що існують відкритий окіл G точки a в X і відкрита непорожня множина H в Y, такі, що $G \subseteq U$, $H \subseteq V_0$ і $|f(p) - f(q)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для довільних точок $p, q \in G \times H$. Тоді для довільної точки $(x, y) \in G \times H$ маємо, що

$$|f(x, y) - f(a, b)| \leq |f(x, y) - f(a, y)| + |f(a, y) - f(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Це означає симетричну квазінеперервність відносно x функції f в точці (a, b). □

Теорема 4.5.3. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B^*) та (C) і множина $X_K(f)$ залишкова в X. Тоді множина $K^s_Y(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Оскільки кожна квазінеперервна функція є кліковою, то згідно з теоремою 4.5.1 множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X. Згідно з теоремою 4.5.2 маємо, що $K^s_Y(f) \supseteq A^s_Y(f) \cap X_K(f)$. Оскільки перетин двох залишкових множин є залишковою множиною, то множина $K^s_Y(f)$ залишкова в X. □

4.5.2. Тепер ми покажемо, що умова (C) завжди виконується для довільної функції зі значеннями у метризовному сепарабельному просторі і переформулюємо теореми 4.5.1 і 4.5.3 для функцій в таких просторах.

Лема 4.5.2. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний сепарабельний простір з метрикою $|\circ - \circ|$, $f : X \times Y \to Z$ – функція. Тоді f задовольняє умову (C).*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$, E – множина другої категорії в X і V – відкрита непорожня множина в Y. Розглянемо довільне відображення $g : E \to V$. Оскільки простір Z сепарабельний, то він містить всюди щільну підмножину $M = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для кожного номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in E : f(x, g(x)) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_n)\},$$

де $B_r(z) = \{u \in Z : |u - z| < r\}$ – відкрита куля з центром в точці z і радіуса r. Тоді

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Справді, якщо $x \in E$, то із всюди щільності множини M в просторі Z маємо, що $M \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x, g(x))) \neq \varnothing$. Тоді існує точка $z_m \in M \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x, g(x)))$ і тому $|z_m - f(x, g(x))| < \frac{\varepsilon}{2}$. Це означає, що $x \in A_m$.

Оскільки множина E другої категорії, то існує номер k, такий, що множина $E_1 = A_k$ десь щільна. Покладемо $g_1 = g|_{E_1}$. З включення $f(Gr(g_1)) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_k)$ маємо, що $\omega_f(Gr(g_1)) < \varepsilon$. □

Як наслідки з теорем 4.5.1 і 4.5.2 одержуємо два наступні результати.

Наслідок 4.5.1. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метризовний сепарабельний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B^*) та (C) і множина $X_A(f)$ залишкова в X. Тоді множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Доведення випливає з теореми 4.5.1 і леми 4.5.2. □

Наслідок 4.5.2. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метризовний сепарабельний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B^*) та (C) і множина $X_K(f)$ залишкова в X. Тоді множина $K^s_Y(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Доведення випливає з теореми 4.5.3 і леми 4.5.2. □

4.6. Необхідні умови існування точок симетричної кліковості та квазінеперервності функцій двох змінних

4.6.1. Нехай X та Y – топологічні простори, а Z - метричний простір. Нагадаємо, що функція $f : X \times Y \to Z$

- *задовольняє умову* (B), якщо для довільного $\varepsilon > 0$, довільних відкритих непорожніх множин U в X і V в Y та довільної множини $E \subseteq X$ щільної в U, для яких $\omega_f(E \times V) < \varepsilon$, існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y, такі, що $G \subseteq U$, $H \subseteq V$ і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$;

- *задовольняє умову* (C), якщо для кожного $\varepsilon > 0$, для довільної множини E другої категорії в X і довільної відкритої непорожньої множини V в Y існують множина E_1 десь щільна в X і функція $g : E_1 \to V$, такі що $E_1 \subseteq B$ і $\omega_f(Gr(g)) < \varepsilon$.

Твердження 4.6.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, $f : X \times Y \to Z$ – слабко горизонтально квазінеперервна функція. Тоді f задовольняє умови (B) і (C).*

Доведення. Спочатку перевіримо умову (B). Візьмемо $\varepsilon > 0$, відкриті непорожні множини U в X і V в Y та множину $E \subseteq X$, щільну в U, для яких $\omega_f(E \times V) < \varepsilon$. Оскільки на основі слабкої горизонтальної квазінеперервності $f(U \times V) \subseteq \overline{f(E \times V)}$, то

$$\omega_f(U \times V) = diam f(U \times V) \leq diam \overline{f(E \times V)} = diam f(E \times V) = \omega_f(E \times V) < \varepsilon.$$

Поклавши $G = U$ і $H = V$ одержимо, що умова (B) виконується.

Для доведення умови (C) ми використаємо теоремою 4.3.1. Розглянемо довільні $\varepsilon > 0$, множину E другої категорії в X і відкриту непорожню множину V в Y. Візьмемо відкриту непорожню множину $U \subseteq \overline{E}$ і довільну точку $(x, y) \in U \times V$. Тоді з теореми 4.3.1 випливає, що існують відкрита непорожня множина U_1 в X і відображення $g : U_1 \to V$, такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(Gr(g)) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f(x, y))$. Тоді покладемо $E_1 = E \cap U_1$ і $g_1 = g|_{E_1}$. Таким чином, $g_1 : E_1 \to V$, множина E_1 щільна в U_1, $E_1 \subseteq E$ і $\omega_f(Gr(g_1)) \leq \omega_f(Gr(g)) < \varepsilon$. $\square$

Наступний простий приклад показує, що обернений результат до твердження 4.6.1 не має місця.

Приклад 4.6.1. *Існує функція функція $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови (B) та (C), але не є слабко горизонтально квазінеперервною.*

Побудова прикладу. Розглянемо функцію $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що визначена формулою

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Оскільки простір $\mathbb{R}$ метризовний і сепарабельний, то згідно з лемою 4.5.2 функція f задовольняє умову (C). Візьмемо $\varepsilon > 0$, відкриті непорожні множини U і V в $\mathbb{R}$ та довільну множину $E \subseteq X$ щільну в U, такі, що $\omega_f(E \times V) < \varepsilon$. Якщо $0 \notin U$, то $f(x,y) = 0$ для всіх $(x,y) \in U \times V$ і для $G = U$, $H = V$ маємо, що $\omega_f(U \times V) = 0 < \varepsilon$. Якщо ж $0 \in U$, то $G = U \setminus \{0\}$ відкрита множина в $\mathbb{R}$, $G \subseteq U$, $f(x,y) = 0$ для всіх $(x,y) \in U \times V$ і для $H = V$ маємо, що $\omega_f(G \times V) = 0 < \varepsilon$. Отже, функція f задовольняє умову (B). □

4.6.2. Нам знадобиться наступна лема.

Лема 4.6.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір з метрикою $|\circ - \circ|$, $\varepsilon > 0$, V – відкрита непорожня множина в Y, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B) і (C), $E \subseteq \{x \in X : \omega_{f^x}(V) < \varepsilon\}$ і E – множина другої категорії в X. Тоді існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y, такі, що $G \subseteq \overline{E}$, $H \subseteq V$ і $\omega_f(G \times H) < 3\varepsilon$.*

Доведення. Згідно з умовою (C) існують десь щільна множина E_1 в X і відображення $g : E_1 \to V$, такі, що $E_1 \subseteq E$ і $\omega_f(Gr(g)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Покажемо, що $\omega_f(E_1 \times V) < \frac{8\varepsilon}{3}$. Візьмемо точки $p = (a,b)$ і $q = (u,v)$ з $E_1 \times V$. Тоді

$$|f(p) - f(q)| \leq |f(p) - f(a, g(a))| + |f(a, g(a)) - f(u, g(u))| + |f(u, g(u)) - f(q)| <$$

$$< \varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon = \frac{7\varepsilon}{3}.$$

Отже, $\omega_f(E_1 \times V)) \leq \frac{7\varepsilon}{3} < \frac{8\varepsilon}{3}$.

Покладемо $U = int\overline{E_1}$. Згідно з умовою (B) існують відкриті непорожні множини G в X та H в Y, такі, що $G \subseteq \overline{E_1} \subseteq \overline{E}$, $H \subseteq V$ і $\omega_f(G \times H) < \frac{8\varepsilon}{3} < 3\varepsilon$. □

Теорема 4.6.1. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B) і (C). Тоді множина*

$$R = \{x \in X : \{x\} \times A(f^x) \subseteq A^s(f)\}$$

залишкова в X.

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай $E = X \setminus R$ – множина другої категорії в X. Для кожної точки $x \in E$ існує точка $y_x \in Y$, така, що функція f^x клікова в точці y_x, але f не є симетрично кліковою відносно x в точці $p_x = (x, y_x)$. Тоді для кожної точки $x \in E$ існують число $\varepsilon_x > 0$, окіл $U(x)$ точки x в X і окіл $V(x)$ точки y_x в Y, такі, що для довільного околу U точки x і довільної відкритої непорожньої множини V, таких, що $U \subseteq U(x)$, $V \subseteq V(x)$ маємо $\omega_f(U \times V) \geq \varepsilon_x$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Для номерів n та m розглянемо множини

$$E_{m,n} = \{x \in E : \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon_x}{3}, V_n \subseteq V(x), \omega_{f^x}(V_n) < \frac{1}{m}\}.$$

Оскільки функція f^x клікова в точці y_x для всіх $x \in E$ і $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y, то $E = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} E_{m,n}$. З того, що множина E другої категорії випливає, що існують номери m_0 і n_0, такі, що множина $E_1 = E_{m_0,n_0} \subseteq E_0$ другої категорії в X. Згідно з лемою 4.6.1 існують відкрита непорожня множина G в X і відкрита непорожня множина H в Y, такі, що $G \subseteq \overline{E_1}$, $H \subseteq V_{n_0}$ і $\omega_f(G \times H) < 3 \cdot \frac{1}{m_0} = \frac{3}{m_0}$.

Тоді для довільної точки $x \in G \cap E_1 \subseteq E$, маємо, що $U = G \cap U(x)$ – окіл точки x, $V = H \subseteq V_{n_0} \subseteq V(x)$ і $\omega_f(U \times V) < \frac{3}{m_0} < \varepsilon_x$. Одержали суперечність. Отже, наше припущення не вірне. □

Як наслідок з теореми 5.6.1 одержуємо наступний результат.

Наслідок 4.6.1. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B) та (C) і множина $X_A(f)$ залишкова в X. Тоді множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X.*

4.6.3. Тепер встановимо необхідні умови того, що для функції $f : X \times Y \to Z$ існує залишкова в X множина A, така, що функція f симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.

Теорема 4.6.2. *Нехай X – берівський простір, Y – топологічний простір, Z – метричний простір і для функції $f : X \times Y \to Z$ множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X. Тоді функція f задовольняє умови (B) та (C) і множина $X_A(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Оскільки $A^s_Y(f) \subseteq X_A(f)$, то множина $X_A(f)$ залишкова в X.

Покажемо, що функція f задовольняє умову (C). Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$, довільну множину E другої категорії в X і довільну відкриту непорожню множину V в Y. Оскільки множина E другої категорії, то вона десь щільна в X. Нехай E щільна в деякій відкритій непорожній множині U в X, тобто $\overline{E} \supseteq U$. В берівському просторі кожна залишкова множина є всюди щільною, тому множина $A^s_Y(f)$ всюди щільна в X. Візьмемо довільні точки $a \in U \cap A^s_Y(f)$ і $b \in V$. Оскільки функція f симетрично клікова відносно x в точці (a, b), то існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y, такі, що $a \in G \subseteq U$, $H \subseteq V$ і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$. Покладемо $E_1 = E \cap G$. Оскільки E щільна в U, а отже, і в G, то $int\overline{E_1} \neq \varnothing$. Візьмемо довільну точку $y \in H$. Розглянемо відображення $g : E_1 \to V$, де $g(x) = y$ для всіх $x \in E_1$. Тоді $\omega_f(Gr(g)) \leq \omega_f(G \times H) < \varepsilon$.

Тепер покажемо, що функція f задовольняє властивість (B). Нехай $\varepsilon > 0$, U – відкрита непорожня множина в X, E – щільна в U множина і V – відкрита непорожня множина в Y, для яких $\omega_f(E \times V) < \varepsilon$. Оскільки множина $A^s_Y(f)$ всюди щільна в X, то існує точка $a \in U \cap A^s_Y(f)$. Візьмемо довільну точку $b \in V$. З симетричної кліковості функції f відносно x в точці (a, b) існують окіл G точки a в X і відкрита непорожня множина H в Y, такі, що $G \subseteq U \subseteq \overline{E}$, $H \subseteq V$ і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$. □

Наслідок 4.6.1 і теорема 5.6.2 дають такий результат.

Наслідок 4.6.2. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – функція. Для того, щоб множина $A^s_Y(f)$ була залишковою в X необхідно і досить, щоб функція f задовольняла умови (B) та (C) і множина $X_A(f)$ була залишкова в X.*

4.6.4. Встановимо взаємозв'язок між симетричною кліковістю та сукупною кліковістю функцій від двох змінних.

Теорема 4.6.3. *Нехай X – берівський простір, Y – топологічний простір, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – функція, для якої множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X. Тоді f клікова.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $p = (x, y) \in X \times Y$ і $\varepsilon > 0$. Нехай U і V – відкриті околи відповідно точок x і y в просторах X і Y відповідно. Оскільки простір X берівський, то $A^s_Y(f) \cap U \neq \varnothing$. Нехай $a \in A^s_Y(f) \cap U$. З відкритості множини U випливає, що U є околом і точки a. Оскільки функція f симетрично квазінеперервна відносно x в точці (a, y), то існують окіл G точки a в X і відкрита непорожня множина H в Y, такі, що $G \subseteq U$, $H \subseteq V$ і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$. Це означає, що функція f клікова в точці p. □

Наслідок 4.6.3. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір. Тоді для того щоб функція $f : X \times Y \to Z$ була кліковою необхідно і досить, щоб множина $A^s_Y(f)$ була залишкова в X.*

Доведення. Необхідність випливає з теореми 4.4.4, а достатність з теореми 5.6.3. □

З наслідків 4.6.3 і 4.6.2 одержуємо такий результат.

Наслідок 4.6.4. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – функція. Тоді для того, щоб функція f була кліковою необхідно і досить, щоб функція f задовольняла умови (B) та (C) і множина $X_A(f)$ була залишкова в X.*

4.6.5. Тепер перейдемо до характеризації залишковості множини $K^s_Y(f)$.

Теорема 4.6.4. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір з метрикою $|\circ - \circ|$, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B) і (C). Тоді множина*

$$R = \{x \in X : \{x\} \times K(f^x) \subseteq K^s(f)\}$$

залишкова в X.

Доведення. Доведення аналогічне доведенню теореми 5.6.1. Будемо міркувати від супротивного. Нехай $E = X \setminus R$ – множина другої категорії в X. Для кожної точки $x \in E$ існує точка $y_x \in Y$, така, що функція f^x

квазінеперервна в точці y_x, але f не є симетрично квазінеперервна відносно x в точці $p_x = (x, y_x)$. Тоді для кожної точки $x \in E$ існують число $\varepsilon_x > 0$, окіл $U(x)$ точки x в X і окіл $V(x)$ точки y_x в Y, такі, що для довільного околу U точки x і довільної відкритої непорожньої множини V, таких, що $U \subseteq U(x)$, $V \subseteq V(x)$ маємо $\omega_f(\{p_x\} \cup (U \times V)) \geq \varepsilon_x$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Для номерів n та m розглянемо множини

$$E_{m,n} = \{x \in E : \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon_x}{4}, V_n \subseteq V(x), \omega_{f^x}(\{y_x\} \cup V_n) < \frac{1}{m}\}.$$

Оскільки функція f^x квазінеперервна в точці y_x для всіх $x \in E$ і $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y, то $E = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} E_{m,n}$. З того, що множина E другої категорії випливає, що існують номери m_0 і n_0, такі, що множина $E_1 = E_{m_0,n_0} \subseteq E_0$ другої категорії в X. Згідно з лемою 4.6.1 існують відкрита непорожня множина G в X і відкрита непорожня множина H в Y, такі, що $G \subseteq \overline{E_1}$, $H \subseteq V_{n_0}$ і $\omega_f(G \times H) < 3 \cdot \frac{1}{m_0} = \frac{3}{m_0}$.

Оскільки $G \cap E_1 \neq \varnothing$, то існує точка $x \in G \cap E_1 \subseteq E$, для якої $U = G \cap U(x)$ – окіл точки x, $V = H \subseteq V_{n_0} \subseteq V(x)$ і $\omega_f(U \times V) < \frac{3}{m_0}$.

Покажемо, що $\omega_f(\{p_x\} \cup (U \times V)) \leq \frac{4}{m_0}$. Візьмемо довільну точку $p = (u, v) \in U \times V$. Тоді

$$|f(p) - f(p_x)| \leq |f(p) - f(x, v)| + |f(x, v) - f(p_x)| < \frac{3}{m_0} + \frac{1}{m_0} = \frac{4}{m_0}.$$

Таким чином, $\omega_f(\{p_x\} \cup (U \times V)) \leq \frac{4}{m_0} < 4 \cdot \frac{\varepsilon_x}{4} = \varepsilon_x$. З іншого боку, $x \in E$, а тому $\omega_f(\{p_x\} \cup (U \times V)) \geq \varepsilon_x$. Одержали суперечність. Отже, наше припущення не вірне. □

Теорема 4.6.5. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір з метрикою $|\circ - \circ|$, $f : X \times Y \to Z$ – функція, для якої множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X і множина $X_K(f)$ залишкова в X. Тоді множина $K^s_Y(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Оскільки множини $A^s_Y(f)$ і $X_K(f)$ залишкові в X, то множина $A = A^s_Y(f) \cap X_K(f)$ теж залишкова в X. Отже, функція f симетрично клікова відносно x у кожній точці множини $A \times Y$ і функція f^x квазінеперервна для кожного $x \in A$. Тоді з теореми 4.5.2 випливає, що функція f симетрично квазінеперервна відносно x в кожній точці множини $A \times Y$. Оскільки $A \subseteq K^s_Y(f)$, то і множина $K^s_Y(f)$ залишкова в X. □

Теорема 4.6.6. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B) та (C) і множина $X_K(f)$ залишкова в X. Тоді множина $K^s_Y(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Оскільки з квазінеперервності випливає кліковість, то функція f^x клікова для всіх $x \in X_K(f)$. З наслідку 4.6.1 випливає, що множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X. Тоді згідно з теоремою 5.6.5 множина $K^s_Y(f)$ залишкова в X. □

Наслідок 4.6.5. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – функція. Тоді для того щоб множина $K^s_Y(f)$ була залишкова в X необхідно і досить, щоб функція f задовольняла умови (B) та (C) і множина $X_K(f)$ була залишковою в X.*

Доведення. Достатність випливає з теореми 5.6.6. Доведемо необхідність. Зауважимо, що оскільки $K^s_Y(f) \subseteq A^s_Y(f)$, то множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X. Тоді з теореми 5.6.2 випливає, що функція f задовольняє умови (B) та (C). Крім того, $K^s_Y(f) \subseteq X_K(f)$ і тому множина $X_K(f)$ залишкова в X. □

4.7. Сукупні властивості відображень, які пов'язані із замкненістю графіка

4.7.1. Аналогічно до того, як в підрозділі 4.2 вивчалися сукупні властивості відображень від двох змінних, які монотонні відносно першої змінної, можна досліджувати сукупні властивості відображень, які мають замкнений графік відносно однієї із змінних.

Спочатку ми встановимо кілька допоміжних тверджень.

Лема 4.7.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, K – компактна підмножина простору Y, U – відкрита непорожня множина в X, A – підмножина простору X, яка щільна в U, $f : X \to Y$ – відображення, яке має замкнений графік і $f(A) \subseteq K$. Тоді $f(U) \subseteq K$.*

Доведення. Добре відомо [85], що якщо відображення має замкнений графік, то прообраз компактної множини є замкненою множиною. Тому множина

$f^{-1}(K)$ є замкненою. Тоді

$$U \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(K)} = f^{-1}(K).$$

Таким чином, $f(U) \subseteq K$. □

Леми 4.7.2 і 4.7.3 фігурують в [156, 7, 5] для певних типів просторів X і Y.

Лема 4.7.2. *Нехай X – топологічний простір, Y – локально компактний простір і відображення $f : X \to Y$ має замкнений графік. Тоді множина $D(f)$ точок розриву функції f є замкненою.*

Доведення. Досить встановити, що множина $C(f)$ точок неперервності відображення f є відкритою. Візьмемо довільну точку $x_0 \in C(f)$ і компактний окіл V точки $f(x_0)$. З неперервності відображення f в точці x_0 випливає, що існує відкритий окіл U точки x_0, такий, що $f(U) \subseteq V$. Розглянемо звуження $g = f|_U$ відображення f на множину U. Тоді відображення g діє з U в компактну множину V і має замкнений графік. Отже, відображення g неперервне [73, с. 228]. Оскільки множина U відкрита, то відображення f неперервне на множині U. Таким чином, $U \subseteq C(f)$ і тому точка x_0 є внутрішньою точкою множини $C(f)$. Це означає, що множина $C(f)$ є відкритою. □

Лема 4.7.3. *Нехай X – берівський простір, Y – сепарабельний метризовний локально компактний простір і відображення $f : X \to Y$ має замкнений графік. Тоді $D(f)$ є замкненою ніде не щільною множиною.*

Доведення. Згідно з лемою 4.7.2 множина $D(f)$ є замкненою. Припустимо, що множина $D(f)$ десь щільна. Оскільки множина $D(f)$ замкнена і за припущенням десь щільна, то $intD(f) \neq \varnothing$. З беровості простору X випливає, що множина $D(f)$ другої категорії.

Оскільки простір Y локально компактний, то для кожної точки $x \in D(f)$ існує компактний окіл $V(x)$ точки $f(x)$ в Y, такий, що для довільного околу U точки x маємо, що $f(U) \not\subseteq V(x)$. Сепарабельний метризовний простір має зліченну базу. Нехай $\{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ – база простору Y. Розглянемо множини

$$E_m = \{x \in D(f) : f(x) \in V_m \subseteq V(x)\}.$$

Зрозуміло, що $D(f) = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} E_m$. Оскільки множина $D(f)$ другої категорії, то існує номер m_0, такий, що множина E_{m_0} десь щільна. Візьмемо довільну точку $x_0 \in int\overline{E_{m_0}} \cap E_{m_0}$. Зауважимо, що $f(E_{m_0}) \subseteq V(x_0)$ і множина $V(x_0)$ компактна. Згідно з лемою 4.7.1 маємо, що $f(int\overline{E_{m_0}}) \subseteq V(x_0)$. Оскільки $x_0 \in int\overline{E_{m_0}}$, то множина $U = int\overline{E_{m_0}}$ є околом точки x_0 і $f(U) \subseteq V(x_0)$. Одержали суперечність. $\square$

Добре відомим є наступний результат.

Лема 4.7.4. *Якщо U – відкрита непорожня підмножина в $\mathbb{R}$, функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має замкнений графік і обмежена на U, то f неперервна на U.*

Лема 4.7.5. *Нехай X – топологічний простір, функція $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вертикально та горизонтально квазінеперервна і для всіх x з деякої залишкової множини M в X функція $f^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має границі зліва та справа в кожній точці. Тоді множина*

$$K_y(f) = \{x \in X : f^x - \text{ квазінеперервна в точці } y\}$$

залишкова в X для кожної точки $y \in \mathbb{R}$.

Доведення. Будем міркувати від супротивного. Нехай існує точка $y \in Y$, така, що $E = X \setminus K_y(f)$ – множина другої категорії в X. Зрозуміло, що множина $E_0 = E \cap M$ теж другої категорії в X. Тоді для кожної точки $x \in E_0$ функція f^x має границі зліва та справа в кожній точці і не є квазінеперервною в точці y. Таким чином, для кожної точки $x \in E_0$ існують окіл $W(x)$ точки $f(x, y)$ і окіл $V(x)$ точки y, такі, що $f(x, v) \in \mathbb{R} \setminus W(x)$ для $v \in V(x) \setminus \{y\}$. Нехай $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору $\mathbb{R}$ і $\{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ – база відкритих околів точки y. Для номерів m і n розглянемо множини

$$A_{m,n} = \{x \in E_0 : f(x, y) \in W_n \subseteq W(x), y \in V_m \subseteq V(x)\}.$$

За означенням околів $V(x)$ і $W(x)$ випливає, що $f(A_{m,n} \times (V_m \setminus \{y\})) \subseteq \mathbb{R} \setminus W_n$ для довільних номерів m і n. Легко бачити, що $\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n} = E_0$. Оскільки множина E_0 другої категорії, то існують номери m_0 і n_0, такі, що множина A_{m_0,n_0} десь щільна. Нехай множина A_{m_0,n_0} щільна у відкритій непорожній множині U_0, тобто $U_0 \subseteq \overline{A_{m_0,n_0}}$. Зауважимо, що множина $V_{m_0} \setminus \{y\}$ відкрита в $\mathbb{R}$. Тоді згідно з лемою 4.1.1 маємо, що

$$f(U_0 \times (V_{m_0} \setminus \{y\})) \subseteq \overline{f(A_{m_0,n_0} \times (V_{m_0} \setminus \{y\}))} \subseteq \overline{\mathbb{R} \setminus W_{n_0}} = \mathbb{R} \setminus W_{n_0}.$$

Тепер візьмемо довільну точку $x_0 \in U_0$. З вертикальної квазінеперервності випливає, що існують точка $a \in U_0$ і відкрита непорожня множина H в $\mathbb{R}$, такі, що $H \subseteq V_{m_0}$ і $f(\{a\} \times H) \subseteq W_{n_0}$. Зрозуміло, що існує точка $b \in H \cap (V_{m_0} \setminus \{y\})$. Тоді з одного боку $f(a,b) \in W_{n_0}$, бо $(a,b) \in \{a\} \times H$, а з іншого боку $f(a,b) \in \mathbb{R} \setminus W_{n_0}$, бо $(a,b) \in U_0 \times (V_{m_0} \setminus \{y\})$. Одержали суперечність. $\square$

4.7.2. Спочатку розглянемо результати про сукупну неперервність відображень, які мають замкнений графік відносно першої змінної.

Теорема 4.7.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, B – множина зліченного типу в Y, Z – гаусдорфовий локально компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, відображення $f : X \times Y \to Z$ таке, що f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$. Тоді множина*

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B) \subseteq C(f)\}$$

є залишкова в X.

Доведення. Припустимо, що доповнення

$$E = X \setminus R = \{x \in X : \exists y_x \in (C(f^x) \cap B) \,|\, p_x = (x, y_x) \in D(f)\}$$

є множиною другої категорії в X. Для кожної точки $x \in E$ існує окіл $W(x)$ точки $z_x = f(p_x)$, такий, що для довільних околів U точки x в X та V точки y_x в Y маємо $f(U \times V) \not\subseteq W(x)$.

Нехай $\mathcal{V} = \{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ – зліченна база для B, а $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Z. Оскільки кожний гаусдорфовий локально компактний простір є регулярним (навіть тихоновським) [322, с. 231] і $\mathcal{W}$ – база простору Z, то для кожної точки $x \in E$ існує номер n, такий, що $z_x \in \overline{W_n} \subseteq W(x)$, причому множина $\overline{W_n}$ компактна. Розглянемо множини

$$E_{m,n} = \{x \in E : z_x \in \overline{W_n} \subseteq W(x), y_x \in V_m \text{ і } f^x(V_m) \subseteq \overline{W_n}\}.$$

З неперервності функції f^x в точці y_x для всіх $x \in E$ і того, що $\mathcal{V}$ – база для B маємо, що $E = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} E_{n,m}$. Оскільки множина E другої категорії, то існують номери n_0 і m_0, такі, що множина $E_1 = E_{n_0,m_0} \subseteq E$ десь щільна в X. Нехай U_0 – відкрита непорожня множина в X, така, що $U_0 \subseteq \overline{E_1}$. Оскільки $f(E_1 \times V_{m_0}) \subseteq \overline{W_{n_0}}$, тобто $f_y(E_1) \subseteq \overline{W_{n_0}}$ для кожного $y \in V_{m_0}$, то з леми 4.7.1

випливає, що $f_y(U_0) \subseteq \overline{W_{n_0}}$ для кожного $y \in V_{m_0}$. Тому $f(U_0 \times V_{m_0}) \subseteq \overline{W_{n_0}}$. Оскільки $U_0 \subseteq \overline{E_1}$, то існує точка $x_0 \in U_0 \cap E_1$. Множина $U_0 \times V_{m_0}$ є околом точки p_{x_0} і $f(U_0 \times V_{m_0}) \subseteq \overline{W_{n_0}} \subseteq W(x_0)$. З іншого боку, $x_0 \in E$, U_0 – окіл x_0, а V_{m_0} – окіл y_{x_0}, отже, $f(U_0 \times V_{m_0}) \not\subseteq W(x_0)$. Одержана суперечність показує, що наше припущення не вірне. □

Теорема 4.7.2. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – гаусдорфовий локально компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, відображення $f : X \times Y \to Z$ таке, що розріз f^x неперервний для кожного x з деякої залишкової множини M в X і розріз f_y має замкнений графік для кожного $y \in Y$. Тоді*

(1) якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X;

(2) якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ залишкова в X;

Доведення. За теоремою 4.7.1 для множини зліченного типу B множина

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B) \subseteq C(f)\}$$

є залишковою в X. Оскільки за умовою множина $M = \{x \in X : C(f^x) = Y\}$ залишкова в X, то $E = M \cap R$ теж залишкова множина в X.

Нехай у випадку (1) простір Y задовольняє першу аксіому зліченності. Тоді для довільної точки $y \in Y$ множина $B = \{y\}$ є зліченного типу. Таким чином, для довільної точки $y \in Y$ маємо, що

$$E = M \cap \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B) \subseteq C(f)\} =$$

$$= \{x \in X : \{x\} \times (Y \cap \{y\}) \subseteq C(f)\} = C_y(f).$$

Отже, множина $C_y(f)$залишкова для кожного $y \in Y$.

Для (2) простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і тому множина $B = Y$ є зліченного типу. Оскільки

$$E = M \cap \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B) \subseteq C(f)\} =$$

$$= \{x \in X : \{x\} \times (Y \cap Y) \subseteq C(f)\} = C_Y(f),$$

то множина $C_Y(f)$ залишкова в X. □

4.7.3. Далі перейдемо до вивчення множини $K^s_Y(f)$ відображення f, які мають замкнений графік відносно першої змінної.

Теорема 4.7.3. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має злічену псевдобазу, Z – гаусдорфовий локально компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, відображення $f : X \times Y \to Z$ таке, що f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$. Тоді множина*

$$R = \{x \in X : \{x\} \times K(f^x) \subseteq K^s(f)\}$$

залишкова в X.

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Тоді множина

$$E = X \setminus R = \{x \in X : \exists y_x \in K(f^x) \,|\, p_x = (x, y_x) \notin K^s(f)\}$$

другої категорії в X. З означенням множин E випливає, що для кожної точки $x \in E$ існують околи $U(x)$, $V(x)$ і $W(x)$ відповідно точок x в X, y_x в Y і $z_x = f(p_x)$ в Z, такі, що для кожного околу U точки x в X і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$, маємо, що $f(U \times V) \not\subseteq W(x)$.

Нехай $\{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ – зліченна псевдобаза простору Y, причому $V_m \neq \varnothing$ для кожного m, а $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Z. Для кожної точки $x \in E$ існує номер n, такий, що $z_x \in W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq W(x)$, причому множина $\overline{W_n}$ компактна. Розглянемо множини

$$E_{m,n} = \{x \in E : z_x \in W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq W(x), V_m \subseteq V(x) \text{ і } f^x(V_m) \subseteq W_n\}.$$

З квазінеперервності функції f^x у точці y_x для всіх $x \in E$ легко вивести, що $E = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} E_{n,m}$. Оскільки множина E другої категорії, то існують такі номери n_0 і m_0, що множина $E_1 = E_{n_0,m_0} \subseteq E$ десь щільна в X. Нехай U_0 – відкрита непорожня множина в X, така, що $U_0 \subseteq \overline{E_1}$. Оскільки $f_y(E_1) \subseteq \overline{W_{n_0}}$ для кожного $y \in V_{m_0}$, то з леми 4.7.1 випливає, що $f_y(U_0) \subseteq \overline{W_{n_0}}$ для кожного $y \in V_{m_0}$. Тому $f(U_0 \times V_{m_0}) \subseteq \overline{W_{n_0}}$. Оскільки $U_0 \subseteq \overline{E_1}$, то існує точка $x_0 \in U_0 \cap E_1$. Множина U_0 є околом точки x_0, $V_{m_0} \subseteq V(x_0)$ і

$$f((U_0 \cap U(x_0)) \times V_{m_0}) \subseteq f(U_0 \times V_{m_0}) \subseteq \overline{W_{n_0}} \subseteq W(x_0).$$

З іншого боку, $x_0 \in E$. Одержана суперечність показує, що припущення не вірне. $\square$

Теорема 4.7.4. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – гаусдорфовий локально компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, відображення $f : X \times Y \to Z$ таке, що множина $X_K(f)$ залишкова в X і f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$. Тоді множина $K^s_Y(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Згідно з теоремою 4.7.3 множина

$$R = \{x \in X : \{x\} \times K(f^x) \subseteq K^s(f)\}$$

залишкова в X. Тоді множина $R \cap X_K(f)$ теж залишкова в X. Оскільки $R \cap X_K(f) \subseteq K^s_Y(f)$, то множина $K^s_Y(f)$ залишкова в X. □

Теорема 4.7.5. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – регулярний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне і для кожного $y \in Y$ множина $K_y(f)$ залишкова в X. Тоді функція f є квазінеперервною за сукупністю змінних.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, замкнений окіл W точки $z_0 = f(p_0)$ в Z, окіл U точки x_0 в X і окіл V точки y_0 в Y. З горизонтальної квазінеперервності відображення f в точці p_0 випливає, що існують відкрита непорожня множина G в X і точка $b \in V$, такі, що $G \subseteq U$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq intW$. Оскільки простір X берівський, то множина G другої категорії. Тому множина $A = G \cap K_b(f)$ теж другої категорії в X. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$A_n = \{x \in A : V_n \subseteq V, f^x(V_n) \subseteq W\}.$$

Оскільки множина A другої категорії в X, $f(A \times \{b\}) \subseteq intW$ і для кожної точки $x \in A$ відображення f^x квазінеперервне в точці b, то існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} десь щільна. Нехай множина A_{n_0} щільна у відкритій непорожній множині G_0 в X, тобто, $G_0 \subseteq \overline{A_{n_0}}$. З леми 4.1.1 випливає, що

$$f(G_0 \times V_{n_0}) \subseteq \overline{f(A_{n_0} \times V_{n_0})} \subseteq \overline{W} = W.$$

Оскільки $G_0 \times V_{n_0} \subseteq U \times V$, то відображення f квазінеперервне в точці p_0. □

Теорема 4.7.6. *Нехай X – берівський простір, функція $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ горизонтально та вертикально квазінеперервна і для всіх x з деякої залишкової множини в X функція f^x має границі зліва та справа в кожній точці. Тоді функція f є квазінеперервною за сукупністю змінних.*

Доведення. Це безпосередній наслідок теореми 4.7.5 і леми 4.7.5. □

Зауважимо, що безпосереднім наслідком теореми 4.7.6 є теорема 4.2.5.

4.7.4. В [109] було одержано такий результат: якщо простори X і Y задовольняють другу аксіому зліченності, X – берівський простір, для функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ всі x-розрізи f^x клікові, а всі y-розрізи f_y мають замкнений графік, то функція f клікова за сукупністю змінних. Тут ми перенесемо цей результат на випадок функцій зі значеннями в метричних просторах, уточнимо його і використаємо при цьому інший метод.

Теорема 4.7.7. *Нехай X і Y – топологічні простори і Y має злічену псевдобазу, Z – сепарабельний метричний простір з метрикою d, в якому кожна обмежена множина має компактне замикання, функція $f : X \times Y \to Z$ така, що f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$. Тоді множина*

$$R = \{x \in X : \{x\} \times A(f^x) \subseteq A^s(f)\}$$

залишкова в X.

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай доповнення

$$E = X \setminus R = \{x \in X : \exists y_x \in A(f^x) \,|\, p_x = (x, y_x) \notin A^s(f)\} -$$

це множина другої категорії в X. Тоді для кожної точки $x \in E$ існують околи $U(x)$ і $V(x)$ відповідно точок x в X і y_x в Y та число $\varepsilon_x > 0$, такі, що $\omega_f(U \times V) \geq \varepsilon_x$ для кожного околу U точки x в X і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$.

Нехай $\{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ – зліченна псевдобаза простору Y. Розглянемо множини

$$E_{m,n} = \{x \in E : V_m \subseteq V(x), \varepsilon_x > \frac{1}{n}, \omega_{f^x}(V_m) < \frac{1}{8n}\}.$$

З кліковості функції f^x в точці y_x для всіх $x \in E$ маємо, що $E = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} E_{n,m}$. Оскільки множина E другої категорії, то існують номери n_0 і m_0, такі, що множина $E_1 = E_{n_0,m_0} \subseteq E$ другої категорії в X.

Розглянемо довільну точку $b \in V = V_{m_0}$. Оскільки простір Z сепарабельний, то існує не більш ніж зліченна всюди щільна множина $\{z_1, z_2, ..., z_k, ...\}$ в Z. Зрозуміло, що $Z = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{16n_0}}(z_k)$. Оскільки

$f(E_1 \times \{b\}) \subseteq Z$ і множина E_1 другої категорії в X, то існують десь щільна підмножина $E_2 \subseteq E_1$ та номер k_0, такі, що $f(E_2 \times \{b\}) \subseteq B_{\frac{1}{16n_0}}(z_{k_0})$. Тоді $d(f(u_1, b), f(u_2, b)) < \frac{1}{8n_0}$ для всіх $u_1, u_2 \in E_2$.

Покажемо, що $\omega_f(E_2 \times V) \leq \frac{3}{8n_0}$. Візьмемо довільні точки $p_i = (u_i, v_i) \in E_2 \times V$ для $i = 1, 2$. Тоді

$$d(f(p_1), f(p_2)) \leq d(f(p_1), f(u_1, b)) + d(f(u_1, b), f(u_2, b)) +$$
$$+ d(f(u_2, b), f(p_2)) < \frac{1}{8n_0} + \frac{1}{8n_0} + \frac{1}{8n_0} = \frac{3}{8n_0}.$$

Отже, $\omega_f(E_2 \times V) \leq \frac{3}{8n_0} < \frac{1}{2n_0}$. Тоді множина $f(E_2 \times V)$ міститься в деякій кулі $B = B_{\frac{1}{2n_0}}(z_0)$. Нехай U – відкрита непорожня множина в X, така, що $U \subseteq \overline{E_2}$.

За умовою замикання $\overline{B}$ є компактною множиною. Візьмемо $y \in V$. Оскільки f_y має замкнений графік, $U \subseteq \overline{E_2}$, множина $\overline{B}$ компактна і $f_y(E_2) \subseteq B \subseteq \overline{B}$, то за лемою 4.7.1 $f_y(U) \subseteq \overline{B}$. Тому $f(U \times V) \subseteq \overline{B}$. Але $\overline{B} \subseteq B_{\frac{1}{2n_0}}[z_0]$, отже, $\omega_f(U \times V) \leq \frac{1}{n_0}$.

З умови $U \subseteq \overline{E_2}$ випливає, що існує точка $a \in U \cap E_2$, причому множина U є околом точки a. Оскільки $a \in E_1 = E_{m_0,n_0}$ і $V = V_{m_0}$, то $V \subseteq V(a)$ і $\varepsilon_a > \frac{1}{n_0}$. В такому разі $\omega_f(U \times V) \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon_a$. Але за побудовою для $\tilde{U} = U \cap U(a)$

$$\omega_f(U \times V) \geq \omega_f(\tilde{U} \times V) \geq \varepsilon_a,$$

адже $\tilde{U}$ – це окіл точки a, V – відкрита непорожня множина і $\tilde{U} \times V \subseteq U(a) \times V(a)$. Одержана суперечність показує, що наше припущення не вірне. □

Як наслідки одержуємо наступні два результати.

Теорема 4.7.8. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – сепарабельний метричний, в якому кожна обмежена множина має компактне замикання, функція $f : X \times Y \to Z$ така, що множина $X_A(f)$ залишкова в X і f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$. Тоді множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X.*

Теорема 4.7.9. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – сепарабельний метричний, в якому кожна обмежена множина має компактне замикання, функція $f : X \times Y \to Z$ така, що*

множина $X_A(f)$ залишкова в X і f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$. Тоді функція f клікова.

Доведення. З теореми 4.7.8 випливає, що множина $A^s_Y(f)$ залишкова в X. Оскільки простір X берівський, то множина $A^s_Y(f)$ всюди щільна в X, а тому множина $A^s(f)$, а отже, і множина $A(f)$ точок кліковості функції f, всюди щільні в $X \times Y$. Множина точок кліковості будь-якої функції є замкненою [169]. Тоді функція f клікова в кожній точці з $X \times Y$. □

4.8. Нарізні та сукупні властивості деяких аналогів кліковості

4.8.1. Покладемо $C^x(f) = \{y \in Y : (x, y) \in C(f)\}$.

Теорема 4.8.1. *Нехай X – топологічний простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір з метрикою $|\circ - \circ|$, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B) та (C) і множина $X_A(f)$ залишкова в X. Тоді множина $A = \{x \in X : C^x(f) -$ залишкова в $Y\}$ залишкова в X.*

Доведення. З наслідку 4.6.1 випливає, що існує залишкова в X множина A, така, що функція f симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$. Покажемо, що для кожної точки $x \in A$ множина $C^x(f)$ залишкова в Y.

Розглянемо довільну точку $x_0 \in A$. Припустимо, що множина $B = Y \setminus C^{x_0}(f)$ другої категорії в Y. Для кожної точки $y \in B$ функція f розривна в точці (x_0, y). Тоді для $y \in B$ існує $\varepsilon_y > 0$ таке, що $\omega_f(x_0, y) \geq \varepsilon_y$. Легко зрозуміти, що існує таке $\varepsilon > 0$ та десь щільна множина $B_1 \subseteq B$, що $\omega_f(x_0, y) \geq \varepsilon$ для всіх точок $y \in B_1$. Покладемо $V = int\overline{B_1}$. Оскільки множина B_1 десь щільна в Y, то $V \neq \varnothing$. Візьмемо довільну точку $p_0 \in \{x_0\} \times V$. Оскільки функція f симетрично клікова відносно x в точці p_0, то існують відкритий окіл G точки x_0 і відкрита непорожня множина H в Y, такі, що $H \subseteq V$ і $|f(p) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для кожної точки $p \in G \times H$. Зрозуміло, що $\omega_f(G \times H) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Візьмемо довільну точку $y_0 \in H \cap B_1$. Оскільки множина $G \times H$ є околом точки (x_0, y_0) і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$, то $\omega_f(x_0, y_0) \leq \omega_f(G \times H) < \varepsilon$. Одержали суперечність. Отже, для кожної точки x із залишкової множини A множина $C^x(f)$ залишкова в Y. □

Наслідок 4.8.1. *Нехай X – берівський простір, Y – берівський простір, який має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови (B) та (C) і $M = \{x \in X : \overline{C(f^x)} = Y\}$ – залишкова множина в X. Тоді функція f точково розривна.*

Доведення. Для кожного $x \in M$ функція f^x клікова. Тому $M \subseteq X_A(f)$. Тоді множина $X_A(f)$ залишкова в X. Згідно з теоремою 4.8.1 множина $A = \{x \in X : \overline{C^x(f)} = Y\}$ залишкова в X. Оскільки залишкова множина у берівському просторі є всюди щільною, то множина $A = \{x \in X : \overline{C^x(f)} = Y\}$ всюди щільна в X. Крім того,

$$\bigcup_{x \in A} (\{x\} \times C^x(f)) \subseteq C(f).$$

Тому $\overline{\bigcup\limits_{x \in A} (\{x\} \times C^x(f))} = X \times Y$ і $\overline{C(f)} = X \times Y$. □

Теорема 4.8.2. *Нехай X – топологічний простір, Y – берівський простір, який має зліченну псевдобазу, Z – метричний простір і $f : X \times Y \to Z$ – точково розривна функція. Тоді функція f задовольняє умови (B) та (C) і $M = \{x \in X : \overline{C(f^x)} = Y\}$ – залишкова множина в X.*

Доведення. Зауважимо, що оскільки функція f точково розривна, то вона є кліковою. З наслідку 4.6.4 випливає, що функція f задовольняє умови (B) та (C) і множина $X_A(f)$ залишкова в X. Оскільки клікова функція, яка визначена на берівському просторі є точково розривною, то для кожної точки $x \in X_A(f)$ функція f^x є точково розривною, тобто $\overline{C(f^x)} = Y$. Через залишковість множини $X_A(f)$ множина M теж залишкова, бо $X_A(f) \subseteq M$. □

З наслідку 4.8.1 та теореми 4.8.2 випливає така характеризація точкової розривності функції від двох змінних.

Наслідок 4.8.2. *Нехай X та Y – берівські простори, причому простір Y має зліченну псевдобазу і Z – метричний простір. Функція $f : X \times Y \to Z$ точково розривна тоді і тільки тоді, коли функція f задовольняє умови (B) та (C) і $\{x \in X : \overline{C(f^x)} = Y\}$ – залишкова множина в X.*

4.8.2. Нагадаємо, що відображення $f : X \times Y \to Z$ *задовольняє умову* (B^*), якщо для довільних відкритих непорожніх множин U і V відповідно в X і Y

та довільної множини A в X, для якої $U \subseteq \overline{A}$, існують відкриті непорожні множини G в X та H в Y, такі, що $G \times H \subseteq U \times V$ і $f(G \times H) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.

Зауважимо, що умову (B^*) зокрема задовольняють горизонтально квазінеперервні відображення та псевдоквазінеперервні відображення. Для метричного простору Z, якщо функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умову (B^*), то вона задовольняє умову (B).

Нехай $\mathcal{A}$ – деяка система десь щільних множина в $X \times Y$. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *$\mathcal{A}$-псевдоквазінеперервним*, якщо для довільної множини $A \in \mathcal{A}$ існують відкриті непорожні множини G в X та H в Y, такі, що $G \times H \subseteq \overline{A}$ і $f(G \times H) \subseteq \overline{f(A)}$. Якщо $\mathcal{A} = \{A \subseteq X \times Y : int\overline{A} \neq \varnothing\}$, то $\mathcal{A}$-псевдоквазінеперервність означає звичайну псевдоквазінеперервність відображення від двох змінних.

Нехай M – множина другої категорії в X і V – відкрита непорожня множина в Y. Нехай для кожного $x \in M$ існує множина $B_x \subseteq Y$, така, що $V \subseteq \overline{B_x}$. Розглянемо множину $A = \bigcup\limits_{x \in M} (\{x\} \times B_x)$. Через $\mathcal{M}$ позначимо систему таких підмножин A.

Теорема 4.8.3. *Нехай X та Y – берівські простори, причому простір Y має зліченну псевдобазу і Z – сепарабельний метризовний простір. Відображення $f : X \times Y \to Z$ псевдоквазінеперервне тоді і тільки тоді, коли воно є $\mathcal{M}$-псевдоквазінеперервним.*

Доведення. Оскільки простір Z метризовний сепарабельний, то він регулярний і задовольняє другу аксіому зліченності. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y, $\{W_k : k \in \mathbb{N}\}$ – база простору Z.

Доведення необхідності є очевидним враховуючи той факт, що множина $\bigcup\limits_{x \in M} (\{x\} \times B_x)$ щільна в $int\overline{M} \times V$.

Достатність будемо доводити методом від супротивного. Нехай відображення f не є сукупно псевдоквазінеперервне. Тоді існують відкриті непорожні множини U і V та множина $E \subseteq X \times Y$ щільна в $U \times V$, такі, що для довільних відкритих непорожніх множин G в X та H в Y, таких, що $G \times H \subseteq U \times V$ маємо, що $f(G \times H) \not\subseteq \overline{f(E)}$.

Розглянемо множину

$$A = \{x \in U : (\exists B_x \subseteq V, V \setminus B_x - \text{ першої категорії})(\forall y \in B_x)(f(x, y) \notin \overline{f(E)})\}$$

і покажемо, що вона другої категорії. Припустимо, що це не так, нехай множина в A першої категорії. Тоді $U \setminus A$ – множина другої категорії, бо простір X берівський. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$A_n = \{x \in U \setminus A : (\exists D_x \subseteq V, \overline{D_x} \supseteq V_n)(\forall y \in D_x)(f(x,y) \in \overline{f(E)})\}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq U \setminus A$. Оскільки множина $U \setminus A$ другої категорії, то існує номер k, такий, що множина A_k другої категорії. З $\mathcal{M}$-псевдоквазінеперервності випливає, що існують відкриті непорожні множини G в X та H в Y, такі, що

$$G \times H \subseteq int\overline{A_k} \times V_k \subseteq U \times V$$

і

$$f(G \times H) \subseteq \overline{f(\bigcup_{x \in A_k} (\{x\} \times D_x))} \subseteq \overline{\overline{f(E)}} = \overline{f(E)}.$$

Одержали суперечність. Отже, множина A другої категорії.

Оскільки простір Y берівський, то для кожного $x \in A$ множина B_x другої категорії. Для кожного $x \in A$ існують номери n_x і m_x, такі, що для кожного $y \in B_x \cap V_{n_x}$ маємо, що $f(x,y) \in W_{m_x}$ і $\overline{W_{m_x}} \cap f(E) = \varnothing$. Розглянемо множини $A_{n,m} = \{x \in A : n_x = n, m_x = m\}$. Зрозуміло, що $A = \bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} A_{n,m}$. Оскільки множина A другої категорії, то існують номери n_0 та m_0, такі, що множина A_{n_0,m_0} другої категорії.

Тепер знову скориставшись $\mathcal{M}$-псевдоквазінеперервністю маємо, що існують відкриті непорожні множини G в X та H в Y, такі, що

$$G \times H \subseteq int\overline{A_{n_0,m_0}} \times V_{n_0} \subseteq U \times V$$

і

$$f(G \times H) \subseteq \overline{f(\bigcup_{x \in A_{n_0,m_0}} (\{x\} \times (B_x \cap V_{n_0})))}.$$

Тому

$$f(G \times H) \subseteq \overline{f(\bigcup_{x \in A_{n_0,m_0}} (\{x\} \times (B_x \cap V_{n_0})))} \subseteq \overline{W_{m_0}}.$$

Оскільки $\overline{W_{m_0}} \cap f(E) = \varnothing$, то $f(G \times H) \cap f(E) = \varnothing$. Але це суперечить тому, що E щільна в $U \times V$. Отже, наше припущення не вірне і тому відображення f псевдоквазінеперервне. $\square$

Нехай $\mathcal{B} = \{A \times V : int\overline{A} \neq \varnothing, V = intV \neq \varnothing\}$ – система підмножина в $X \times Y$. Зрозуміло, що відображення $f : X \times Y \to Z$ є $\mathcal{B}$-псевдоквазінеперервним тоді і тільки тоді, коли f задовольняє умову (B^*).

Теорема 4.8.4. *Нехай X та Y – берівські простори, причому простір Y має зліченну псевдобазу і Z – сепарабельний метризовний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ є $\mathcal{B}$-псевдоквазінеперервним і $E = \{x \in X : f^x -$ псевдоквазінеперервне$\}$ – залишкова множина в X. Тоді відображення f псевдоквазінеперервне.*

Доведення. Скористаємося теоремою 4.8.3. Візьмемо довільні відкриті непорожні множини U в X та V в Y, довільну множину M другої категорії в X, таку, що $M \subseteq U$ і для кожної точки $x \in M$ розглянемо множини B_x в Y, такі, що $V \subseteq \overline{B_x}$. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$A_n = \{x \in M \cap E : f^x(V_n) \subseteq \overline{f^x(B_x)}\}.$$

Зауважимо, що множина $M \cap E$ другої категорії. Оскільки для кожної точки $x \in M$ відображення f^x псевдоквазінеперервне і $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = M \cap E$. З того що множина $M \cap E$ другої категорії випливає, що існує номер m такий, що множина A_m десь щільна. Нехай множина A_m щільна в деякій відкритій непорожній множині U_0, тобто $U_0 \subseteq \overline{A_m}$. З $\mathcal{B}$-псевдоквазінеперервності відображення f випливає, що існують відкриті непорожні множини G в X та H в Y, такі, що $G \times H \subseteq U_0 \times V_m$ і $f(G \times H) \subseteq \overline{f(A_m \times V_m)}$. Тоді $G \times H \subseteq U_0 \times V_m \subseteq U \times V$ і

$$f(G \times H) \subseteq \overline{f(A_m \times V_m)} \subseteq \overline{f(\bigcup_{x \in A_m} (\{x\} \times V_m))} = \overline{\bigcup_{x \in A_m} f(\{x\} \times V_m)} =$$

$$= \overline{\bigcup_{x \in A_m} f^x(V_m)} \subseteq \overline{\bigcup_{x \in A_m} \overline{f^x(B_x)}} \subseteq \overline{\overline{\bigcup_{x \in A_m} f^x(B_x)}} = \overline{\bigcup_{x \in A_m} f^x(B_x)} =$$

$$= \overline{f(\bigcup_{x \in A_m} (\{x\} \times B_x))} \subseteq \overline{f(\bigcup_{x \in M} (\{x\} \times B_x))}.$$

Тоді згідно з теоремою 4.8.3 відображення f псевдоквазінеперервне за сукупністю змінних. $\square$

4.8.3. Нагадаємо, що м'яка неперервність відображення f рівносильна тому, що множина S_f тих точок, в яких f квазінеперервне, або не є майже неперервне, всюди щільна.

Для функції від двох змінних м'яка неперервність відносно кожної змінної не гарантує м'якої неперервності за сукупністю змінних. Більше того, має місце наступний результат.

Приклад 4.8.1. *Існує функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ від двох змінних, яка клікова відносно кожної із змінних, але не є м'яко неперервною.*

Побудова прикладу. Для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множину $A_n = \{\frac{2k-1}{2^n} : k = 1, 2, ..., n\}$ точок з відрізка $[0,1]$. Нехай $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ – це характеристична функція множини $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \times A_n)$. Функція f є кліковою відносно кожної із змінних, оскільки на кожній горизонталі чи вертикалі квадрата $[0,1]^2$ є лише скінченна кількість точок, в яких f відмінна від 0 (рівна 1). Легко бачити, що функція f не є квазінеперервною в жодній точці квадрата $[0,1]^2$. Оскільки множини A і $[0,1]^2 \setminus A$ всюди щільні в $[0,1]^2$, то функція f майже неперервна. Це означає, що $S_f = \varnothing$, а отже, функція f не є м'яко неперервною. $\square$

Однак має місце такий результат про сукупну м'яку неперервність.

Теорема 4.8.5. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – метризовний сепарабельний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умову (B^*) і $M = \{x \in X : f^x -$ м'яко неперервне$\}$ – залишкова множина в X. Тоді відображення f м'яко неперервне за сукупністю змінних.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай відображення f не є м'яко неперервним. Це означає, що множина $S(f)$ не є всюди щільною, тобто існують відкриті непорожні множини U в X і V в Y, такі, що $S(f) \cap (U \times V) = \varnothing$. Отже, в кожній точці множини $U \times V$ відображення f не є квазінеперервним, але є майже неперервним.

Оскільки для кожного елемента $x \in U \cap M$ відображення f^x є м'яко неперервне, то множина $S(f^x)$ щільна в V. Тоді $S(f^x) \cap V \neq \varnothing$ для всіх $x \in U \cap M$. Це означає, що для кожного $x \in U \cap M$ існує точка $y_x \in V$,

така, що відображення f^x або квазінеперервне в точці y_x, або f^x не є майже неперервним в точці y_x.

Розглянемо множини

$$A = \{x \in U \cap M : y_x \in Q(f^x)\} \text{ і } B = \{x \in U \cap M : y_x \notin P(f^x)\}.$$

Тоді $U \cap M = A \cup B$. Оскільки простір X берівський, то множина $U \cap M$ другої категорії в X і тому принаймні одна з множин A чи B є множиною другої категорії в X. Оскільки простір Z метризовний сепарабельний, то він регулярний і задовольняє другу аксіому зліченності. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y, а $\{W_m : m \in \mathbb{N}\}$ – база простору Z.

Припустимо спочатку, що множина A другої категорії в X. Оскільки для кожного $x \in A$ відображення f не є квазінеперервним в точці $(x, y_x) \in U \times V$, то існують відкриті околи $U(x)$ точки x в X, $V(x)$ точки y_x в Y і замкнений окіл $W(x)$ точки $f(x, y_x)$ в Z, такі, що $U(x) \subseteq U$ та $V(x) \subseteq V$ і $f(G \times H) \not\subseteq W(x)$ для довільних відкритих непорожніх множин G в X і H в Y, таких, що $G \times H \subseteq U(x) \times V(x)$.

Для чисел m і n розглянемо множини

$$A_{n,m} = \{x \in A : f(x, y_x) \in W_m \subseteq W(x), V_n \subseteq V(x) \text{ і } f^x(V_n) \subseteq W_m\}.$$

Оскільки для кожного $x \in A$ відображення f^x квазінеперервне в точці y_x, $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y і $\{W_m : m \in \mathbb{N}\}$ – база простору Z, то $A = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m}$. З того, що множина A другої категорії випливає, що існують номери n_0 і m_0, такі, що множина A_{n_0,m_0} десь щільна в X. Оскільки відображення f задовольняє умову (B^*), то існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y, такі, що $G \subseteq int\overline{A_{n_0,m_0}}$, $H \subseteq V_{n_0}$ і $f(G \times H) \subseteq \overline{f(A_{n_0,m_0} \times V_n)}$. Візьмемо довільну точку $a \in A_{n_0,m_0} \cap G$. Тоді $G \cap U(a) \subseteq U(a)$, $H \subseteq V_{n_0} \subseteq V(a)$ і

$$f((G \cap U(a)) \times H) \subseteq f(G \times H) \subseteq \overline{f(A_{n_0,m_0} \times V_{n_0})} \subseteq \overline{W_{m_0}} \subseteq \overline{W(a)} = W(a).$$

Оскільки $a \in A_{n_0,m_0} \subseteq A$, то одержали суперечність.

Нехай тепер множина B другої категорії в X. Оскільки відображення f майже неперервне в кожній точці $(x, y_x) \in U \times V$, то для довільного околу W точки $f(x, y_x)$ в Z існують відкриті околи $U(x, W)$ точки x в X, $V(x, W)$ точки y_x в Y і щільна в $U(x, W) \times V(x, W)$ множина O в $X \times Y$, така, що $f(O) \subseteq W$.

Для номерів n і m розглянемо множини

$$B_{n,m} = \{x \in B : f(x, y_x) \in W_m, V_n \subseteq V(x, W_m), f^x(V_n) \subseteq Z \setminus W_m\}.$$

Оскільки для кожного $x \in B$ відображення f^x не є майже неперервним в точці y_x, $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y і $\{W_m : m \in \mathbb{N}\}$ – база простору Z, то $B = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m}$. З того, що множина B другої категорії випливає, що існують номери n_0 і m_0, такі, що множина B_{n_0,m_0} десь щільна в X. Оскільки відображення f задовольняє умову (B^*), то існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y, такі, що $G \subseteq int\overline{B_{n_0,m_0}}$, $H \subseteq V_{n_0}$ і $f(G \times H) \subseteq \overline{f(B_{n_0,m_0} \times V_n)}$.

Візьмемо довільну точку $a \in B_{n_0,m_0} \cap G$. Тоді в околі $U(a, W_{m_0}) \times V(a, W_{m_0})$ точки (a, y_a) існує відкрита непорожня множина $(G \cap U(a)) \times H \subseteq U(a, W_{m_0}) \times V(a, W_{m_0})$, така, що

$$f((G \cap U(a)) \times H) \subseteq f(G \times H) \subseteq \overline{f(B_{n_0,m_0} \times V_n)} \subseteq \overline{Z \setminus W_{m_0}} = Z \setminus W_{m_0}.$$

Це означає, що відображення f не є майже неперервним у точці $(a, y_a) \in U \times V$.

Отже, в обох випадках одержали суперечність. Це означає, що f є м'яко неперервне. □

Для м'яко неперервного відображення $f : X \times Y \to Z$ не зобов'язана існувати залишкова множина A в X, така, що відображення f^x м'яко неперервне для кожного $x \in A$. Це демонструє наступний приклад.

Приклад 4.8.2. *Існує м'яко неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, така, що f^x не є м'яко неперервна для кожного $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Побудова прикладу. Нехай $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ покладемо

$$f(x, y) = \begin{cases} n, & x = r_n, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Зрозуміло, що в кожні точці множини $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ функція f не є майже неперервною за сукупністю змінних. Оскільки множина $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ всюди щільна в $\mathbb{R}^2$, то S_f теж всюди щільна в $\mathbb{R}^2$. Отже, функція f м'яко неперервна.

З іншого боку, для кожної точки $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ функція f^x є майже неперервною і не є квазінеперервною в жодні точці. Це означає, що $S_{f^x} = \varnothing$ для $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Отже, f^x не є м'яко неперервна для кожного $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\square$

Висновки до розділу 4.

В цьому розділі вивчаються нарізні і сукупні властивості деяких ослаблень неперервності.

У **підрозділі 4.1** дано характеризацію сукупної квазінеперервності відображення від двох змінних. Зокрема, вказано достатні умови на простори X, Y і Z при яких має місце рівність класів $K_h\tilde{K}(X \times Y, Z) = K(X \times Y, Z)$.

Підрозділ 4.2 присвячений вивченню множини точок симетричної квазінеперервності, симетричної ледь неперервності та симетричної кліковості функцій $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, які монотонні відносно першої змінної. Зокрема, встановлено, що горизонтально і вертикально квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, яка монотонна відносно першої змінної, є квазінеперервною за сукупністю змінних.

Дослідженню властивостей слабкої горизонтальної квазінеперервності присвячено **підрозділ 4.3**. Тут, зокрема, дано ще одну характеризацію сукупної квазінеперервності відображення від двох змінних за участю слабкої горизонтальної квазінеперервності.

У **підрозділі 4.4** вивчаються достатні умови, при яких для відображення $f : X \times Y \to Z$ існує залишкова в X множина A, така, що відображення f сукупно майже неперервне, симетрично майже квазінеперервне відносно x, симетрично майже ледь неперервне відносно x, симетрично клікове відносно x чи симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.

Уточнені достатні умови існування точок симетричної квазінеперервності та кліковості функцій двох змінних вказано в **підрозділі 4.5**.

В **підрозділі 4.6** знайдено необхідні та достатні умови, при яких для відображення $f : X \times Y \to Z$ існує залишкова в X множина A, така, що відображення f симетрично клікове відносно x чи симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.

Підрозділ 4.7 присвячений вивченню сукупних властивостей функцій $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, які мають замкнений графік відносно першої змінної.

У **підрозділі 4.8** вивчаються нарізні та сукупні властивості деяких аналогів кліковості. Зокрема, встановлено характеризацію точкової розривності відображення від двох змінних.

РОЗДІЛ 5.
РІЗНОВИДИ КВАЗІНЕПЕРЕРВНОСТІ ТА ТОЧКИ НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

5.1. Розвиток теореми Калбрі-Троалліка. Властивість Гана.

5.1.1. Нагадаємо, що відображення $f : X \times Y \to Z$ має *властивість Гана*, якщо множина $C_Y(f)$ залишкова в X. Спочатку покажемо, що клас просторів Гана ширший ніж клас просторів з другою аксіомою зліченності.

Приклад 5.1.1. *Існує простір Гана, який не задовольняє другу аксіому зліченності.*

Побудова прикладу. Розглянемо простір $P = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, де за δ-околи точок $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ будемо брати звичайні околи в евклідовій топології, а для точок $(x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ базисними δ-околами будуть служити множини $([x - \delta, x + \delta] \times (0, \delta]) \cup \{(x, 0)\}$.

Цей простір не буде задовольняти другу аксіому зліченності, бо він містить континуальний дискретний підпростір $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Розглянемо довільну функцію f з $\overline{C}C(X \times P, Z)$, де X – топологічний простір, а Z – метризовний. Введемо в розгляд простір $P_0 = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ з евклідовою топологією. Простір P_0 задовольняє другу аксіому зліченності. Покажемо, що $f \in \overline{C}C(X \times P_0, Z)$. Для цього досить пояснити, що коли функція $g : P \to Z$ – неперервна, то і функція $g : P_0 \to Z$ є неперервною.

Нехай $|\circ - \circ|$ – метрика на просторі Z, яка породжує його топологію. Візьмемо довільну точку $p_0 = (x_0, 0)$ і покладемо $z_0 = g(p_0)$. З неперервності $g : P \to Z$ випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що

$$|g(x, y) - g(x_0, 0)| \leq \varepsilon, \text{ коли } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], 0 < y \leq \delta. \qquad (*)$$

Зрозуміло, що коли $0 < y \leq \delta$, то $|g(x_0, y) - g(x_0, 0)| \leq \varepsilon$. Отже, g^{x_0} – неперервна в точці y_0. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ функції $g^x : [0, +\infty) \to Z$ – неперервні. Переходячи до границі в нерівності (*) при $y \to +0$,

одержуємо, що $|g(x,0) - g(x_0,0)| \leq \varepsilon$. Отже, $|g(x,y) - g(x_0,0)| \leq \varepsilon$, коли $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], 0 \leq y \leq \delta$. Це означає, що функція $g : P_0 \to Z$ неперервна в точці p_0.

У випадку коли $p = (x,y)$, де $y > 0$, системи околів точки p у просторах P і P_0 одинакові. Отже, функція $g : P_0 \to Z$ неперервна.

Таким чином, $f \in \overline{C}C(X \times P_0, Z)$. Тоді існує залишкова множина A в X, така, що відображення $f : X \times P_0 \to Z$ неперервне в кожній точці множини $A \times P_0$. Залишилось показати, що і відображення $f : X \times P \to Z$ неперервне на $A \times P$. Цей факт одразу стає очевидним у зв'язку з тим, що кожний окіл точки у просторі $X \times P_0$ є околом відповідної точки у просторі $X \times P$.

Таким чином, простір P є простором Гана, який не задовольняє другу аксіому зліченності. □

5.1.2. Нам знадобляться наступне допоміжне твердження.

Лема 5.1.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – регулярний простір, $f : X \times Y \to Z$ – горизонтально квазінеперервне відображення, A – всюди щільна в X множина і звуження $f|_{A\times Y}$ – неперервне відображення. Тоді відображення f неперервне в кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $(x_0, y_0) \in A \times Y$ і довільний окіл W точки $z_0 = f(x_0, y_0)$. Оскільки простір Z регулярний, то існує замкнений окіл W_1 точки z_0, такий, що $W_1 \subseteq W$. З неперервності $f|_{A\times Y}$ в точці (x_0, y_0) випливає, що існують відкриті околи U і V точок x_0 і y_0 відповідно у просторах X і Y, такі, що $f((A \cap U) \times V) \subseteq W_1$. Згідно з лемою 4.1.1 маємо, що $f(U \times V) \subseteq \subseteq \overline{f((A \cap U) \times V)} \subseteq \overline{W_1} = W_1 \subseteq W$. Отже, відображення f неперервне в точці (x_0, y_0). □

Наступна теорема була встановлена в [342, 353].

Теорема 5.1.1. *Нехай X – топологічний простір, простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, Z – метризовний простір і $f : X \times Y \to Z$ – відображення з класу $K_hC(X \times Y, Z)$. Тоді для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x,y) \in C(f)\}$ є залишковою в X.*

Тепер переходимо до викладу основних результатів цього підрозділу. Для їх встановлення ми скористаємося прийомом, який був запропонований в [334].

Теорема 5.1.2. *Нехай X – топологічний простір, Y – сепарабельний з першою аксіомою зліченності простір Гана, Z – метризовний простір і $f \in K_hC(X \times Y, Z)$. Тоді відображення f має властивість Гана.*

Доведення. Нехай спочатку простір X берівський. Згідно з теоремою 5.1.1 для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f)$ є залишковою в X. Оскільки простір Y сепарабельний, то існує зліченна всюди щільна множина Y_0 в Y. Позначимо $X_0 = \bigcap\limits_{y \in Y_0} C_y(f)$. Множина X_0 залишкова, бо кожна множина $C_y(f)$ залишкова, а множина Y_0 зліченна.

Розглянемо звуження $g = f|_{X_0 \times Y}$. Легко бачити, що $g \in \overline{C}C(X_0 \times Y, Z)$. Оскільки простір Y є простором Гана, то відображення g має властивість Гана. Це означає, що множина $A = C_Y(g) = \{x \in X_0 : \{x\} \times Y \subseteq C(g)\}$ є залишковою в X_0. Оскільки $X \setminus A = (X \setminus X_0) \cup (X_0 \setminus A)$, множина $X \setminus X_0$ є першої категорії в X і множина $X_0 \setminus A$ є першої категорії в X_0, а значить і в X, то множина $X \setminus A$ є першої категорії в X, отже, A – залишкова в X.

Оскільки простір X берівський, то залишкова множина A всюди щільна в X. Якщо тепер скористаємося лемою 5.1.1, то одержимо, що відображення f неперервне в кожній точці множини $A \times Y$.

Нехай тепер X – довільний топологічний простір. Згідно з теоремою Банаха про категорію [325, с. 87–90] простір X можна подати у вигляді диз'юнктного об'єднання $X_I \sqcup X_{II} \sqcup \Gamma$, де X_I – відкрита в X множина першої категорії, X_{II}– відкрита в X множина, яка є берівським простором в індукованій з X топології і Γ – замкнена ніде не щільна в X множина, що є межею множини X_{II}. Нехай $f_0 = f|_{X_{II} \times Y}$. Зрозуміло, що $f_0 \in K_hC(X_{II} \times Y, Z)$. Оскільки простір X_{II} берівський, то за доведеним вище $C_Y(f_0)$ залишкова в X_{II}, а значить, і в X, адже $X_{II} = X \setminus (X_I \cup \Gamma)$ залишкова в X. Але ж X_{II} – відкрита множина, то $C_Y(f_0) \subseteq C_Y(f)$. Тому і множина $C_Y(f)$ є залишковою в X. $\square$

5.1.3. Розглянемо ще один клас відображень, які мають властивість Гана.

Теорема 5.1.3. *Нехай простір X задовольняє другу аксіому зліченності, Y – берівський простір, який є простором Гана і кожна всюди щільна в Y множина є сепарабельною, Z – метризовний сепарабельний простір і відображення $f : X \times Y \to Z$ квазінеперервне за сукупністю змінних і*

неперервне відносно другої змінної. Тоді відображення f має властивість Гана.

Доведення. Нехай спочатку простір X берівський. Згідно з теоремою 4.1.3 у просторі Y існує всюди щільна множина B, така, що відображення f є симетрично квазінеперервним відносно y в кожній точці множини $X \times B$.

Візьмемо довільну точку $y \in B$ і покажемо, що множина $C_y(f)$ є залишковою в X. Нехай це не так, тобто множина $D_y(f) = X \setminus C_y(f)$ є множиною другої категорії в X. Нехай $\{W_n : n \in \mathbf{N}\}$ – база простору Z. Для кожного номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in D_y(f) : (\forall U \in \mathcal{U}_x)(\forall V \in \mathcal{V}_y)(f(x,y) \in W_n, f(U \times V) \not\subseteq W_n)\},$$

де $\mathcal{U}_x$ і $\mathcal{V}_y$ – системи околів точок x і y відповідно. Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = D_y(f)$. Оскільки множина $D_y(f)$ залишкова, то існують номер n_0 і відкрита множина G, такі, що множина A_{n_0} щільна в G. З симетричної квазінеперервності в кожній точці множини $G \times \{y\}$ випливає, що існують відкрита множина U і окіл V точки y, такі, що $U \subseteq G$ і $f(U \times V) \subseteq W_{n_0}$. Тоді $U \cap A_{n_0} = \emptyset$. А це суперечить щільності множини A_{n_0} в G. Отже, для кожного $y \in B$ множина $C_y(f)$ є залишковою в X.

Оскільки з кожної всюди щільної множини в Y можна виділити зліченну всюди щільну множину, то існує зліченна всюди щільна множина B_0 в Y, така, що $B_0 \subseteq B$. Позначимо $X_0 = \bigcap\limits_{y \in B_0} C_y(f)$. Множина X_0 залишкова, бо кожна множина $C_y(f)$ залишкова, а множина Y_0 зліченна.

Розглянемо звуження $g = f|_{X_0 \times Y}$. Легко бачити, що $g \in \overline{C}C(X_0 \times Y, Z)$. Оскільки простір Y є простором Гана, то відображення g має властивість Гана. Це означає, що множина $A = C_Y(g) = \{x \in X_0 : \{x\} \times Y \subseteq C(g)\}$ є залишковою в X_0. Оскільки $X \setminus A = (X \setminus X_0) \cup (X_0 \setminus A)$, множина $X \setminus X_0$ є першої категорії в X і множини $X_0 \setminus A$ є першої категорії в X_0, а значить і в X, то множина $X \setminus A$ є першої категорії в X, отже, A – залишкова в X.

З беровості простру X випливає, що множина A всюди щільна. Якщо тепер скористатись лемою 5.1.1, то одержимо, що відображення f є неперервним на $A \times Y$.

Аналогічно до того, як це робилось в теоремі 5.1.2 розглядається випадок, коли X – довільний топологічний простір з другою аксіомою зліченності. $\square$

5.2. Два класи відображень, які володіють властивістю Гана

5.2.1. Нам будуть потрібні наступні прості леми.

Лема 5.2.1. *Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір, відображення $f : X \to Y$ – майже неперервне в точці $x_0 \in X$ і квазінеперервне. Тоді f неперервне в точці x_0.*

Доведення. Візьмемо довільний замкнений окіл V точки $y_0 = f(x_0)$ в Y. Оскільки f майже неперервне в точці x_0, то існує множина A в X, така, що $x_0 \in int\overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$. Тоді згідно з теоремою 3.4.2 про характеризацію квазінеперервності через операції замикання та внутрішності маємо, що

$$f(int\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{V} = V.$$

Отже, відображення f неперервне в точці x_0. □

Лема 5.2.2. *Нехай X – топологічний простір, Y – метричний простір, функція $f : X \to Y$ – майже неперервна і клікова. Тоді f неперервна.*

Доведення. Нехай $|\circ - \circ|$ – метрика в просторі Y. Будемо міркувати від супротивного. Нехай функція f розривна в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді існує $\varepsilon > 0$, таке, що для довільного околу U точки x_0 в X існує точка $x_1 \in U$, що $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Оскільки функція f майже неперервна в точці x_0, то існує множина A_0 в X, така, що $x_0 \in int\overline{A_0}$ і $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для $x \in A_0$. Нехай $x_1 \in int\overline{A_0}$ і $|f(x_1) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. З майже неперервності функції f в точці x_1 існує множина A_1 в X, така, що $x_1 \in int\overline{A_1}$ і $|f(x) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для $x \in A_1$. Оскільки функція f клікова, то існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq int\overline{A_0} \cap int\overline{A_1}$ і $\omega_f(G) < \frac{\varepsilon}{3}$. Візьмемо точки $a_0 \in A_0 \cap G$ і $a_1 \in A_1 \cap G$. Тоді

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq |f(x_1) - f(a_1)| + |f(a_1) - f(a_0)| + |f(a_0) - f(x_0)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Одержали суперечність. Отже, функція f неперервна. □

Теорема 5.2.1. *Нехай X та Y – топологічні простори, Z – метризовний простір, B – множина зліченного типу в Y, $f : X \times Y \to Z$ – сукупно казінеперервне відображення і f^x – майже неперервне для всіх x з деякої залишкової в X множини. Тоді множина $C_B(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Для доведення теореми, згідно з лемою 5.2.1, достатньо показати існування залишкової в X множини A, такої, що відображення f майже неперервне за сукупністю змінних в кожній точці множини $A \times B$.

Будемо міркувати від супротивного. Нехай існує множина E_1 другої категорії в X, така, що для кожного $x \in E_1$ існує точка $y_x \in B$, що відображення f не є майже неперервним за сукупністю змінних в точці (x, y_x). Зафіксуємо метрику $|\circ - \circ|$ в просторі Z, яка породжує його топологію. Оскільки множина E_1 другої категорії, то існують $\varepsilon > 0$ і множина

$$E_2 = \{x \in E_1 : (\forall O \subseteq X \times Y | (x, y_x) \in int\overline{O})(\omega_f(O) \geq \varepsilon)\}$$

другої категорії в X.

Нехай M – це множина точок $x \in X$, для яких відображення f^x майже неперервне. Оскільки за умовою множина M залишкова, то множина $E = E_2 \cap M$ другої категорії в X. Розглянемо послідовність $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих непорожніх множин в Y, які фігурують в означенні множини зліченного типу, для множини B. Покладемо

$$A_n = \{x \in E : (y_x \in V_n)(\exists B_x \subseteq Y)(V_n \subseteq \overline{B_x})(\omega_{f^x}(B_x) < \frac{\varepsilon}{4})\}.$$

Легко бачити, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} десь щільна в X. Нехай $\overline{A_{n_0}} \supseteq U_0$, де U_0 – відкрита непорожня множина в X. Позначимо $V_0 = V_{n_0}$. Оскільки відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних, то існують відкриті непорожні множини U і V відповідно в X і Y, такі, що $U \times V \subseteq U_0 \times V_0$ і $\omega_f(U \times V) < \frac{\varepsilon}{4}$. Покладемо $O = \bigcup\limits_{x \in U \cap A_{n_0}} (\{x\} \times B_x)$. Ця множина щільна в $U \times V_0$. Покажемо, що $\omega_f(O) < \varepsilon$. Візьмемо дві точки $p_i = (x_i, y_i) \in O$, де $i = 1, 2$. Нехай $q_i \in \{x_i\} \times (B_{x_i} \cap V)$, де $i = 1, 2$. Тоді

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(q_1)| + |f(q_1) - f(q_2)| + |f(q_2) - f(p_2)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Отже, $\omega_f(O) \leq \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$. Оскільки існує точка $x \in A_{n_0} \cap U \subseteq E_2$, то приходимо до суперечності. Теорему доведено. □

Теорема 5.2.2. *Нехай X – топологічний простір, Y – сепарабельний з першою аксіомою зліченності простір Гана, Z – метризовний простір, $f : X \times Y \to Z$ – сукупно квазінеперервне відображення і f^x – майже неперервне для всіх x з деякої залишкової в X множини. Тоді f має властивість Гана.*

Доведення. Нехай спочатку X – берівський простір. Зафіксуємо метрику на просторі Z, яка породжує його топологію. Оскільки простір Y сепарабельний, то існує множина $Y_0 = \{y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$, така, що $\overline{Y_0} = Y$. Згідно з теоремою 5.2.1 множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в X для кожного $y \in Y$. Нехай M – це множина точок $x \in X$, для яких відображення f^x майже неперервне. Тоді множина $X_0 = M \cap \bigcap\limits_{y \in Y_0} C_y(f)$ теж залишкова в X. Покладемо $g = f|_{X_0 \times Y}$. Відображення g^x майже неперервне і точково розривне (а значить, клікове) для всіх $x \in X_0$. Тому згідно з лемою 5.2.2 відображення g^x неперервне для $x \in X_0$. Крім того, для кожного $y \in Y_0$ відображення g_y неперервне. Таким чином, $g \in \overline{C}C(X_0 \times Y, Z)$. Оскільки простір Y є простором Гана, то існує залишкова в X_0 множина A, така, що $A \times Y \subseteq C(g)$. Оскільки $X \setminus A = (X \setminus X_0) \cup (X_0 \setminus A)$, множина $X \setminus X_0$ є першої категорії в X і множина $X_0 \setminus A$ є першої категорії в X_0, а значить і в X, то множина $X \setminus A$ є першої категорії в X, отже, A – залишкова в X. Оскільки простір X берівський, то множина A всюди щільна. Таким чином, відображення f сукупно майже неперервне в кожній точці множини $A \times Y$. Якщо врахувати, що відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних, то скориставшись лемою 5.2.1 одержимо, що відображення f неперервне в кожній точці множини $A \times Y$.

Нехай тепер X – довільний топологічний простір. Згідно з теоремою Банаха про категорію простір X можна подати у вигляді диз'юнктного об'єднання $X_I \sqcup X_{II} \sqcup \Gamma$, де X_I – відкрита в X множина першої категорії, X_{II} – відкрита в X множина, яка є берівським простором в індукованій з X топології і Γ – замкнена ніде не щільна в X множина, що є межею множини X_{II}. Нехай $f_0 = f|_{X_{II} \times Y}$. Зрозуміло, що відображення f_0 сукупно квазінеперервне і f_0^x – майже неперервне для всіх x з деякої залишкової в X_{II} множини. Оскільки простір X_{II} берівський, то за доведеним вище існує залишкова множина A в X_{II}, така, що $A \times Y \subseteq C(f_0)$. Множина A залишкова і в X, адже $X_{II} = X \setminus (X_I \cup \Gamma)$ залишкова в X. Оскільки X_{II} – відкрита множина, то $C(f_0) \subseteq C(f)$. Тому $A \times Y \subseteq C(f)$. $\square$

5.2.1. Тепер перейдемо до вивчення питання множини точок неперервності функцій від двох змінних, які монотонні відносно першої змінної. Спочатку переконаємося, що нарізно монотонна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є точково розривною. Насправді ми встановимо трохи сильніший результат.

Теорема 5.2.3. *Має місце включення*

$$\overline{M}M(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \subseteq P(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}).$$

Доведення. Нехай функція $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, така, що f_y монотонна для всіх y з деякої всюди щільної в $\mathbb{R}$ множини і f^x монотонна для всіх x з $\mathbb{R}$. Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, що існують відкриті непорожні множини U і V в $\mathbb{R}$, такі, що функція f розривна в кожній точці з $U\times V$. Тоді існує $\varepsilon>0$, таке, що множина $E=\{p\in U\times V:\omega_f(p)\geq\varepsilon\}$ десь щільна. Нехай множина E щільна в $U_1\times V_1$, де U_1 і V_1 відкриті непорожні множини в $\mathbb{R}$. Оскільки множина E замкнена, то $U_1\times V_1\subseteq E\subseteq U\times V$.

Нехай $\{V_n:n\in\mathbb{N}\}$ – база в $\mathbb{R}$. Розглянемо множини

$$A_n=\{x\in U_1:\omega_{f^x}(V_n)<\frac{\varepsilon}{16}\}.$$

Оскільки монотонна функція точково розривна, то $U_1=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. Тоді існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} щільна в деякій відкритій непорожній множині U_2. Покладемо $V_0=V_{n_0}$. Існує точка $y_0\in V_0$, така, що функція f_{y_0} монотонна, а отже, точково розривна. Тому існує невироджений відрізок $[a,b]$ в U_2, такий, що $a,b\in A_{n_0}$ і $\omega_{f_{y_0}}([a,b])<\frac{\varepsilon}{16}$.

Візьмемо довільний невироджений відрізок $[c,d]$, такий, що $y_0\in[c,d]\subseteq V_0$ і функції f_c і f_d монотонні. Покажемо, що $\omega_f([a,b]\times[c,d])<\varepsilon$. Маємо

$$|f(a,c)-f(b,c)|\leq|f(a,c)-f(a,y_0)|+|f(a,y_0)-f(b,y_0)|+|f(b,y_0)-f(b,c)|<\frac{3\varepsilon}{16}$$

і аналогічно $|f(a,d)-f(b,d)|<\frac{3\varepsilon}{16}$. Оскільки функції f_c і f_d монотонні, то $|f(x',c)-f(x'',c)|<\frac{3\varepsilon}{16}$ і $|f(x',d)-f(x'',d)|<\frac{3\varepsilon}{16}$ для довільних точок $x',x''\in[a,b]$. Тоді для довільного $x\in[a,b]$ маємо

$$|f(x,c)-f(x,d)|\leq|f(x,c)-f(a,c)|+|f(a,c)-f(a,d)|+|f(a,d)-f(x,d)|<\frac{7\varepsilon}{16}.$$

Також з монотонності функції f^x для кожного $x\in[a,b]$ і довільних $y',y''\in[c,d]$ випливає, що $|f(x,y')-f(x,y'')|<\frac{7\varepsilon}{16}$. Тоді для довільних точок $p_i=(x_i,y_i)\in[a,b]\times[c,d]$, $i=1,2$ маємо

$$|f(p_1)-f(p_2)|\leq|f(p_1)-f(x_1,y_0)|+|f(x_1,y_0)-f(x_2,y_0)|+$$
$$+|f(x_2,y_0)-f(p_2)|<\frac{15\varepsilon}{16}.$$

Таким чином $\omega_f([a,b]\times[c,d])\leq\frac{15\varepsilon}{16}<\varepsilon$. Оскільки $[a,b]\times[c,d]\subseteq E$, то одержуємо суперечність. $\square$

Тепер розглянемо функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, які монотонні відносно першої змінної і неперервні відносно другої змінної при значеннях першої з деякої залишкової множини.

Теорема 5.2.4. *Нехай Y – топологічний простір, B – множина зліченного типу в Y і $f \in M\tilde{C}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R})$. Тоді множина $C_B(f)$ залишкова в $\mathbb{R}$.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай множина $E_1 = \mathbb{R} \setminus C_B(f)$ – множина другої категорії в $\mathbb{R}$. Для кожного $x \in E_1$ існує точка $y_x \in B$, що відображення f не є неперервним за сукупністю змінних в точці (x, y_x). Оскільки множина E_1 другої категорії, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що множина $E_2 = \{x \in E_1 : \omega_f(\{(x, y_x)\}) \geq \varepsilon\}$ другої категорії в $\mathbb{R}$.

Оскільки за умовою множина $X_C(f)$ залишкова, то множина $E = E_2 \cap X_C(f)$ другої категорії в $\mathbb{R}$. Розглянемо послідовність $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих непорожніх множин в Y, які фігурують в означенні множини зліченного типу, для множини B. Покладемо

$$A_n = \{x \in E : y_x \in V_n, \omega_{f^x}(V_n) < \frac{\varepsilon}{8}\}.$$

Оскільки відображення f^x неперервне для $x \in E$, то $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} десь щільна в $\mathbb{R}$. Нехай $\overline{A_{n_0}} \supseteq U_0$, де U_0 – відкрита непорожня множина в X. Позначимо $V_0 = V_{n_0}$. Візьмемо довільну точку $y_0 \in V_0$. Оскільки функція f_{y_0} монотонна, то вона точково розривна. Тому існує невироджений відрізок $[a, b] \subseteq U_0$, такий, що $a, b \in A_{n_0}$ і $\omega_{f_{y_0}}([a, b]) < \frac{\varepsilon}{8}$.

Покажемо, що $\omega_f([a, b] \times V_0) < \varepsilon$. Візьмемо довільну точку $y \in V_0$. Тоді

$$|f(a, y) - f(b, y)| \leq |f(a, y) - f(a, y_0)| + |f(a, y_0) - f(b, y_0)| +$$
$$+ |f(b, y_0) - f(b, y)| \leq \frac{3\varepsilon}{8}.$$

Оскільки функція f_y монотонна для кожного $y \in V_0$, то для довільних точок $x', x'' \in [a, b]$ маємо, що $|f(x', y) - f(x'', y)| \leq \frac{3\varepsilon}{8}$. Візьмемо довільні точки $p_i = (x_i, y_i) \in [a, b] \times V_0$, де $i = 1, 2$. Тоді

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(a, y_1)| + |f(a, y_1) - f(a, y_2)| + |f(a, y_2) - f(p_2)| \leq \frac{7\varepsilon}{8}.$$

Отже, $\omega_f([a, b] \times V_0) \leq \frac{7\varepsilon}{8} < \varepsilon$. Оскільки $A_{n_0} \cap [a, b] \neq \emptyset$, то одержали суперечність з припущенням. $\square$

Теорема 5.2.5. *Нехай Y – сепарабельний з першою аксіомою зліченності простір Гана і $f \in M\tilde{C}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R})$. Тоді відображення f має властивість Гана.*

Доведення. Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 5.2.2. Зафіксуємо метрику на просторі Z, яка породжує його топологію. Оскільки простір Y сепарабельний, то існує множина $Y_0 = \{y_1, y_2, ..., y_n, ...\}$, така, що $\overline{Y_0} = Y$. Згідно з теоремою 5.2.4 множина $C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$ залишкова в $\mathbb{R}$ для кожного $y \in Y$. Нехай M – це множина точок $x \in \mathbb{R}$, для яких відображення f^x неперервне. Тоді множина $X_0 = M \cap \bigcap\limits_{y \in Y_0} C_y(f)$ теж залишкова в $\mathbb{R}$. Покладемо $g = f|_{X_0 \times Y}$. Відображення g^x неперервне для всіх $x \in X_0$ і для кожного $y \in Y_0$ відображення g_y неперервне. Таким чином, $g \in \overline{C}C(X_0 \times Y, Z)$. Оскільки простір Y є простором Гана, то існує залишкова в X_0 множина A, така, що $A \times Y \subseteq C(g)$. Оскільки $\mathbb{R} \setminus A = (\mathbb{R} \setminus X_0) \cup (X_0 \setminus A)$, множина $\mathbb{R} \setminus X_0$ є першої категорії в $\mathbb{R}$ і множина $X_0 \setminus A$ є першої категорії в X_0, а значить і в $\mathbb{R}$, то множина $X \setminus A$ є першої категорії в X, отже, A – залишкова в X.

Покажемо, що і відображення f неперервне в кожній точці множини $A \times Y$. Візьмемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in A \times Y$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки відображення g неперервне в точці p_0, то існують відкриті околи U та V точок x_0 та y_0 відповідно в просторах $\mathbb{R}$ та Y, такі, що $\omega_g((U \cap A) \times V) < \frac{\varepsilon}{4}$. Оскільки для кожного $y \in V$ функція f_y монотонна і множина A щільна в U, то для довільних $x', x'' \in U$ маємо, що $|f(x', y) - f(x'', y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Візьмемо довільні точки $p_i = (x_i, y_i) \in U \times V$, де $i = 1, 2$. Тоді

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(x_0, y_1)| + |f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| + |f(x_0, y_2) - f(p_2)| \leq \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Отже, $\omega_f((U \times V) < \varepsilon$. Це означає, що функція f неперервна в точці p_0.

Таким чином, $A \subseteq C_Y(f)$, а оскільки множина A залишкова, то множина $C_Y(f)$ залишкова. Отже, функція f має властивість Гана. □

5.3. Точки сукупної неперервності та великі коливання

5.3.1. Нам буде потрібна наступна проста властивості горизонтально квазінеперервних відображень.

Лема 5.3.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір з метрикою $|\circ - \circ|_Z$ і $f : X \times Y \to Z$ – горизонтально квазінеперервне відображення. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ множина $Q_\varepsilon(f) = \{(x, y) \in X \times Y : \omega_{f_y}(x) < \varepsilon\}$ всюди щільна в $X \times Y$.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$, U і V – відкриті непорожні множини в X і Y відповідно. Покажемо, що $Q_\varepsilon(f) \cap (U \times V) \neq \varnothing$. Візьмемо довільну точку $p = (x, y) \in U \times V$ і скористаємось горизонтальною квазінеперервністю f у точці p. Якщо взяти за W відкриту кулю з центром у точці $z = f(p)$ і радіусом $\frac{\varepsilon}{3}$ в Z, то існують непорожня відкрита в X множина G в X і точка $b \in V$, такі, що $G \subseteq U$ і $|f(u, b) - z|_Z < \frac{\varepsilon}{3}$, як тільки $u \in G$. Тоді для довільних $u', u'' \in G$ будемо мати

$$|f(u', b) - f(u'', b)|_Z \leq |f(u', b) - z|_Z + |f(u'', b) - z|_Z < \frac{2\varepsilon}{3},$$

отже, $\omega_{f_b}(G) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Тому $\omega_{f_b}(x) < \varepsilon$ для довільного $x \in G$. Взявши якунебудь точку $a \in G$, ми отримаємо, що $(a, b) \in Q_\varepsilon(f) \cap (U \times V)$, що і дає нам рівність $\overline{Q_\varepsilon(f)} = X \times Y$. □

Наступний простий приклад показує, що горизонтальна квазінеперервність занадто сильна умова у теоремах про властивість Гана.

Приклад 5.3.1. *Існує функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка має властивість Гана і не є горизонтально квазінеперервною.*

Побудова прикладу. Визначимо функцію $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ так:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

В кожній точці вісі ординат $x = 0$ функція f не є горизонтально квазінеперервною, але вона має властивість Гана, бо $C_Y(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, і, крім того, f неперервна відносно другої змінної. □

Щоб дати таке уточнення результату з [353], яке б включало і цей приклад, уведемо такі властивості відображення $f : X \times Y \to Z$:

(i) для довільних відкритих непорожніх множин U і V відповідно в X і Y та довільної множини A в X, для якої $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G \times V) \subseteq \overline{f((G \cap A) \times V)}$;

(ii) для кожного $\varepsilon > 0$ множина $Q_\varepsilon(f) = \{(x, y) \in X \times Y : \omega_{f_y}(x) < \varepsilon\}$ всюди щільна в просторі $X \times Y$;

(iii) множина $X_C(f) = \{x \in X : f^x$ – неперервне$\}$ є залишковою в X.

Як бачимо, умова (i) є послабленням властивості, встановленої у лемі 4.1.1, а умова (ii) – це висновок леми 5.3.1. Отже, горизонтально квазінеперервні відображення мають властивості (i) та (ii). Остання властивість (iii) є послабленням умови $X_C(f) = X$, яка означає неперервність f відносно другої змінної. У умовах (i) і (iii) X, Y і Z – довільні топологічні простори, в умові (ii) простір Z метричний.

Для довільних топологічних просторів X та Y і метричного простору Z символом $\mathcal{N}(X \times Y, Z)$ позначимо сукупність усіх відображень $f : X \times Y \to Z$, які мають усі три властивості (i), (ii) та (iii), а елементи з $\mathcal{N}(X \times Y, Z)$ назвемо *$\mathcal{N}$-відображеннями.* З результатів лем 4.1.1 та 5.3.1 випливає, що $K_hC(X \times Y, Z) \subseteq \mathcal{N}(X \times Y, Z)$.

Ще раз нагадаємо, що як і в [53], підмножину B топологічного простору Y ми називаємо *множиною зліченного типу*, якщо існує така не більш ніж зліченна система $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих множин V_n в Y, що для кожної точки $y \in B$ система $\mathcal{V}(y) = \{V_n : y \in V_n\}$ є базою околів точки y в просторі Y. Така система $\mathcal{V}$ називається *зліченною базою для B*. Увесь простір Y є множиною зліченного типу тоді і тільки тоді, коли він має не більш ніж зліченну базу, тобто задовольняє другу аксіому зліченності, а виконання першої аксіоми зліченності в Y означає, що всі одноточкові множини $\{y\}$ в Y є множинами зліченного типу.

5.3.2. Наступна теорема узагальнює результати з [53] і [353] і багато інших результатів такого типу.

Теорема 5.3.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір з метрикою $|\circ - \circ|$, B – множина зліченного типу в Y і $f : X \times Y \to Z$ – $\mathcal{N}$-відображення. Тоді множина $C_B(f) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C(f)\}$ є залишковою в X.*

Доведення. Міркуючи від супротивного, припустимо, що доповнення

$$E_1 = X \setminus C_B(f) = \{x \in X : \exists y_x \in B, (x, y_x) \in D(f)\}$$

є множиною другої категорії в X. За умовою (iii) множина $E_2 = X_C(f)$ залишкова в X, тобто доповнення $X \setminus E_2$ є множиною першої категорії в

X. Тоді і різниця $E_1 \setminus E_2$ – це множина першої категорії в X, а значить, перетин $E_3 = E_1 \cap E_2$ є множиною другої категорії в X, бо інакше і множина $E_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \setminus E_2)$ була би множиною першої категорії в X. Оскільки об'єднання послідовності множин першої категорії залишається множиною першої категорії і $E_3 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in E_3 : \omega_f(x, y_x) \geq \frac{1}{n}\}$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що і $E = \{x \in E_3 : \omega_f(x, y_x) \geq \varepsilon\}$ є множиною другої категорії в X.

Нехай $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – зліченна база для B. Розглянемо множини

$$A_n = \{x \in E : y_x \in V_n, \omega_{f^x}(V_n) < \frac{\varepsilon}{6}\}.$$

Легко перевірити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E$. Справді, нехай $x \in E$. Тоді $x \in X_C(f)$ і відображення $f^x : Y \to Z$ неперервне, зокрема, воно буде неперервним у точці y_x. Тому існує такий окіл V_0 точки y_x в Y, що $\omega_{f^x}(V_0) < \frac{\varepsilon}{6}$. Але $y_x \in B$, отже, $\mathcal{V}(y_x)$ є базою околів точки y_x в Y. Тоді існує такий номер n, що $y_x \in V_n \subseteq V_0$, а значить, $y_x \in V_n$ і $\omega_{f^x}(V_n) < \frac{\varepsilon}{6}$, отже, $x \in A_n$.

Оскільки E – це множина другої категорії в X і $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то існує такий номер m, що множина $A = A_m$ десь щільна в X, тобто відкрита множина $U_0 = int\overline{A}$ не порожня. Тоді з умови (ii) негайно випливає, що існують точка $b \in V = V_m$ і відкрита непорожня множина U в X, такі, що $U \subseteq U_0$ і $\omega_{f_b}(U) < \frac{\varepsilon}{6}$. Використавши умову (i), отримаємо, що існує така відкрита непорожня множина G в X, що $G \subseteq U$ і $f(G \times V) \subseteq \overline{f((G \cap A) \times V)}$.

Покажемо, що $\omega_f(G \times V) < \varepsilon$. Нехай $p_i \in G \times V$ при $i = 1, 2$. Для кожного $i = 1, 2$ знайдемо таку точку $q_i \in (G \cap A) \times V$, що $|f(p_i) - f(q_i)| < \frac{\varepsilon}{6}$. Нехай $u_i = pr_X(q_i)$ при $i = 1, 2$. Розглянемо точки $r_i = (u_i, b)$. Оскільки $u_i \in G \cap A \subseteq U$, то

$$|f(r_1) - f(r_2)| = |f_b(u_1) - f_b(u_2)| \leq \omega_{f_b}(U) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Покладемо $v_i = pr_Y(q_i)$. Оскільки $v_i, b \in V = V_m$ і $u_i \in A = A_m$ при $i = 1, 2$, то з означення множини A_m випливає, що

$$|f(q_i) - f(r_i)| = |f^{u_i}(v_i) - f^{u_i}(b)| \leq \omega_{f_{u_i}}(V_m) < \frac{\varepsilon}{6}$$

при $i = 1, 2$. На основі цього будемо мати:

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(q_1)| + |f(q_1) - f(r_1)| + |f(r_1) - f(r_2)| +$$

$$+|f(r_2)-f(q_2)|+|f(q_2)-f(p_2)|<\frac{5\varepsilon}{6},$$

а значить, $\omega_f(G\times V)\le\frac{5\varepsilon}{6}<\varepsilon$.

Оскільки $\varnothing\neq G\subseteq U\subseteq U_0\subseteq\overline{A}$ і множина G відкрита, то існує точка $a\in G\cap A$. З означення множини A_m випливає, що $y_a\in V$, отже, $p=(a,y_a)\in G\times V$, звідки за доведеним отримуємо, що $\omega_f(p)\le\omega_f(G\times V)<\varepsilon$. Але ж з другого боку $a\in A\subseteq E$ і тому $\omega_f(p)=\omega_f(a,y_a)\ge\varepsilon$. Отримана суперечність завершує доведення теореми 5.3.1. □

З теореми 5.3.1 негайно випливає такий наслідок.

Наслідок 5.3.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір і $f:X\times Y\to Z$ – $\mathcal{N}$-відображення. Тоді:*

а) якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то множина $C_y(f)$ залишкова для кожного $y\in Y$;

б) якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то f має властивість Гана.

5.3.3. Метод Гана з [125] був розвинутий в [331, теорема 3.4.2].

Теорема 5.3.2. *[331, теорема 3.4.2] Нехай X – берівський простір, Y – метризовний компакт, Z – метричний простір і $f\in K_hC(X\times Y,Z)$. Тоді для кожного $\varepsilon>0$ множина $pr_X(D^\varepsilon(f))$ є замкненою і ніде не щільною в X.*

Зауважимо, що для KC-функцій це твердження іншим способом було доведене в [45, наслідок 3.8].

Зараз ми підсилимо теорему 5.3.2, застосувавши при цьому новий метод.

Теорема 5.3.3. *Нехай X – берівський простір, Y – метризовний компакт, Z – метричний простір і $f\in\mathcal{N}(X\times Y,Z)$. Тоді для кожного $\varepsilon>0$ множина $pr_X(D^\varepsilon(f))$ є замкненою і ніде не щільною в X.*

Доведення. Для чисел $\varepsilon>0$ і $\delta>0$ покладемо

$$A(\delta,\varepsilon)=\{x\in X:(\forall y',y''\in Y)(|y'-y''|_Y<\delta\Rightarrow|f^x(y')-f^x(y'')|_Y\le\varepsilon)\}.$$

Нехай G – довільна непорожня відкрита в X множина і $E=G\cap X_C(f)$. Оскільки простір X берівський, то G є множиною другої категорії в X.

Множина $X_C(f)$ залишкова в X, бо f має властивість (iii) з означення $\mathcal{N}$-функцій. Тому E – це множина другої категорії в X.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і розглянемо множини $F_n = A(\frac{1}{n}, \eta) \cap E$, де $\eta = \frac{\varepsilon}{6}$. Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = E$. Оскільки E є множиною другої категорії в X, то існує такий номер m, що множина F_m десь щільна в X, тобто $H = int\overline{F}_m \neq \varnothing$. Оскільки множина H відкрита в X і $H \subseteq \overline{F}_m$, то $H \subseteq \overline{H \cap F_m}$, звідки випливає, що $H \cap F_m \neq \varnothing$. Множина $U_0 = H \cap G$, очевидно, відкрита і непорожня, бо $U_0 \supseteq H \cap F_m$. Покладемо $A_0 = U_0 \cap F_m$. Зрозуміло, що $A_0 \subseteq U_0 \subseteq \overline{A}_0$.

Нехай $\delta = \frac{1}{2m}$ і $V_\delta(y) = \{v \in Y : |v - y|_Y < \delta\}$. З відкритого покриття $\{V_\delta(y) : y \in Y\}$ компактного простору Y виділимо скінченне підпокритя, що складається з куль $V_k = V_\delta(y_k)$, де $k = 1, ..., n$.

Розглянемо відкриту непорожню множину $U_0 \times V_1$ в добутку $X \times Y$. Оскільки f задовольняє умову (ii), то множина $Q_\eta(f)$ всюди щільна в $X \times Y$. Отже, існують точка $b \in V_1$ і непорожня відкрита в X множина G_1, такі, що $G_1 \subseteq U_0$ і $\omega_{f_b}(G_1) < \eta$. Згідно з умовою (i) існує така відкрита в X і непорожня множина U_1, що $U_1 \subseteq G_1$ і $f(U_1 \times V_1) \subseteq \overline{f((U_1 \cap A_0) \times V_1)}$.

Покажемо, що $\omega_f(U_1 \times V_1) < \varepsilon$. Нехай p_1 і p_2 – довільні точки з $U_1 \times V_1$. Оскільки $f(p_i) \in \overline{f((U_1 \cap A_0) \times V_1)}$ при $i = 1, 2$, то для кожного $i = 1, 2$ існує така точка $q_i = (u_i, v_i) \in (U_1 \cap A_0) \times V_1)$, що $|f(p_i) - f(q_i)|_Z < \eta$. Розглянемо точки $r_i = (u_i, b)$ при $i = 1, 2$. Оскільки b і v_i – це точки з кулі V_1, то

$$|b - v_i|_Y \leq |b - y_1|_Y + |y_1 - v_i|_Y < 2\delta = \frac{1}{m}.$$

Але $u_i \in A_0 \subseteq F_m$ при $i = 1, 2$. Тому згідно з означенням множини F_m будемо мати, що

$$|f(q_i) - f(r_i)|_Z = |f^{u_i}(v_i) - f^{u_i}(b)|_Z \leq \eta$$

при $i = 1, 2$. Крім того, $u_i \in U_1 \subseteq G_1$ при $i = 1, 2$, отже,

$$|f(r_1) - f(r_2)|_Z = |f_b(u_1) - f_b(u_2)|_Z \leq \omega_{f_b}(G_1) < \eta.$$

Тому

$$|f(p_1) - f(p_2)|_Z \leq |f(p_1) - f(q_1)|_Z + |f(q_1) - f(r_1)|_Z +$$
$$|f(r_1) - f(r_2)|_Z + |f(r_2) - f(q_2)|_Z + |f(q_2) - f(p_2)|_Z < 5\eta.$$

Звідси випливає, що $\omega_f(U_1 \times V_1) \leq 5\eta < \varepsilon$.

Повторивши цю побудову для множини $U_1 \times V_1$, ми одержимо непорожню відкриту в X множину U_2, таку, що $U_2 \subseteq U_1$ і $\omega_f(U_2 \times V_2) < \varepsilon$. Так крок за кроком ми зможемо визначити відкриті непорожні множини $U_1, U_2, ..., U_n$ в X, такі, що $U_{k-1} \supseteq U_k$ і $\omega_f(U_k \times V_k) < \varepsilon$ при $k = 1, ..., n$.

Покладемо $U = U_n$. Ясно, що $U \subseteq U_k$ для кожного $k = 1, ..., n$, а тому $\omega_f(U \times V_k) \leq \omega_f(U_k \times V_k) < \varepsilon$. Для кожної точки $p = (x, y) \in U \times Y$ існує таке $k = 1, ..., n$, що $y \in V_k$, і тому $\omega_f(p) \leq \omega_f(U \times V_k) < \varepsilon$, адже множини $U \times V_k$ відкриті в $X \times Y$. Таким чином, $(U \times Y) \cap D^\varepsilon(f) = \varnothing$, отже, $U \cap pr_X(D^\varepsilon(f)) = \varnothing$. Оскільки множина U відкрита в X і $\varnothing \neq U \subseteq G$, то це і показує, що множина $pr_X(D^\varepsilon(f))$ніде не щільна в X. За теоремою Куратовського [322, с. 200] про проекцію, множина $E = pr_X(D^\varepsilon(f))$ буде замкненою в X. $\square$

5.3.4. Нехай X – берівський, Y – топологічний і Z – метричний простори і відображення $f : X \times Y \to Z$ має властивість Гана. Легко перевірити, що тоді f задовольняє умови (ii) та (iii), причому для виконання (ii) досить і того, що множина $C_y(f)$ всюди щільна для кожного $y \in Y$. Наведемо приклад, який показує, що умова (i) може при цьому не виконуватись.

Приклад 5.3.2. *Існує $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, де $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ – додатна піввісь, яка має властивість Гана, але умова (i) не виконується.*

Побудова прикладу. Нехай $n \to r_n$ – бієкція натурального ряду $\mathbb{N}$ на множину $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел і $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – множина всіх ірраціональних чисел. Розглянемо функцію $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, яка визначена таким чином: $f(x, y) = 1 - 2|y - n + \frac{1}{2}|$, якщо $x = r_n$ і $n - 1 \leq y \leq n$, і $f(x, y) = 0$ в інших точках. Оскільки для кожного n маємо, що $D(f) \cap (\mathbb{R} \times [n-1, n]) = \{r_n\} \times (n-1, n)$, то $D(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{r_n\} \times (n-1, n)$, отже, $pr_{\mathbb{R}} D(f) = \mathbb{Q}$. Звідси негайно випливає, що f має властивість Гана. Разом з тим f не задовольняє умову (i). Справді, для довільної відкритої непорожньої множини G в $\mathbb{R}$ існує таке n, що $r_n \in G$, отже,

$$[0, 1] = f(\{z_n\} \times (n-1, n)) \subseteq f(G \times \mathbb{R}^+) \subseteq [0, 1],$$

а тому $f(G \times \mathbb{R}^+) = [0, 1]$. Але $f((G \cap \mathbb{I}) \times \mathbb{R}^+) = \{0\}$, а значить, і $\overline{f((G \cap \mathbb{I}) \times \mathbb{R}^+)} = \{0\}$. Таким чином, $\overline{f((G \cap \mathbb{I}) \times \mathbb{R}^+)} \not\supseteq f(G \times \mathbb{R}^+)$, незважаючи на те, що $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$. $\square$

Умова компактності в теоремі 5.3.2 є істотною, навіть якщо відображення буде квазінеперервним відносно першої змінної і рівномірно неперервним відносно другої. Це показує наступний приклад.

Приклад 5.3.3. *Існує функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка квазінеперервна відносно першої змінної і рівномірно неперервним відносно другої, але для деякого $\varepsilon > 0$ проекція $pr_X(D^\varepsilon(f))$ є всюди щільною в $\mathbb{R}$.*

Побудова прикладу. Нехай знову $n \to r_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ – бієкція. Визначимо функцію $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ так: $f(x,y) = \sqrt{\frac{1}{4} - (x - r_n)^2 - (y-n)^2}$, якщо $r_n - \sqrt{\frac{1}{4} - (y-n)^2} \le x \le r_n$ і $f(x,y) = 0$ в решті точок. Всі горизонтальні y-розрізи f_y неперервні зліва, а значить, і квазінеперервні. Далі, оскільки функція $g(x,y) = \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}$ рівномірно неперервна на компакті $x^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$, то всі її x-розрізи g^x при $|x| \le \frac{1}{2}$ є одностайно рівномірно неперервними, звідки негайно випливає і рівномірна неперервність всіх x-розрізів f^x функції f. Разом з тим для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ маємо: $(r_n, n) \in D^\varepsilon(f)$ для кожного n. Отже, проекція A множини $D^\varepsilon(f)$ на вісь абсцис містить множину $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел, а значить, є всюди щільною в $\mathbb{R}$. Більше того, легко перевірити, що $D^\varepsilon(f) = \{(r_n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і $A = \mathbb{Q}$. □

5.4. Нове узагальнення теореми Калбрі-Троалліка

5.4.1. В цьому підрозділі ми узагальнимо теореми 5.3.1 і 1.6.1.

Твердження 5.4.1. *Нехай X та Y – топологічні простори. Многозначне відображення $F : X \to Y$ буде квазінеперервним знизу тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритої непорожньої множини U в X і довільної множини $A \subseteq X$ з умови $U \subseteq \overline{A}$ випливає, що $F(U) \subseteq \overline{F(A)}$.*

Доведення. Нехай відображення F квазінеперервне знизу. Візьмемо довільну відкриту непорожню множину U в X і довільну множину $A \subseteq X$, таку, що $U \subseteq \overline{A}$. Покажемо, що $F(U) \subseteq \overline{F(A)}$. Розглянемо довільну точку $y_0 \in F(U)$ і довільний відкритий окіл V точки y_0 в Y. Оскільки $y_0 \in F(U)$, то існує точка $x_0 \in U$, така, що $y_0 \in F(x_0)$. Тоді $V \cap F(x_0) \neq \varnothing$. Оскільки U – окіл точки x_0 і $V \cap F(x_0) \neq \varnothing$, то з квазінеперервності знизу відображення F у точці x_0 випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$

і $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для всіх $x \in G$. Множина A щільна в U, тому існує точка $a \in A \cap G$. Тоді $F(a) \cap V \neq \varnothing$, а тому і $V \cap F(A) \neq \varnothing$. Отже, $y_0 \in \overline{F(A)}$.

Нехай $F(U) \subseteq \overline{F(A)}$, як тільки $U \subseteq \overline{A}$ і множина U відкрита в X. Припустимо, що існує точка $x_0 \in X$, така, що відображення F не є квазінеперервним знизу в точці x_0. Тоді існують відкрита непорожня множина V в Y, окіл U точки x_0 в X і щільна в U множина A, такі, що $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ і $F(x) \cap V = \varnothing$ для всіх точок $x \in A$. Оскільки $F(U) \subseteq \overline{F(A)}$, $F(A) \subseteq Y \setminus V$ і множина $Y \setminus V$ замкнена, то $F(U) \subseteq \overline{F(A)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V$. Тоді $F(x_0) \subseteq Y \setminus V$, що приводить до суперечності. □

Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *псевдоквазінеперервним знизу*, якщо для кожної непорожньої відкритої множини U в X і довільної підмножини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $F(G) \subseteq \overline{F(A)}$.

Позначимо через $K^-(F)$ множину точок, в яких відображення F квазінеперервне знизу.

Твердження 5.4.2. *Нехай X, Y – топологічні простори і $F : X \to Y$ – многозначне відображення, у якого множина $X \setminus K^-(F)$ ніде не щільна. Тоді відображення F псевдоквазінеперервне знизу.*

Доведення. Розглянемо довільну відкриту непорожню U в X та множину A в X, таку, що $U \subseteq \overline{A}$. Оскільки множина $X \setminus K^-(F)$ ніде не щільна, то існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U \cap K^-(F)$. Розглянемо звуження $F_1 = F_{|G}$. Відображення F_1 квазінеперервне знизу в кожній точці з G. Оскільки множина A щільна в U і множина G відкрита, то $\overline{A \cap G} \supseteq G$. З квазінеперервності знизу відображення F_1 і твердження 5.4.1 випливає, що

$$F(G) = F_1(G) \subseteq \overline{F_1(A \cap G)} = \overline{F(A \cap G)} \subseteq \overline{F(A)}.$$

Отже, відображення F псевдоквазінеперервне знизу. □

З твердження 5.4.2 негайно випливає, що кожне квазінеперервне знизу відображення буде і псевдоквазінеперервним знизу.

Зауважимо, що обернене не вірно навіть для однозначних відображень. Справді, функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої $f(0) = 1$ і $f(x) = 0$ при $x \neq 0$, не є квазінеперервною в точці 0 і лише в ній, а значить, для відображення $F(x) = \{f(x)\}$ множина $\mathbb{R} \setminus K^-(F) = \{0\}$ ніде не щільна в $\mathbb{R}$, отже, F –

псевдоквазінеперервне знизу (за твердженням 5.4.2) і не квазінеперервне знизу відображення.

5.4.2. Нехай X і Y – топологічні простори. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *покриттєво категорно кліковим знизу*, якщо для кожного відкритого покриття $\mathcal{V}$ простору Y і довільної множини E другої категорії в X існують десь щільна в X множина A і множина $V \in \mathcal{V}$, такі, що $A \subseteq E$ і $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для всіх $x \in A$.

Твердження 5.4.3. *Нехай простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, X – довільний топологічний простір. Тоді довільне многозначне відображення $F : X \to Y$ є покриттєво категорно кліковим знизу.*

Доведення. Розглянемо довільне відкрите покриття $\mathcal{V}$ простору Y і довільну множини E другої категорії в X. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Y. Оскільки $\mathcal{V}$ – покриття простору Y, то для кожного $x \in X$ існують відкрита множина $V(x) \in \mathcal{V}$ і точка $y_x \in F(x) \cap V(x)$. Для кожного номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in E : y_x \in V_n \subseteq V(x)\}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E$. Оскільки множина E другої категорії, то існує номер n такий, що множина $A = A_n$ десь щільна в X. Для довільної точки $x_0 \in A$ розглянемо множину $V = V(x_0) \in \mathcal{V}$. Оскільки $V_n \subseteq V$ і $F(x) \cap V_n \neq \varnothing$ для $x \in A$, то $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для всіх $x \in A$. Отже, відображення F є покриттєво категорно кліковим знизу. $\square$

Твердження 5.4.4. *Нехай X та Y – топологічні простори і $F : X \to Y$ – многозначне відображення, для якого множина $K^-(F)$ залишкова в X. Тоді відображення F покриттєво категорно клікове знизу.*

Доведення. Розглянемо відкрите покриття $\mathcal{V}$ простору Y і довільну множину E другої категорії в X. Оскільки множина E другої категорії, то множина $E_1 = E \cap K^-(F)$ теж другої категорії в X, отже, множина $U = int\overline{E_1}$ непорожня. Але $U \subseteq \overline{E_1}$ і U – відкрита в X, тому $U \cap E_1 \neq \varnothing$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in U \cap E_1$. Оскільки $\mathcal{V}$ – покриття простору Y, то існує відкрита множина $V \in \mathcal{V}$, така, що $V \cap F(x_0) \neq \varnothing$. Відображення F

квазінеперервне знизу у точці x_0, бо $x_0 \in E_1 \subseteq K^-(F)$. Тоді існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $V \cap F(x) \neq \varnothing$ для всіх $x \in G$. Покладемо $A = G \cap E_1$. Тоді множина A десь щільна в X, $A \subseteq E_1 \subseteq E$ і $V \cap F(x) \neq \varnothing$ для всіх $x \in A$. Отже, відображення F покриттєво категорно клікове знизу. $\square$

Зрозуміло, що з твердження 5.4.4 негайно випливає, що кожне квазінеперервне знизу відображення $F : X \to Y$ є покриттєво категорно кліковим знизу.

5.4.3. Нехай $\mathcal{V}$ – деяка система множин у просторі Y. Для точки $y \in Y$ покладемо

$$\mathcal{V}(y)=\{V \in \mathcal{V} : V - \text{окіл точки } y \text{ в } Y\} \text{ і}$$

$$B(\mathcal{V})=\{y \in Y : \mathcal{V}(y) - \text{база околів точки } y \text{ в } Y\}.$$

Теорема 5.4.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метризовний простір, $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – не більш, ніж зліченна система множин в Y, $f : X \times Y \to Z$ – таке відображення, що для кожної множини $V \in \mathcal{V}$, для якої $V \cap B(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, відображення $F_V : X \ni x \mapsto F_V(x) = f^x(V) \subseteq Z$ псевдоквазінеперервне знизу та покриттєво категорно клікове знизу. Тоді множина*

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

є залишкова в X.

Доведення. Зафіксуємо метрику $|\circ - \circ|$ на просторі Z, яка породжує його топологічну структуру. Припустимо, що доповнення

$$E_0 = X \setminus R = \{x \in X : \exists y_x \in C(f^x) \cap B(\mathcal{V}) | p_x = (x, y_x) \in D(f)\}$$

є множиною другої категорії в X. Для номерів m і n розглянемо множини

$$A_{m,n} = \{x \in E_0 : \omega_f(p_x) > \frac{1}{m}, V_n \in \mathcal{V}(y_x), \omega_{f^x}(V_n) < \frac{1}{3m}\}.$$

Якщо $x \in E_0$, то $p_x = (x, y_x) \in D(f)$ і $y_x \in C(f^x) \cap B(\mathcal{V})$, тому $\omega_f(p_x) > 0$, $\omega_{f^x}(y_x) = 0$ і $y_x \in B(\mathcal{V})$, звідки негайно випливає, що існують такі номери m і n, що $\omega_f(p_x) > \frac{1}{m}$, $\omega_{f^x}(V_n) < \frac{1}{3m}$ і $V_n \in \mathcal{V}(y_x)$. Це показує, що $\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n} = E_0$. Оскільки E_0 – це множина другої категорії, то існують номери m і n, такі, що множина $E = A_{m,n}$ теж є множиною другої категорії.

Зауважимо, що для множини $V = V_n \in \mathcal{V}$ перетин $V \cap B(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, бо $A_{m,n} \neq \varnothing$, адже $A_{m,n}$ є множиною другої категорії, а тому існує точка $a \in A_{m,n}$ і для неї $V \in \mathcal{V}(y_a)$, причому $y_a \in B(\mathcal{V})$ за побудовою, отже, $y_a \in V \cap B(\mathcal{V})$. Тому за умовою відображення $F_V : X \to Z$ покриттєво категорно клікове знизу і псевдоквазінеперервне знизу.

Для $\varepsilon > 0$ і точки $z \in Z$ введемо кулю

$$W_\varepsilon(z) = \{w \in Z : |w - z| < \varepsilon\}.$$

Візьмемо $\varepsilon = \frac{1}{6m}$ і розглянемо відкрите покриття $\mathcal{W} = \{W_\varepsilon(z) : z \in Z\}$ простору Z. З покриттєвої категорної кількості знизу відображення F_V випливає, що у множині другої категорії E існують десь щільна в X множина A і куля $W = W_\varepsilon(z_0) \in \mathcal{W}$, такі, що $A \subseteq E$ і $F_V(x) \cap W \neq \varnothing$ для кожного $x \in A$.

Покажемо, що $\omega_f(E_2 \times V) \leq \frac{1}{m}$. Візьмемо довільні точки $p_i = (x_i, y_i) \in A \times V$, де $i = 1, 2$. Оскільки $F_V(x) \cap W \neq \varnothing$ для кожного $x \in A$ і $x_i \in A$ при $i = 1, 2$, то існують точки $v_i \in V$, такі, що для точки $q_i = (x_i, v_i)$ будемо маємо, що $f(q_i) \in F_V(x_i) \cap W$ для $i = 1, 2$. Зауважимо, що $|f(q_1) - f(q_2)| < 2\varepsilon$, бо $f(q_i) \in W = W_\varepsilon(z_0)$ при $i = 1, 2$. Оскільки $\{y_i, v_i\} \subseteq V = V_n$, а $x_i \in A \subseteq E = A_{m,n}$ при $i = 1, 2$, то

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(q_1)| + |f(q_1) - f(q_2)| + |f(q_2) - f(p_2)| \leq$$

$$\leq |f^{x_1}(y_1) - f^{x_1}(v_1)| + 2\varepsilon + |f^{x_2}(y_2) - f^{x_2}(v_2)| \leq \omega_{f^{x_1}}(V_n) + 2\varepsilon + \omega_{f^{x_2}}(V_n) <$$

$$< 2\varepsilon + 2\varepsilon + 2\varepsilon = 6\varepsilon = \frac{1}{m}.$$

Тому $\omega_f(A \times V) \leq \frac{1}{m}$.

Відкрита множина $U = int\overline{A}$ непорожня, бо A десь щільна. Оскільки відображення F_V псевдоквазінеперервне знизу і $U \subseteq \overline{A}$, то існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $F_V(G) \subseteq \overline{F_V(A)}$. Зауважимо, що

$$\omega_f(Q) = diam f(Q) = \sup\{|z' - z''| : z', z'' \in f(Q)\}$$

і

$$diam C = diam \overline{C}$$

для довільного $C \subseteq Z$. Тому

$$\omega_f(G \times V) = diam f(G \times V) = diam F_V(G) \leq diam \overline{F_V(A)} =$$

$$= diam F_V(A) = diam f(A \times V) = \omega_f(A \times V) \leq \frac{1}{m}.$$

Оскільки $G \subseteq U \subseteq \overline{A}$ і множина G відкрита, то $G \subseteq \overline{G \cap A}$. Але $G \neq \varnothing$, отже, і $G \cap A \neq \varnothing$. Візьмемо якусь точку $x_0 \in G \cap A$. Ясно, що відкрита множина $G \times V$ буде околом точки $p_{x_0} = (x_0, y_{x_0})$ в добутку $X \times Y$, бо $x_0 \in G$, $y_{x_0} \in V$ і множини G та V відкриті у відповідних просторах. Тому $\omega_f(p_{x_0}) \leq \omega_f(G \times V) \leq \frac{1}{m}$. З другого боку $x_0 \in A \subseteq E = A_{m,n}$. Тому $\omega_f(p_{x_0}) > \frac{1}{m}$. Отримана суперечність доводить, що доповнення $X \setminus R$ насправді є множиною першої категорії, а R є залишковою множиною в X. □

Зауваження 5.4.1. *Многозначне відображення $F : X \to Y$ зі значеннями у метричному просторі (Y, d) ми називаємо категорно кліковим знизу, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільної множини E другої категорії в X існують десь щільна в X множина A і відображення $g : A \to Y$, такі, що $A \subseteq E$, $g(x) \in F(x)$ для кожного $x \in A$ і $diam g(A) < \varepsilon$. Якщо простір Y метризовний, то відображення $F : X \to Y$ ми називаємо топологічно категорно кліковим знизу, якщо існує така метрика d на просторі Y, що породжує топологічну структуру простору Y і відображення $F : X \to (Y, d)$ є категорно кліковим знизу. Нескладно перевірити, що з покриттєвої категорної кліковості знизу випливає топологічна для метризовного простору значень Y. Невідомо чи має місце обернена імплікація. Зауважимо, що в доведенні теореми 5.4.1 використовувалася тільки топологічна категорна кліковість знизу відповідних відображень.*

5.4.4. Покажемо, що теореми 5.3.1 і 1.6.1 з праць [354] і [44] є наслідками загальної теореми 5.4.1. Нагадаємо [354], що *$\mathcal{N}$-відображенням* $f : X \times Y \to Z$ добутку топологічних просторів X і Y зі значеннями в метричному просторі Z називається відображення, що має такі три властивості:

(i) для довільних відкритих непорожніх множин U і V відповідно в X і Y та довільної множини A в X, для якої $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G \times V) \subseteq \overline{f((G \cap A) \times V)}$;

(ii) для кожного $\varepsilon > 0$ множина $Q_\varepsilon(f) = \{(x, y) \in X \times Y : \omega_{f_y}(x) < \varepsilon\}$ скрізь щільна в просторі $X \times Y$;

(iii) множина $X_C(f) = \{x \in X : f^x$ – неперервне$\}$ є залишковою в X.

Припустимо, що $f : X \times Y \to Z$ – це $\mathcal{N}$-відображення і B – множина зліченного типу в Y. Розглянемо множину

$$C_B(f) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C(f)\}$$

і доведемо, що вона є залишковою в X. З означення множини зліченного типу випливає, що існує така не більш, ніж зліченна система $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих множин у просторі Y, що для кожного $y \in B$ система $\mathcal{V}_0(y) = \{V \in \mathcal{V} : y \in V\}$ буде базою околів точки y. Оскільки елементи системи $\mathcal{V}$ відкриті, то $\mathcal{V}_0(y) = \mathcal{V}(y)$ для кожного $y \in B$, при цьому $B \subseteq B(\mathcal{V})$.

Нехай $V \in \mathcal{V}$, таке, що $V \cap B(\mathcal{V}) \neq \varnothing$ і $F_V(x) = f^x(V)$. Доведемо спочатку, що многозначне відображення $F_V : X \to Z$ псевдоквазінеперервне знизу.

Візьмемо довільну відкриту непорожню множину U в X і множину A в X, такі, що $U \subseteq \overline{A}$. З умови (i) випливає, що існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $f(G \times V) \subseteq \overline{f((G \cap A) \times V)}$. Але $F_V(G) = f(G \times V)$, а $F_V(A) = f(A \times V) \supseteq f((G \cap A) \times V)$. Тому і $F_V(G) \subseteq \overline{F_V(A)}$. Отже, F_V псевдоквазінеперервне знизу.

Тепер встановимо, що відображення $F_V : X \to Z$ покриттєво категорно клікове знизу. Розглянемо довільне відкрите покриття $\mathcal{W}$ простору Z і множину E другої категорії в X. Оскільки множина $X_C(f)$ залишкова в X, то $E_1 = X_C(f) \cap E$ – це множина другої категорії в X. Розглянемо довільну точку $y_0 \in V \cap B(\mathcal{V})$. Оскільки $\mathcal{W}$ – відкрите покриття простору Z, то для кожної точки $x \in E_1$ існують число $\varepsilon_x > 0$ і відкрита множина $W_x \in \mathcal{W}$, такі, що $z_x = f(x, y_0) \in W_{\varepsilon_x}(z_x) \subseteq W_x$. Для номерів m і n розглянемо множини

$$A_{m,n} = \{x \in E_1 : \frac{1}{m} < \varepsilon_x, \omega_{f^x}(V_n) < \frac{1}{3m}\}.$$

З неперервності f^x при $x \in E_1$ випливає, що $\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n} = E_1$. Оскільки множина E_1 другої категорії, то існують номери m_0 і n_0, такі, що множина A_{m_0,n_0} десь щільна в X. Нехай множина A_{m_0,n_0} щільна у відкритій непорожній множині U в X. З умови (ii) випливає, що існують точка $b \in V$ і відкрита непорожня множина G, такі, що $G \subseteq U$ і $\omega_{f_b}(G) < \frac{1}{3m}$. Покажемо, що $diam f_{y_0}(G \cap A_{m_0,n_0}) < \frac{1}{m}$. Нехай $x_1, x_2 \in G \cap A_{m_0,n_0}$. Тоді

$$|f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0)| \leq |f(x_1, y_0) - f(x_1, b)| + |f(x_1, b) - f(x_2, b)| +$$
$$+ |f(x_2, b) - f(x_2, y_0)| < \frac{1}{3m} + \frac{1}{3m} + \frac{1}{3m} = \frac{1}{m}.$$

Візьмемо довільну точку $x_0 \in G \cap A_{m_0,n_0}$. Тоді

$$f(x, y_0) \in W_{\frac{1}{m}}(z_{x_0}) \subseteq W_{\varepsilon_{x_0}}(z_{x_0}) \subseteq W_{x_0}$$

для кожного $x \in G \cap A_{m_0,n_0}$. Покладемо $A = G \cap A_{m_0,n_0}$. Множина A щільна в G, бо множина A_{m_0,n_0} щільна в U і $G \subseteq U$. Оскільки $f(x, y_0) \in F_V(x) \cap W_{x_0}$ для $x \in A$, то це означає, що многозначне відображення F_V покриттєво категорно клікове знизу.

З теореми 5.4.1 випливає, що множина

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

є залишковою в X. Оскільки $B \subseteq B(\mathcal{V})$, то $R \subseteq C_B(f)$ і тому множина $C_B(f)$ теж залишкова в X.

Теорема 1.6.1 теж є наслідком теореми 5.4.1 оскільки з твердження 5.4.2 випливає, що квазінеперервне знизу многозначне відображення є псевдоквазінеперервним знизу, а з твердження 5.4.4 випливає, що воно є і покриттєво категорно кліковим знизу.

5.4.5. Теорема 5.4.1 не є наслідком ні теореми 5.3.1, ні теореми 1.6.1. Це демонструють наступні приклади.

Приклад 5.4.1. *Існує функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови теореми 5.4.1, але не задовольняє умови теореми 5.3.1.*

Побудова прикладу. Визначимо відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, покладаючи $f(x, y) = 0$, якщо $|y| \leq 1$ або $|y| \geq 1$ і x – ірраціональне і $f(x, y) = |y| - 1$, якщо $|y| \geq 1$ і x – раціональне. Нехай $V_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, а $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Зрозуміло, що $B(\mathcal{V}) = \{0\}$. Очевидно, що f задовольняє умови теореми 5.4.1, бо для кожного $V \in \mathcal{V}$ відображення $F_V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ стале, адже $F_V(x) = f^x(V) = \{0\}$ для кожного $x \in \mathbb{R}$, бо $V \subseteq (-1, 1)$. Разом з тим f не задовольняє умову (ii), бо

$$Q_\varepsilon(f) = \mathbb{R} \times (-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$$

для кожного $\varepsilon > 0$, а ця множина не є всюди щільною. Зауважимо, що не має і властивості (i), бо для включення $f(G \times V) \subseteq \overline{f((G \cap A) \times V)}$ не виконується для жодної відкритої непорожньої множини, бо $f((G \cap A) \times V) = \{0\}$, а $f(G \times V) = [0, +\infty)$. Цей приклад показує, що теорема 5.4.1 сильніша від теореми 5.3.1. $\square$

Приклад 5.4.2. *Існує функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови теореми 5.4.1, але не задовольняє умови теореми 1.6.1.*

Побудова прикладу. Розглянемо функцію $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої $f(x, y) = 0$ при $x \neq 0$ і $f(0, y) = 1$ для довільного y. Припустимо, що множина V непорожня. Тоді

$$F_V(x) = f^x(V) = \begin{cases} \{0\}, x \neq 0, \\ \{1\}, x = 0. \end{cases}$$

Ясно, що відображення $F_V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не є квазінеперервним знизу в точці 0 і тільки в ній. Тому для нього $K^-(F_V) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. На основі тверджень 5.4.2 і 5.4.4 відображення F_V буде псевдоквазінеперервним знизу і покриттєво категорно кліковим знизу для кожного $V \neq \varnothing$ і разом з тим жодне відображення F_V не є квазінеперервним знизу. Цей приклад показує, що теорема 5.4.1 сильніша від теореми 1.6.1. □

5.5. Характеризація властивості Гана

5.5.1. Нехай X і Y – топологічні простори, а Z – метричний простір з метрикою $|\circ - \circ|$. Нагадаємо, що для непорожньої множини $E \subseteq Z$ через $diam(E) = \sup\limits_{u,v \in E} |u - v|$ позначимо її діаметр, а для функції $f : X \to Z$ позначимо через $\omega_f(A) = diam(f(A))$ коливання функції f на множині A. Через $B_r(z_0) = \{z \in Z : |z - z_0| < r\}$ позначимо відкриту кулю з центром в точці z_0 і радіуса r.

Нехай $F : X \to Z$ – многозначне відображення. Ми кажемо, що многозначне відображення $F : X \to Z$ *задовольняє умову (A)*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$, довільної відкритої непорожньої множини U в X і довільної множини $E \subseteq X$, щільної в U, для яких $diam(F(E)) < \varepsilon$, існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $diam(F(G)) < \varepsilon$. Многозначне відображення $F : X \to Z$ називається *категорно кліковим знизу* [349, 196], якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільної множини E другої категорії в X існують десь щільна в X множина A і відображення $g : A \to Z$, такі, що $A \subseteq E$, $g(x) \in F(x)$ для кожного $x \in A$ і $diam(g(A)) < \varepsilon$.

Спершу зазначимо, що коли Z – сепарабельний метричний простір, то довільне многозначне відображення $F : X \to Z$ є категорно кліковим знизу.

Твердження 5.5.1. *Нехай X – топологічний простір, Z – метричний простір і $F : X \to Z$ – многозначне відображення. Тоді*

(1) якщо F – псевдоквазінеперервне знизу, то F – задовольняє умову (A);

(2) якщо F – покриттєво категорно клікове знизу, то F – категорно клікове знизу.

Доведення. Спочатку перевіримо (1). Візьмемо $\varepsilon > 0$, відкриту непорожню множину U в X і щільну в U множину $E \subseteq X$, для яких $diam(F(E)) < \varepsilon$. Оскільки відображення F псевдоквазінеперервне знизу, то існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $F(G) \subseteq \overline{F(E)}$. Тоді

$$diam(F(G)) \leq diam(\overline{F(E)}) = diam(F(E)) < \varepsilon.$$

Тепер перевіримо (2). Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і довільну множину E другої категорії в X. Розглянемо відкрите покриття $\mathcal{W} = \{B_{\frac{\varepsilon}{3}}(z) : z \in Z\}$ простору Z. З покриттєвої категорної кліковості знизу відображення F випливає, що існують десь щільна в X множина A і множина $W \in \mathcal{W}$, такі, що $A \subseteq E$ і $F(x) \cap W \neq \varnothing$ для всіх $x \in A$. Оскільки $W \in \mathcal{W}$, то існує точка $z_0 \in Z$, така, що $W = B_{\frac{\varepsilon}{3}}(z_0)$. Для кожної точки $x \in A$ виберемо точку $z_x \in F(x) \cap W$. Тоді для відображення $g : A \to Z$, $g(x) = z_x$, маємо, що $g(x) \in F(x)$ для кожного $x \in A$ і $g(A) \subseteq W$. Тому $diam(g(A)) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. □

Приклад 5.5.1. *Існує функція $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умову (A), але не є псевдоквазінеперервною знизу.*

Побудова прикладу. Нехай $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ – множина раціональних точок. Розглянемо функцію $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що визначена формулою

$$F(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{n}\}, & x = r_n, \\ \{0\}, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Функція F задовольняє умову (A), але не є псевдоквазінеперервною знизу. □

5.5.2. Для доведення основного результату нам буде потрібна така лема.

Лема 5.5.1. *Нехай X – топологічний простір, Z – метричний простір з метрикою $|\circ - \circ|$, $\varepsilon > 0$, многозначне відображення $F : X \to Z$ задовольняє умову (A) і є категорно клікове знизу, E – множина другої категорії в X і $E \subseteq \{x \in X : diam(F(x)) < \varepsilon\}$. Тоді існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq \overline{E}$ і $diam(F(G)) < 3\varepsilon$.*

Доведення. З категорної кліковості знизу відображення F випливає, що існують десь щільна множина E_1 в X і відображення $g : E_1 \to Z$, такі, що $E_1 \subseteq E$, $g(x) \in F(x)$ для кожного $x \in E_1$ і $diam(g(E_1)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Покажемо, що $diam(F(E_1)) < \frac{8\varepsilon}{3}$.

Візьмемо точки $z_1, z_2 \in F(E_1)$. Тоді існують точки $x_1, x_2 \in E_1$, такі, що $z_i \in F(x_i)$ для $i = 1, 2$. В такому разі

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - g(x_1)| + |g(x_1) - g(x_2)| + |g(x_2), z_2| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon = \frac{5\varepsilon}{2}.$$

Отже, $diam(F(E_1)) \leq \frac{5\varepsilon}{2} < \frac{8\varepsilon}{3}$.

Покладемо $U = int\overline{E_1}$. Згідно з умовою (A) існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq \overline{E_1} \subseteq \overline{E}$ і $diam(F(G)) < \frac{8\varepsilon}{3} < 3\varepsilon$. □

Нехай $\mathcal{V}$ – деяка система множин у просторі Y. Для точки $y \in Y$ покладемо

$$\mathcal{V}(y)=\{V \in \mathcal{V} : V - \text{окіл точки } y \text{ в } Y\} \text{ і}$$

$$B(\mathcal{V})=\{y \in Y : \mathcal{V}(y) - \text{база околів точки } y \text{ в } Y\}.$$

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і непорожньої множини V в Y ми будемо розглядати многозначне відображення $F_V : X \ni x \mapsto F_V(x) = f^x(V) \subseteq Z$.

Теорема 5.5.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – не більш, ніж зліченна система множин в Y, $f : X \times Y \to Z$ – така функція, що для кожної множини $V \in \mathcal{V}$, для якої $V \cap B(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, відображення F_V задовольняє умову (A) і є категорно клікове знизу. Тоді множина*

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

є залишкова в X.

Доведення. Припустимо, що доповнення

$$E_0 = X \setminus R = \{x \in X : \exists y_x \in C(f^x) \cap B(\mathcal{V}) | p_x = (x, y_x) \in D(f)\}$$

є множиною другої категорії в X. Для номерів m і n розглянемо множини

$$A_{m,n} = \{x \in E_0 : \omega_f(p_x) > \frac{1}{m}, V_n \in \mathcal{V}(y_x), \omega_{f^x}(V_n) < \frac{1}{3m}\}.$$

Якщо $x \in E_0$, то $p_x = (x, y_x) \in D(f)$ і $y_x \in C(f^x) \cap B(\mathcal{V})$, тому $\omega_f(p_x) > 0$, $\omega_{f^x}(y_x) = 0$ і $y_x \in B(\mathcal{V})$, звідки негайно випливає, що існують такі номери m і

n, що $\omega_f(p_x) > \frac{1}{m}$, $\omega_{f^x}(V_n) < \frac{1}{3m}$ і $V_n \in \mathcal{V}(y_x)$. Це показує, що $\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n} = E_0$. Оскільки E_0 – це множина другої категорії, то існують номери m і n, такі, що множина $E = A_{m,n}$ теж є множиною другої категорії.

Зауважимо, що для множини $V = V_n \in \mathcal{V}$ перетин $V \cap B(\mathcal{V}) \neq \varnothing$, бо $A_{m,n} \neq \varnothing$, адже $A_{m,n}$ є множиною другої категорії, а тому існує точка $a \in A_{m,n}$ і для неї $V \in \mathcal{V}(y_a)$, причому $y_a \in B(\mathcal{V})$ за побудовою, отже, $y_a \in V \cap B(\mathcal{V})$. Тому за умовою многозначне відображення $F_V : X \to Z$ задовольняє умову (A) і є категорно клікове знизу.

Для відображення F_V виконуються усі умови леми 5.5.1, згідно з якою існує відкрита непорожня множина G в X, така, що $G \subseteq \overline{E}$ і $diam(F_V(G)) < \frac{1}{m}$. Тоді

$$\omega_f(G \times V) = diam f(G \times V) = diam F_V(G) < \frac{1}{m}.$$

Оскільки $G \subseteq \overline{E}$ і множина G відкрита, то $G \subseteq \overline{G \cap E}$. Але $G \neq \varnothing$, отже, і $G \cap E \neq \varnothing$. Візьмемо якусь точку $x_0 \in G \cap E$. Ясно, що відкрита множина $G \times V$ буде околом точки $p_{x_0} = (x_0, y_{x_0})$ в добутку $X \times Y$, бо $x_0 \in G$, $y_{x_0} \in V$ і множини G та V відкриті у відповідних просторах. Тому $\omega_f(p_{x_0}) \leq \omega_f(G \times V) \leq \frac{1}{m}$. З другого боку $x_0 \in E \subseteq E = A_{m,n}$. Тому $\omega_f(p_{x_0}) > \frac{1}{m}$. Отримана суперечність доводить, що доповнення $X \setminus R$ насправді є множиною першої категорії, а R є залишковою множиною в X. □

Твердження 5.5.1 та приклад 5.5.1 показують, що теорема 5.5.1 сильніша за відповідну теорему з [349, 196].

Як наслідок з теореми 5.5.1 одержуємо наступний результат.

Наслідок 5.5.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, B – множина зліченного типу в Y, $f : X \times Y \to Z$ – така функція, що для кожної множини $V \in \mathcal{V}_B$, для якої $V \cap B \neq \varnothing$, відображення F_V задовольняє умову (A) та є категорно клікове знизу і множина $M = \{x \in X : B \subseteq C(f^x)\}$ залишкова в X. Тоді множина $C_B(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Для системи $\mathcal{V}_B$ множина $B(\mathcal{V}_B) = B$. Тоді з теореми 5.5.1 випливає, що множина

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

є залишкова в X. Зауважимо, що $C(f^x) \cap B(\mathcal{V}_B) = B$ для $x \in M$. Множина $R \cap M$ є залишковою в X і $R \cap M \subseteq C_B(f)$. Отже, множина $C_B(f)$ залишкова в X. $\square$

Наслідок 5.5.2. *Нехай X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, $\mathcal{V}$ – база простору Y, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$, така, що для кожної множини $V \in \mathcal{V}$ відображення F_V задовольняє умову (A) та є категорно клікове знизу і множина $X_C(f)$ залишкова в X. Тоді f має властивість Гана.*

Доведення. Доведення випливає з наслідку 5.5.1 з урахуванням того, що $B = Y$. $\square$

5.5.3. Покажемо, що умови на функцію в наслідку 5.5.2 є необхідними для того, щоб функція мала властивість Гана.

Теорема 5.5.2. *Нехай X – берівський простір, Y – компактний простір, Z – метричний простір з метрикою $|\circ - \circ|$, $f : X \times Y \to Z$ – функція, яка має властивість Гана. Тоді для довільної непорожньої множини N в Y многозначне відображення F_N задовольняє умову (A) та є категорно клікове знизу і множина $X_C(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Оскільки функція f задовольняє властивість Гана, то множина $C_Y(f)$ залишкова в X. Очевидно, що $C_Y(f) \subseteq X_C(f)$. Отже, множина $X_C(f)$ є залишковою в X.

Візьмемо довільну непорожню множину N в Y і розглянемо многозначне відображення F_N. Покажемо, що відображення F_N категорно клікове. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$, довільну множину E другої категорії в X. Оскільки множина E другої категорії, то вона десь щільна в X. Нехай E щільна в деякій відкритій непорожній множині U в X, тобто $\overline{E} \supseteq U$. В берівському просторі кожна залишкова множина є всюди щільною, тому множина $C_Y(f)$ всюди щільна в X. Візьмемо довільні точки $x \in U \cap C_Y(f)$ і $y \in N$. Оскільки функція f неперервна в точці (x, y), то існують відкриті непорожні множини G в X і H в Y, такі, що $x \in G \subseteq U$, $y \in H$ і $\omega_f(G \times H) < \varepsilon$. Покладемо $E_1 = E \cap G$. Оскільки множина E щільна в U і $G \subseteq U$, то множина E_1 щільна в G. Розглянемо відображення $g : E_1 \to Z$, для якого $g(u) = f(u, y)$ при $u \in E_1$. Тоді

$$diam(g(E_1)) = diam(f(E_1 \times \{y\})) = \omega_f(E_1 \times \{y\}) \leq \omega_f(G \times H) < \varepsilon.$$

Отже, відображення F_E категорно клікове знизу.

Тепер покажемо, що відображення F_N задовольняє умову (A). Візьмемо $\varepsilon > 0$, довільну відкриту непорожню множину U в X і довільну множину $E \subseteq X$ щільну в U, для якої $diam(F_N(E)) < \varepsilon$. Покладемо $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon - diam(F_N(E))}{4}$. Оскільки множина $C_Y(f)$ всюди щільна в X, то існує точка $x_0 \in U \cap C_Y(f)$. Для довільної точки $y \in Y$ функція f неперервна в точці (x_0, y). Тому для кожної точки $y \in Y$ існують окіл $U(y)$ точки x_0 в X і відкритий окіл $V(y)$ точки y в Y, такі, що $\omega_f(U(y) \times V(y)) < \varepsilon_1$. Система множин $\{V(y) : y \in Y\}$ є відкритим покриттям компактного простору Y. Отже, існують точки $y_1, y_2, ..., y_n$, такі, що система множин $\{V_k = V(y_k) : k = 1, ..., n\}$ є покриттям простору Y. Покладемо $G = U \cap (\bigcap\limits_{k=1}^{n} U(y_k))$. Ясно, що $G \neq \varnothing$, адже $x_0 \in G$. Крім того, $G \subseteq \overline{E}$, бо $G \subseteq U \subseteq \overline{E}$. Покажемо, що $\omega_f(G \times N) < \varepsilon$. Візьмемо точки $(a, b), (u, v) \in G \times N$. Оскільки $G \subseteq \overline{E}$, то існує точка $x_1 \in E \cap G$. Далі існують номери m та l, такі, що $b \in V_m$ та $v \in V_l$. Тоді $\{b, v\} \subseteq Y = \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_k$, тому

$$|f(a,b) - f(u,v)| \leq |f(a,b) - f(x_1,b)| + |f(x_1,b) - f(x_1,v)| + |f(x_1,v) - f(u,v)| <$$
$$< \varepsilon_1 + diam(F_N(E)) + \varepsilon_1 = diam(F_N(E)) + 2\varepsilon_1 = \frac{diam(F_N(E)) + \varepsilon}{2}.$$

Отже, $\omega_f(G \times N) \leq \frac{diam(F_N(E)) + \varepsilon}{2} < \varepsilon$, тобто $diam(F_N(G)) < \varepsilon$, це і означає, що відображення F_N задовольняє властивість (A). □

З теореми 5.5.2 і наслідку 5.5.2 одержуємо наступний результат.

Теорема 5.5.3. *Нехай X – берівський простір, Y – компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, $\mathcal{V}$ – база простору Y, Z – метричний простір. Тоді для того, щоб функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняла властивість Гана необхідно і досить, щоб для кожної множини $V \in \mathcal{V}$ відображення F_V задовольняло умову (A) та було категорно клікове знизу і множина $X_C(f)$ була залишкова в X.*

5.6. Одностайна кліковість та характеризація властивості Гана

5.6.1. В цьому підрозділі ми дамо іншу характеризацію властивості Гана. Нехай X і Y – топологічні простори, а Z – метричний простір. Відображення

$f : X \times Y \to Z$ називається:

- *одностайно кліковим відносно* y, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і для кожної непорожньої відкритої множини U в X існує непорожня відкрита множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_{f_y}(G) < \varepsilon$ для всіх $y \in Y$;

- *локально одностайно кліковим відносно* y *в точці* $(a, b) \in X \times Y$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує окіл V точки b в Y, такий, що для кожного околу U точки a в X існує непорожня відкрита множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_{f_y}(G) < \varepsilon$ для всіх $y \in V$;

і просто *локально одностайно кліковим відносно* y, якщо воно є таким в кожній точці. Очевидно, що з одностайної кліковості відносно y випливає локальна одностайна кліковість відносно y.

При неперервності відносно другої змінної неперервність чи квазінеперервність відносно першої змінної гарантує наявність у відображення $f : X \times Y \to Z$, при певних умовах на простори, властивості Гана. Накладання умови кліковості відносно першої змінної замість неперервності чи квазінеперервності не гарантує наявності у відображення f властивості Гана.

Приклад 5.6.1. *Існує функція* $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$*, яка клікова відносно першої і неперервна відносно другої змінної, що не має властивості Гана.*

Побудова прикладу. Для кожного номера n розглянемо неперервну функцію $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, яка визначена так:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1, \\ 2(1 - nx), & \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{n}, \\ 2nx, & 0 \le x < \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

Нехай $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ – множина раціональних чисел відрізка $[0, 1]$. Визначимо функцію $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ так:

$$f(x, y) = \begin{cases} g_n(y), & x = r_n, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, що функція f є неперервною відносно другої змінної. Покажемо, що функція f клікова відносно першої змінної. Візьмемо довільну точку $y_0 \in [0, 1]$. Оскільки $\frac{1}{n} \to 0$, то множина номерів n, для яких $\frac{1}{n} > y_0$, є скінченною.

Тому $f_{y_0}(x) \neq 0$ для скінченної кількості чисел x, а отже, функція f_{y_0} є кліковою.

Функція f не тільки не задовольняє властивість Гана, але й $(x, 0) \notin C(f)$ для всіх $x \in [0, 1]$, бо $\omega_f(x, 0) = 1$ для всіх $x \in [0, 1]$.

Зауважимо, що функція f не є локально одностайно кліковою відносно y. $\square$

5.6.2. Нехай $\mathcal{V}$ – деяка система множин у просторі Y. Для точки $y \in Y$ покладемо

$$\mathcal{V}(y)=\{V \in \mathcal{V} : V - \text{окіл точки } y \text{ в } Y\} \text{ і}$$

$$B(\mathcal{V})=\{y \in Y : \mathcal{V}(y) - \text{база околів точки } y \text{ в } Y\}.$$

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і непорожньої множини V в Y ми будемо розглядати многозначне відображення $F_V : X \ni x \mapsto F_V(x) = f^x(V) \subseteq Z$.

Теорема 5.6.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ одностайно клікове відносно y. Тоді для кожної непорожньої множини $V \in Y$ відображення F_V задовольняє умову (A) та є категорно клікове знизу.*

Доведення. Нехай V – непорожня підмножина простору Y. Візьмемо $\varepsilon > 0$, довільну відкриту непорожню множину U в X і довільну множину $E \subseteq X$, для яких $U \subseteq \overline{E}$ і $diam(F_V(E)) < \varepsilon$. Покладемо $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon - diam(F_V(E))}{4} > 0$. Оскільки відображення f одностайно клікове відносно y, то існує непорожня відкрита множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_{f_y}(G) < \varepsilon_1$ для всіх $y \in Y$. Покажемо, що $\omega_f(G \times V) < \varepsilon$. Візьмемо довільні точки $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2) \in G \times V$ та точку $u \in G \cap E$. Тоді

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(u, y_1)| + |f(u, y_1) - f(u, y_2)| + |f(u, y_2) - f(p_2)| <$$

$$< \varepsilon_1 + diam(F_V(E)) + \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon + diam(F_V(E))}{2}.$$

Тоді $diam F_V(G) = \omega_f(G \times V) \leq \frac{\varepsilon + diam(F_V(E))}{2} < \varepsilon$. Отже, відображення F_V задовольняє умову (A).

Тепер покажемо, що F_V є категорно клікове знизу. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і довільну множину E другої категорії в X. Оскільки множина E другої категорії, то вона десь щільна. Нехай множина E щільна у відкритій непорожній множині U в X, тобто $U \subseteq \overline{E}$. З одностайної кліковості

відображення f випливає, що існує непорожня відкрита множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_{f_y}(G) < \varepsilon$ для всіх $y \in Y$. Візьмемо довільну точку $b \in V$ і покладемо $A = G \cap E$. Зрозуміло, множина A щільна в G і $A \subseteq E$. Розглянемо відображення $g : A \to Z$, для якого $g(x) = f_b(x)$, $x \in A$. Тоді $g(x) \in F_V(x)$ для кожного $x \in A$ і $diam(g(A)) = \omega_{f_b}(A) \leq \omega_{f_b}(G) < \varepsilon$. Отже, відображення F_V є категорно клікове знизу. □

Теорема 5.6.2. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, B – множина зліченного типу в Y, функція $f : X \times Y \to Z$ одностайно клікова відносно y і множина $M = \{x \in X : B \subseteq C(f^x)\}$ залишкова в X. Тоді існує залишкова в X множина A, така, що $A \times B \subseteq C(f)$.*

Доведення. Згідно з теоремою 5.6.1 кожної непорожньої множини $V \in Y$ відображення F_V задовольняє умову (A) та є категорно клікове знизу. Для системи $\mathcal{V}_B$ множина $B(\mathcal{V}_B) = B$. Тоді з теореми 5.5.1 випливає, що множина

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

є залишкова в X. Зауважимо, що $C(f^x) \cap B(\mathcal{V}_B) = B$ для $x \in M$. Множина $A = R \cap M$ є залишковою в X і $A \times B \subseteq C(f)$. □

Наступний результат є наслідоком теореми 5.6.2.

Теорема 5.6.3. *Нехай X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ одностайно клікова відносно y і множина $X_C(f)$ залишкова в X. Тоді f має властивість Гана.*

5.6.3. Тепер перейдемо до властивості локальної одностайно клікове відносно y.

Теорема 5.6.4. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – не більш, ніж зліченна система множин в Y і відображення $f : X \times Y \to Z$ локально одностайно клікове відносно y. Тоді множина*

$$R = \{x \in X : \{x\} \times (C(f^x) \cap B(\mathcal{V})) \subseteq C(f)\}$$

є залишкова в X.

Доведення. Припустимо, що доповнення

$$E_0 = X \setminus R = \{x \in X : \exists y_x \in C(f^x) \cap B(\mathcal{V}) | p_x = (x, y_x) \in D(f)\}$$

є множиною другої категорії в X. Оскільки відображення f локально одностайно клікове відносно y, то для кожного $x \in E_0$ і для кожного $\varepsilon > 0$ існує окіл $V_\varepsilon(x)$ точки y_x в Y, такий, що для кожного околу U точки x в X існує непорожня відкрита множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_{f_y}(G) < \varepsilon$ для всіх $y \in V_\varepsilon(x)$.

Для номерів m і n розглянемо множини

$$A_{m,n} = \{x \in E_0 : \omega_f(p_x) > \frac{1}{m}, V_n \subseteq V_{\frac{1}{3m}}(x), V_n - \text{ окіл точки } y_x \text{ і } \omega_{f^x}(V_n) < \frac{1}{3m}\}.$$

Якщо $x \in E_0$, то $p_x = (x, y_x) \in D(f)$, $y_x \in C(f^x)$ і $\mathcal{V}(y_x)$ – база околів точки y в Y, тому $\omega_f(p_x) > 0$ і $\omega_{f^x}(y_x) = 0$, звідки негайно випливає, що існують такі номери m і n, що $\omega_f(p_x) > \frac{1}{m}$, $V_n \subseteq V_{\frac{1}{3m}}(x)$ і $\omega_{f^x}(V_n) < \frac{1}{3m}$. Це показує, що $\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n} = E_0$. Оскільки E_0 – це множина другої категорії, то існують номери m і n, такі, що множина $E = A_{m,n}$ десь щільна. Покладемо $U = int\overline{E}$.

Візьмемо довільну точку $a \in E \cap U$. Згідно з одностайною кліковістю існує непорожня відкрита множина G в X, така, що $G \subseteq U$ і $\omega_{f_y}(G) < \frac{1}{3m}$ для всіх $y \in V_{\frac{1}{3m}}(a)$. Оскільки $V_n \subseteq V_{\frac{1}{3m}}(a)$, то $\omega_{f_y}(G) < \frac{1}{3m}$ для всіх $y \in V_n$. Покажемо, що $\omega_f(G \times V_n) \leq \frac{1}{m}$. Візьмемо довільні точки $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2) \in G \times V_n$ та точку $u \in G \cap E$. Тоді

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(u, y_1)| + |f(u, y_1) - f(u, y_2)| + |f(u, y_2) - f(p_2)| <$$
$$< \frac{1}{3m} + \frac{1}{3m} + \frac{1}{3m} = \frac{1}{m}.$$

Отже, $\omega_f(G \times V_n) \leq \frac{1}{m}$. Очевидно,що $\omega_f(u, y_u) \leq \omega_f(G \times V_n) \leq \frac{1}{m}$. Однак, $\omega_f(p_u) > \frac{1}{m}$ бо $u \in E$. Одержали суперечність. □

Як наслідки одержуємо наступні результати.

Теорема 5.6.5. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метричний простір, B – множина зліченного типу в Y, функція $f : X \times Y \to Z$ локально одностайно клікова відносно y і множина $M = \{x \in X : B \subseteq C(f^x)\}$ залишкова в X. Тоді множина $C_B(f)$ залишкова в X.*

Теорема 5.6.6. *Нехай X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метричний простір, функція $f : X \times Y \to Z$ локально одностайно клікова відносно y і множина $X_C(f)$ залишкова в X. Тоді f має властивість Гана.*

5.6.4. Перейдемо до обернених тверджень.

Теорема 5.6.7. *Нехай X – берівський простір, Y – компактний простір, Z – метричний простір і відображення $f : X \times Y \to Z$ має властивість Гана. Тоді відображення f одностайно клікове відносно y і множина $X_C(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Оскільки відображення f має властивість Гана, то множина $C_Y(f)$ залишкова в X. Тому і множина $X_C(f)$ залишкова в X, бо $C_Y(f) \subseteq X_C(f)$.

Візьмемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ і $\varepsilon > 0$. Розглянемо довільну непорожню відкриту множину U в X. Оскільки простір X берівський, то множина $C_Y(f)$ всюди щільна в X. Тому існує точка $a \in U$, така, що $(a, y) \in C(f)$ для кожного $y \in Y$. Тоді для кожного $y \in Y$ існують відкриті непорожні множини U_y та V_y відповідно в просторах X та Y, такі, що $\omega_f(U_y \times V_y) < \varepsilon$. Система множин $\{V_y : y \in V\}$ є відкритим покриттям компактного простору Y. Тому існує скінчене чисто точок $y_1, y_2, ..., y_n$, таких, що $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_{y_k}$. Покладемо $G = U \cap (\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_{y_k})$. Тоді $\omega_{f_y}(G) < \varepsilon$ для всіх $y \in Y$. Отже, відображення f одностайно клікове відносно y в точці p_0. □

Теорема 5.6.8. *Нехай X – берівський простір, Y – локально компактний простір, Z – метричний простір і відображення $f : X \times Y \to Z$ має властивість Гана. Тоді відображення f локально одностайно клікове відносно y і множина $X_C(f)$ залишкова в X.*

Доведення. Оскільки відображення f має властивість Гана, то множина $X_C(f)$ залишкова в X (див теорему 5.6.7).

Візьмемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ і $\varepsilon > 0$. Нехай V– компактний окіл точки y_0 в Y. Звуження $f|_{X \times V}$ має властивість Гана. Тому згідно з теоремою 5.6.7 звуження $f|_{X \times V}$ одностайно клікове відносно y. Отже, відображення f локально одностайно клікове відносно y в точці p_0. □

Таким чином, одержуємо наступні характеризації властивості Гана.

Теорема 5.6.9. *Нехай X – берівський простір, Y – компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності і Z – метричний простір. Відображення $f : X \times Y \to Z$ має властивість Гана тоді і тільки тоді, коли f одностайно клікове відносно y і множина $X_C(f)$ залишкова в X.*

Теорема 5.6.10. *Нехай X – берівський простір, Y – локально компактний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності і Z – метричний простір. Відображення $f : X \times Y \to Z$ має властивість Гана тоді і тільки тоді, коли f локально одностайно клікове відносно y і множина $X_C(f)$ залишкова в X.*

Висновки до розділу 5.

В цьому розділі вивчається множина точок неперервності відображень від двох змінних.

У **підрозділах 5.1** та **5.2** введено класи відображень $f : X \times Y \to Z$, які мають властивість Гана. При цьому наявність у простора Y зліченної бази замінено слабшою умовою. Встановлено, що кожна нарізно монотонна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є точково розривною. Також наведено приклад простору Гана, який не володіє зліченною базою.

Підрозділи 5.3 та **5.4** присвячені розвитку та модифікації теореми Калбрі-Троалліка.

У **підрозділах 5.5** та **5.6** подано характеризацію властивості Гана. Зокрема встановлено (теореми 5.6.9 та 5.6.10), що якщо X – берівський простір, Y – компактний (локально компактний) простір, який задовольняє другу аксіому зліченності і Z – метричний простір, то $f : X \times Y \to Z$ має властивість Гана тоді і тільки тоді, коли f одностайно клікове (локально одностайно клікове) відносно y і множина $X_C(f)$ залишкова в X.

РОЗДІЛ 6.
ПЕРЕХІДНІСТЬ ТА ДЕКОМПОЗИЦІЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ І ЇЇ АНАЛОГІВ

6.1. Декомпозиція неперервності та перехідні відображення

6.1.1. Нагадаємо, що символом χ_A ми позначатимемо характеристичну функцію множини A в X. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *перехідною зверху /знизу/ в точці* x, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існують окіл U точки x і точка $y \in (f(x), f(x) + \varepsilon)$ $/y \in (f(x) - \varepsilon, f(x))/$, такі, що $U \cap f^{-1}(y) = \varnothing$. Якщо функція перехідна зверху і знизу в точці x, то вона називається *перехідною в точці* x. Функція називається *перехідною /зверху, знизу/*, якщо вона є такою в кожній точці x з X.

Твердження 6.1.1. *Нехай X – топологічний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ – функція і $\overline{\mathbb{R} \setminus f(X)} = \mathbb{R}$. Тоді функція f є перехідною.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки множина $\mathbb{R} \setminus f(X)$ всюди щільна, то існують такі точки y_1 і y_2, що $y_1 \in (f(x) - \varepsilon, f(x))$, $y_2 \in (f(x), f(x) + \varepsilon)$ і $y_1, y_2 \notin f(X)$. Оскільки множини $X \cap f^{-}(y_1)$ і $X \cap f^{-1}(y_2)$ порожні, то функція f перехідна в точці x. □

Твердження 6.1.2. *Нехай X – топологічний простір. Тоді кожна функція $f : X \to \mathbb{R}$ подається у вигляді суми двох перехідних функцій.*

Доведення. Розглянемо множини $A = f^{-1}(\mathbb{Q})$ і $B = X \setminus A$ і функції $f_1 = f \cdot \chi_A$, $f_2 = f \cdot \chi_B$. Оскільки $\chi_A + \chi_B = 1$, то $f = f_1 + f_2$. За побудовою $f_1(X) \subseteq \mathbb{Q}$, а $f_2(X) \subseteq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$, звідки легко вивести, що $\overline{\mathbb{R} \setminus f_i(X)} = \mathbb{R}$ при $i = 1, 2$. Тому згідно з теоремою 6.1.1 функції f_1 та f_2 перехідні. □

Твердження 6.1.3. *Кожна монотонна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є перехідною.*

Доведення. Нехай f зростає. Покажемо, що f перехідна зверху. Візьмемо довільну точку $a \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$. Нехай $f(a + 0) < f(a) + \varepsilon$. Тоді для

довільної точки $y \in (f(a+0), f(a)+\varepsilon)$ існує точка $b > a$, така, що для кожного $x \in (a,b)$ маємо $f(x) < y$. Оскільки для $x \leq a$ маємо $f(x) \leq f(a) \leq f(a+0) < y$, то для $U = (-\infty, b)$ маємо $(U \times \{y\}) \cap Gr(f) = \varnothing$. Якщо ж $f(a)+\varepsilon \leq f(a+0)$, то для довільної точки $y \in (f(a), f(a)+\varepsilon)$ при $x > a$ маємо $f(x) \geq f(a+0) > y$, а при $x \leq a$ маємо $f(x) \leq f(a) < y$. Тоді для $U = (-\infty, +\infty)$ отримаємо, що $(U \times \{y\}) \cap Gr(f) = \varnothing$. Отже, f є перехідною зверху в точці a. Аналогічно встановлюється перехідність знизу в точці a. Для випадку спадання f достатньо розглянути функцію $-f$, яка буде зростаючою. $\square$

Хоча умова перехідності і є досить слабкою, однак існують функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які її не задовольняють.

Приклад 6.1.1. *Існує не перехідна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Побудова прикладу. Розглянемо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої:

$$f(x) = \begin{cases} sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Так визначена функція не є перехідною в точці $x = 0$ ні зверху, ні знизу. Справді, для довільного $y \in (-1,0) \cup (0,1)$ і для кожного околу U точки $x = 0$ існує номер n, такий, що точка $x_y = \frac{1}{\arcsin y + 2n\pi} \in U$. При цьому $f(x_y) = y$, отже, $U \cap f^{-1}(y) \neq \varnothing$. $\square$

Пізніше ми наведемо приклад функції, яка не є перехідною в жодній точці.

6.1.2. Можна дати характеризацію перехідності функції $f : X \to \mathbb{R}$ в топологічних термінах. Нагадаємо, що $fr(B) = \overline{B} \cap \overline{Y \setminus B}$ – це межа множини B у топологічному просторі Y.

Теорема 6.1.1. *Нехай X – топологічний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ – функція і $x \in X$. Тоді f є перехідною в точці $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли для кожного околу V точки $f(x)$ в $\mathbb{R}$ існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в $\mathbb{R}$, такі, що $W \subseteq V$ і $U \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$.*

Доведення. Нехай функція f є перехідною в точці $x \in X$. Візьмемо довільний окіл V точки $f(x)$. Існує $\varepsilon > 0$, таке, що $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \subseteq V$. Тоді існують окіл U точки x і точки y_1, y_2, такі, що $y_1 \in (f(x)-\varepsilon, f(x))$, $y_2 \in (f(x), f(x)+\varepsilon)$, $U \cap f^{-1}(y_1) = \varnothing$ і $U \cap f^{-1}(y_2) = \varnothing$. Покладемо

$W = (y_1, y_2)$. Тоді $fr(W) = \{y_1, y_2\}$ і для кожного $x \in U$ маємо $f(x) \neq y_1, y_2$, отже, $U \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$.

Навпаки, візьмемо $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в $\mathbb{R}$, такі, що $W \subseteq (f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2})$ і $U \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$. Оскільки множина W обмежена, то існують точки $y_1 = \inf W$ і $y_2 = \sup W$. Ясно, що $y_i \in \overline{W}$ при $i = 1, 2$ і

$$f(x) - \varepsilon < f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq y_1 < f(x) < y_2 \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x) + \varepsilon.$$

Оскільки множина W відкрита, то $y_i \notin W$, отже, $y_i \in \overline{W} \setminus W = fr(W)$ при $i = 1, 2$. Але $U \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$, отже, $f(x) \neq y_i$ для довільних $i = 1, 2$ та $x \in U$. Тому $U \cap f^{-1}(y_i) = \varnothing$ при $i = 1, 2$, що і дає нам перехідність функції f у точці x. □

Теорема 6.1.1 дозволяє розширити поняття перехідності на випадок відображень зі значеннями у довільних топологічних просторах. Зауважимо, що для відкритої множини W у просторі Y маємо $fr(W) = \overline{W} \setminus W$. Тому умова $U \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$ рівносильна включенню $f(U) \subseteq Y \setminus fr(W) = W \sqcup (Y \setminus \overline{W})$.

Для топологічних просторів X і Y відображення $f : X \to Y$ називається *перехідним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y, такі, що $W \subseteq V$ і $f(U) \subseteq W \sqcup (Y \setminus \overline{W})$, і просто *перехідним*, якщо воно є таким у кожній точці з X.

6.1.3. Покажемо, що перехідність є ослабленням неперервності, а також, при певних умовах на простір значень, і ослабленням умови замкненості графіка.

Твердження 6.1.4. *Нехай X і Y – топологічні простори. Тоді кожна неперервна функція $f : X \to Y$ є перехідною.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $x \in X$ і довільний окіл V точки $f(x)$ в Y. Оскільки функція f неперервна в точці x, то існує такий окіл U точки x в X, що $f(U) \subseteq intV$. Множина $W = intV \subseteq V$ відкрита і $f(U) \subseteq W$, що і дає нам перехідність f у точці x. □

Теорема 6.1.2. *Нехай X – топологічний простір, Y – гаусдорфовий локально компактний простір і $f : X \to Y$ – відображення із замкненим графіком. Тоді f – перехідне відображення.*

Доведення. Припустимо, що f не є перехідним у деякій точці $x \in X$. Тоді існує такий окіл V_1 точки $y = f(x)$ в Y, що для будь-якого відкритого околу W точки y в Y, такого, що $W \subseteq V_1$, і для довільного околу U точки x в X маємо $f(U) \cap fr(W) \neq \varnothing$. Оскільки простір Y локально компактний, то в Y існує компактний окіл V_2 точки y. Перетин $V_0 = V_1 \cap V_2$ – це теж окіл точки y в Y. Оскільки простір Y регулярний (навіть тихоновський [322, с. 231]), то в Y існує замкнений окіл V точки y, такий, що $V \subseteq V_0$. Цей окіл буде компактний разом з V_2, бо $V \subseteq V_2$.

Нехай $W = intV$. Ясно, що W – це відкритий окіл точки y в Y і $W \subseteq V \subseteq V_0 \subseteq V_1$. Тому для кожного околу U точки x в X існує точка $x_U \in U$, така, що $f(x_U) \in fr(W)$. Позначимо через $\mathcal{U}_x$ систему всіх околів точки x в X. Це напрямлена включенням $\supseteq$ множина і сітка $(x_U)_{U \in \mathcal{U}_x}$ збігається до x в X. Оскільки $y_U = f(x_U) \in fr(W) \subseteq \overline{W} \subseteq \overline{V} = V$ для кожного $U \in \mathcal{U}_x$ і множина V компактна, то існує така підсітка $(y_{U_j})_{j \in J}$ сітки $(y_U)_{U \in \mathcal{U}_x}$, яка збігається до деякої точки $b \in V$. Але $fr(W)$ – це замкнена множина і $y_{U_j} \in fr(W)$ для кожного j. Тому і $b \in fr(W)$. З іншого боку $p_j = (x_{U_j}, y_{U_j}) \in Gr(f)$ для кожного j, причому $p_j \to p = (x, b)$ в $X \times Y$. На основі замкненості $Gr(f)$ в $X \times Y$ отримуємо, що $p \in Gr(f)$, тобто $b = f(x) = y$. Але ж $y \in W$, а $b \notin W$, що дає нам суперечність, яка доводить перехідність f. □

6.1.4. Нехай X і Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ назвемо *слабко перехідним у точці* x з X, якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ у просторі Y існують окіл U точки x в X і точка $b \in V$, такі, що $U \cap f^{-1}(b) = \varnothing$, і просто *слабко перехідним*, якщо f має цю властивість у кожній точці x простору X. Зрозуміло, що функція $f : X \to \mathbb{R}$ буде слабко перехідною в точці x тоді і тільки тоді, коли вона перехідна зверху або знизу в точці x.

Твердження 6.1.5. *Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір, x – точка з X, $f : X \to Y$ – перехідне в точці x відображення, причому існує зв'язний окіл V_0 точки $y = f(x)$ в просторі Y, такий, що $V_0 \neq \{y\}$. Тоді f буде слабко перехідним в точці x.*

Доведення. Нехай V – довільний окіл точки y в просторі Y. За умовою існує точка y_0 з V_0, така, що $y_0 \neq y$. З аксіоми T_1 випливає, що існує окіл V_1 точки

y в Y, такий, що $y_0 \notin V_1$. Оскільки простір Y регулярний, то існує такий замкнений окіл V_2 точки y в Y, що $V_2 \subseteq V \cap V_0 \cap V_1$. З перехідності f у точці x випливає, що існують окіл U точки x в X і відкритий окіл W точки y в Y, такі, що $f(U) \cap fr(W) = \varnothing$ і $W \subseteq V_2$. Покажемо, що $fr(W) \neq \varnothing$. Якщо $fr(W) = \varnothing$, то W буде відкрито-замкненою множиною у просторі Y, причому $W \subseteq V_0$. Більше того $W \subset V_0$, адже $y_0 \in V_0 \setminus W$. Крім того, $W \neq \varnothing$, адже $y \in W$. Тоді зв'язна множина V_0 розбивається на дві відкриті в ній непорожні множини W і $V_0 \setminus W$, що неможливо.

Таким чином, $fr(W) \neq \varnothing$, отже, існує точка $b \in fr(W)$. Оскільки $W \subseteq V_2$ і V_2 – замкнена множина, то і $fr(W) \subseteq V_2 \subseteq V$. В такому разі $b \in V$ і $b \notin f(U)$, тобто $U \cap f^{-1}(b) = \varnothing$. Це і означає, що f слабко перехідне в точці x. □

Нагадаємо означення функції типу Чезаро [293]. Кажуть, що $f : X \to Y$ – це *функція типу Чезаро*, якщо існують непорожні відкриті множини $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$, такі, що для кожного $y \in V$ множина $f^{-1}(y)$ щільна в U.

Введемо ще одне ослаблення перехідності, яке як ми з'ясуємо далі пов'язане з властивістю типу Чезаро. Назвемо відображення $f : X \to Y$ *слабко квазіперехідним у точці* x з X, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ у просторі Y і кожного околу U точки x в X існують непорожня відкрита множина G в X і точка $b \in V$, такі, що $G \subseteq U$ і $G \cap f^{-1}(b) = \varnothing$. Якщо ця властивість виконується для кожної точки x з X, то f називається просто *слабко квазіперехідним.*

Твердження 6.1.6. *Нехай $f : X \to Y$ – слабко перехідне в точці $x \in X$ відображення. Тоді f буде і слабко квазіперехідним у цій точці.*

Доведення. Нехай V – довільний окіл точки $y = f(x)$ в Y, а U – довільний окіл точки x в X. Оскільки f слабко перехідне у точці x, то існують окіл U_0 точки x і точки $b \in V$, такі, що $U_0 \cap f^{-1}(b) = \varnothing$. Покладемо $G = int(U \cap U_0)$. Зрозуміло, що множина G відкрита і $\varnothing \neq G \subseteq U$, адже $x \in G$. Ясно, що при цьому $G \cap f^{-1}(b) = \varnothing$, отже, f слабко квазіперехідна в точці x. □

Лема 6.1.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, U – відкрита непорожня множина в X, $y \in Y$, $f : X \to Y$ – відображення і $\overline{f^{-1}(y)} \supseteq U$. Тоді $y \in f(U)$.*

Доведення. З відкритості U випливає, що $\overline{f^{-1}(y) \cap U} \supseteq U$, отже, $f^{-1}(y) \cap U \neq \varnothing$, бо $U \neq \varnothing$. Тому існує точка $x \in f^{-1}(y) \cap U$. Тоді $y = f(x) \in f(G)$. □

Теорема 6.1.3. *Відображення $f : X \to Y$ буде мати властивість типу Чезаро тоді і тільки тоді, коли воно не є слабко квазіперехідним.*

Доведення. Необхідність. Нехай f має властивість Чезаро. Тоді існують такі відкриті непорожні множини U і V відповідно в X і Y, що $\overline{f^{-1}(b)} \supseteq U$ для кожної точки $b \in V$. Згідно з лемою $f(U) \supseteq V$. Візьмемо якусь точку y з V. Тоді $y = f(x)$ для деякого $x \in U$. Множини U і V – це околи точок x і y у просторах X і Y відповідно. Розглянемо довільну відкриту в X непорожню множину G, яка міститься в U, і довільну точку b з V. Оскільки $\overline{f^{-1}(b)} \supseteq U$, то $f^{-1}(b) \cap G \neq \varnothing$. Це показує, що f не є слабко перехідним у точці x.

Достатність. Нехай f не є слабко квазіперехідним. Тоді існує точка $x \in X$, в якій f не є слабко квазіперехідним. В такому разі існують такі околи U_0 і V_0 точок x і $y = f(x)$ у просторах X і Y відповідно, що $G \cap f^{-1}(b) \neq \varnothing$ для кожної відкритої непорожньої підмножини G множини U_0 і для кожної точки $b \in V_0$. Множини $U = intU_0$ і $V = intV_0$ є відкритими у відповідних просторах і непорожніми, при цьому $U \subseteq U_0$ і $V \subseteq V_0$. Тому $G \cap f^{-1}(b) \neq \varnothing$ для кожної непорожньої відкритої множини $G \subseteq U$ і довільної точки $b \in V$. Це означає, що $\overline{f^{-1}(b)} \supseteq U$ для кожного $b \in V$, отже, f має властивість типу Чезаро. □

Наслідок 6.1.1. *Нехай $f : X \to Y$ – слабко перехідне відображення. Тоді f не має властивості типу Чезаро.*

Доведення. З твердження 6.1.6 випливає, що f є слабко квазіперехідним, а з теореми 6.1.3 отримуємо, що f не має властивості типу Чезаро. □

Твердження 6.1.7. *Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір, $f : X \to Y$ – перехідне відображення і для кожної точки x з X існує зв'язний окіл V точки $y = f(x)$ в Y, такий, що $V \neq \{y\}$. Тоді f не має властивості типу Чезаро.*

Доведення. Це твердження негайно випливає з твердження 6.1.5 і наслідку 6.1.1. □

Символом $|E|$ ми позначаємо потужність множини E.

Твердження 6.1.8. *Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір, який задовольняє одну з двох умов:*

а) Y не має ізольованих точок і є локально зв'язним;

б) $|Y| \geq 2$ і Y зв'язний.

Тоді кожне перехідне відображення $f : X \to Y$ не є типу Чезаро.

Доведення. Нехай $f : X \to Y$ – перехідне відображення, $x \in X$ і $y = f(x)$. Якщо виконується умова а), то для кожної точки $x \in X$ існує зв'язний окіл V точки y в Y, причому $V \neq \{y\}$, бо в Y немає ізольованих точок. Якщо ж виконується умова б), то для кожного $x \in X$ окіл $V = Y$ точки y буде зв'язним і $V \neq \{y\}$, бо $|Y| \geq 2$. Таким чином, f не має властивості типу Чезаро згідно з твердженням 6.1.7. □

6.1.5. Далі встановимо результати, які пов'язані з існуванням точок перехідності, слабкої перехідності та слабкої квазіперехідності.

Теорема 6.1.4. *Існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ типу Чезаро, яка не є слабко квазіперехідною в жодній точці $x \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Розглянемо фактор-групу $\Xi = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ адитивної групи поля $\mathbb{R}$ дійсних чисел за підгрупою $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Вона складається з елементів ξ, які є зсувами $a + \mathbb{Q}$ множини раціональних чисел на всеможливі дійсні числа a. Отже, $|\xi| = \aleph_0$ для кожного $\xi \in \Xi$. Крім того, $\xi_1 \cap \xi_2 = \varnothing$ для довільних різних елементів ξ_1 і ξ_2 з Ξ і

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{\xi \in \Xi} \xi,$$

бо для кожного $y \in \mathbb{R}$ маємо $y \in \xi_y = y + \mathbb{Q}$. Тому

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = \sum_{\xi \in \Xi} |\xi| = |\Xi| \cdot \aleph_0 = |\Xi|,$$

адже $\mathfrak{n} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{n}$ для довільної нескінченної потужності $\mathfrak{n}$. Нехай $\varphi : \Xi \to \mathbb{R}$ – деяка бієкція. Покладемо $f(x) = \varphi(\xi)$ для довільного $x \in \xi$. Так визначається сюр'єктивна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ця функція і є шуканою. Справді, для довільної точки $x \in \mathbb{R}$ і її образу $y = f(x)$ розглянемо їх околи $U = V = \mathbb{R}$. Нехай $b \in V$ і G – відкрита непорожня частина U. За побудовою множина $\xi = f^{-1}(b)$ – це той елемент ξ з Ξ, що $\varphi(\xi) = b$. Ця множина буде всюди щільною в $\mathbb{R}$, отже, $f^{-1}(b) \cap G \neq \varnothing$. □

Разом з цим наступний результат показує, що слабко квазіперехідні функції (тобто функції $f : X \to \mathbb{R}$, що не є типу Чезаро) насправді будуть слабко перехідними у багатьох точках.

Теорема 6.1.5. *Нехай X і Y – топологічні простори і Y має не більш ніж зліченну псевдобазу, а $f : X \to Y$ – слабко квазіперехідне відображення. Тоді множина B всіх тих точок x з X, в яких f буде слабко перехідною є залишковою в X.*

Доведення. Нехай $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза топології простору Y, що складається з непорожніх множин і $\mathcal{U}_x$ – система всіх околів точки x в X. Міркуючи від супротивного, припустимо, що доповнення $A = X \setminus B$ є множиною другої категорії в X. Для кожного номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in X : (\forall U_x \in \mathcal{U}_x)(\forall b \in V_n)(U_x \cap f^{-1}(b) \neq \varnothing)\}$$

і перевіримо, що $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Нехай $x \in A$. Тоді $x \notin B$, отже, існує такий окіл V точки $y = f(x)$, що $U_x \cap f^{-1}(b) \neq \varnothing$ для довільного околу U_x точки x і для довільного $b \in V$. Множина $V_0 = intV$ є відкритою і непорожньою. Тому існує номер k, що $V_k \subseteq V_0$, адже $\mathcal{V}$ – псевдобаза в Y. Ясно, що тоді $x \in A_k$.

Оскільки A – це множина другої категорії, то існує такий номер m, що множина A_m буде щільною у деякій відкритій непорожній множині U. Множина $V = V_m$ є відкритою і непорожньою в Y. Покажемо, що $\overline{f^{-1}(b)} \supseteq U$ для кожного $y \in V$. Нехай G – відкрита непорожня частина U і $y \in V$. Оскільки множина A_m щільна в U, то існує точка $x \in G \cap A_m$. Але G – це окіл точки x, тому $G \cap f^{-1}(y) \neq \varnothing$ за означенням множини A_m. Отже, $f^{-1}(y) \cap G \neq \varnothing$, а це і дає нам щільність $f^{-1}(y)$ в U.

Ми довели, що f – це відображення типу Чезаро, що суперечить умові на основі теореми 6.1.3. □

Для $Y = \mathbb{R}$ можна довести більше.

Теорема 6.1.6. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$– слабко квазіперехідна функція. Тоді множини B, B^+ і B^- всіх тих точок x з X, в яких f буде відповідно перехідною, перехідною зверху чи перехідною знизу, є залишковими в X.*

Доведення. Покажемо, що множина B^+ залишкова в X. Нехай $A = X \setminus B^+$. Припустимо, що A – це множина другої категорії в X. Нехай $\mathcal{U}_x$ – система всіх околів точки x в X і $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база топології в $\mathbb{R}$, що складається з непорожніх інтервалів з раціональними кінцями. Як і в доведені теореми 6.1.5, введемо множини

$$A_n = \{x \in X : (\forall U_x \in \mathcal{U}_x)(\forall b \in V_n)(U_x \cap f^{-1}(b) \neq \varnothing)\}.$$

З'ясуємо, що $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Нехай $x \in A$, тобто $x \notin B^+$. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що для довільного околу $U_x \in \mathcal{U}_x$ і будь-якої точки $b \in (f(x), f(x) + \varepsilon)$ перетин $U_x \cap f^{-1}(b)$ не порожній. Існує таке n, що $V_n \subseteq (f(x), f(x) + \varepsilon)$. Тоді $U_x \cap f^{-1}(b) \neq \varnothing$, як тільки $U_x \in \mathcal{U}_x$ і $b \in V_n$, отже, $x \in A_n$.

Далі, міркуючи так само, як в доведенні попередньої теореми, приходимо до суперечності.

Залишковість множини B^- легко випливає з доведеного, коли розглянути функцію $-f$. Далі $B = B^+ \cap B^-$, отже, і множина B залишкова. □

6.1.6. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ *має властивість Дарбу*, якщо образ $f(E)$ кожної зв'язної множини E у просторі X є зв'язною множиною у просторі Y. Будемо говорити, що відображення $f : X \to Y$ *має слабку властивість Дарбу*, якщо образ $f(G)$ кожної області G в X, тобто відкритої і зв'язної множини, є зв'язною множиною в Y. Це поняття фігурує у статті [205] під назвою O-зв'язність.

Зрозуміло, що коли відображення має властивість Дарбу, то воно має і слабку властивість Дарбу. Обернене твердження не вірне. Це показує наступний приклад.

Приклад 6.1.2. *Існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зі слабкою властивістю Дарбу, яка не має властивості Дарбу.*

Побудова прикладу. Розглянемо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка визначена так:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x > 0; \\ 0, x = 0; \\ 1, x < 0. \end{cases}$$

Функція f не має властивості Дарбу, бо зв'язна множина $(-\infty, 0]$ переходить в незв'язну множину $\{0\} \cup \{1\}$. Однак вона має слабку властивість

Дарбу. Щоб це перевірити, розглянемо довільну область G на числовій прямій. Добре відомо, що G – це якийсь інтервал числової прямої. Якщо $0 \in G$, то $f(G) = [-1, 1]$, якщо ж $0 \notin G$, то обов'язково $G \subseteq (-\infty, 0)$ або $G \subseteq (0, +\infty)$. У першому випадку $f(G) = \{1\}$, а в другому випадку множина $f(G)$ зв'язна, бо звуження $f_{|(0,+\infty)}$ неперервне. $\square$

З допомогою введених понять можна отримати новий результат про декомпозицію неперервності.

Теорема 6.1.7. *Нехай X – локально зв'язний простір, Y – топологічний простір і відображення $f : X \to Y$ має слабку властивість Дарбу. Тоді відображення f буде неперервне в точці $x_0 \in X$ тоді і тільки тоді, коли воно перехідне в точці x_0.*

Доведення. Необхідність є очевидною. Встановимо достатність. Оскільки відображення f перехідне в точці x_0, то існують окіл U точки x_0 в X і відкритий окіл W точки $f(x_0)$ в Y, такі, що $W \subseteq V$ і $f(U) \subseteq W \sqcup (Y \setminus \overline{W})$. Існує відкритий зв'язний окіл U_0 точки x_0, такий, що $U_0 \subseteq U$. Таким околом буде компонента зв'язності будь-якого відкритого околу G точки x_0, що містить цю точку і міститься в U. Зрозуміло, що $f(U_0) \subseteq W \sqcup (Y \setminus \overline{W})$. Оскільки f має слабку властивість Дарбу, то множина $f(U_0)$ зв'язна. Тоді з умови $f(x_0) \in W$ випливає, що $f(U_0) \subseteq W$, звідки отримуємо, що $f(U_0) \subseteq V$. Це і дає нам неперервність f у точці x_0. $\square$

Як наслідок з теореми 6.1.7 одержуємо таку теорему

Теорема 6.1.8. *Нехай X – локально зв'язний простір, Y – топологічний простір, відображення $f : X \to Y$ має слабку властивість Дарбу і є перехідним. Тоді f – неперервне відображення.*

Зауважимо, що з цієї теореми 6.1.8 випливають не тільки результати з праць [205, 312, 323], а й згаданий у підрозділі 1.10 результат про неперервність функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зі зв'язним і замкненим графіком, бо функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зі зв'язним графіком має властивість Дарбу.

6.1.7. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ називається *локально w^*-неперервним* [205, 14], якщо існує база $\mathcal{B}$ відкритих множин простору Y, така, що множина $f^{-1}(fr(B))$ є замкненою в X для кожного $B \in \mathcal{B}$.

Твердження 6.1.9. *Нехай X і Y – топологічні простори і відображення $f : X \to Y$ локально w^*-неперервне. Тоді f – перехідне відображення.*

Доведення. Нехай f не є перехідним в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді існує окіл V точки $y_0 = f(x_0) \in Y$, такий, що для довільного відкритого околу W точки y_0 в Y, такого, що $W \subseteq V$, і довільного околу U точки x_0 в X маємо, що $f^{-1}(fr(W)) \cap U \neq \varnothing$. Оскільки відображення f локально w^*-неперервне, то існує база $\mathcal{B}$ відкритих множин простору Y, така, що множина $f^{-1}(fr(B))$ є замкненою в X для кожного $B \in \mathcal{B}$. Існує така множина $V_0 \in B$, що $y_0 \in V_0 \subseteq V$.

Нехай $\mathcal{U}_{x_0}$ – система всіх околів точки x_0 у просторі X. Візьмемо довільний окіл $U_0 \in \mathcal{U}_{x_0}$ точки x_0. Тоді $U_0 \cap f^{-1}(fr(V_0)) \neq \varnothing$, бо V_0 – відкритий окіл точки y_0 і $V_0 \subseteq V$. Тому $x_0 \in \overline{f^{-1}(fr(V_0))}$. Оскільки множина $f^{-1}(fr(V_0))$ замкнена, то $x_0 \in f^{-1}(fr(V_0))$, а значить,

$$y_0 \in fr(V_0) = \overline{V_0} \setminus V_0,$$

зокрема, $y_0 \notin V_0$, що приводить до суперечності. □

Наступний приклад показує, що перехідна функція не зобов'язана бути локально w^*-неперервною.

Приклад 6.1.3. *Існує перехідна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не є локально w^*-неперервною.*

Побудова прикладу. Розіб'ємо проміжок $A = (-\infty, -1]$ на $\aleph_0$ неперетинних щільних в A множин A_r, де $r \in \mathbb{Q}$, а проміжок $B = [1, +\infty)$ – на континуум щільних у B множин B_ξ, де $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, і визначимо функцію

$$f(x) = \begin{cases} r, x \in A_r, \\ \xi, x \in B_\xi, \\ 0, x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Функція f буде перехідною в довільній точці $x \in \mathbb{R}$. Це ясно для точок з інтервалу $(-1, 1)$, на якому вона стала. Якщо $x \geq 1$ і $\varepsilon > 0$, то, взявши в інтервалах $(f(x), f(x) + \varepsilon)$ і $(f(x) - \varepsilon, f(x))$ раціональні числа y_1 і y_2, ми одержимо, що для околу $U = (0, +\infty)$ точки x при $i = 1, 2$

$$U \cap f^{-1}(y_i) = \varnothing.$$

Коли ж $x \leq -1$, то для ірраціональних чисел y_1 і y_2 відповідно з інтервалів $(f(x), f(x) + \ \varepsilon)$ і $(f(x) - \varepsilon, f(x))$ та околу $U = (-\infty, 0)$ будемо мати, що переходи $U \times \{y_i\}$ при $i = 1, 2$ не перетинаються з графіком функції f.

Припустимо, що E – це непорожня підмножина $\mathbb{R}$, яка не містить множини $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ всіх ірраціональних чисел і доведемо, що її прообраз $f^{-1}(E)$ не замкнена множина.

Нехай $E \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$. Тоді існують ірраціональні числа β_1 і β_2, такі, що $\beta_1 \in E$ і $\beta_2 \notin E$. Тоді $f^{-1}(E) \supseteq f^{-1}(\beta_1)$, отже, $f^{-1}(E)$ щільна множина в проміжку B. Разом з тим $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(E) \supseteq f^{-1}(\beta_2)$, отже, і доповнення до $f^{-1}(E)$ є щільною множиною в B. Звідки негайно випливає, що множина $f^{-1}(E)$ не замкнена.

Припустимо, що $E \subseteq \mathbb{Q}$. Якщо $0 \in E$, то $f^{-1}(E) \supseteq (-1, 1)$ і $f^{-1}(E) \cap B = \varnothing$. Тоді $1 \in \overline{f^{-1}(E)} \setminus f^{-1}(E)$, отже, $f^{-1}(E)$ не замкнена множина. Якщо ж $0 \notin E$, то множина $f^{-1}(E)$ і її доповнення $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(E)$ будуть всюди щільними в проміжку A, бо $f^{-1}(E) \supseteq f^{-1}(\alpha_1)$ для деякого раціонального числа α_1 і $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(E) \supseteq f^{-1}(0)$. Це показує, що і тут $f^{-1}(E)$ не замкнена множина.

Нехай $\mathcal{B}$ – довільна база топології числової прямої $\mathbb{R}$. Зрозуміло, що існує такий непорожній елемент $B \in \mathcal{B}$, що $B \subseteq (-1, 1)$. Ясно, що $fr(B) \subseteq [-1, 1]$ і $fr(B) \neq \varnothing$, адже скінченна точка $\beta = \sup B$ є межевою для B. Тоді $f^{-1}(fr(B))$ за доведеним не буде замкненою множиною в $\mathbb{R}$. Це означає, що функція f не є локально w^*-неперервною. $\square$

6.1.8. У згаданих у підрозділі 1.10 працях [313, 261] були доведені результати про сукупну неперервність нарізно неперервних функцій із замкненим графіком. Наступна теорема є модифікацією цих результатів з використанням перехідності.

Теорема 6.1.9. *Нехай X і Y – локально зв'язні простори, Z – топологічний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ має слабку властивість Дарбу відносно кожної змінної і є перехідним за сукупністю змінних. Тоді відображення f неперервне за сукупністю змінних.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $p = (x, y) \in X \times Y$ і окіл W точки $f(p)$ у просторі Z. Оскільки відображення f перехідне в точці p, то існують окіл U точки x в X, окіл V точки y в Y і відкритий окіл W_1 точки $f(p)$

в Z, такі, що $W_1 \subseteq W$ і $f(U \times V) \subseteq W_1 \sqcup (Z \setminus \overline{W_1})$. Розглянемо відкриті зв'язні околи U_0 і V_0 точок x і y відповідно, такі, що $U_0 \times V_0 \subseteq U \times V$. Зрозуміло, що $f(U_0 \times V_0) \subseteq W_1 \sqcup (Z \setminus \overline{W_1})$. Покажемо, що $f(U_0 \times V_0) \subseteq W_1$. Припустимо, що існує точка $p_1 = (x_1, y_1) \in U_0 \times V_0$, така, що $f(p_1) \in Z \setminus \overline{W_1}$. Оскільки відображення f^{x_0} і f_{y_1} мають слабку властивість Дарбу, то множини $f^{x_0}(V_0)$ і $f_{y_1}(U_0)$ зв'язні. Але $f(x_0, y_1) \in f^{x_0}(V_0) \cap f_{y_1}(U_0) \neq \varnothing$, тому множина $C = f^{x_0}(V_0) \cup f_{y_1}(U_0)$ є зв'язною. Однак

$$C \subseteq f(U_0 \times V_0) \subseteq W_1 \sqcup (Z \setminus \overline{W_1})$$

і $f^{x_0}(V_0) \cap W_1 \neq \varnothing$ та $f_{y_1}(U_0) \cap (Z \setminus \overline{W_1}) \neq \varnothing$, що суперечить зв'язності множини C. □

6.2. Аналоги перехідності та декомпозиція неперервності

6.2.1. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ називається *w^*-неперервним* [163], якщо множина $f^{-1}(fr(V))$ є замкненою в X для кожної відкритої множини V в Y. Очевидно, що з w^*-неперервності випливаю локальна w^*-неперервність. Обернене не вірно, що демонструє наступний приклад.

Приклад 6.2.1. *Існує локальна w^*-неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не є w^*-неперервною.*

Побудова прикладу. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функція Діріхле, тобто визначена так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q}, \\ 0, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Розглянемо в ролі бази $\mathcal{B}$ систему всіх інтервалів з ірраціональними кінцями. Тоді $fr(B) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ для будь-якого $B \in \mathcal{B}$. Тому прообраз $f^{-1}(fr(B)) = \varnothing$ замкнений в $\mathbb{R}$ для кожного $B \in \mathcal{B}$, і отже, f локально w^*-неперервна.

Оскільки для відкритої множини $B = (1, +\infty)$ маємо, що

$$f^{-1}(fr(B)) = f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Q},$$

і множина $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел незамкнена в $\mathbb{R}$, то f не є w^*-неперервною. □

Відображення $f : X \to Y$ називається *локально відносно неперервним* [209], якщо існує база $\mathcal{B}$ відкритих множин простору Y, така, що множина $f^{-1}(B)$ є відкритою у підпросторі $f^{-1}(\overline{B})$ для кожного $B \in \mathcal{B}$. У [209] було встановлено, що для довільних топологічних просторів X і Y, якщо відображення $f : X \to Y$ є локально w^*-неперервне, то воно локально відносно неперервне. Там же наведено приклад функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, який демонструє, що обернене твердження не вірне.

Твердження 6.2.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, відображення $f : X \to Y$ локально відносно неперервне. Тоді f перехідне.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай відображення f не є перехідним в деякій точці x_0. Тоді існує окіл V_0 точки $f(x_0)$ в Y, такий, що для довільного відкритого околу U точки x_0 в X і для довільного відкритого околу W точки $f(x_0)$ в Y з умови $W \subseteq V_0$ випливає, що $U \cap f^{-1}(frW) \neq \varnothing$.

Оскільки відображення f локально відносно неперервне, то існує база $\mathcal{B}$ відкритих множин в Y, така, що множина $f^{-1}(V)$ відкрита в множині $f^{-1}(\overline{V})$ для довільного $V \in \mathcal{B}$. Для точки $f(x_0)$ і її околу V_0 існує елемент V бази $\mathcal{B}$, такий, що $f(x_0) \in V \subseteq V_0$. Візьмемо довільний окіл U точки x_0 в X. Оскільки відображення f не є перехідним в точці x_0, то $U \cap f^{-1}(frV) \neq \varnothing$. Тоді існує точка $x \in U$, така, що

$$x \in f^{-1}(frV) = f^{-1}(\overline{V} \setminus V) = f^{-1}(\overline{V}) \setminus f^{-1}(V).$$

В такому разі $U \cap f^{-1}(\overline{V}) \not\subseteq f^{-1}(V)$. Це означає, що точка x_0 з $f^{-1}(V)$ не є внутрішньою для множини $f^{-1}(V)$ у підпросторі $f^{-1}(\overline{V})$. Таким чином, множина $f^{-1}(V)$ не є відкритою в підпросторі $f^{-1}(\overline{V})$. А це суперечить тому, що відображення f є локально відносно неперервним. Отже, наше припущення не вірне. $\square$

Як уже зазначалося (приклад 6.1.3), перехідне відображення не зобов'язане бути локально w^*-неперервним. Цей же приклад показує, що перехідне відображення не зобов'язане бути локально відносно неперервним.

Твердження 6.2.2. *Існує перехідна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не є локально відносно неперервною.*

Доведення. Розіб'ємо проміжок $A = (-\infty, -1]$ на $\aleph_0$ неперетинних щільних в A множин A_r, де $r \in \mathbb{Q}$, а проміжок $B = [1, +\infty)$ – на континуум щільних

у B множин B_ξ, де $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, і визначимо функцію

$$f(x) = \begin{cases} r, x \in A_r, \\ \xi, x \in B_\xi, \\ 0, x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Функція f буде перехідною в довільній точці $x \in \mathbb{R}$ (див. приклад 6.1.3).

Покажемо, що функція f не є локально відносно неперервною. Нехай $\mathcal{B}$ – довільна база в $\mathbb{R}$. Тоді існує множина $V \in \mathcal{B}$, така, що $\varnothing \neq V \subseteq (1, +\infty)$. Покажемо, що тоді $f^{-1}(V)$ не є відкритою в прообразі $f^{-1}(\overline{V})$.

Спочатку зауважимо, що $\overline{V} \setminus V \neq \varnothing$. Справді $\varnothing \neq V \subseteq \overline{V} \subseteq [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Якби $\overline{V} = V$, то V була б відкрито-замкненою множиною в $\mathbb{R}$ і такою, що $V \neq \varnothing$ і $V \neq \mathbb{R}$, а це суперечить зв'язності числової прямої $\mathbb{R}$.

Тоді існує $y \in \overline{V} \setminus V$. Зрозуміло, що $y \neq 0$, бо $\overline{V} \subseteq [1, +\infty)$.

Припустимо, що $y \in \mathbb{Q}$. Тоді $f^{-1}(y) = A_y$. За побудовою $\overline{A_y} = (-\infty, -1]$. Візьмемо у відкритій множині V деяку раціональну точку y_0 і розглянемо довільну точку x_0 з $f^{-1}(y_0) = A_{y_0}$. Тоді $x_0 \in f^{-1}(V)$. Покажемо, що x_0 не є внутрішньою точкою множини $f^{-1}(V)$ у прообразі $f^{-1}(\overline{V})$. Нехай U – довільний окіл точки x_0 в $\mathbb{R}$. Оскільки $x_0 \in A_{y_0} \subseteq (-\infty, -1]$ і $\overline{A_y} \supseteq (-\infty, -1]$, то $x_0 \in \overline{A_y}$, отже, $U \cap A_y \neq \varnothing$, тобто існує елемент $u \in U \cap A_y$. Для цього елемента будемо мати $u \in U \cap f^{-1}(\overline{V})$ і $u \notin f^{-1}(V)$, бо $f(u) = y \notin V$. Таким чином, $U \cap f^{-1}(\overline{V}) \not\subseteq f^{-1}(V)$ для жодного околу U точки $x_0 \in f^{-1}(V)$, що й показує, що множина $f^{-1}(V)$ не є відкритою в $f^{-1}(\overline{V})$.

Якщо ж $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то $f^{-1}(y) = B_y$. За побудовою $\overline{B_y} = [1, +\infty)$. Якщо тепер взяти в множині V деяку ірраціональну точку y_0 і розглянути точку x_0 з прообразу $f^{-1}(y_0) = B_{y_0}$, то як і вище легко перевірити, що $U \cap f^{-1}(\overline{V}) \not\subseteq f^{-1}(V)$ для довільного околу U точки x_0 в $\mathbb{R}$, отже, і тут множина $f^{-1}(V)$ не буде відкритою в $f^{-1}(\overline{V})$. $\square$

6.2.2. Поняття w^*-квазінеперервності було введене М.Матейдесом в [199]. Відображення $f : X \to Y$ називається *w^*-квазінеперервним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y існують відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y і квазівідкрита множина A в X, такі, що $W \subseteq V$, $x \in A$ і $A \cap f^{-1}(fr(W)) = \varnothing$ і просто *w^*-квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці x з X.

Твердження 6.2.3. *Нехай X і Y – топологічні простори і відображення $f : X \to Y$ перехідне в точці $x_0 \in X$. Тоді f w^*-квазінеперервне в точці x_0.*

Доведення. Нехай V – довільний окіл точки $y_0 = f(x_0)$ у просторі Y. Оскільки f перехідне в точці x_0, то існує окіл U точки x_0 у просторі X і відкритий окіл W точки y_0 в Y, такі, що $U \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$. Відкрита множина $G = intU$ теж буде околом точки x_0 в X, причому $G \subseteq U$ і $G \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$. Відкрита множина G буде і квазівідкритою в X, отже, f буде і w^*-квазінеперервним у точці x_0. □

В твердженні 6.1.4 було показано, що неперервне відображення є перехідним. Аналогічний результат має місце для w^*-квазінеперервності.

Твердження 6.2.4. *Нехай X і Y – топологічні простори і відображення $f : X \to Y$ квазінеперервне в точці $x \in X$. Тоді f w^*-квазінеперервне в точці $x \in X$.*

Доведення. Візьмемо довільний окіл V точки $y = f(x)$ в Y і покладемо $W = intV$. Ясно, що $W \subseteq V$ і W – відкритий окіл точки y в Y. Оскільки функція f квазінеперервна в точці x, то для кожного околу U точки x існує відкрита непорожня множина G_U в X, така, що $G_U \subseteq U$ і $f(G_U) \subseteq W$. Розглянемо множину $H = \bigcup\{G_U : U - \text{окіл точки } x\}$. Зрозуміло, що $x \in \overline{H}$. Множина $A = H \cup \{x\}$ є квазівідкритою в X. Справді, $\overline{A} = \overline{H} \cup \{x\}$. Але $\{x\} \subseteq \overline{H}$, отже, $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\overline{H}} = \overline{H}$. Тому $\overline{A} = \overline{H}$. Оскільки множина H відкрита, то $intA \supseteq H$, а значить $\overline{intA} \supseteq \overline{H} = \overline{A} \supseteq A$. Крім того, $x \in A$, $f(A) \subseteq W$, $W \cap frW = \varnothing$, адже множина W відкрита в Y, отже, $A \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$. Звідси випливає w^*-квазінеперервність f в точці x. □

Обернене твердження не вірне. Справді функція Діріхле перехідна, отже, w^*-квазінеперервна, але вона не є квазінеперервною в жодній точці з $\mathbb{R}$.

Також не вірне оберне твердження і до твердження 6.2.3.

Приклад 6.2.2. *Існує w^*-квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не є перехідною.*

Побудова прикладу. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначена так:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Функція f w^*-квазінеперервна, бо вона квазінеперервна (твердження 6.2.4), але не перехідна (приклад 6.1.1). $\square$

Відображення $f : X \to Y$ називається *квазіперехідним у точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $f(x)$ в Y, для кожного околу U точки x в X існують відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y і відкрита непорожня множина G в X, такі, що $W \subseteq V$, $G \subseteq U$ і $G \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$, і просто *квазіперехідним*, якщо воно є таким у кожній точці.

Твердження 6.2.5. *Нехай X і Y – топологічні простори, відображення $f : X \to Y$ w^*-квазінеперервне в точці $x_0 \in X$. Тоді f квазіперехідне в точці x_0.*

Доведення. Візьмемо довільний окіл V точки $f(x)$ в Y і довільний окіл U точки x в X. Оскільки відображення f w^*-квазінеперервне в точці x_0, то існують відкритий окіл W точки $f(x)$ в Y і квазівідкрита множина A в X, такі, що $W \subseteq V$, $x \in A$ і $A \cap f^{-1}(fr(W)) = \varnothing$. Множина A квазівідкрита, тому $x \in A \subseteq \overline{intA}$. Оскільки U – це окіл точки x, то перетин $G = U \cap intA \neq \varnothing$. Непорожня множина G відкрита і $G \subseteq U$. Оскільки $A \cap f^{-1}(fr(W)) = \varnothing$, то і $G \cap f^{-1}(fr(W)) = \varnothing$. Це показує, що відображення f квазіперехідне в точці x_0. $\square$

Пізніше, в твердженні 6.2.10, буде показано, що існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка квазіперехідна, але не w^*-квазінеперервна.

В твердженні 6.1.5 було вказано умови на простори X і Y, за яких перехідне в точці $x \in X$ відображення $f : X \to Y$ буде слабко перехідним у цій точці. Ті ж самі умови на простори гарантують слабку квазіперехідність відображення в деякій точці, за умови, що це відображення є квазіперехідним у цій точці.

Твердження 6.2.6. *Нехай X – топологічний простір, Y – регулярний простір, x – точка з X, $f : X \to Y$ – квазіперехідне в точці x відображення, причому існує зв'язний окіл V_0 точки $y = f(x)$ в просторі Y, такий, що $V_0 \neq \{y\}$. Тоді f буде слабко квазіперехідним у точці x.*

Доведення. Нехай V – довільний окіл точки y в просторі Y і U – довільний окіл точки x у просторі X. За умовою існує точка y_0 з V_0, така, що $y_0 \neq y$. З аксіоми T_1 випливає, що існує окіл V_1 точки y в Y, такий, що $y_0 \notin V_1$.

Оскільки простір Y регулярний, то існує такий замкнений окіл V_2 точки y в Y, що $V_2 \subseteq V \cap V_0 \cap V_1$. З квазіперехідності f у точці x випливає, що існують відкрита непорожня множина G в X і відкритий окіл W точки y в Y, такі, що $W \subseteq V_2$, $G \subseteq U$ і $G \cap f^{-1}(fr(W)) = \varnothing$. Покажемо, що $frW \neq \varnothing$. Якщо $fr(W) = \varnothing$, то W буде відкрито-замкненою множиною у просторі Y, причому $W \subseteq V_0$. Більше того $W \subset V_0$, адже $y_0 \in V_0 \setminus W$. Крім того, $W \neq \varnothing$, адже $y \in W$. Тоді зв'язна множина V_0 розбивається на дві відкриті в ній непорожні множини W і $V_0 \setminus W$, що неможливо.

Таким чином, $frW \neq \varnothing$, отже, існує точка $b \in frW$. Оскільки $W \subseteq V_2$ і V_2 – замкнена множина, то і $frW \subseteq V_2 \subseteq V$. В такому разі $b \in V$ і $b \notin f(G)$, отже, $G \cap f^{-1}(b) = \varnothing$. Це і означає, що f слабко квазіперехідне в точці x. $\square$

6.2.3. В твердженні 6.1.1 було встановлено, що функція $f : X \to \mathbb{R}$ буде перехідною, якщо множина $\mathbb{R} \setminus f(X)$ є всюди щільною. Має місце і такий результат.

Твердження 6.2.7. *Нехай X і Y – топологічні простори і для відображення $f : X \to Y$ множина $Y \setminus f(X)$ всюди щільна в Y. Тоді f слабко перехідне.*

Доведення. Нехай $x \in X$ і V – окіл точки $f(x)$ в Y. Оскільки множина $Y \setminus f(X)$ всюди щільна в Y, то існує точка $b \in V \cap (Y \setminus f(X))$. Тому $X \cap f^{-1}(b) = \varnothing$. Отже, відображення f слабко перехідне в точці x. $\square$

Твердження 6.2.8. *Нехай X – топологічний простір. Тоді кожна слабко квазіперехідна функція $f : X \to \mathbb{R}$ є квазіперехідною.*

Доведення. Нехай $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, U – відкритий окіл точки x_0 в X і $V = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ – ε-окіл точки y_0. Припустимо, що існує точка $x_1 \in U$, така, що $f(x_1) \in V_1 = (y_0, y_0 + \varepsilon)$. Тоді із слабкої квазіперехідності функції f у точці x_1 випливає, що існують непорожня відкрита множина G_1 в X і точка $b_1 \in V_1$, такі, що $G_1 \subseteq U$ і $b_1 \notin f(G_1)$. В іншому випадку для довільної точки $y \in (y_0, y_0 + \varepsilon)$ маємо, що $y \notin f(U)$. Так чи інакше, існують відкрита непорожня множина $G_1 \subseteq U$ і точка $b_1 \in V_1$, такі, що $b_1 \notin f(G_1)$. Аналогічно встановлюємо, що існують відкрита непорожня множина $G_2 \subseteq G_1$ і точка $b_2 \in V_2 = (y_0 - \varepsilon, y_0)$, такі, що $b_2 \notin f(G_2)$.

Інтервал $W = (b_2, b_1)$ – це окіл точки $f(x_0)$ в $\mathbb{R}$, $W \subseteq V$ і

$$G_2 \cap f^{-1}(fr(W)) = G_2 \cap f^{-1}(\{b_2, b_1\}) = \varnothing.$$

Отже, функція f є квазіперехідною в точці x_0. Оскільки точка x_0 була довільна, то функція f квазіперехідна. $\square$

Наступне твердження показує істотність в твердженні 6.2.8 того, що функція f набуває значень в $\mathbb{R}$.

Твердження 6.2.9. *Існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, яка слабко перехідна (а отже, і слабко квазіперехідна), але не квазіперехідною в жодній точці.*

Доведення. Нехай $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ – сім'я попарно неперетинних всюди щільних в $\mathbb{R}$ множин, така, що $\bigsqcup\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} A_\alpha = \mathbb{R}$. Визначимо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ так: $f(x) = (\alpha, 0)$ для $x \in A_\alpha$. Покажемо, що функція f слабко перехідна, але не квазіперехідною в жодній точці.

Оскільки $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\}$ і множина $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ всюди щільна в $\mathbb{R}^2$, то згідно з твердженням 6.2.7 функція f є слабко перехідною. Візьмемо довільну точку $x \in \mathbb{R}$ і обмежений окіл V точки $f(x)$ в $\mathbb{R}^2$. Тоді для довільного відкритого околу W точки $f(x)$ в $\mathbb{R}^2$, такого, що $W \subseteq V$ маємо, що $frW \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \varnothing$, інакше множина $\mathbb{R} \times \{0\}$ була б не зв'язною. Нехай $(\alpha, 0) \in frW \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$. Тоді

$$f^{-1}(frW) \supseteq f^{-1}((\alpha, 0)) = A_\alpha$$

і тому множина $f^{-1}(frW)$ всюди щільна в $\mathbb{R}$. Отже, f не є квазіперехідною в точці x. $\square$

Твердження 6.2.10. *Існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка квазіперехідна, але не w^*-квазінеперервна.*

Доведення. Нехай знову $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ – сім'я попарно неперетинних всюди щільних в $\mathbb{R}$ множин, така, що $\bigsqcup\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} A_\alpha = \mathbb{R}$. Визначимо функцію $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так: $f_0(x) = \alpha$ для $x \in A_\alpha$. Відмітимо, що для довільної точки $\alpha \in \mathbb{R}$ множина $f_0^{-1}(\alpha) = A_\alpha$ всюди щільна в $\mathbb{R}$ і тому не є слабко квазіперехідна в жодній точці.

Нехай $\mathbb{Q} \setminus \{0\} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ – множина раціональних чисел без точки 0. Визначимо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A_{r_n} \setminus (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), \\ f_0(x), & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Покажемо, що функція f квазіперехідна, але не w^*-квазінеперервна.

Візьмемо точку $x \in \mathbb{R}$, довільний окіл U точки x і довільний окіл V точки $f(x)$. Існує номер n, такий, що $r_n \in V$ і $G = int(U \setminus (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) \neq \varnothing$. Тоді $G \cap f^{-1}(r_n)) = \varnothing$, адже за побудовою $f(x) = r_n$ на $f^{-1}(r_n)$ і $f(x) \neq r_n$ на G, бо $G \cap (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \varnothing$.

Отже, f слабко квазіперехідна в довільній точці x, а значить, слабко квазіперехідна. Тоді за твердженням 6.2.8 функція f квазіперехідна.

Доведемо, що f не є w^*-квазінеперервною в точці 0. Розглянемо окіл $V = (y_0 - 1, y_0 + 1)$ точки $y_0 = f(0)$ і зафіксуємо довільний відкритий окіл W точки y_0, такий, що $W \subseteq V$, і довільну квазівідкриту множину A, таку, що $0 \in A$, і покажемо, що перетин $A \cap f^{-1}(frW) \neq \varnothing$. Зауважимо, що коли $frE = \varnothing$ для деякої множини $E \subseteq \mathbb{R}$, то $\overline{E} = intE$, отже, множина E буде відкрито-замкненою в $\mathbb{R}$, а значить, $E = \varnothing$ або $E = \mathbb{R}$, оскільки числова пряма $\mathbb{R}$ є зв'язним простором. Але $\varnothing \neq W \neq \mathbb{R}$, отже, $frW \neq \varnothing$, тобто існує точка $b \in frW$.

Припустимо, що $b = r_n$ для деякого n. Оскільки $A \subseteq \overline{intA}$ і $0 \in A$, а $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ – це окіл нуля в $\mathbb{R}$, то $U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \cap intA \neq \varnothing$. За побудовою множина A_{r_n} всюди щільна в $\mathbb{R}$, отже, $U_n \cap A_{r_n} \neq \varnothing$. Але $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \cap A_{r_n} = f^{-1}(r_n)$, тому і $f^{-1}(r_n) \cap intA \neq \varnothing$, а значить, і $f^{-1}(r_n) \cap A \neq \varnothing$. В такому разі знайдеться така точка $a \in A$, що $f(a) = r_n = b \in frW$, отже, $A \cap f^{-1}(frW) \neq \varnothing$.

Нехай тепер $b \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$. Оскільки множина A_b всюди щільна в $\mathbb{R}$ і $intA \neq \varnothing$, то $intA \cap A_b \neq \varnothing$, отже, існує точка $a \in A$, така, що $a \in A_b$. Але $b \neq r_n$ для кожного n, отже, $A_b \cap A_{r_n} = \varnothing$ для кожного n. Тому $f(a) = f_0(a) = b$. І в цьому випадку $A \cap f^{-1}(frW) \neq \varnothing$.

Це і показує, що f не є w^*-квазінеперервною в точці 0. □

Таким чином, для довільних топологічних просторів X і Y мають місце імплікації:

w^*-неперервність $\Rightarrow$ локальна w^*-неперервність $\Rightarrow$ локальна відносна неперервність $\Rightarrow$ перехідність $\Rightarrow$ w^*-квазінеперервність $\Rightarrow$ квазіперехідність,

причому жодну з них не можна обернути.

6.2.4. Виявляється, що для деяких типів просторів X та Y кожне відображення, що діє з X в Y, є перехідним.

Твердження 6.2.11. *Нехай X – топологічний простір і Y – топологічний простір, який має базу з відкрито-замкнених множин. Тоді кожна функція $f : X \to Y$ є перехідною.*

Доведення. Справді, для довільної точки $x \in X$ і довільного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує такий відкрито-замкнений окіл W точки y в Y, що $W \subseteq V$. Тоді для околу $U = X$ точки x в X будемо мати, що $U \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$, адже $frW = \varnothing$, що і дає перехідність f у точці x. □

Зокрема, всі функції зі значеннями в раціональній прямій $\mathbb{Q}$ чи прямій Зорґенфрея $\mathbb{L}$ будуть перехідними.

Твердження 6.2.12. *Кожна функція $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ є перехідною.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $x \in \mathbb{Q}$, її окіл $U = (x - \delta, x + \delta) \cap \mathbb{Q}$ в $\mathbb{Q}$ та окіл $V = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ точки $f(x)$ в $\mathbb{R}$. Покладемо $V_1 = (f(x), f(x) + \varepsilon)$. Символом $|E|$ ми позначаємо потужність множини E. Оскільки $\aleph_0 = |U| < |V_1| = \mathfrak{c}$, то існує точка $y_1 \in V_1$, така, що $y_1 \notin f(U)$. Таким чином, функція f є перехідною зверху у точці x. Аналогічно встановлюється перехідність знизу функції f у точці x. Отже, функція f є перехідною в точці x. □

6.2.5. В підрозділі 6.1 були встановленні результати про множини точок слабкої перехідності (теорема 6.1.5) та перехідності (теорема 6.1.6). Аналогічний результат можна встановити і для w^*-квазінеперервних відображень.

Теорема 6.2.1. *Нехай X – топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ – w^*-квазінеперервне відображення. Тоді множина A точок перехідності відображення f є залишковою в X.*

Доведення. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база простору Y. Будемо міркувати від супротивного. Нехай $E = X \setminus A$ – множина другої категорії в X. Тоді для довільної точки $x \in E$ існує окіл $V(x)$ точки $f(x)$, такий, що для кожного околу U точки x в X і для довільного відкритого околу W точки $f(x)$ в Y, такого, що $W \subseteq V(x)$ маємо, що $U \cap f^{-1}(frW) \neq \varnothing$.

Для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$E_n = \{x \in E : f(x) \in V_n \subseteq V(x)\}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Оскільки множина E другої категорії, то існує номер n_0, що множина E_{n_0} теж другої категорії. З w^*-квазінеперервності відображення f випливає, що для кожної точки $x \in E_{n_0}$ існують відкритий окіл $W(x)$ точки $f(x)$ в Y і квазівідкрита множина $A(x)$ в X, такі, що $W(x) \subseteq V_{n_0}$, $x \in A(x)$ і $A(x) \cap f^{-1}(frW(x)) = \varnothing$.

Для кожного номера $m \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$E_{n_0,m} = \{x \in E_{n_0} : f(x) \in V_m \subseteq W(x)\}.$$

Тоді $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_{n_0,m} = E_{n_0}$. Оскільки множина E_{n_0} другої категорії, то існує номер m_0, що множина E_{n_0,m_0} десь щільна. Нехай множина E_{n_0,m_0} щільна у відкритій непорожній множині U_0, тобто $U_0 \subseteq \overline{E_{n_0,m_0}}$. Візьмемо точку $x_0 \in U_0 \cap E_{n_0,m_0}$. Оскільки множина $A(x_0)$ квазівідкрита, то множина $U = U_0 \cap intA(x_0) \neq \varnothing$. Візьмемо точку $a \in U \cap E_{n_0,m_0}$. Тоді U є околом точки a. Оскільки $U \subseteq A(x_0)$, $f(a) \in V_{m_0} \subseteq W(x_0) \subseteq V_{n_0} \subseteq V(a)$ і $A(x_0) \cap f^{-1}(frW(x_0)) = \varnothing$, то $U \cap f^{-1}(frW(x_0)) = \varnothing$. Крім того, $W(x_0)$ – відкритий окіл точки $f(a)$. Таким чином, для точки $a \in E$ ми знайшли такий її окіл U і відкритий окіл $W = W(x_0)$, такі, що $W \subseteq V(a)$ і $U \cap f^{-1}(frW) = \varnothing$, що неможливо. □

6.2.6. Тепер перейдемо до узагальнення результатів М.Матейдеса [199] та Р.Ґібсон [95].

Теорема 6.2.2. *Нехай X – локально зв'язний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності і w^*-квазінеперервне відображення $f : X \to Y$ має слабку властивість Дарбу. Тоді множина $D(f)$ першої категорії.*

Доведення. Згідно з теоремою 6.2.1 множина A точок перехідності відображення f є залишковою. А з теореми 6.1.8 випливає, що $C(f) \supseteq A$, тому і $C(f)$ є залишковою множиною у просторі X. Отже, множина $D(f)$ першої категорії. □

Теорема 6.2.3. *Нехай X – локально зв'язний простір і слабко квазіперехідна функція $f : X \to \mathbb{R}$ має слабку властивість Дарбу. Тоді множина $D(f)$ першої категорії.*

Доведення. Згідно з теоремою 6.1.6 множина A точок перехідності відображення f є залишковою. А з теореми 6.1.8 випливає, що $C(f) \supseteq A$, тому і $C(f)$ є залишковою множиною у просторі X. Отже, множина $D(f)$ першої категорії. □

Нам будуть потрібні наступні два результати, які встановлені, наприклад, в [84] і [38]:

(1) функція $f : X \to Y$, де Y – метричний простір, буде неперервною тоді і тільки тоді, коли вона майже неперервна і клікова;

(2) функція $f : X \to Y$, де Y – метричний простір, буде квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли вона майже квазінеперервна і клікова.

Теорема 6.2.4. *Нехай X – берівський локально зв'язний простір, Y – сепарабельний метризовний простір і відображення $f : X \to Y$ задовольняє умови:*

1) f w^*-квазінеперервне;

2) f має слабку властивість Дарбу;

3) f майже квазінеперервне.

Тоді відображення f квазінеперервне.

Доведення. Зафіксуємо метрику на просторі Y, яка породжує його топологію. З теореми 6.2.2 випливає, що множина $C(f) = X \setminus D(f)$ є залишковою в X, а отже, є всюди щільною. Тому відображення f є точково розривним, і тим більше кліковим. Із згаданого вище результату (2) випливає, що відображення f квазінеперервне. □

Теорема 6.2.5. *Нехай X – берівський локально зв'язний простір і функція $f : X \to \mathbb{R}$ задовольняє умови:*

1) f слабко квазіперехідна;

2) f має слабку властивість Дарбу;

3) f майже квазінеперервна.

Тоді функція f квазінеперервна.

Доведення. З теореми 6.2.3 випливає, що множина $C(f) = X \setminus D(f)$ є залишковою в X, а отже, є всюди щільною. Тому функція f є точково розривна, і тим більше клікова. Із згаданого вище результату (2) випливає, що функція f квазінеперервна. □

Теорема 6.2.6. *Нехай X – берівський локально зв'язний простір, Y – сепарабельний метризовний простір і відображення $f : X \to Y$ задовольняє умови:*

1) f w^*-квазінеперервне;

2) f має слабку властивість Дарбу;

3) f майже неперервне.

Тоді відображення f неперервне.

Доведення. З теореми 6.2.2 випливає, що відображення f є кліковим. Із згаданого вище результату (1) випливає, що відображення f неперервне. □

Теорема 6.2.7. *Нехай X – берівський локально зв'язний простір і функція $f : X \to \mathbb{R}$ задовольняє умови:*

1) f слабко квазіперехідна;

2) f має слабку властивість Дарбу;

3) f майже неперервна.

Тоді функція f неперервна.

Доведення. З теореми 6.2.3 випливає, що функція f є кліковою. Із згаданого вище результату (1) випливає, що функція f неперервна. □

6.3. Слабка властивість Дарбу і перехідність лінійних відображень у топологічних векторних просторах

6.3.1. Символом $\mathbb{K}$ позначимо поле $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел чи поле $\mathbb{C}$ всіх комплексних чисел. Нехай X – векторний простір над полем $\mathbb{K}$ і a, b – вектори з X. Відображення $\omega : \mathbb{R} \to X$, яке задається формулою $\omega(t) = ta + b$ ми називатимемо *лінійною функцією*. Для точок x_1 і x_2 з X, невиродженого відрізка $[\alpha, \beta]$ числової прямої і лінійної функції $\omega(t) = ta + b$ звуження $\omega|_{[\alpha,\beta]}$, для якого $\omega(\alpha) = x_1$ і $\omega(\beta) = x_2$, назвемо *прямолінійним шляхом, що з'єднує точки x_1 і x_2.*

Лема 6.3.1. *Для будь-яких точок x_1 і x_2 з векторного простору X і невиродженого відрізка $[\alpha, \beta]$ існує єдиний прямолінійний шлях $\omega : [\alpha, \beta] \to X$, який з'єднує точки x_1 і x_2.*

Доведення. Розглянемо стандартний прямолінійний шлях $\omega_0(\lambda) = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, що з'єднує точки x_1 і x_2, лінійну функцію γ, що переводить відрізок $[\alpha, \beta]$ у відрізок $[0, 1]$, яка задається формулою $\gamma(t) = \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}$, і їх композицію $\omega = \omega_0 \circ \gamma$. Зрозуміло, що

$$\omega(t) = \omega_0(\gamma(t)) = ta + b,$$

де $a = \frac{x_2-x_1}{\beta-\alpha}$ і $b = \frac{\beta x_1 - \alpha x_2}{\beta-\alpha}$, причому

$$\omega(\alpha) = \omega_0(0) = x_1 \qquad i \qquad \omega(\beta) = \omega_0(1) = x_2.$$

Таким чином, ω – це прямолінійний шлях, заданий на відрізку $[\alpha, \beta]$, який з'єднує x_1 і x_2.

Нехай $\omega^*(t) = ta^* + b^*$ – довільний прямолінійний шлях на відрізку $[\alpha, \beta]$, який з'єднує точки x_1 і x_2. Тоді

$$\omega^*(\alpha) = \alpha a^* + b^* = x_1 \qquad i \qquad \omega^*(\beta) = \beta a^* + b^* = x_2,$$

звідки отримуємо, що

$$(\beta - \alpha)a^* = x_2 - x_1,$$

тобто $a^* = \frac{x_2-x_1}{\beta-\alpha} = a$, і

$$b^* = x_1 - \alpha a^* = x_1 - \alpha\frac{x_2 - x_1}{\beta - \alpha} = \frac{\beta x_1 - \alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_1}{\beta - \alpha} = \frac{\beta x_1 - \alpha x_2}{\beta - \alpha} = b.$$

Отже, $\omega^* = \omega$. □

Нехай $x_0, x_1, ..., x_n$ – довільні точки векторного простору X і $[\alpha, \beta]$ – невироджений відрізок числової прямої. *Ламана, що породжена точками* $x_0, x_1, ..., x_n$, – це відображення $l : [\alpha, \beta] \to X$, для якого існує розбиття $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$, таке, що для кожного $k = 1, ..., n$ звуження $l|_{[t_{k-1}, t_k]}$ – це прямолінійний шлях, що з'єднує точки x_{k-1} і x_k.

Лема 6.3.2. *Нехай X і Y – векторні простори, $f : X \to Y$ – лінійне відображення, $x_0, x_1, ..., x_n$ – точки з X, $y_k = f(x_k)$ при $k = 0, ..., n$, $l : [\alpha, \beta] \to X$ – ламана у просторі X, що породжено точками $x_0, ..., x_n$ з X. Тоді $f \circ l$ – це ламана у просторі Y, що породжена точками $y_0, ..., y_n$ з Y.*

Доведення. За умовою існує таке розбиття $\alpha = t_0 < ... < t_n = \beta$, що звуження $l|_{[t_{k-1},t_k]}$ – це прямолінійний шлях, який з'єднує точки x_{k-1} і x_k при $k = 1, ..., n$. Тоді для $k = 1, ..., n$ існують вектори a_k і b_k з X, такі, що $l(t) = ta_k + b_k$ при $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, причому $l(t_{k-1}) = x_{k-1}$ і $l(t_k) = x_k$. З лінійності відображення f випливає, що при $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ для кожного $k = 1, ..., n$

$$(f \circ l)(t) = f(l(t)) = f(ta_k + b_k) = tf(a_k) + f(b_k)$$

при цьому

$$(f \circ l)(t_j) = f(l(t_j)) = f(x_j) = y_j$$

для кожного $j = 0, ..., n$. Тому $f \circ l|_{[t_{k-1},t_k]}$ – це прямолінійний шлях, що з'єднує точки y_{k-1} і y_k в Y, а значить, $f \circ l$ – ламана, що породжена точками $y_0, ..., y_n$ в Y. □

Точки x_0 і x з підмножини E векторного простору X ми називатимемо *ламано зв'язними в* E (позначається: $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{E}{\sim}} x$), якщо існує така ламана $l : [\alpha, \beta] \to E$ зі значеннями у множині E, що $l(\alpha) = x_0$ і $l(\beta) = x$. Про таку ламану кажуть, що вона *з'єднує точки* x_0 *і* x *у множині* E. Підмножину E векторного простору X назвемо *ламано зв'язною*, якщо будь-які її дві точки x_0 і x є ламано зв'язними в E.

Лема 6.3.3. *Для будь-якої підмножини E векторного простору X відношення $\overset{\Lambda}{\underset{E}{\sim}}$ ламаної зв'язності в E – це відношення еквівалентності на множині E.*

Доведення. Перевіримо лише транзитивність відношення $\overset{\Lambda}{\underset{E}{\sim}}$, залишивши перевірку рефлексивності і симетричності цього відношення читачеві.

Нехай $x' \overset{\Lambda}{\underset{E}{\sim}} x''$ і $x'' \overset{\Lambda}{\underset{E}{\sim}} x'''$. Покажемо, що $x' \overset{\Lambda}{\underset{E}{\sim}} x'''$. За умовою існують ламана $l' : [\alpha', \beta'] \to E$, що породжується точками $x'_0, ..., x'_{n'}$, де $x'_0 = x'$ і $x'_{n'} = x''$, і ламана $l'' : [\alpha'', \beta''] \to E$, що породжується точками $x''_0, ..., x''_{n''}$, де $x''_0 = x''$ і $x''_{n''} = x'''$. Розглянемо довільний невироджений відрізок $[\alpha, \beta]$ і лінійні функції γ' і γ'', що переводять відрізок $I' = [\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ у відрізок $[\alpha', \beta']$, а відрізок $I'' = [\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ у відрізок $[\alpha'', \beta'']$. Визначимо функцію $l : [\alpha, \beta] \to E$, покладаючи $l(t) = l'(\gamma'(t))$ при $t \in I'$ і $l(t) = l''(\gamma''(t))$ при $t \in I''$. Нескладно перевірити, що l – це ламана, що породжується точками $x' = x'_0, x'_1, ..., x'_{n'} = x'' = x''_0, x''_1, ..., x''_{n''} = x'''$, причому $l([\alpha, \beta]) \subseteq E$. Таким чином, $x' \overset{\Lambda}{\underset{E}{\sim}} x'''$. □

Лема 6.3.4. *Кожна зрівноважена множина E у векторному просторі X є ламано зв'язною.*

Доведення. Нагадаємо, що множина E є зрівноваженою, якщо для кожної точки $x \in E$ і для довільного скаляра λ, такого, що $|\lambda| \leq 1$, обов'язково $\lambda x \in E$. Оскільки порожня множина автоматично ламано зв'язна, то припустимо, що $E \neq \varnothing$. Тоді існує точка $x_0 \in E$, а з нею і $0 = 0 \cdot x_0 \in E$, адже $|0| = 0 \leq 1$.

Розглянемо довільні точки x_1 і x_2 з множини E і функцію

$$l(t) = \begin{cases} (1-2t)x_1, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (2t-1)x_2, \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

оскільки $0 \leq 1-2t \leq 1$ при $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ і $0 \leq 2t-1 \leq 1$ при $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, то $l(t) \in E$ для всіх $0 \leq t \leq 1$ на основі зрівноваженості множини E. Звуження l на відрізки $[0, \frac{1}{2}]$ і $[\frac{1}{2}, 1]$ – це лінійні функції, причому $l(0) = x_1$, $l(\frac{1}{2}) = 0$ і $l(1) = x_2$. Таким чином, $l : [0,1] \to E$ – це ламана, що породжена точками x_1, 0 і x_2, яка з'єднує точки x_1 і x_2 у множині E, і тому E – ламано зв'язна множина. □

6.3.2. Нехай тепер X – це топологічний векторний простір над полем $\mathbb{K}$. Тоді довільна лінійна функція $\omega : \mathbb{R} \to X$, $\omega(t) = ta + b$, буде неперервною, адже додавання і множення на скаляр у ТВП – це неперервні операції. Тому і довільний прямолінійний шлях $\omega : [\alpha, \beta] \to X$ і кожна ламана $l : [\alpha, \beta] \to X$ – це неперервні функції. Звідси негайно випливає, що кожна ламано зв'язна множина в ТВП є лінійно зв'язною, а значить, і зв'язною.

Лема 6.3.5. *Довільний ТВП X є локально ламано зв'язним простором, тобто в кожному околі довільної точки з X міститься деякий ламано зв'язний окіл цієї ж точки.*

Доведення. Як добре відомо [332, с. 14], зрівноважені околи нуля утворюють базу околів нуля в довільному ТВП, тому в кожному околі нуля в X міститься деякий зрівноважений, а значить, і ламано зв'язний (за лемою 6.3.4) окіл нуля.

Нехай тепер x – довільна точка з X і U_x – її окіл в X. Тоді існує такий окіл нуля U, що $U_x = x + U$. Нехай V – зрівноважений окіл нуля, який міститься в U. За лемою 6.3.4 він є ламано зв'язним. Таким же буде і його зсув $V_x = x + V$

на вектор x, бо операція зсуву, очевидно, переводить ламані в ламані, адже для лінійної функції $\omega(t) = ta+b$ і функція $\omega(t)+x = ta+b+x$ буде лінійною. Оскільки V_x – це окіл точки x і $V_x \subseteq U_x$, то все доведено. $\square$

Лема 6.3.6. *Кожна область G у довільному ТВП X є ламано зв'язною множиною.*

Доведення. Розглянемо довільні точки x_0 і x області G і доведемо, що $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} x$. Для цього розглянемо множину

$$G^* = \{x^* \in G : x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} x^*\}.$$

Ця множина непорожня, бо $x_0 \in G^*$. Покажемо, що вона відкрита і замкнена в G.

Нехай $x^* \in G^*$. Тоді $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} x^*$ за означенням множини G^*. Оскільки $x^* \in G$ і множина G відкрита, то G – це окіл точки x^* в X. За лемою 6.3.5 існує ламано зв'язний окіл U точки x^* в X, такий, що $U \subseteq G$. Нехай u – довільна точка з U. Оскільки U ламано зв'язний, то $x^* \overset{\Lambda}{\underset{U}{\sim}} u$, а значить, і $x^* \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} u$, адже $U \subseteq G$. За лемою 6.3.3 звідси отримуємо, що $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} u$, отже, $u \in G^*$. Таким чином, $U \subseteq G^*$, отже, множина G^* відкрита в X, і в G.

Нехай $x^* \in G$ і $x^* \in \overline{G^*}$. За лемою 6.3.5 існує такий ламано зв'язний окіл U точки x^* в X, що $U \subseteq G$. Оскільки x^* – це точка дотику множини G^*, то $U \cap G^* \neq \varnothing$. Тому існує якась точка $u \in U \cap G^*$. З того, що $u \in G^*$ випливає, що $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} u$. Але u і x^* належать до U. З ламаної зв'язності U випливає, що $u \overset{\Lambda}{\underset{U}{\sim}} x^*$, а з включення $U \subseteq G$ і те, що $u \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} x^*$. Знову, застосувавши лему 6.3.3, отримаємо, що $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} x^*$, отже, $x^* \in G^*$. Це дає нам замкненість множини G^* у множині G.

Таким чином, G^* – це непорожня відкрита і замкнена підмножина у зв'язній множині G. Тому $G^* = G$. Це і дає нам те, що $x \in G^*$, а значить, $x_0 \overset{\Lambda}{\underset{G}{\sim}} x$. $\square$

6.3.3. З означення лінійного відображення [330, с. 5] легко вивести наступний результат.

Лема 6.3.7. *Нехай X і Y – векторні простори над одним і тим самим полем $\mathbb{K}$, E – ламано зв'язна множина в X і $f : X \to Y$ – лінійне відображення. Тоді $f(E)$ – ламано зв'язна в Y.*

Доведення. Нехай y_0 і y – довільні точки з $f(E)$. Існують такі точки x_0 і x з E, що $f(x_0) = y_0$ і $f(x) = y$. Оскільки множина E ламано зв'язна, то існує ламана $l : [\alpha, \beta] \to E$, така, що $l(\alpha) = x_0$ і $l(\beta) = x$. За лемою 6.3.2 композиція $f \circ l$ буде ламаною в множині $f(E)$, адже $(f \circ l)([\alpha, \beta]) = f(l([\alpha, \beta])) \subseteq f(E)$, причому $(f \circ l)(\alpha) = f(l(\alpha)) = f(x_0) = y_0$ і $(f \circ l)(\beta) = f(l(\beta)) = f(x) = y$. Це показує, що $f \circ l$ – це ламана, яка з'єднує точки y_0 і y у множині $f(E)$, отже, множина $f(E)$ ламано зв'язна. □

Теорема 6.3.1. *Нехай X і Y – ТВП і $f : X \to Y$ – лінійне відображення. Тоді f має слабку властивість Дарбу.*

Доведення. Нехай G область в X. За лемою 6.3.6 G буде ламано зв'язною множиною. Тоді за лемою 6.3.7 і образ $f(G)$ буде ламано зв'язною множиною, а значить, лінійно зв'язною, а тому і зв'язною множиною. Таким чином, лінійне відображення переводить кожну область у зв'язну множину, отже, воно має слабку властивість Дарбу. □

6.3.4. З теореми 6.3.1 і теореми 6.1.8 про декомпозицію неперервності негайно випливає

Теорема 6.3.2. *Лінійне відображення $f : X \to Y$, що діє в довільних ТВП, буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно перехідне.*

Доведення. За теоремою 6.3.1 відображення f має слабку властивість Дарбу, а тоді з теореми 6.1.8 отримуємо потрібну декомпозицію неперервності. Теорему 6.1.8 можна застосовувати, оскільки за лемою 6.3.5 кожний ТВП є локально зв'язним. □

Можна дати і безпосереднє доведення теореми 6.3.2 в бік достатності. Нехай f – лінійне перехідне відображення. Доведемо, що f неперервне. Для цього досить встановити, що f неперервне в нулі. Нехай V – довільний окіл нуля в Y. Оскільки f перехідне в точці 0, то існує такий окіл нуля U в X і відкритий окіл нуля V_0 в Y, що $f(U) \subseteq V_0 \sqcup (Y \setminus \overline{V_0})$. Існує зрівноважений окіл нуля U_0 в X, такий, що $U_0 \subseteq U$. Покажемо, що $f(U_0) \subseteq V_0$. З леми 6.3.4 випливає, що U_0 – це ламано зв'язна множина. Тоді образ $f(U_0)$ теж ламано зв'язний за лемою 6.3.7. Він же, очевидно, буде і зв'язним. Крім того, $f(0) \in f(U_0) \cap V_0 \neq \varnothing$ і $f(U_0) \subseteq f(U) \subseteq V_0 \sqcup (Y \setminus \overline{V_0})$. Оскільки множина $f(U_0)$ зв'язна, то $f(U_0) \subseteq V_0$.

6.3.5. Нагадаємо, що лінійне відображення $f : X \to Y$ називається *скінченновимірним*, якщо його образ $imf = f(X)$ – це скінченновимірний підпростір простору Y.

Теорема 6.3.3. *Нехай X і Y – ТВП, причому простір Y гаусдорфовий, $f : X \to Y$ – лінійне скінченновимірне відображення із замкненим графіком. Тоді f – неперервне відображення.*

Доведення. За умовою образ $Y_0 = f(X)$ – це скінченновимірний лінійний підпростір простору Y, який буде гаусдорфовим, бо таким є простір Y. Нехай $n = dimY_0$ – вимірність простору Y_0. Як добре відомо [330, с. 18], існує ізоморфізм $\varphi : Y_0 \to \mathbb{K}^n$ простору Y_0 на арифметичний простір $\mathbb{K}^n$ з топологією добутку n екземплярів полів $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Оскільки простір $\mathbb{K}^n$ локально компактний, то таким буде і ізоморфний до нього простір Y_0.

За умовою графік Grf відображення f – це замкнений підпростір добутку $X \times Y$, причому $Grf \subseteq X \times Y_0$. Тоді Grf буде замкненим і в підпросторі $X \times Y_0$ добутку $X \times Y$, отже, f має замкнений графік як відображення з X в Y_0.

За теоремою 6.1.2 відображення f перехідне, а за теоремою 6.3.2 воно неперервне, що й треба було довести. □

Теорема 6.3.4. *Нехай X – ТВП над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел і $f : X \to \mathbb{K}$ – лінійний функціонал із замкненим графіком. Тоді f – неперервний функціонал.*

Доведення. Справді, лінійний функціонал є скінченновимірним лінійним оператором, бо $\dim \mathbb{K} = 1$. Тому це твердження випливає з теореми 6.3.3. □

Теорему 6.3.4 легко довести і безпосередньо. Справді, якщо Grf замкнений, то буде замкненим і ядро $\ker f$, адже

$$\ker f = \varphi^{-1}(Grf \cap (X \times \{0\})),$$

де $\varphi : X \to X \times \{0\}$, $\varphi(x) = (x, 0)$, – гомеоморфізм простору X на підпростір $X \times \{0\}$ добутку $X \times Y$. Тоді за відомим критерієм неперервності лінійного функціонала [328, с. 15] f буде неперервним.

Цікаво, що наступне твердження можна довести, не використовуючи щойно згаданий критерій.

Теорема 6.3.5. *Для лінійного функціонала $f : X \to \mathbb{K}$, заданого на довільному ТВП, наступні умови рівносильні:*

(i) f неперервний;

(ii) Grf замкнений в $X \times \mathbb{K}$;

(iii) $\ker f$ замкнене в X.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидна, адже $\ker f = f^{-1}(0)$, імплікація $(ii) \Rightarrow (i)$ – це теорема 6.3.4. Доведемо, що $(iii) \Rightarrow (ii)$. Нехай ядро $\ker f$ замкнене в X. Доведемо, що і графік Grf теж замкнений в $X \times \mathbb{K}$. Якщо $f = 0$, то це очевидно. Тому вважаємо, що $f \neq 0$. Нехай $(p_j)_{j \in J}$ – це сітка точок $p_j = (x_j, y_j)$ з графіка Grf, яка збігається до деякої точки $p = (x, y) \in X \times \mathbb{K}$. Покажемо, що $p \in Grf$. Ясно, що $x_j \to x$ в X і $y_j \to y$ в $\mathbb{K}$, причому $y_j = f(x_j)$ для кожного j. Оскільки $f \neq 0$, то існує така точка $a \in X$, що $f(a) = 1$. Тоді

$$f(x_j - y_j a) = f(x_j) - y_j f(a) = f(x_j) - f(x_j) = 0,$$

отже, $x_j - y_j a \in \ker f$ для кожного j. Але $x_j - y_j a \to x - ya$ в X, тому і $x - ya \in \ker f$, адже ядро $\ker f$ замкнене. Звідси випливає, що

$$0 = f(x - ya) = f(x) - yf(a) = f(x) - y,$$

отже, $f(x) = y$, а значить, $p \in Grf$, що і дає нам замкненість графіка Grf в добутку $X \times \mathbb{K}$.

Таким чином, згаданий критерій неперервності лінійного функціонала є наслідком теореми 6.3.4 і сама теорема 6.3.4 випливає з нього. Тому цей критерій є теоремою про замкнений графік для лінійного функціонала. □

Теорему 6.3.5 можна узагальнити на скінченновимірні відображення.

Теорема 6.3.6. *Нехай X і Y – ТВП, причому простір Y гаусдорфовий, $f : X \to Y$ – лінійне скінченновимірне відображення. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) f – неперервне відображення;

(ii) Grf замкнений в $X \times Y$;

(iii) $\ker f$ замкнене в X.

Доведення. Імплікації $(i) \Rightarrow (ii)$ і $(i) \Rightarrow (iii)$ очевидні.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Нехай Grf – замкнена множина в $X \times Y$. Розглянемо гомеоморфізм $\psi : X \times \{0\} \to X$, де $\psi(x, 0) = x$. Тоді

$$\psi(Grf \cap (X \times \{0\})) = \ker f.$$

Множини Grf і $X \times \{0\}$ є замкненими в $X \times Y$, перша за умовою, а друга на основі того, що простір Y гаусдорфовий, отже, одноточкова множина $\{0\}$ буде у ньому замкненою, а тому і множина $X \times \{0\}$ буде замкненою в добутку $X \times Y$. Оскільки при гомеоморфізмі образ замкненої множини є замкнена множина, то множина $\ker f$ замкнена в X.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Нехай $Y_0 = f(X)$. За умовою Y_0 – скінченновимірний лінійний підпростір простору Y. Припустимо, що $n = \dim Y_0$ і $y_1, y_2, ..., y_n$ – базис підпростору Y_0. Тоді для довільної точки $y \in Y_0$ існує єдиний набір скалярів $\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_n$, такий, що $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$. Покладемо $\varphi(y) = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Оскільки простір Y, а отже і Y_0, є гаусдорфовим, то відображення $\varphi : Y_0 \to \mathbb{K}^n$ є ізоморфізмом ТВП [330, с. 18]. Нехай $\varphi(f(x)) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$. Відображення $f_k : X \to \mathbb{K}$ – це лінійні функціонали.

Нехай ядро $\ker f$ замкнене в X. Зрозуміло, що $\ker f = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \ker f_k$. Покажемо, що ядра $\ker f_k$ замкнені в X для кожного $k = 1, 2, ..n$. Міркування проведемо індукцією відносно n. При $n = 1$ маємо, що $\ker f = \ker f_1$ і тому $\ker f_1$ – замкнена множина.

Нехай $n = 2$. Покладемо $L = \ker f$ і $L_k = \ker f_k$, $k = 1, 2$. У випадку, коли, наприклад, $L_1 \subseteq L_2$, то $L_1 = L$ – замкнена множина. Тому і множина L_2 теж замкнена, адже $L_2 = L_1$ або $L_2 = X$. Так само буде, коли $L_2 \subseteq L_1$. Тому припустимо, що $L_1 \nsubseteq L_2$ і $L_2 \nsubseteq L_1$.

Оскільки $L_1 \nsubseteq L_2$, то існує точка $x_1 \in L_1 \setminus L_2$. Оскільки $x_1 \notin L_2$, то $f_2(x_1) \neq 0$ і ми можемо розглянути точку $a_1 = \frac{x_1}{f_2(x_1)}$, що входить в L_1 і для неї $f_2(a_1) = 1$. Покажемо, що $L_1 = L + \langle a_1 \rangle$. Нехай $x \in L_1$. Тоді $y = x - f_2(x)a_1 \in L_1$. Крім того,

$$f_2(y) = f_2(x) - f_2(x)f_2(a_1) = f_2(x) - f_2(x) = 0$$

і тому $y \in L_2$. Таким чином, $y \in L = L_1 \cap L_2$ і $x = y + f_2(x)a_1 \in L + \langle a_1 \rangle$. Нехай тепер $x \in L + \langle a_1 \rangle$. Тоді $x = y + \lambda a_1$, де $y \in L$ і $\lambda \in \mathbb{K}$. Оскільки $f_1(x) = f_1(y) + \lambda f_1(a_1) = 0$, то $x \in L_1$. Аналогічно встановлюється, що існує точка $a_2 \in L_2 \setminus L_1$, така, що $L_2 = L + \langle a_2 \rangle$. Оскільки множина L

замкнена, а $\langle a_k \rangle$ – одновимірний підпростір, то множини L_k для $k = 1, 2$ теж будуть замкненими, адже сума замкненого лінійного підпростору і скінченновимірного підпростору у довільному ТВП буде замкненою.

Здійснимо індуктивний крок. Нехай $n > 2$ і $L = \bigcap\limits_{k=1}^{n} L_k$ – замкнена множина. Покажемо, що множини $\ker f_k = L_k$ замкнені для $k = 1, 2, ..., n$. Розглянемо звуження $g_k = f_k|_{L_n}$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Оскільки $\ker g_k = L_n \cap \ker f_k$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} \ker g_k = L$ – замкнена множина. За індуктивним припущенням множини $\ker g_k$ замкнені для $k = 1, 2, ..., n-1$. Оскільки $\ker f_n \cap \ker f_k = \ker g_k$ для $k = 1, 2, ..., n-1$, то за доведеним множини $\ker f_n$ і $\ker f_k$ замкнені для $k = 1, 2, ..., n-1$.

Таким чином, ми встановили, що ядра $\ker f_k$ замкнені в X для $k = 1, 2, ..n$. Тому функціонали $f_k : X \to \mathbb{K}$ неперервні для $k = 1, 2, ..., n$. Отже, і відображення $\varphi \circ f = (f_1, f_2, ..., f_n) : X \to \mathbb{K}^n$ неперервне, а значить і $f : x \to Y$ – неперервне відображення, адже φ – ізоморфізм ТВП Y_0 і $\mathbb{K}^n$ і тотожне вкладення $Y_0 \hookrightarrow Y$ неперервне.

Зауважимо, що можна дати і безпосереднє доведення імплікації $(iii) \Rightarrow (ii)$ теореми 6.3.6, використавши цю ж імплікацію з теореми 6.3.5. Тому теорему 6.3.6 можна вивести і з теореми 6.3.3. $\square$

У доведенні теореми 6.3.6 ми використали таке твердження: якщо L – замкнений лінійний підпростір ТВП X і M – скінченновимірний лінійний підпростір X, то їх сума $N = L + M$ буде замкненою в X. Воно доводиться таким чином. Фактор-простір $\hat{X} = X/L$ буде гаусдорфовим [330, с. 22], адже підпростір L замкнений. Образ $\pi(N) = \pi(M) = \hat{M}$ простору N при фактор-відображенні $\pi : X \to \hat{X}$, $\pi(x) = \hat{x} = x + L$, буде скінченновимірним підпростором гаусдорфового ТВП $\hat{X}$, отже, він буде замкненим в $\hat{X}$ [330, с. 20]. Але $N = \pi^{-1}(\hat{M})$, отже, N буде замкненим в X, бо фактор-відображення $\pi : X \to \hat{X}$ неперервне.

6.3.6. Розгляглянемо банахів простір $C[a, b]$ всіх неперервних функцій $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, наділений рівномірною нормою $\|y\| = \max\limits_{a \le t \le b} |y(t)|$.

Теорема 6.3.7. *Нехай $X = C^1[a, b]$ – нормований простір всіх неперервно диференційовних функцій $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, заданих на невиродженому відрізку $[a, b]$ числової прямої, наділений рівномірною нормою $\| \cdot \|$, $Y = C[a, b]$ – банахів простір всіх неперервних функцій $y : [a, b] \to \mathbb{R}$*

з тією ж рівномірною нормою $\|\cdot\|$ *і* $D : X \to Y$, $Dx = x'$, *– оператор диференціювання. Тоді* D *– лінійний скрізь розривний оператор із замкненим графіком, який не є перехідним.*

Доведення. Нехай $x_n \to x$ у просторі X і $y_n = Dx_n = x'_n \to y$ у просторі Y. Тоді $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$ на $[a, b]$ і $x'_n(t) \rightrightarrows y(t)$ на $[a, b]$. За класичною теоремою аналізу $x'(t) = y(t)$ на $[a, b]$, тобто $Dx = y$. Це дає нам замкненість графіка оператора D.

Лінійність D – це також добре відомий факт з диференціального числення. Розривність у нулі оператора D випливає з того, що послідовність неперервно диференційовних функцій $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$ рівномірно прямує до нуля на $[a, b]$, але послідовність їх похідних $x'_n(t) = \cos nt$ навіть поточково на невиродженому відрізку $[a, b]$ до нуля не прямує. Тому оператор D розривний в нулі, а отже, і в кожній точці як лінійний оператор.

Нарешті, D не може бути перехідним згідно з теоремою 6.3.2, адже перехідні лінійні оператори завжди неперервні. □

6.4. Розриви двосторонньо квазінеперервних перехідних функцій

6.4.1. Як вже згадувалось в підрозділі 2.5, умову замкненості графіка не завжди можна замінити перехідністю. В цьому підрозділі ми побудуємо двосторонньо квазінеперервну перехідну функцію, яка не є неперервною, і тим самим, покажемо, що результат Й.Добоша з [65] не можна розширити на перехідні функції.

Ми будемо розглядати вектори

$$r = (b^0, a^1, b^1, a^2, b^2, a^3)$$

з простору $\mathbb{R}^6$, для яких $b^0 < a^1 < b^1 < a^2 < b^2 < a^3$. Їх ми будемо називати 6-*векторами*, а їх множину позначатимемо літерою R. Казатимемо, що 6-вектор $r = (b^0, a^1, b^1, a^2, b^2, a^3)$ *здійснює поділ відрізка* $[a, b]$, якщо $a = b^0 < a^1 < b^1 < a^2 < b^2 < a^3 = b$. При цьому поділ утворюється відрізками $M^1 = [a^1, b^1]$ і $M^2 = [a^2, b^2]$, які ми називаємо *вільними* (*лівим* чи *правим* відповідно). Відрізки $N_1 = [b^0, a^1]$, $N_2 = [b^1, a^2]$ і $N_3 = [b^2, a^3]$ ми називаємо *ведучими*.

Для кожного натурального числа n розглянемо множину

$$S_n = \{1,2,3\}^n = \{s = (j_1, ..., j_n) : j_k \in \{1,2,3\} \text{ при } k = 1, ..., n\}.$$

Елемент $s = (j_1, ..., j_n)$ ми будемо коротко позначати $j_1...j_n$ або $j_1, ..., j_n$. Якщо $s = j_1, ..., j_n \in S_n$ і $j_{n+1} = 1, 2, 3$, то символом s, j_{n+1} позначається набір $j_1, ..., j_n, j_{n+1}$ з S_{n+1}. Для $n = 0$ покладемо $S_0 = \{\varnothing\}$. Природно вважати, що $\varnothing, j = j$ для кожного $j = 1, 2, 3$. Як звичайно, символом $\mathbb{N}$ ми позначаємо множину натуральних чисел, тобто $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, і $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Нехай $n \in \mathbb{N}_0$. *Пачкою n-го рангу* ми називатимемо сім'ю $W_n = (r_s : s \in S_n)$, де $r_s \in R$ для кожного $s \in S_n$. Кожний 6-вектор $r_s = (b_s^0, a_s^1, b_s^1, a_s^2, b_s^2, a_s^3)$ породжує вільні відрізки $M_s^1 = [a_s^1, b_s^1]$, $M_s^2 = [a_s^2, b_s^2]$ та інтервали $G_s^1 = (a_s^1, b_s^1)$, $G_s^2 = (a_s^2, b_s^2)$ і ведучі відрізки

$$N_{s,1} = [b_s^0, a_s^1], N_{s,2} = [b_s^1, a_s^2], N_{s,3} = [b_s^2, a_s^3].$$

Таким чином, з кожною пачкою n-го рангу пов'язані три сім'ї відрізків:

$$(M_s^1)_{s \in S_n}, (M_s^2)_{s \in S_n}, (N_s)_{s \in S_{n+1}}.$$

Сусідні пачки $W_n = (r_s)_{s \in S_n}$ і $W_{n+1} = (r_s)_{s \in S_{n+1}}$ називаються *узгодженими*, якщо кожний 6-вектор r_s сім'ї W_{n+1} здійснює поділ відповідного ведучого відрізка N_s, пов'язаного з пачкою W_n.

Для невиродженого відрізка $[a, b]$ числової прямої послідовність $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ пачок $W_n = (r_s : s \in S_n)$ називається $(2,3)$-*схемою, пов'язаною з відрізком* $[a, b]$, якщо єдиний вектор

$$r_\varnothing = (b_\varnothing^0, a_\varnothing^1, b_\varnothing^1, a_\varnothing^2, b_\varnothing^2, a_\varnothing^3) = (b^0, a^1, b^1, a^2, b^2, a^3)$$

пачки $W_0 = (r_s)_{s \in S_0}$ нульового рангу здійснює поділ вихідного відрізка $[a, b] = [a_\varnothing, b_\varnothing] = = [a_\varnothing, b_\varnothing]$ (його ми вважаємо ведучим) і для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ пачки W_n і W_{n+1} узгоджені. Замість терміну $(2,3)$-схема, ми будемо вживати коротший термін – *схема*, оскільки інші подібні схеми ми розглядати не будемо.

Нехай $S_\infty = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} S_n$ і $S = \{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$. Для послідовності $s = (j_n)_{n=1}^{\infty}$ символом s_n позначимо скінченну послідовність $s_n = j_1 j_2 ... j_n$, при цьому $s_0 = \varnothing$.

Для $(2,3)$-схеми $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, пов'язаної з відрізком $I = [a, b]$, сімей її вільних інтервалів $(G_s^i)_{s \in S_\infty}$, $i = 1, 2$, та ведучих відрізків $(N_s)_{s \in S_\infty}$ введемо в

розгляд відкриті множини $G^i = \bigcup\limits_{s\in S_\infty} G^i_s$, $i = 1, 2$, та $G = G^1 \cup G^2$ і замкнену множину $F = I \setminus G$. Легко перевірити, що

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty}(\bigsqcup_{s\in S_n} N_s) = \bigcup_{s\in S}(\bigcap_{n=0}^{\infty} N_{s_n}).$$

Множину F ми будемо називати *ядром* $(2,3)$*-схеми* W.

Нагадаємо, що точка x_0 з множини E в топологічному просторі X називається *ізольованою*, якщо існує такий її окіл U в X, що $U \cap E = \{x_0\}$. Множину E у топологічному просторі X називають *досконалою в* X, якщо вона замкнена в X і не має ізольованих точок.

Зауважимо, що для кожного $s \in S$ послідовність відрізків $(N_{s_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ спадає з ростом номера n. Крім того, ядро F не має ізольованих точок, адже його доповнення $I \setminus F = G$ є диз'юнктним об'єднанням інтервалів, які не мають спільних кінців. Таким чином, ядро F $(2,3)$-схеми W є досконалою множиною.

Кажучи неформально, при побудові $(2,3)$-схеми, пов'язаної з відрізком $[a,b]$, цей відрізок ділиться на п'ять частин точками $a^1 < b^1 < a^2 < b^2$, далі кожний з ведучих відрізків $N_1 = [a, a^1]$, $N_2 = [b^1, a^2]$ і $N_3 = [b^2, b]$ знову ділиться на п'ять частин і цей процес продовжується до нескінченності. При цьому поділу підлягають ведучі, перший, третій і п'ятий відрізки, а вільні, другий і четвертий, не діляться.

Нехай $W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ – $(2,3)$-схема, що пов'язана з відрізком $[a,b]$, і $(N_s)_{s\in S_{n+1}}$ – сім'я ведучих відрізків для пачки W_n. Домовимось довжину відрізка $J = [\alpha, \beta]$ позначити символом $|J| = \beta - \alpha$. Для кожного номера $n \in \mathbb{N}_0$ розглянемо числа

$$\lambda'_n = \max_{s\in S_n} |N_{s,1}|, \lambda''_n = \max_{s\in S_n} |N_{s,3}|, \lambda_n = \max\{\lambda'_n, \lambda''_n\} \text{ і } \mu_n = \max_{s\in S_n} |N_s|.$$

Ми називатимемо $(2,3)$-схему W *рівномірно дрібнистою /частково рівномірно дрібнистою/*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$ / $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$/. Ясно, що рівномірно дрібниста $(2,3)$-схема буде і частково рівномірно дрібнистою.

Рівномірною ми будемо називати $(2,3)$-схему $W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, яка складається з таких пачок $W_n = (r_s : s \in S_n)$, що для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ і довільного $s \in S_n$ 6-вектор r_s здійснює поділ відповідного відрізка N_s на п'ять рівних частин, при цьому $N_\varnothing = [a,b]$. Ясно, що рівномірна $(2,3)$-схема буде і рівномірно дрібнистою.

Ми називаємо $(2,3)$-схему W *дрібнистою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}|N_{s_n}|=0$ для кожного $s\in S$. Зрозуміло, що рівномірно дрібниста $(2,3)$-схема є разом з тим і дрібнистою.

Означення дрібнистої схеми можна переформулювати в еквівалентному вигляді. Для кожної точки x з ядра F схеми W, пов'язаної з відрізком $[a,b]$, і натурального числа n позначимо символом $\Delta_n(x)$ той єдиний ведучий відрізок N_{s_n}, де $s_n\in S_n$, що відповідає пачці $(n-1)$-рангу схеми W, який містить точку x. Для одноманітності запису покладемо $\Delta_0(x)=[a,b]$. Зрозуміло, що схема W буде дрібнистою тоді і тільки тоді, коли $|\Delta_n(x)|\to 0$ для кожного $x\in F$, що рівносильно тому, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n(x)=\{x\}$.

Теорема 6.4.1. *Для $(2,3)$-схеми $W=(W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, пов'язаної з відрізком $[a,b]$, наступні умови еквівалентні:*

(i) схема W рівномірно дрібниста;

(ii) схема W дрібниста;

(iii) ядро F схеми W ніде не щільне.

Доведення. Імплікація $(i)\Rightarrow(ii)$ негайно випливає з того, що $0\le|N_{s_n}|\le\mu_n$ для кожного n і довільного $s\in S$.

$(ii)\Rightarrow(iii)$. Нехай схема W дрібниста. Доведемо, що $intF=\varnothing$. Нехай $x_0\in F$ і $U=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ – довільний δ-окіл точки x_0. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}|\Delta_n(x_0)|=0$ і $x_0\in\Delta_n(x_0)$ для кожного n, то існує такий номер p, що $\Delta_p(x_0)\subseteq U$. Відрізок $\Delta_p(x_0)$ – це один із ведучих відрізків N_s, який при наступному поділі породжує два вільних інтервали G_s^1 і G_s^2. Відкрита непорожня множина $G_s=G_s^1\cup G_s^2$ не перетинається з множиною F і міститься в U. Отже, $U\not\subseteq F$. Ми встановили, що замкнена множина F не має внутрішніх точок, отже, вона ніде не щільна.

$(iii)\Rightarrow(i)$. Припустимо, що умова (i) не виконується і доведемо, що тоді і умова (iii) не виконується. Зауважимо, що $\mu_n\ge\mu_{n+1}$ для кожного n. Справді, для кожного $s\in S_{n+1}$ існує таке $t\in S_n$, що $N_s\subseteq N_t$, а тоді і $|N_s|\le|N_t|\le\mu_n$, отже, і $\mu_{n+1}=\max\limits_{s\in S_{n+1}}\le\mu_n$. Спадна послідовність додатних чисел μ_n обов'язково має границю $\varepsilon\ge 0$. За нашим припущенням $\varepsilon=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n>0$. Нехай $S_n(\varepsilon)=\{s\in S_n:|N_s|\ge\varepsilon\}$. Розглянемо замкнені множини $E_n=\bigcup_{s\in S_n(\varepsilon)}N_s$. Зрозуміло, що $E_{n+1}\subseteq E_n$ для кожного n. Справді, нехай $s\in S_{n+1}(\varepsilon)$. Тоді існує таке $t\in S_n$, що $N_s\subseteq N_t$. В такому разі

$\varepsilon \le |N_s| \le |N_t|$, отже, $|N_t| \ge \varepsilon$ і $t \in S_n(\varepsilon)$, а значить, $N_s \subseteq N_t \subseteq E_n$. Тоді і $E_{n+1} = \bigcup_{t \in S_{n+1}(\varepsilon)} N_t \subseteq E_n$. Оскільки $\mu_n \ge \varepsilon$ для кожного n, адже $\varepsilon = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$, бо послідовність чисел μ_n спадає, і $\mu_n = \max\limits_{s\in S_n} |N_s|$, то для кожного n існує такий індекс $s \in S_n$, що $|N_s| = \mu_n \ge \varepsilon$. Тому $S_n(\varepsilon) \ne \varnothing$ для кожного n, а значить і $E_n \ne \varnothing$ для кожного n. Таким чином, множини E_n утворюють спадну послідовність замкнених непорожніх підмножин відрізка $[a, b]$. З компактності відрізка $[a, b]$ випливає, що і їх перетин $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ буде непорожнім. Тому існує точка $x_0 \in E$. Зрозуміло, що $E \subseteq F$, бо $S_n(\varepsilon) \subseteq S_n$ для кожного n, отже, $x_0 \in F$. Для кожного номера n існує такий індекс $s_n \in S_n(\varepsilon)$, що $x_0 \in N_{s_n}$. При цьому $N_{s_{n+1}} \subseteq N_{s_n}$ і $|N_{s_n}| \ge \varepsilon$ для кожного n. Тому перетин $J = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} N_{s_n}$ – це відрізок числової прямої, для якого $|J| = \lim\limits_{n\to\infty} |N_{s_n}| \ge \varepsilon$. За означенням ядра $J \subseteq F$, при цьому $|J| \ge \varepsilon$, отже, відрізок J невироджений. Тому $\varnothing = intJ \subseteq intF$, а значить, і $intF \ne \varnothing$, тобто умова (iii) не виконується. Теорема доведена. $\square$

6.4.2. З $(2, 3)$-схемою W для відрізка $[a, b]$ і її вільними відрізками $M_s^i = [a_s^i, b_s^i]$, $i = 1, 2$, $s \in S_\infty$, пов'язані дві множини:

$$A = \bigcup_{s\in S_\infty} \{a_s^1, a_s^2, a_s^3\} = (\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s\in S_n} \{a_s^1, a_s^2\}) \cup \{b\},$$

що складається з лівих кінців вільних відрізків і правого кінця вихідного відрізка $[a, b]$, і

$$B = \bigcup_{s\in S_\infty} \{b_s^0, b_s^1, b_s^2\} = (\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s\in S_n} \{b_s^1, b_s^2\}) \cup \{a\},$$

що складається з правих кінців вільних відрізків і лівого кінця вихідного відрізка. Схему W ми називатимемо *частково дрібнистою*, якщо $|\Delta_n(x)| \to 0$ для кожного $x \in A \cup B$. Оскільки $A \cup B \subseteq F$, то кожна дрібниста схема буде і частково дрібнистою. Частково рівномірно дрібниста схема буде і частково дрібнистою.

Теорема 6.4.2. *Нехай $I = [a, b]$ – невироджений відрізок числової прямої, $W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ – $(2, 3)$-схема, що пов'язана з відрізком I, $(M_s^1)_{s\in S_\infty}$, $(M_s^2)_{s\in S_\infty}$ і $(N_s)_{s\in S_\infty}$ – відповідно сім'ї лівих і правих вільних відрізків $M_s^1 = [a_s^1, b_s^1]$, $M_s^2 = [a_s^2, b_s^2]$ та ведучих відрізків N_s схеми W, F – ядро схеми W,*

$M^i = \bigcup\limits_{s\in S_\infty} M^i_s$, $i = 1, 2$, $A = \bigcup\limits_{s\in S_\infty} \{a^1_s, a^2_s, a^3_s\}$, $B = \bigcup\limits_{s\in S_\infty} \{b^0_s, b^1_s, b^2_s\}$ *і* $f = \chi_{M^1}$ – *характеристична функція множини* M^1 *на відрізку* I. *Тоді:*

а) функція f *перехідна і* $f(a) = f(b) = 0$;

б) функція f *неперервна справа у кожній точці з* A *і зліва у кожній точці з* B;

в) якщо схема W *частково дрібниста, то функція* $f : I \to \mathbb{R}$ *буде двосторонньо квазінеперервною і* $D(f) = frF = F \setminus intF \supseteq A \cup B$;

г) якщо схема W *дрібниста, то функція* $f : I \to \mathbb{R}$ *буде двосторонньо квазінеперервною,* $D(f) = F$ *і множина* F *має потужність континууму.*

Доведення. а). Перехідність функції f випливає з теореми 6.1.1, оскільки множина R_f її значень складається з двох чисел 0 і 1, отже, її доповнення $\mathbb{R} \setminus R_f$ всюди щільне в $\mathbb{R}$. Рівність $f(a) = f(b) = 0$ випливає з того, що $M^1 \cap \{a, b\} = \varnothing$ за побудовою.

б). Нехай $x_0 = a^i_s$, де $i = 1, 2$, $s \in S_n$, – якась точка з множини A, що не дорівнює b. На відрізку $M^i_s = [a^i_s, b^i_s]$ функція f стала і набуває значення 1, якщо $i = 1$, і 0, якщо $i = 2$. Звідси негайно випливає її неперервність справа в точці x_0. Коли $x_0 = b$, функція f вважається автоматично неперервною справа. Так само доводиться неперервність зліва у точках $x_0 = b^i_s$ з множини B.

в). Розглянемо вільні відкриті інтервали

$$G^1_s = (a^1_s, b^1_s) \text{ і } G^2_s = (a^2_s, b^2_s)$$

та відкриті множини

$$G^1 = \bigcup_{s\in S_\infty} G^1_s, G^2 = \bigcup_{s\in S_\infty} G^2_s \text{ і } G = G^1 \cup G^2.$$

За побудовою $f(x) = 1$ на G^1 і $f(x) = 0$ на G^2. Таким чином, функція f стала на відкритих множинах G^1 і G^2, а значить, неперервна у кожній точці відкритої множини G. Тому $D(f) \subseteq F = I \setminus G$. На внутрішності $intF$ у відрізку I функція f набуває значення 0, адже $intF \cap M^1 = \varnothing$. Справді, нехай $x \in intF$. Тоді існує такий інтервал $U = (x - \delta, x + \delta)$, якщо $a < x < b$, і півінтервали $U = [x, x + \delta)$, якщо $x = a$, та $U = (x - \delta, x]$, якщо $x = b$, такі, що $U \subseteq F$. Оскільки $F \cap G^1 = \varnothing$ за побудовою, то і $U \cap G^1 = \varnothing$, а значить, $U \cap G^1_s = \varnothing$ для кожного $s \in S_\infty$. Якщо U – це інтервал, то обов'язково і

$U \cap M_s^1 = \varnothing$ для кожного $s \in S_\infty$ і тому $U \cap M^1 = \varnothing$. Якщо ж $U = [a, a+\delta)$, то кожний інтервал G_s^1 лежить справа від U, отже, і тут $U \cap M_s^1 = \varnothing$ для кожного $s \in S_\infty$, а значить, $U \cap M^1 = \varnothing$. Так само, коли $U = (b-\delta, b]$, то кожний інтервал G_s^1 лежить зліва від U і тут $U \cap M^1 = \varnothing$. Отже, $x \notin M^1$. Оскільки $f(x) = 0$ на $intF$ і множина $intF$ відкрита, то f неперервна в кожній точці з $intF$. Звідси негайно випливає, що $D(f) \subseteq F \setminus intF = frF$.

Нехай $x_0 \in frF$. Покажемо, що $x_0 \in D(f)$. Візьмемо $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і розглянемо довільний δ-окіл $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0.

Припустимо, що $f(x_0) = 1$. Тоді $x_0 \in M^1$ і $x_0 \notin G^1$, адже $G^1 \cap F = \varnothing$. Тому існує таке $s \in S_\infty$, що $x_0 \in [a_s^1, b_s^1] \setminus (a_s^1, b_s^1)$, отже, $x_0 = a_s^1$ або $x_0 = b_s^1$.

Нехай $x_0 = a_s^1$, де $s \in S_m$ для деякого m. Розглянемо ведучі відрізки $V_n = N_{s,1,3,\ldots,3} = N_{j_1,\ldots,j_m,1,3,\ldots,3}$, які прилягають до вільного відрізка $M_s^1 = [a_s^1, b_s^1]$ зліва. Зрозуміло, що $\Delta_{m+n+1}(x_0) = V_n$. За умовою $\lim\limits_{n\to\infty} |V_n| = 0$, адже схема W частково дрібниста. Тому існує такий номер p, що $|V_p| < \delta$, а значить, $V_p \subseteq U$, бо правий край відрізка V_p – це центр околу U. У ведучому відрізку V_p містяться два вільних відрізки M_t^1 і M_t^2, де $t = (j_1, \ldots, j_m, 1, 3, \ldots, 3)$. За побудовою $f(x) = 0$ на M_t^2 і тоді $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$ у кожній точці $x \in M_t^2 \subseteq V_p \subseteq U$. Отже, $x_0 \in D(f)$.

Нехай $x_0 = b_s^1$, де $s \in S_m$ для деякого m. Тепер розглянемо ведучі відрізки $V_n = N_{s,2,1,\ldots,1} = N_{j_1,\ldots,j_m,2,1,\ldots,1}$, які на цей раз прилягають до вільного відрізка M_s^1 справа. І тут $V_n = \Delta_{m+n+1}(x_0)$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} |V_n| = 0$ згідно з умовою. Тому існує такий номер p, що $|V_p| < \delta$, а значить, $V_p \subseteq U$, бо тепер уже лівий кінець відрізка V_p є центром δ-околу U. Розглядаючи відповідні вільні відрізки M_t^1 і M_t^2, ми отримаємо, що $M_t^2 \subseteq V_p \subseteq U$ і на M_t^2 виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$. Отже, і тут $x_0 \in D(f)$.

Припустимо тепер, що $f(x_0) = 0$. Оскільки $x_0 \notin intF$, то $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \not\subseteq F$. Тому існує точка $x_1 \in U \setminus F = U \cap G$. Оскільки $x_1 \in G = G^1 \cup G^2$, то $x_1 \in G^1$ або $x_1 \in G^2$. Якщо $x_1 \in G^1$, то $f(x_1) = 1$ і $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$.

Розглянемо випадок, коли $x_1 \in G^2$. Тоді існує таке $s \in S_m$ для деякого m, що $x_1 \in G_s^2$. Але $x_0 \notin G_s^2$, бо $x_0 \in F$ і $F \cap G_s^2 = \varnothing$. Тому для інтервалу $G_s^2 = (a_s^2, b_s^2)$ можливі такі випадки:

$$x_0 < a_s^2 < x_1 < b_s^2 \text{ або } a_s^2 < x_1 < b_s^2 < x_0.$$

У першому випадку $a_s^2 \in U$, а у другому $b_s^2 \in U$.

Нехай спочатку $a_s^2 \in U$. Існує таке $\delta_0 > 0$, що $U_0 = (a_s^2 - \delta_0, a_s^2 + \delta_0) \subseteq U$. Розглянемо ведучі відрізки $V_n = N_{s,2,3,...,3} = N_{j_1,...,j_m,2,3,...,3}$, де $s = (j_1, ..., j_m)$. Як і раніше, $V_n = \Delta_{m+n+1}(a_s^2)$, отже, $|V_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Тому існує такий номер p, що $|V_p| < \delta_0$. В такому разі відповідні вільні відрізки M_t^1 і M_t^2, що отримались в результаті поділу відрізка V_p, містяться в U_0, а значить, і в U. На відрізку M_t^1 виконуватиметься нерівність $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$. Таким чином, в інтервалі U знаходиться точка x, для якої $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon$. Тому $x_0 \in D(f)$.

Так само розбирається випадок, коли $b_s^2 \in U$. Тут треба розглядати ведучі відрізки $V_n = N_{s,3,1,...,1} = \Delta_{m+n+1}(b_s^2)$.

Отже, ми встановили, що $x_0 \in D(f)$. Таким чином, $frF \subseteq D(f)$, а значить, $frF = D(f)$, бо обернене включення було доведено раніше.

Залишилось довести, що функція f двосторонньо квазінеперервна. Нехай $x_0 \in I$, причому $x_0 < b$. Доведемо, що функція f квазінеперервна справа у точці x_0. Розглянемо довільні додатні числа ε і δ, причому $\delta < b - x_0$. Ми можемо вважати, що $x_0 \in frF$, адже на доповнені $I \setminus frF$ функція f неперервна, а значить, і квазінеперервна справа. Покладемо $U = [x_0, x_0 + \delta)$.

Припустимо спочатку, що $f(x_0) = 1$. Тоді $x_0 \in M^1$, а значить $x_0 \in M_s^1$ для деякого $s \in S_\infty$. Оскільки $x_0 \in F$, то $x_0 \notin G_s^1 = (a_s^1, b_s^1)$. В такому разі $x_0 = a_s^1$ або $x_0 = b_s^1$. У випадку $x_0 = a_s^1$ функція f буде неперервною справа в точці x_0, а значить, і квазінеперервною справа в цій точці.

Нехай $x_0 = b_s^1$. Міркуючи так само як і при доведені розривності, знаходимо два вільні відрізки M_t^1 і M_t^2, такі, що $M_t^1 \cup M_t^2 \subseteq U$. Тоді на відкритій непорожній множині G_t^1, яка міститься в U, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

Припустимо тепер, що $f(x_0) = 0$. Якщо $f(x) = 0$ на U, то f неперервна справа в точці x_0, а значить, і квазінеперервна спарва в цій точці. Нехай існує точка $x_1 \in U$, така, що $f(x_1) = 1$. Тоді $x_1 \in M^1$, отже, існує такий індекс $s \in S_\infty$, що $x_1 \in M_s^1 = [a_s^1, b_s^1]$. Оскільки $x_0 \notin M_s^1$, бо $f(x_0) = 0$, то одержується нерівність

$$x_0 < a_s^1 \leq x_1 \leq b_s^1.$$

Ясно, що тоді $a_s^1 \in U$. Так само як при доведенні розривності знаходимо два вільні відрізки M_t^1 і M_t^2, що $M_t^1 \cup M_t^2 \subseteq U$. На відкритій непорожній множині

G_s^2, яка міститься в U, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, що і дає нам квазінеперервність справа функції f у точці x_0.

Подібним чином доводиться, що функція f квазінеперервна зліва, а значить, і двосторонньо квазінеперервна.

г). Оскільки з дрібнистості схеми W випливає її часткова дрібнистність, то за доведеним у пункті в) функція f буде двосторонньо квазінеперервною і $D(f) = frF = F \setminus intF$. Крім того, з теореми 6.4.1 випливає, що ядро F ніде не щільне. Тому $frF = F \setminus intF = F$, і таким чином, $D(f) = F$.

Оскільки множина F досконала, то, як добре відомо [317, с. 32], вона має потужність континууму. □

6.3.3. Тут ми покажемо, що множина розривів двосторонньо квазінеперервної перехідної функції $f : I \to \mathbb{R}$, яка визначена на деякому проміжку I числової прямої, має одну специфічну особливість, подібну до тієї, яку мають майже неперервні функції [319].

Теорема 6.4.3. *Нехай I – деякий проміжок числової прямої і $f : I \to \mathbb{R}$ – двосторонньо квазінеперервна перехідна функція. Тоді її множина точок розриву $D(f)$ не має ізольованих точок.*

Доведення. Нехай це не так і в множині $D(f)$ існує ізольована точка x_0. Тоді існує такий окіл U точки x_0 в I, що $U \cap D(f) = \{x_0\}$. Оскільки $x_0 \in D(f)$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що для кожного $\delta > 0$ існує така точка $x_\delta \in I$, що $|x_\delta - x_0| < \delta$ і $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. З перехідності f у точці x_0 випливає, що існують такі точки y_1, y_2 і окіл $U_0 = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, для яких $y_1 \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0))$, $y_2 \in (f(x_0), f(x_0) + \varepsilon)$ і $U_0 \cap f^{-1}(y_i) = \varnothing$ при $i = 1, 2$. Точка $x_\delta \in U_0$, для якої $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, задовольняє одну з нерівностей:

$$x_0 - \delta < x_\delta < x_0 \text{ або } x_0 < x_\delta < x_0 + \delta, \text{ адже } x_\delta \neq x_0.$$

Припустимо, що $x_0 < x_\delta < x_0 + \delta$. Нехай $y_0 = f(x_0)$ і $\varepsilon_0 = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$. Оскільки $y_1 < y_0 < y_2$, то $\varepsilon_0 > 0$. Скориставшись квазінеперервністю справа функції f у точці x_0, знайдемо такий відкритий інтервал $U^* = (x^* - \delta^*, x^* + \delta^*)$, що $U^* \subseteq (x_0, x_0 + \delta)$ і $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0$ на U^*, зокрема, $|f(x^*) - f(x_0)| < \varepsilon_0$ і $x_0 < x^* < x_0 + \delta$. Для числа $y_\delta = f(x_\delta)$ виконується одна з нерівностей: $y_\delta \geq y_0 + \varepsilon > y_2$ або $y_\delta \leq y_0 - \varepsilon < y_1$. З другого боку, для числа $y^* = f(x^*)$ маємо, що

$$y_1 = y_0 - y_0 + y_1 \leq y_0 - \varepsilon_0 < y^* < y_0 + \varepsilon_0 \leq y_0 + y_2 - y_0 = y_2.$$

Припустимо, що $y_\delta \geq y_0 + \varepsilon$. Зауважимо, що функція f неперервна на інтервалі $(x_0, x_0+\delta)$, $\{x_\delta, x^*\} \subseteq (x_0, x_0+\delta)$ і $f(x_\delta) = y_\delta \geq y_0 + \varepsilon > y_2 > y^* = f(x^*)$. За теоремою про проміжне значення існує така точка $x_2 \in (x_0, x_0+\delta)$, що $f(x_2) = y_2$, а це суперечить тому, що $U_0 \cap f^{-1}(y_2) = \varnothing$. У випадку $y_\delta \leq y_0 - \varepsilon$ буде виконуватись нерівність $f(x_\delta) = y_\delta \leq y_0 - \varepsilon < y_1 < y^* = f(x^*)$, отже, існує точка $x_1 \in (x_0, x_0+\delta)$, для якої $f(x_1) = y_1$, що суперечить тому, що $U_0 \cap f^{-1}(y_1) = \varnothing$.

Так само міркуємо у випадку $x_0 - \delta < x_\delta < x_0$, використавши квазінеперервність функції f зліва. $\square$

Нехай $I = \langle a, b\rangle$ – проміжок числової прямої, $f : I \to \mathbb{R}$ – деяка функція і $x_0 \in I \setminus \{b\}$ $/x_0 \in I \setminus \{a\}/$. Ми кажемо, що f має *правосторонню / лівосторонню/ властивість Юнґа в точці* x_0, якщо існує така послідовність точок $x_n \in I$, що $x_n \geq x_{n+1} > x_0$ $/x_n \leq x_{n+1} < x_0/$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Якщо $b \in I$ $/a \in I/$, то вважається, що в точці b $/a/$ функція автоматично має правосторонню /лівосторонню/ властивість Юнґа. Кажуть, що функція f має *властивість Юнґа в точці* $x_0 \in I$, якщо вона в цій точці має як правосторонню, так і лівосторонню властивість Юнґа. Функція $f : I \to \mathbb{R}$ має *властивість Юнґа*, якщо вона її має у кожній точці $x \in I$.

Зрозуміло, що функція $f : I \to \mathbb{R}$ буде мати правосторонню /лівосторонню/ властивість Юнґа в точці $x_0 \in I \setminus b$ $/x_0 \in I \setminus a/$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ і для кожного $\delta > 0$ існує така точка $x^* \in (x_0, x_0+\delta) \cap I$ $/x^* \in (x_0-\delta, x_0) \cap I/$, що $|f(x^*) - f(x_0)| < \varepsilon$. З доведення теореми 3 видно, що там використовувалось лише те, що f має властивість Юнґа, яку обов'язково має двосторонньо квазінеперервна функція. Тому і множина точок розриву перехідної функції $f : I \to \mathbb{R}$, яка має властивість Юнґа, не може мати ізольованих точок.

6.4.4. У зв'язку з теоремами 6.4.2 і 6.4.3 постає інтригуюча задача: якими можуть бути множини $D(f)$ точок розриву двосторонньо квазінеперервних перехідних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Тут ми робимо перший крок у цьому напрямку. Він базується на такому результаті.

Теорема 6.4.4. *Нехай F – досконала ніде не щільна підмножина невиродженого відрізка $I = [a, b]$, причому $\{a, b\} \subseteq F$. Тоді існує така дрібниста $(2, 3)$-схема W, повязана з відрізком I, що F є її ядром.*

Доведення. Розглянемо доповнення $G = I \setminus F$ множини F на відрізку I. Оскільки $\{a, b\} \subseteq F$, то $G = (a, b) \setminus F$, отже, G – це відкрита множина в $\mathbb{R}$. Зрозуміло, що $G \neq \varnothing$, бо множина F ніде не щільна. Як добре відомо, така множина є диз'юнктним об'єднанням деякої послідовності інтервалів $U_m = (a_n, b_n)$, де $m \in M$, а $M = \overline{1, m_0} = \{1, ..., m_0\}$ для деякого $m_0 \in \mathbb{N}$ або $M = \mathbb{N}$.

Припустимо, що множина M скінченна. Тоді

$$\overline{G} = \overline{\bigcup_{m \in M} U_m} = \bigcup_{m \in M} \overline{U_m} = \bigcup_{m \in M} [a_n, b_n].$$

Оскільки $\overline{G} = I \setminus intF = I$, бо множина F ніде не щільна, то

$$F = I \setminus G = \overline{G} \setminus G = \bigcup_{m \in M} [a_n, b_n] \setminus G = \bigcup_{m \in M} \{a_n, b_n\}.$$

Ця рівність показує, що множина F скінченна. Але множина F досконала і непорожня, отже, континуальна, а тому нескінченна. З отриманої суперечності випливає, що $M = \mathbb{N}$.

Оскільки $G = \bigsqcup\limits_{m=1}^{\infty} U_m \subseteq [a, b]$, то ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |U_m|$ збігається, адже $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |U_m| \leq b - a$. Тому $\lim\limits_{m \to \infty} |U_m| = 0$. Зрозуміло, що існує така бієкція $k \mapsto m_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, що $|U_{m_k}| \geq |U_{m_{k+1}}|$ для кожного k. Покладемо $I_k = U_{m_k}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тоді $G = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ і $|I_k| \geq |I_{k+1}|$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що різні інтервали I_k та I_j не можуть бути суміжними, бо інакше множина F мала би ізольовані точки.

Приступимо до побудови шуканої $(2, 3)$-схеми $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Покладемо $G^1_\varnothing = (a^1_\varnothing, b^1_\varnothing) = I_1$. Ясно, що $a < a^1_\varnothing < b^1_\varnothing < b$. Розглянемо множину $K^1_\varnothing = \{k \in \mathbb{N} : I_k \subseteq [b^1_\varnothing, b]\}$. З того, що множина F ніде не щільна, випливає, що $K^1_\varnothing \neq \varnothing$. Тому існує $k^1_\varnothing = \min K^1_\varnothing$. Покладемо $G^2_\varnothing = (a^2_\varnothing, b^2_\varnothing) = I_{k^1_\varnothing}$. Нехай $r_\varnothing = (a, a^1_\varnothing, b^1_\varnothing, a^2_\varnothing, b^2_\varnothing, b)$ і $W_0 = (r_s)_{s \in S_0}$. Нехай $N_1 = [a, a^1_\varnothing]$, $N_2 = [b^1_\varnothing, a^2_\varnothing]$ і $N_3 = [b^2_\varnothing, b]$. Розглянемо множини $K^1_{j_1} = \{k \in \mathbb{N} : I_k \subseteq N_{j_1}\}$ при $j_1 = 1, 2, 3$. Всі вони непорожні, бо множина F ніде не щільна. Тому існують номери $k^1_{j_1} = \min K^1_{j_1}$ для $j_1 = 1, 2, 3$. Покладемо $G^1_{j_1} = (a^1_{j_1}, b^1_{j_1}) = I_{k^1_{j_1}}$ для $j_1 = 1, 2, 3$. Далі розглянемо множини $K^2_{j_1} = \{k \in \mathbb{N} : I_k \subseteq [b^1_{j_1}, a^2_{j_1}]\}$, числа $k^2_{j_1} = \min K^2_{j_1}$ і покладемо $G^2_{j_1} = (a^2_{j_1}, b^2_{j_1}) = I_{k^2_{j_1}}$. Для $j_1 = 1, 2, 3$ розглянемо 6-вектор $r_{j_1} = (b^0_{j_1}, a^1_{j_1}, b^1_{j_1}, a^2_{j_1}, b^2_{j_1}, a^3_{j_1})$, де $b^0_1 = a$, $b^0_2 = b^1_\varnothing$ і $b^0_3 = b^2_\varnothing$, а $a^3_1 = a^1_\varnothing$, $a^3_2 = a^2_\varnothing$ і $a^3_3 = b$. Пачка першого рангу $W_1 = (r_1, r_2, r_3)$ буде узгодженою з пачкою W_0.

Зрозуміло, що цей процес можна продовжити до нескінченності, будуючи відповідні інтервали $G_s^i = (a_s^i, b_s^i) = I_{k_s^i}$ з найменшими номерами k_s^i, де $s \in S_n$, $n = 0, 1, ...$ і породжені ними пачки $W_n = (r_s : s \in S_n)$ n-го рангу, такі, що W_n буде узгодженою з W_{n+1}. Так ми побудуємо певну $(2,3)$-схему $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, пов'язану з відрізком I, вільними інтервалами якої будуть інтервали G_s^i.

Покажемо, що ядро цієї схеми збігається з множиною F. Для цього досить зрозуміти, що система $\mathcal{G} = \{G_s^1 : s \in S_\infty\} \cup \{G_s^2 : s \in S_\infty\}$ збігається з системою $\mathcal{I} = \{I_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Включення $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{I}$ негайно випливає з побудови, адже $G_s^i = I_{k_s^i}$. Так само за побудовою $I_1 \in \mathcal{G}$. Покажемо, що $I_2 \in \mathcal{G}$. Якщо $I_2 \subseteq [b_\varnothing^1, b]$, то $k_\varnothing^1 = 2$ і $I_2 = G_\varnothing^2 \in \mathcal{G}$. Якщо ж це не так, то $I_2 \subseteq [a, a_\varnothing^1] = N_1$. Тоді $k_1^1 = 2$ і $I_2 = G_1^1 \in \mathcal{G}$. Так само I_3 обов'язково зустрінеться серед вільних інтервалів до другого рангу включно, I_4 – до третього рангу і т.д.. Таким чином, $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{I}$, отже, $\mathcal{G} = \mathcal{I}$. Тому

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcup_{s \in S_\infty} (G_s^1 \cup G_s^2),$$

отже, F – це ядро схеми W.

Дрібнистість схеми W випливає з теореми 6.4.1. □

Теорема 6.4.5. *Для довільного скінченного або нескінченного проміжку $J \subseteq \mathbb{R}$ і довільної ніде не щільної досконалої в J множини F існує така двосторонньо квазінеперервна перехідна функція $f : J \to \mathbb{R}$, що $D(f) = F$.*

Доведення. Оскільки всі однотипні проміжки гомеоморфні між собою, то доведення достатньо провести для скінченного проміжку J. Нехай $a = \inf F$ та $b = \sup F$. До відрізка $I = [a, b]$ і його досконалої підмножини $F \cup \{a, b\}$ застосовуємо теореми 6.4.4 і 6.4.2 і одержуємо двосторонньо квазінеперервну перехідну функція $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, для якої $D(g) = F$. Залишилось покласти $g(x) = g(a)$ при $x < a$, $g(x) = g(b)$ при $x > b$ і $f = g|_J$. □

6.5. Подальші застосування перехідності

6.5.1. В цьому підрозділі вивчимо питання, які пов'язані з перехідністю обернених відображень, а також розглянемо зв'язок між перехідністю та властивістю замкненості графіка для відображень від двох змінних.

Твердження 6.5.1. *Нехай X – топологічний простір, який задовольняє аксіому T_1 і $f : X \to \mathbb{R}$ – бієкція. Тоді f – перехідна функція.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Візьмемо довільну точку $y \in (f(x), f(x) + \varepsilon)$. Оскільки функція f є сюр'єктивною, то існує точка $x \in X$, така, що $f(x) = y$. З аксіоми T_1 простору X випливає, що існує окіл U точки x_0 в X, такий, що $x \notin U$. Тоді $U \cap f^{-1}(y) = \varnothing$, бо функція f є ін'єктивною. Це означає перехідність зверху функції f у точці x_0. Аналогічно встановлюється перехідність знизу. Таким чином, функція f перехідна у точці x_0, а оскільки точка x_0 була довільною з X, то функція f перехідна. $\square$

Умова того, що функція f в твердженні 6.5.1 набуває значення в $\mathbb{R}$, є істотною. Це показує наступне твердження.

Твердження 6.5.2. *Існує бієкція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яка не є перехідною.*

Доведення. Розглянемо довільну бієкцію $\alpha : (0, 1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Для кожного числа $r \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ через g_r позначимо бієкцію кола

$$K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

на частину

$$L_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :, x \neq 0\}$$

прямої $y = \alpha(r)x$, а через g_1 позначимо бієкцію кола

$$K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

на частину

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \neq 0\}$$

прямої $x = 0$.

Тепер визначимо функцію $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ так:

$$f(x, y) = \begin{cases} (0, 0), & (x, y) = (0, 0), \\ g_r(x, y), & (x, y) \in K_r. \end{cases}$$

Очевидно, що так задане відображення f є бієкцією площини $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$. Покажемо, що воно не є перехідним у точці $(0, 0)$.

Нехай V – обмежений окіл точки $(0,0)$ в $\mathbb{R}^2$. Розглянемо довільний відкритий окіл W точки $(0,0)$, такий, що $W \subseteq V$ і довільний окіл U точки $(0,0)$ в $\mathbb{R}^2$. Тоді існує таке число $r \in (0,+\infty)$, що $K_r \subseteq U$. Оскільки W – відкритий обмежений окіл точки $(0,0)$ в $\mathbb{R}^2$, то. Тому

$$U \cap f^{-1}(frW) \supseteq K_r \cap f^{-1}(frW) \neq \varnothing,$$

адже $f(K_r) = L_r$ і $L_r \cap frW \neq \varnothing$. Отже, відображення f не перехідне у точці $(0,0)$. □

Твердження 6.5.3. *Нехай X – локально зв'язний простір, який задовольняє аксіому T_1 і $f : X \to \mathbb{R}$ – бієкція, яка має слабку властивість Дарбу. Тоді f – неперервне відображення.*

Доведення. З твердження 6.5.1 випливає, що функція f перехідна, а тому згідно з теоремою 6.1.8 вона неперервна. □

Зауважимо (див. огляд [96]), що для функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з S-неперервності, зв'язності, властивості зв'язного графіка чи властивості Дарбу випливає слабка властивість Дарбу. Функції, які є S-неперервними, зв'язними, мають властивість зв'язного графіка, мають властивість Дарбу чи мають слабку властивість Дарбу коротко називають *функціями типу Дарбу.*

Твердження 6.5.4. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – бієкція, яка є функцією типу Дарбу. Тоді f^{-1} теж є функцією типу Дарбу.*

Доведення. З твердження 6.5.3 випливає, що функція f неперервна, а тому обернена функція f^{-1} теж неперервна, а отже, є функцією типу Дарбу. □

Твердження 6.5.5. *Нехай X – топологічний векторний простір, який задовольняє аксіому T_1 і $f : X \to \mathbb{R}$ – лінійна бієкція. Тоді f – неперервне відображення.*

Доведення. З твердження 6.5.1 випливає, що функція f перехідна, а тому згідно з теоремою 6.3.2 вона неперервна. □

Зауважимо, що твердження 6.5.5 випливає і з теореми Тихонова про єдиність лінійної гаусдорфової топології на скінченновимірному векторному просторі [330, с. 16].

Покажемо, що відомий результат про неперервність монотонної бієкції є частинним випадком твердження 6.5.3.

Твердження 6.5.6. *Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ – монотонна бієкція, де X і $f(X)$ – проміжки числової прямої $\mathbb{R}$. Тоді f має властивість Дарбу.*

Доведення. Розглянемо довільний проміжок $\langle a, b\rangle \subseteq X$. Треба довести, що множина $f(\langle a, b\rangle)$ зв'язна, тобто є проміжком. Розглянемо довільні точки $y_1, y_2 \in f(\langle a, b\rangle)$. Нехай $y_1 < y_2$ і існують точки $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, такі, що $f(x_1) = y_1$ і $f(x_2) = y_2$. Покажемо, що $[y_1, y_2] \subseteq f(\langle a, b\rangle)$. Візьмемо довільну точку $y \in (y_1, y_2)$. Оскільки множина $f(X)$ є проміжком і $y_1, y_2 \in f(X)$, то $[y_1, y_2] \subseteq f(X)$, а тому $y \in f(X)$. Нехай x – це така точка з X, що $f(x) = y$. Оскільки $y_1 < y < y_2$ і функція f монотонна, то точка x лежить між точками x_1 та x_2. Тому $x \in \langle a, b\rangle$ і $y = f(x) \in f(\langle a, b\rangle)$. Отже, множина $f(\langle a, b\rangle)$ зв'язна і це означає, що функція f має властивість Дарбу. □

Твердження 6.5.7. *Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ – монотонна бієкція, де X і $f(X)$ – проміжки числової прямої $\mathbb{R}$. Тоді f неперервна.*

Доведення. З твердження 6.5.6 випливає, що функція f має властивість Дарбу (отже, і слабку властивість Дарбу), а тому згідно з твердженням 6.5.3 вона неперервна. □

6.5.2. Умова замкненості графіків розрізів f^x і f_y не гарантує замкненості графіка відображення $fX \times Y \to Z$, де X, Y і Z – топологічні простори. Це демонструє наступний приклад.

Приклад 6.5.1. *Розглянемо функцію Шварца $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка визначена так: $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ для $x^2+y^2 \neq 0$ і $f(x, y) = 0$ для $x^2+y^2 = 0$. Ця функція є неперервною відносно кожної змінної. Тому розрізи f^x і f_y мають замкнені графіки. Однак графік Grf функції f не є замкненою множиною в $\mathbb{R}^3$, бо точки $p_z = (0, 0, z)$, де $-1 \leq z \leq 1$ і $z \neq 0$, належить до замикання Grf, але $p_z \notin Grf$.*

Але обернене твердження є очевидним.

Теорема 6.5.1. *Нехай X, Y і Z – топологічні простори, відображення $f : X \times Y \to Z$ має замкнений графік. Тоді для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ відображення f^x і f_y мають замкнені графіки.*

Нагадаємо, що відображення називається *точково розривним*, якщо множина його точок неперервності є всюди щільною. Зауважимо, що кожна

точково розривна функція $f : X \to Y$ зі значеннями у метричному просторі є кліковою. Якщо простір X берівський, то кожна клікова функція є точково розривною.

Теорема 6.5.2. *Нехай X – берівський простір, Y – топологічний простір, що має зліченну псевдобазу, Z – сепарабельний метричний, в якому кожна обмежена множина має компактне замикання, і функція $f : X \times Y \to Z$ задовольняє умови:*

(1) f^x має замкнений графік для всіх x з деякої залишкової множини M в X;

(2) f_y має замкнений графік для всіх $y \in Y$.

Тоді f є кліковою, а якщо простір Y берівський, то і точково розривною.

Доведення. Зауважимо, що метричний простір, в якому кожна обмежена множина має компактне замикання, є локально компактним. З леми 4.7.3 випливає, що для кожного $x \in M$ множина $D(f^x)$ замкнена і ніде не щільна в Y. Тоді множина $C(f^x)$ відкрита і всюди щільна в Y для кожного $x \in M$, а отже, розрізи f^x є кліковими для кожного $x \in M$. Згідно з теоремою 4.7.9 функція f є кліковою за сукупністю змінних.

Якщо простір Y берівський, то і добуток $X \times Y$ буде берівським, адже Y має зліченну псевдобазу [134, с. 56]. У цьому випадку f буде точково розривною як клікова функція на берівському просторі. □

В теоремі 6.1.2 було встановлено, що кожне відображення із замкненим графіком, яке набуває значень в гаусдорфовому локально компактному просторі Y, є перехідним. Легко переконатися, що обернене твердження не вірне. Тому виникає наступне природне питання: які необхідні умови треба накласти на перехідну функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, щоб вони гарантували замкненість множини Grf? Таке ж питання можна поставити і для функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Приклад 6.5.2. *Існує перехідна за сукупністю змінних функція $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої розрізи h^x і h_y мають замкнені графіки для всіх $x, y \in \mathbb{R}$, але множини Grh не є замкнена.*

Побудова прикладу. Розглянемо функції $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які визначені так:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, x \neq 0, \\ 0, x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, x \neq 0, \\ -1, x = 0, \end{cases}$$

Зауважимо, що функції f і g мають замкнені графіки. Тоді функція $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка визначена так:

$$h(x, y) = \begin{cases} f(y - x), x \geq 0, \\ g(y - x), x < 0 \end{cases}$$

перехідна за сукупністю змінних, h^x і h_y мають замкнені графіки для всіх $x, y \in \mathbb{R}$, але множина Grh не є замкнена в $\mathbb{R}^3$. $\square$

Хоча, як показує приклад 6.5.2, сукупно перехідні функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, у яких розрізи f^x і f_y мають замкнені графіки для всіх $x, y \in \mathbb{R}$, не зобов'язані мати замкнений графік, однак вони мають багато спільних властивостей з функціями у яких графік замкнений. Лема 4.7.3 говорить, що для функцій із замкненим графіком $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ множина $D(f)$ є замкненою і ніде не щільною. Виявляється така ж властивість притаманна і сукупно перехідним функціям, у яких розрізи f^x і f_y мають замкнені графіки.

Теорема 6.5.3. *Нехай $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – перехідна за сукупністю змінних функція, для якої розрізи f^x і f_y мають замкнені графіки для всіх $x, y \in \mathbb{R}$. Тоді $D(f)$ – замкнена ніде не щільна множина.*

Доведення. Спочатку встановимо ніде не щільність множини $D(f)$. Розглянемо довільні відкриті непорожні множини U та V відповідно в X та Y. З теореми 6.5.2 випливає, що функція f є точково розривною, а отже, і кліковою. Тоді існують відкриті непорожні множини U_0 та V_0 відповідно в X та Y, такі, що $U_0 \times V_0 \subseteq U \times V$ і функція f обмежена на $U_0 \times V_0$. Зрозуміло, що тоді для кожного $y \in V_0$ функція f_y обмежена на U_0 і для кожного $x \in U_0$ функція f^x обмежена на V_0. З леми 4.7.4 випливає, що функція $g = f|_{U_0 \times V_0}$ нарізно неперервна, тобто, неперервна відносно кожної із змінних. Крім того, зауважимо, що функція g, як і функція f, є перехідною. Тоді згідно з теоремою 6.1.9 функція g є неперервною. Оскільки множина $U_0 \times V_0$ відкрита в $\mathbb{R}^2$, то функція f неперервна в кожній точці множини $U_0 \times V_0$. Таким чином, $(U_0 \times V_0) \cap D(f) = \varnothing$. Це означає, що множина $D(f)$ ніде не щільна в $\mathbb{R}^2$.

Тепер встановимо замкненість множини $D(f)$. Доведемо, що множина $C(f)$ відкрита. Візьмемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in C(f)$. Тоді існують

відкриті непорожні множини U_0 та V_0 відповідно в X та Y, такі, що функція f обмежена на $U_0 \times V_0$. Далі міркуємо так само, як і при доведенні ніде не щільності множини $D(f)$. Одержуємо, що $U_0 \times V_0 \subseteq C(f)$. Отже, множина $C(f)$ відкрита. $\square$

Обернене твердження теж має місце.

Теорема 6.5.4. *Нехай F – замкнена ніде не щільна множина в $\mathbb{R}^2$. Тоді існує перехідна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, у якої розрізи f^x і f_y мають замкнені графіки для всіх $x, y \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Оскільки простір $\mathbb{R}^2$ досконало нормальний, то існує неперервна функція $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, така, що $g(x, y) = 0$ для всіх $(x, y) \in F$ [325, с.140]. Розглянемо функцію $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка визначена так:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{g(x,y)}, (x, y) \notin F, \\ 0, (x, y) \in F. \end{cases}$$

$\square$

Функція f має замкнений графік, а отже, перехідна, всі x- та y-розрізи f^x та f_y мають замкнені графіки і $D(f) = F$.

Висновки до розділу 6.

В шостому розділі подано результати, які стосуються перехідності та її аналогів.

У **підрозділах 6.1** та **6.2** досліджено властивості перехідних відображень та їх аналогів. Крім того, встановлено ряд декомпозиційних теорем. Зокрема, встановлено, що якщо X – локально зв'язний простір, Y – топологічний простір, відображення $f : X \to Y$ має слабку властивість Дарбу і є перехідним, то f – неперервне відображення.

Підрозділ 6.3 присвячений перенесенню теореми Банаха про замкнений графік на випадок перехідних відображень. Встановлено, що лінійне відображення $f : X \to Y$, що діє в довільних ТВП, буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно перехідне.

У **підрозділі 6.4** побудовано приклад двосторонньо квазінеперервної перехідної розривної функцій, який демонструє, що умова замкненості

графіка не може бути замінена перехідністю в декомпозиційній теоремі про неперервність двосторонньо квазінеперервної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком.

Подальші властивості перехідності вивчаються в **підрозділі 6.5**. Встановлено, що кожна бієкція $f : X \to \mathbb{R}$, де X – топологічний простір, який задовольняє аксіому T_1, є перехідною. За допомогою цього результату встановлено, що для кожної бієкції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка є функцією типу Дарбу, обернена функція f^{-1} теж є функцією типу Дарбу. Крім того, встановлено, що нарізно замкнене відображення є точково розривним.

РОЗДІЛ 7.
МНОГОЗНАЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

7.1. Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних мультифункцій

7.1.1. Позначимо через $C^+(F)$ множину точок неперервності зверху відображення F, а через $C^-(F)$ – множину точок неперервності знизу відображення F. Для множини $B \subseteq Y$ покладемо $C_B^+(F) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C^+(F)\}$, $C_B^-(F) = \{x \in X : \{x\} \times B \subseteq C^-(F)\}$. Покладемо $F^x(y) = F(x, y), x \in X$ і $F_y(x) = F(x, y), y \in Y$.

Лема 7.1.1. *Нехай Z – метризовний сепарабельний простір. Тоді в Z існує база відкритих множин $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$, що для довільної множини K і відкритої множини W в Z, таких, що $K \cap W \neq \varnothing$ існує номер n, що $K \cap W_n \neq \varnothing$ і $\overline{W_n} \subseteq W$.*

Доведення. Оскільки простір Z метризовний сепарабельний, то він регулярний і задовольняє другу аксіому зліченності. В Z існує база $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих множин. Візьмемо довільну точку $z \in K \cap W$. Тоді існує замкнений окіл W' точки z, що $z \in W' \subseteq W$. Оскільки $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ база простору Z, то існує номер n, такий, що $z \in W_n \subseteq W'$. Оскільки множина W' замкнена, то $\overline{W_n} \subseteq W'$. Тоді $K \cap W_n \neq \varnothing$ і $\overline{W_n} \subseteq W' \subseteq W$. □

Теорема 7.1.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, B – множина зліченного типу в Y, Z – метризовний сепарабельний простір, мультифункція $F : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервна зверху і F^x неперервна знизу для x з деякої залишкової множини M в X. Тоді множина $C_B^-(F)$ залишкова в X.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай множина $C_B^-(F)$ не є залишковою в X. Тоді множина

$$E = \{x \in X : (\exists y_x \in B)(p_x = (x, y_x) \notin C^-(F))\}$$

другої категорії в X. Для кожної точки $x \in E$ існує відкрита множина $W(x)$ в Z, така, що $F(p_x) \cap W(x) \neq \varnothing$ і для довільного околу O точки p_x в $X \times Y$ існує точка $p \in O$, що $F(p) \cap W(x) = \varnothing$. Тоді згідно з лемою 7.1.1 існує база відкритих множин $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$, така, що для кожної точки $x \in E$ існує номер n, такий, що $\overline{W_n} \subseteq W(x), F(p_x) \cap W_n \neq \varnothing$ і для довільного околу O точки p_x в $X \times Y$ існує точка $p \in O$, що $F(p) \cap \overline{W_n} = \varnothing$. Оскільки множина E другої категорії, то існує номер n_0 і множина $E_1 \subseteq E$ другої категорії в X, що для всіх $x \in E_1$ маємо $F(p_x) \cap W_{n_0} \neq \varnothing$ і для довільного околу O точки p_x в $X \times Y$ існує точка $p \in O$, що $F(p) \cap \overline{W_{n_0}} = \varnothing$.

Розглянемо множину $E_2 = E_1 \cap M$. Множина E_2 другої категорії в X. Позначимо через $\mathcal{V} = \{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ систему множин в Y, що фігурує в означенні множини зліченного типу. Розглянемо множини

$$A_m = \{x \in E_2 : (y_x \in V_m)(\forall y \in V_m)(F^x(y) \cap W_{n_0} \neq \varnothing)\}.$$

Оскільки F^x неперервна знизу для $x \in E_2$, то $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = E_2$. Тоді існує номер m_0 і відкрита непорожня множина G, що $G \subseteq \overline{A_{m_0}}$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in G \cap A_{m_0}$. Оскільки $G \times V_{m_0}$ окіл точки $p_{x_0} = (x_0, y_{x_0})$, то існує точка $p \in G \times V_{m_0}$, що $F(p) \cap \overline{W_{n_0}} = \varnothing$, тобто, $F(p) \subseteq Z \setminus \overline{W_{n_0}}$. З горизонтальної квазінеперервності зверху маємо, що існує відкрита непорожня множина $G_1 \subseteq G$ і точка $y_1 \in V_{m_0}$, такі, що для всіх $p \in G_1 \times \{y_1\}$ маємо $F(p) \subseteq Z \setminus \overline{W_{n_0}}$, тобто $F(p) \cap \overline{W_{n_0}} = \varnothing$. Однак, $F(p) \cap W_{n_0} \neq \varnothing$ для кожної точки $p \in A_{m_0} \times V_{m_0}$. Оскільки $A_{m_0} \cap G_1 \neq \varnothing$ і $y_1 \in V_{m_0}$, то одержали суперечність. Отже, наше припущення хибне. $\square$

7.1.2. Тепер перейдемо до вивчення множини точок неперервності зверху.

Лема 7.1.2. *Нехай Z – метризовний сепарабельний простір. Тоді в Z існує система $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих непорожніх множин, така, що для будь-якої компактної множини K в Z і будь-якої відкритої множини W в Z, таких, що $K \subseteq W$ існує номер n, що $K \subseteq W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq W$.*

Доведення. Оскільки простір Z метризовний сепарабельний, то він регулярний і задовольняє другу аксіому зліченності. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ база відкритих множин в Z, K – компактна підмножина в Z і W – відкрита множини в Z, такі, що $K \subseteq W$. Для кожної точки $z \in K$ існує множина V_n, що $z \in \overline{V_n} \subseteq W$. Таким чином одержуємо відкрите покриття

множини K. Оскільки множина K компактна, то існує скінчене підпокриття $V_{n_1}, V_{n_2}, ..., V_{n_k}$ множини K. Зрозуміло, що $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{n_i} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{n_i}} \subseteq W$. Розглянемо систему, яка складається з відкритих множин, що є скінченними об'єднаннями множин бази. Ця система буде зліченною, вона і є шуканою. $\square$

Теорема 7.1.2. *Нехай X і Y – топологічні простори, B – множина зліченного типу в Y, Z – метризовний сепарабельний простір, компактнозначна мультфункція $F : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервна знизу і F^x неперервна зверху для x з деякої залишкової множини M в X. Тоді множина $C_B^+(F)$ залишкова в X.*

Доведення. Нехай множина $C_B^+(F)$ не є залишковою в X. Тоді множина

$$E = \{x \in X : (\exists y_x \in B)(p_x = (x, y_x) \notin C^+(F))\}$$

другої категорії в X. Для кожної точки $x \in E$ існує відкрита множина $W(x)$ в Z, така, що $F(p_x) \subseteq W(x)$ і для довільного околу O точки p_x в $X \times Y$ існує точка $p \in O$, що $F(p) \not\subseteq W(x)$. Згідно з лемою 7.1.2 в Z існує система $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих непорожніх множин, така, що для кожної точки $x \in E$ існує номер n, такий, що $F(p_x) \subseteq W_n \subseteq \overline{W_n} \subseteq W(x)$ і для довільного околу O точки p_x в $X \times Y$ існує точка $p \in O$, що $F(p) \not\subseteq \overline{W_n}$. Оскільки множина E другої категорії, то існує номер n_0 і множина $E_1 \subseteq E$ другої категорії в X, що для всіх $x \in E_1$ маємо $F(p_x) \subseteq W_{n_0}$ і для довільного околу O точки p_x в $X \times Y$ існує точка $p \in O$, що $F(p) \not\subseteq \overline{W_{n_0}}$.

Розглянемо множину $E_2 = E_1 \cap M$. Оскільки множина M залишкова в X, то множина E_2 другої категорії в X. Позначимо через $\mathcal{V} = \{V_m : m \in \mathbb{N}\}$ систему множин в Y, що фігурує в означенні множини зліченного типу. Розглянемо множини $A_m = \{x \in E_2 : (y_x \in V_m)(\forall y \in V_m)(F^x(y) \subseteq W_{n_0}\}$. Оскільки F^x неперервна зверху для $x \in E_2$, то $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m = E_2$. Тоді існує номер m_0 і відкрита непорожня множина G, що $G \subseteq \overline{A_{m_0}}$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in G \cap A_{m_0}$. Оскільки $G \times V_{m_0}$ окіл точки $p_{x_0} = (x_0, y_{x_0})$, то існує точка $p \in G \times V_{m_0}$, що $F(p) \not\subseteq \overline{W_{n_0}}$, тобто, $F(p) \cap Z \setminus \overline{W_{n_0}} \neq \varnothing$. З горизонтальної квазінеперервності знизу випливає, що існує відкрита непорожня множина $G_1 \subseteq G$ і точка $y_1 \in V_{m_0}$, такі, що для всіх $p \in G_1 \times \{y_1\}$ перетин $F(p) \cap Z \setminus \overline{W_{n_0}}$ непорожній, тобто $F(p) \not\subseteq \overline{W_{n_0}}$. Однак, для кожної точки $p \in A_{m_0} \times V_{m_0}$ маємо,

що $F(p) \subseteq W_{n_0}$. Оскільки $A_{m_0} \cap G_1 \neq \varnothing$ і $y_1 \in V_{m_0}$, то одержали суперечність. Отже, наше припущення хибне. $\square$

7.1.3. Безпосередньо з теорем 7.1.1 і 7.1.2 одержуємо наступні наслідки.

Наслідок 7.1.1. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метризовний сепарабельний простір, мультифункція $F : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервна зверху і F^x неперервна знизу для x з деякої залишкової множини M в X. Тоді*

(i) якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то множина $C_y^-(F) = \{x \in X : (x, y) \in C^-(F)\}$ залишкова в X для кожного $y \in Y$;

(ii) якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y^-(F)$ залишкова в X.

Наслідок 7.1.2. *Нехай X і Y – топологічні простори, Z – метризовний сепарабельний простір, компактнозначна мультфункція $F : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервна знизу і F^x неперервна зверху для x з деякої залишкової множини M в X. Тоді*

(i) якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то множина $C_y^+(F) = \{x \in X : (x, y) \in C^+(F)\}$ залишкова в X для кожного $y \in Y$;

(ii) якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y^+(F)$ залишкова в X.

7.2. Характеризація сукупної квазінеперервності многозначних відображень

7.2.1. Нехай X, Y та Z – топологічні простори і $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення.

Введемо наступні позначення:

$K^+(F)$ – множину точок квазінеперервності зверху відображення F;

$K^-(F)$ – множину точок квазінеперервності знизу відображення F;

$K^{s+}(F)$ – множину точок симетричної квазінеперервності зверху відносно x відображення F;

K^{s-} – множину точок симетричної квазінеперервності знизу відносно x відображення F.

Для відображення $F : X \times Y \to Z$ розглянемо відображення $F^x : Y \to Z$ та $F_y : X \to Z$ для кожного $x \in X$ та $y \in Y$ відповідно.

Зрозуміло, що з симетричної квазінеперервності зверху /знизу/ випливає сукупна квазінеперервність зверху /знизу/, а з сукупної квазінеперервності зверху /знизу/ – горизонтальна квазінеперервність зверху /знизу/. Обернене не вірне. Також відмітимо, що коли відображення $F : X \times Y \to Z$ симетрично квазінеперервне відносно x зверху /знизу/ в кожній точці множини $a \times Y$, то відображення $F^a : Y \to Z$ квазінеперервне зверху /знизу/.

Спочатку ми встановимо, що сукупно квазінеперервні зверху /знизу/ відображення в багатьох точках будуть симетрично казінеперервними зверху /знизу/.

Теорема 7.2.1. *Нехай X — топологічний простір, простори Y та Z задовольняють другу аксіому зліченності і $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення, яке квазінеперервне знизу за сукупністю змінних. Тоді множина $A = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq K^{s-}\}$ залишкова в X.*

Доведення. Нехай це не так. Тоді множина $E = X \setminus A$ другої категорії в X. Це означає, що для кожної точки $x \in E$ існують точка $y_x \in Y$, відкрита непорожня множина $W(x)$ в Z і околи $U(x)$ та $V(x)$ відповідно точок x в X та y_x в Y, такі, що $F(p_x) \cap W(x) \neq \varnothing$ і для кожного відкритого околу G точки x в X і для кожної відкритої непорожньої множини H в Y, для яких $G \times H \subseteq U(x) \times V(x)$, існує точка $p \in G \times H$, що $F(p) \cap W = \varnothing$.

Нехай $\{W_m : m \in \mathbf{N}\}$ і $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ – бази просторів Z та Y відповідно. Для номерів n і m розглянемо множини

$$B_{n,m} = \{x \in E : y_x \in V_n \subseteq V(x), W_n \subseteq W(x) \ i \ F(p_x) \cap W_m \neq \varnothing\}.$$

Покажемо, що $\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m} = E$. Візьмемо точку $x \in E$ і довільну точку $z \in F(p_x) \cap W(x)$. Тоді існують номери n і m, такі, що $y_x \in V_n \subseteq V(x)$, $z \in W_m \subseteq W(x)$, і тому $F(p_x) \cap W_m \neq \varnothing$. А це означає, що $x \in B_{n,m}$.

Оскільки множина E другої категорії в X, то існують числа m_0 і n_0, такі, що множина B_{n_0,m_0} щільна в деякій відкритій непорожній множині U. Розглянемо точку $p_a = (a, y_a)$, де $a \in B = B_{n_0,m_0} \cap U$. Оскільки відображення F квазінеперервне знизу в точці p_a, то існують відкриті множини G і H відповідно в просторах X і Y, такі, що $G \times H \subseteq U \times V_{n_0}$ і $F(p) \cap W_{m_0} \neq \varnothing$

для всіх точок $p \in G \times H$. З щільності множини B в U випливає, що існує точка $u \in G \cap B$. Тоді множина G є околом точки u. Отже, $F(p) \cap W_{m_0} \neq \varnothing$ для всіх точок $p \in G \times H$ і при цьому G є околом точки u, а $H \subseteq V_{n_0}$. А це суперечить тому, що $u \in B = B_{n_0,m_0} \subseteq E$. Одержали суперечність. Отже, наше припущення хибне. $\square$

Наслідок 7.2.1. *Нехай X — топологічний простір, простори Y та Z задовольняють другу аксіому зліченності і $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення, яке квазінеперервне знизу за сукупністю змінних. Тоді множина $\{x \in X : K^-(F^x) = Y\}$ залишкова в X.*

7.2.2. Проведемо подібні міркування для квазінеперервності зверху.

Лема 7.2.1. *Нехай простір Z задовольняють другу аксіому зліченності. Тоді в Z існує система $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ відкритих непорожніх множин, така, що для будь-якої компактної множини K в Z і будь-якої відкритої множини W в Z, таких, що $K \subseteq W$ існує номер n, що $K \subseteq W_n \subseteq W$.*

Доведення. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ база відкритих множин в Z. Розглянемо систему $\mathcal{W}$, яка складається з відкритих множин, що є скінченними об'єднаннями множин бази. Ця система буде зліченною. Покажемо, що вона є шуканою. Візьмемо довільну компактну множину K в Z і відкриту множину W в Z, таку, що $K \subseteq W$. Для кожної точки $z \in K$ існує множина V_n, що $z \in V_n \subseteq W$. Таким чином одержуємо відкрите покриття множини K. Оскільки множина K компактна, то існує скінчене підпокриття $V_{n_1}, V_{n_2}, ..., V_{n_k}$ множини K. Покладемо $W_n = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{n_i}$. Зрозуміло, що $W_n \in \mathcal{W}$ і $K \subseteq W_n \subseteq W$. $\square$

Теорема 7.2.2. *Нехай X — топологічний простір, простори Y та Z задовольняють другу аксіому зліченності і $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне відображення, яке квазінеперервне зверху за сукупністю змінних. Тоді множина $A = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq K^{s+}(F)\}$ залишкова в X.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай $E = X \setminus A$ – множина другої категорії в X. Тоді для кожної точки $x \in E$ існують точка $y_x \in Y$, відкрита непорожня множина $W(x)$ в Z, околи $U(x)$ і $V(x)$ відповідно точок x в X і y_x в Y, такі, що $F(p_x) \subseteq W(x)$ і для кожного відкритого околу G

точки x в X і для кожної відкритої непорожньої множини H в Y, для яких $G \times H \subseteq U(x) \times V(x)$, існує точка $p \in G \times H$, що $F(p) \not\subseteq W$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ – база простору Y, а $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ – система відкритих непорожніх множин, яка фігурує в умові леми. Для номерів n і m розглянемо множини

$$B_{n,m} = \{x \in E : y_x \in V_n \subseteq V(x), F(p_x) \subseteq W_m \subseteq W(x)\}.$$

Покажемо, що $\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m} = E$. Візьмемо точку $x \in E$. Існує номер n, такий, що $y_x \in V_n \subseteq V(x)$. Оскільки відображення F – компактнозначне, то згідно леми 7.2.1 існує номер m, такий, що $F(p_x) \subseteq W_m \subseteq W(x)$. А це означає, що $x \in B_{n,m}$.

Оскільки множина E другої категорії в X, то існують числа m_0 і n_0, такі, що множина B_{n_0,m_0} щільна в деякій відкритій непорожній множині U. Розглянемо точку $p_a = (a, y_a)$, де $a \in B = B_{n_0,m_0} \cap U$. Оскільки відображення F квазінеперервне зверху в точці p_a, то існують відкриті множини G і H відповідно в просторах X і Y, такі, що $G \times H \subseteq U \times V_{n_0}$ і $F(p) \subseteq W_{m_0}$ для всіх точок $p \in G \times H$. З щільності множини B в U випливає, що існує точка $u \in G \cap B$. Тоді множина G є околом точки u. Отже, $F(p) \subseteq W_{m_0}$ для всіх точок $p \in G \times H$ і при цьому G є околом точки u, а $H \subseteq V_{n_0}$. А це суперечить тому, що $u \in B = B_{n_0,m_0} \subseteq E$. Одержали суперечність. Отже, наше припущення хибне. □

Наслідок 7.2.2. *Нехай X — топологічний простір, простори Y та Z задовольняють другу аксіому зліченності і $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне відображення, яке квазінеперервне зверху за сукупністю змінних. Тоді множина $\{x \in X : K^+(F^x) = Y\}$ залишкова в X залишкова в X.*

7.2.3. Далі ми покращемо результати Т.Нойбруна з [234].

Теорема 7.2.3. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – регулярний простір, $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення, яке задовольняє наступні умови:*

1) F – горизонтально квазінеперервне зверху та знизу;

2) $M = \{x \in X : F^x$ – квазінеперервне знизу$\}$ – залишкова множина в X.

Тоді F – квазінеперервне знизу за сукупністю змінних.

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Покажемо, що відображення F квазінеперервне знизу за сукупністю змінних в точці p_0. Візьмемо відкриту множину W в Z, таку, що $F(p_0) \cap W \neq \varnothing$, і U та V – околи відповідно точок x_0 в X та y_0 в Y. Оскільки простір Z регулярний, то існує замкнена множина W_1, така, що $W_1 \subseteq W$ і $F(p_0) \cap \mathrm{int} W_1 \neq \varnothing$. Відображення F горизонтально квазінеперервне знизу в точці p_0, тому існують точка $y_1 \in V$ і відкрита множина $U_1 \subseteq U$, такі, що $F(p) \cap \mathrm{int} W_1 \neq \varnothing$ для кожного $p \in U_1 \times \{y_1\}$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Розглянемо множини

$$A_n = \{x \in U_1 \cap M : \forall y \in V_n, F(x, y) \cap \mathrm{int} W_1 \neq \varnothing\}.$$

З квазінеперервності знизу відносно другої змінної відображення F випливає, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U_1 \cap M$. Оскільки простір X берівський, то множина $U_1 \cap M$ другої категорії в X. Тоді існує номер n_0, такий, що $A = A_{n_0}$ щільна в деякій відкритій непорожній множині $U_2 \subseteq U_1$, тобто $U_2 \subseteq \overline{A}$ і $V_{n_0} \subseteq V$.

Отже, ми одержали відкриту непорожню множину U_2 в X, щільну в U_2 множину A і відкриту непорожню множину $H = V_{n_0}$ в Y, такі, що $U_2 \subseteq U_1$, $U_2 \subseteq \overline{A}, H \subseteq V$ і $F(x, y) \cap \mathrm{int} W_1 \neq \varnothing$ для всіх $(x, y) \in A \times H$.

Покажемо, що $F(p) \cap W_1 \neq \varnothing$ для кожного $p \in U_2 \times H$. Нехай це не так, і існує точка $p_1 \in U_2 \times H$, така, що $F(p_1) \cap W_1 = \varnothing$. Оскільки множина W_1 – замкнена, то множина $W_2 = Z \setminus W_1$ – відкрита і $F(p_1) \subseteq W_2$. З горизонтальної квазінеперервності зверху маємо, що існують точка $y_2 \in H$ і відкрита непорожня множина $U_3 \subseteq U_2$, такі, що $F(p) \subseteq W_2$ для кожного $p \in U_3 \times \{y_2\}$. Оскільки $U_3 \cap A \neq \varnothing$, то існує точка $p_2 \in (U_3 \cap A) \times \{y_2\}$. Тоді $F(p_2) \subseteq W_2$ і $F(p_2) \cap \mathrm{int} W_1 \neq \varnothing$. Отримали суперечність. Отже, $F(p) \cap W_1 \neq \varnothing$ для кожного $p \in U_2 \times H$, а значить і $F(p) \cap W \neq \varnothing$. Це означає, що відображення F сукупно квазінеперервне знизу в точці p_0. □

Теорема 7.2.4. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – нормальний, простір і $F : X \times Y \to Z$ замкненозначне відображення, яке задовольняє наступні умови:*

1) F – горизонтально квазінеперервне зверху та знизу;

2) $M = \{x \in X : F^x$ – квазінеперервне зверху$\}$ – залишкова множина в X.

Тоді F – квазінеперервне зверху за сукупністю змінних.

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Покажемо, що відображення F квазінеперервне зверху за сукупністю змінних в точці p_0. Візьмемо відкриту множину W в Z, таку, що $F(p_0) \subseteq W$ і $U \times V$ – окіл точки p_0. Оскільки простір Z нормальний, то існує замкнена множина W_1 і відкрита множина W_2, такі, що $F(p_0) \subseteq W_2 \subseteq W_1 \subseteq W$. Відображення F горизонтально квазінеперервне зверху в точці p_0, тому існують точка $y_1 \in V$ і відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U$, такі, що $F(p) \subseteq W_2$ для кожного $p \in U_1 \times \{y_1\}$.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ – псевдобаза простору Y. Розглянемо множини

$$A_n = \{x \in U_1 \cap M : \forall y \in V_n, F(x, y) \subseteq W_2\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = U_1 \cap M$. Оскільки простір X берівський, то множина $U_1 \cap M$ другої категорії в X. Тоді існує номер n_0, такий, що A_{n_0} щільна в деякій відкритій непорожній множині $U_2 \subseteq U_1$, тобто $U_2 \subseteq \overline{A_{n_0}}$ і $V_{n_0} \subseteq V$.

Отже, ми одержали відкриту непорожню множину U_2 в X, щільну в U_2 множину $A = A_{n_0}$ і відкриту непорожню множину $H = V_{n_0}$ в Y, такі, що $U_2 \subseteq U_1$, $U_2 \subseteq \overline{A}, H \subseteq V$ і $F(x, y) \subseteq W_2$ для всіх $(x, y) \in A \times H$.

Покажемо, що $F(p) \subseteq W_1$ для кожного $p \in U_2 \times H$. Нехай це не так, тобто існує точка $p_1 \in U_2 \times H$ така, що $F(p_1) \not\subseteq W_1$. Тоді множина $W_3 = Z \setminus W_1$ відкрита і $F(p_1) \cap W_3 \neq \varnothing$. З горизонтальної квазінеперервності знизу маємо, що існують точка $y_2 \in H$ і відкрита непорожня множина $U_3 \subseteq U_2$, такі, що $F(p) \cap W_3 \neq \varnothing$ для кожного $p \in U_3 \times \{y_2\}$. Оскільки $U_3 \cap A \neq \varnothing$, то існує точка $p_2 \in (U_3 \cap A) \times \{y_2\}$. Тоді $F(p_2) \cap W_3 \neq \varnothing$ і $F(p_2) \subseteq W_2$. Отримали суперечність. Тоді $F(p) \subseteq W_1$ для кожного $p \in U_2 \times H$, а отже, і $F(p) \subseteq W$. Це і означає квазінеперервність зверху функції F. □

З теорем 7.2.2 і 7.2.4 та наслідків 7.2.1 і 7.2.2 одержуємо наступні результати.

Теорема 7.2.5. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір, $F : X \times Y \to Z$ – многозначне відображення. Відображення F – квазінеперервне знизу за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли F – горизонтально квазінеперервне зверху та знизу і F^x – квазінеперервне знизу для кожного x з деякої залишкової множини M в X.*

Теорема 7.2.6. *Нехай X – берівський простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z – метризовний сепарабельний простір, $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне многозначне відображення. Відображення F – квазінеперервне зверху за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли F – горизонтально квазінеперервне зверху та знизу і F^x – квазінеперервне зверху для кожного x з деякої залишкової множини M в X.*

Висновки до розділу 7.

В цьому розділі перенесено результати про множини точок неперервності та квазінеперервності на випадок многозначних відображень від двох змінних.

Підрозділ 7.1 присвячений дослідженню множини точок сукупної неперервності зверху та знизу многозначних відображень. Зокрема, встановлено, що якщо X і Y – топологічні простори, B – множина зліченного типу в Y, Z – метризовний сепарабельний простір, многозначне відображення $F : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне зверху і F^x неперервне знизу для x з деякої залишкової множини в X, то множина $C_B^-(F)$ залишкова в X.

У **підрозділі 7.2** дано характеризації квазінеперервності зверху та знизу многозначних відображень від двох змінних, які перекривають відомі результати Т.Нойбрунна про сукупну квазінеперервність многозначних відображень.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі досліджуються властивості різних аналогів неперервності відображень як від однієї, так і від двох змінних. Зокрема вивчаються нарізні та сукупні властивості таких ослаблень неперервності. Крім того, встановлено ряд нових декомпозиційних результатів.

В дисертації такі нові наукові результати:

- введено поняття $\mathcal{A}$-квазінеперервності, що охоплює деякі ослаблення неперервності, а також вивчено тип множини точок $\mathcal{A}$-квазінеперервності;
- введено поняття неперервності відносно системи, яке охоплює велику кількість вже відомих ослаблень неперервності;
- перенесено на випадок загальних топологічних просторів результат Р.Мімни про характеризацію двосторонньої квазінеперервності в термінах замикання образа;
- встановлено теорему про декомпозицію B-квазінеперервності, яка узагальнює відповідний результат Я.Борсіка;
- вказано умови, за яких неперервність відносно системи рівносильна $\mathcal{A}$-неперервності та дано нові характеризації деяких ослаблень неперервності за допомогою операторів замикання та внутрішності;
- досліджено властивості бієкції деяких типів ослабленої неперервності, зокрема побудовано приклад квазінеперервної бієкції $f : [0, 1] \to [0, 1]$, для якої функція f^{-1} не є майже ледь неперервною, а також вказано умови, за яких для бієкції $f : X \to Y$ обернене відображення f^{-1} буде квазінеперервне, майже квазінеперервне чи псевдоквазінеперервне;
- досліджено множину точок неперервності псевдоквазінеперервного відображення, а також встановлено, що псевдоквазінеперервність рівносильна простій неперервності;
- вивчено тип точок розриву дійсних функцій для різних ослаблень неперервності і на основі цього одержано ряд результатів про

декомпозицію неперервності, зокрема встановлено, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли вона регульована і має властивість Юнґа;

- встановлено, що для топологічного простору X, просторів Y і Z, що задовольняють другу аксіому зліченності і квазінеперервного відображення $f : X \times Y \to Z$ існує залишкова множина A в X, така, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$, тим самим узагальнивши відповідний результат Е.Котліки та А. Малізевського;

- дано характеризацію сукупної квазінеперервності відображення від двох змінних. Зокрема, вказано достатні умови на простори X, Y і Z при яких має місце рівність класів $K_h\tilde{K}(X \times Y, Z) = K(X \times Y, Z)$;

- досліджено множини точок симетричної квазінеперервності, симетричної ледь неперервності та симетричної кліковості функцій $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, які монотонні відносно першої змінної;

- встановлено, що горизонтально і вертикально квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, яка монотонна відносно першої змінної, є квазінеперервною за сукупністю змінних, тим самим одержано аналог теореми Юнґа про сукупну неперервність нарізно неперервних функцій, які монотонні відносно однієї із змінних;

- дано характеризацію сукупної квазінеперервності відображення від двох змінних за участю слабкої горизонтальної квазінеперервності;

- знайдено достатні умови, за яких для відображення $f : X \times Y \to Z$ існує залишкова в X множина A, така, що відображення f сукупно майже неперервне, симетрично майже квазінеперервне відносно x, симетрично майже ледь неперервне відносно x, симетрично клікове відносно x чи симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$;

- знайдено необхідні та достатні умови, при яких для відображення $f : X \times Y \to Z$ існує залишкова в X множина A, така, що відображення f симетрично клікове відносно x чи симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці множини $A \times Y$;

- вивчено сукупні властивості функцій $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, які мають замкнений графік відносно першої змінної;
- встановлено характеризацію точкової розривності відображення від двох змінних;
- наведено приклад простору Гана, який не володіє зліченною базою;
- введено класи відображень $f : X \times Y \to Z$, які мають властивість Гана;
- встановлено, що кожна нарізно монотонна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є точково розривною;
- введено нові властивості многозначних відображень, з допомогою яких новим методом отримано загальну теорему про сукупну неперервність, яка значно розвиває теорему Калібрі-Троалліка і недавній результат Бузіада-Троалліка;
- введено дві нові властивості многозначних відображень, які дали змогу охарактеризувати відображення, що мають властивість Гана, заданих на добутку берівського простору і метризовного компакту зі значеннями в метричному просторі;
- введено поняття одностайної кліковості та локальної одностайної кліковості відносно y, які дали можливість охарактеризувати відображення, що мають властивість Гана;
- введено загальне поняття перехідності для відображень зі значеннями в довільних топологічних просторах та багато їх різновидів;
- отримано нові теореми про декомпозицію неперервності, які охоплюють всі попередні результати на цю тему В.Крецу і В.Маслюченка, Р.Мімни, М.Р.Вуйціка і М.С.Вуйціка, З.Пьотровського та інших;
- перенесенню теорему Банаха про замкнений графік на випадок перехідних відображень, зокрема встановлено, що лінійне відображення $f : X \to Y$, що діє в довільних ТВП, буде неперервним тоді і тільки тоді, коли воно перехідне;
- встановлено теорему про замкнений графік для скінченновимірних лінійних операторів;

- побудовано приклад двосторонньо квазінеперервної перехідної розривної функцій, який демонструє, що умова замкненості графіка не може бути замінена перехідністю в декомпозиційній теоремі про неперервність двосторонньо квазінеперервної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком;
- встановлено, що кожне нарізно замкнене відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є точково розривним;
- отримано нові теореми про точки сукупної неперервності та квазінеперервності многозначних відображень, які узагальнюють відповідні результати Т.Нойбрунна та Ґ. Дебса.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Abd-El-Monsef M. *β-open and β-continuous mappings* / Abd-El-Monsef M., El-Deeb S., Mahmoud R. // Bull. Fac. Sci. Assiut Univ. – 1983. – **12**. – P. 70-–90.

2. Akis V. *Fixed point theorems and almost continuity* / Akis V. // Fundam. Math. – 1984. – **121**. – P. 133–142.

3. Al-Hawary T.*Decompositions of continuity*/ Al-Hawary T., Al-Omari A. // Turk. J. Math. – 2006. – **30**, 2. – P. 187–195.

4. Al-Nashef B. *A decomposition of α-continuity and semi-continuity* / Al-Nashef B. // Acta Math. Hung. – 2002. – **97**, 1-2. – P. 115–120.

5. Alas O. *A note on functions with a closed graph* / Alas O. // Port. Math. – 1983. – **42**. – P. 351–354.

6. Aslim G. *Decompositions of some weaker forms of continuity* / Aslim G., Ayhan Y. // Acta Math. Hung. – 2004. – **105**, 1-2. – P. 85–91.

7. Baggs I. *Functions with a closed graph* / Baggs I. // Proc. Am. Math. Soc. – 1974. – **43**. – P. 439–442.

8. Baggs I. *Nowhere dense sets and real-valued functions with closed graphs* / Baggs I. // Int. J. Math. Math. Sci. – 1989. – **12**, 1. – P. 1–8.

9. Baggs I. *Properties of functions with a closed graph* / Baggs I. // Topol. Appl., Proc. Conf. St. John's 1973. – 1975. – P. 125–131.

10. Baire R. *Sur les fonctions de variables reélles* / Baire R. // Ann. Mat. Pura Appl., ser.3. – 1899. – **3**. – P. 1–123.

11. Baker C. *A note on the decomposition of continuity* / Baker C. // Acta Math. Hung. – 1997. – **75**, 3. – P. 245–251.

12. Baláž V. *On weak forms of continuity and product spaces* / Baláž V. // Acta Math. Univ. Comenianae. – 1984. – **44-45**. – P. 169–179.

13. Banaszewski K. *Algebraic properties of $\mathcal{E}$-continuous functions* / Banaszewski K. // Real Anal. Exch. – 1993. – **18**. – P. 153–168.

14. Bandyopadhyay N. *Functions with preclosed graphs* / Bandyopadhyay N., Bhattacharyya P. // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2005. –**28**, 1. – P. 87–93.

15. Banzaru T. *On the quasicontinuity of the limits for nets of multifunctions* / Banzaru T., Crivat N. // Semin. Math. Fiz. Inst. Politechn. Tymisoara – 1983. – **2**. – P. 37-–40.

16. Bayhan S. *On decomposition of generalized continuity* / Bayhan S., Kanibir A., Reilly I. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2014. – **58**. – P. 37–45.

17. Berberian S. *Regulated functions: Bourbaki's alternative to the Riemann integral* / Berberian S. // Amer. Math. Monthly – 1979. – **86**. – P. 208—211.

18. Berner A. *Almost continuous functions with closed graphs* / Berner A.J. // Can. Math. Bull. – 1982. – **25**. – P. 428–434.

19. Biswas N. *On some mappings in topological spaces* / Biswas N. // Bull. Cal. Math. Soc. – 1969. – **61**. – P. 127-135.

20. Bledsoe W. *Neighbourly functions* / Bledsoe W. // Proc. Amer. Math.Soc. – 1952. – **3**. – P. 114–115.

21. Blumberg H. *New properties of all real functions* / Blumberg H. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1922. – **24**. – P. 113-128.

22. Borsík J. *Algebraic structures generated by real quasicontinuous functions* / Borsík J. // Tatra Mt. Math. Publ. – 1996. – **8**. – P. 175–184.

23. Borsík J. *Bilateral quasicontinuity in topological spaces* / Borsík J. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2004. – **28**. – P. 159–168.

24. Borsík J. *Local characterization of functions with closed graphs* / Borsík J. // Demonstratio Math. – 1996. – **29**. – P. 643–650.

25. Borsík J. *Maxima and minima of simply continuous and quasicontinuous functions* / Borsík J. // Math. Slovaca. – 1996. – **46**. – P. 261–268.

26. Borsík J. *On almost quasicontinuous functions* / Borsík J. // Math. Bohemica. – 1993. – **118**, 3. – P. 241–248.

27. Borsík J. *On the points of bilateral quasicontinuity of functions* / Borsík J. // Real Anal. Exch. – 1994. – **19**, 2. – P. 529–536.

28. Borsík J. *On the points of one-sided and bilateral cliquishness* / Borsík J. // Filipczak, Malgorzata (ed.) et al., Real functions, density topology and related topics. Dedicated to Professor Wladyslaw Wilczynski on the occasion of his 65th birthday. – Lodz: Wydawnictwo Uniwersytetu Lodzkiego. – 2011. – P. 91–100.

29. Borsík J. *Points of continuity and quasicontinuity* / Borsík J. // Cent. Eur. J. Math. – 2010. – **8**, N. 1. – P. 179–190.

30. Borsík J. *Points of continuity, quasicontinuity and cliquishness* / Borsík J. // Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste. – 1994. – **26**, 1-2. – P. 5–20.

31. Borsík J. *Points of continuity, quasicontinuity, cliquishness, and upper and lower quasicontinuity* / Borsík J. // Real Anal. Exch. – 2007/08. – **33**, 2. – P. 339–350.

32. Borsík J. *Points of generalized continuities* / Borsík J. // Tatra Mt. Math. Publ. – **52**. – P. 141–151.

33. Borsík J. *Products of simply continuous and quasicontinuous functions* / Borsík J. // Math. Slovaca. – 1995. – **45**, 4. – P. 445–452.

34. Borsík J. *Sums, differences, products and quotients of closed graph functions* / Borsík J. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2002. – **24**. – P. 117-–123.

35. Borsík J. *Sums of quasicontinuous functions* / Borsík J. // Math. Bohemica – 1993. – **118**, 3. – P. 313–319.

36. Borsík J. *Sums of quasicontinuous functions defined on pseudometrizable spaces* / Borsík J. // Real Anal. Exch. – **22**. – P. 328–337.

37. Borsík J. *A note on real cliquish functions* / Borsík J., Doboš J. // Real Anal. Exch. – 1993. – **18**, 1. – P. 139–145.

38. Borsík J. *On decompositions of quasicontinuity* / Borsík J., Doboš J. // Real Anal. Exch. – 1991. – **16**. – P. 292–305.

39. Borsík J. *On simple continuity points* / Borsík J., Doboš J. // Real Anal. Exchange. – 1991. – **16**, 2. – P.552–558.

40. Borsík J. *Baire spaces and quasicontinuous mappings* / Borsík J., Holá L'., Holý D. // Filomat. – 2011. – **25**, 3. – P. 69–83.

41. Borsík J. *Sums of quasicontinuous functions with closed graphs* / Borsík J., Doboš J., Repický M. // Real Anal. Exch. – 2000. – **25**. – P. 679-–690.

42. Bögel K. *Über partiell differenzierbare Funktionen* / Bögel K. // Math. Z. – 1926. – **25**. – S. 490–498.

43. Bouziad A. *Cliquishness and quasicontinuity of two-variable maps* / Bouziad A. // Can. Math. Bull. – **56**, 1. – P. 55–64.

44. Bouziad A. *Lower quasicontinuity, joint continuity and related concepts* / Bouziad A., Troallic J.-P. // Topology Appl. – 2010. – **157**, 18. – P. 2889-–2894.

45. Breckenridge J. *Partial continuity, quasicontinuity, and Baire spaces* / Breckenridge J., Nishiura T. // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. – 1976. – **4**. – P. 191-–203.

46. Brown J. *Almost continuity of the Cesaro-Vietoris function* / Brown J.// Proc. Am. Math. Soc. – 1975. – **49**. – P. 185–188.

47. Brown J. *Almost continuous Darboux functions and Reed's pointwise convergence criteria* / Brown J. // Fundam. Math. – 1974. – **86**. – P. 1–7.

48. Bruckner A. *Darboux continuity* / Bruckner A., Ceder J. // Jahresber. Deutsch. Math. Ver. – 1965. – **67**. – P. 93-–117.

49. Bruckner A. *On jumping functions by connected sets* / Bruckner A., Ceder J. // Czech. Math. J. – 1972. – **22**, 97. – P. 435–448.

50. Bruckner A. *On Darboux functions* / Bruckner A., Ceder J., Pearson T. // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 1974. – **13**. – P. 977–988.

51. Bruteanu C. *Asupra unor proprietati ale functiilor cvasicontinue* / Bruteanu C. // St. Cerc. Mat. – 1970. – **22**. – P. 983–991.

52. Burgess C.E. *Continuous functions and connected graphs* / Burgess C.E. // Amer. Math. Monthly. – 1990. – **97.** – P. 337–339.

53. Calbrix J. *Applications séparément continues* / Calbrix J., Troallic J.-P. // C.R. Acad. Sc. Paris. Séc. A. – 1979. – **288**. – P. 647–648.

54. Ceder J. *On factoring a function into a product of Darboux functions* / Ceder J. // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1982. – **31**. – P. 16-–22.

55. Ciesielski K. *Compositions of Darboux and connectivity functions* / Ciesielski K., Kelum K. // Real Anal. Exch. – 1999. – **24**, 2. – P. 599–605.

56. Ciesielski K. *Darboux like functions that are characterizable by images, preimages and associated sets* / Ciesielski K., Natkaniec T. // Real Anal. Exch. – 1998. – **23**, 2. – P. 441–457.

57. Ciesielski K. *Cardinal invariants concerning extendable and peripherally continuous continuous functions* / Ciesielski K., Reclaw I. // Real Anal. Exch. – 1996. – **21**. – P. 459–472.

58. Ciesielski K. *Two examples concerning extendable and almost continuous functions* / Ciesielski K., Rosen H. // Real Anal. Exch. – 2000. – **25**, 2. – P. 579–597.

59. Ciesielski K. *Two examples concerning almost continuous functions*/ Ciesielski K., Roslanowski A. // Topology Appl. – 2000. – **103**, 2. – P. 187–202.

60. Csaszar A. *Sur la propriete de Darboux* / Csaszar A. // C.R. Prem. Congres des Math. Hongor. Budapest. – 1952. – P. 551-–560.

61. Darboux G. *Memoire sur les fonctions discontinuea* / Darboux G. // Ann. Sci. Scuola Norm. Sup. – 1875. – **4**. – P. 161-–248.

62. Debs G. *Points de continuité d'une function séparément continue* / Debs G. // Proc. Amer. Math. Soc. — 1986. — **97**, 1. -– P. 167-–176.

63. Doboš J. *A note on the functions the graph of which are closed sets* / Doboš J. // Acta Math. Univ. Comenian. – 1982. – **40-41**. – P. 285–288.

64. Doboš J. *A note on the invariance of Baire spaces under mappings* / Doboš J. // Časop. Pěst. Mat. – 1983. – **108**. – P. 409–411.

65. Doboš J. *Functions with a closed graph and bilateral quasicontinuity* / Doboš J. // Tatra Mt. Math. Publ. – 1993. – **2**. – P. 77–80.

66. Doboš J. *On discontinuity points for closed graph functions* / Doboš J. // Real Anal. Exch. – 1990. – **15**, 1. – P. 337–339.

67. Doboš J. *On the set of points of discontinuity for functions with closed graphs* / Doboš J. // Čas. Pěst. Mat. – 1985.– **110**. – P. 60–68.

68. Doboš J. *Simple continuity and cliquishness* / Doboš J. // Čas. Pěst. Mat. – 1987. – **112**. – P. 355–358.

69. Doboš J. *Sums of closed graph functions* / Doboš J. // Tatra Mt. Math. Publ. – 1998. – **14**. – P. 9—11.

70. Doboš J. *Cliquish functions, Riemann integrable functions and quasi-uniform convergence* / Doboš J., Šalát T. // Acta Math. Univ. Comenian. – 1982. – **40-41**. – P. 219–223.

71. Dontchev J. *More on mild continuity* / Dontchev J., Ganster M. // Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste. – 1995. – **27**, 1-2. – P. 47–59.

72. Dontchev J. *On the various decompositions of continuous and some weakly continuous functions* / Dontchev J., Przemski M.// Acta Math. Hung. – 1996. – **71**, 1-2. – P. 109–120.

73. Dugundji J. *Topology* / J.Dugundji. – Boston: Mass: Allyn and Bacon, 1996. – 447 p.

74. Ekici E. *On $\mathcal{E}$-sets and $\mathcal{F}$-sets and decompositions of α-continuity, quasi-continuity and $\mathcal{A}$-continuity* / Ekici E., Jafari S. // Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eotvos, Sect. Math. – 2006. – **49**. – P. 65–73.

75. Evans M. *Baire one, Gibson and weakly Gibson real functions of several real variables* / Evans M., Humke P. // Rend. Circ. Mat. Palermo (2). – 2010. – **59**, 1. – P. 47–51.

76. Ewert J. *Characterization of cliquish functions* / Ewert J. // Acta Math. Hung. – 2000. – **89**, 4. – P. 269–276.

77. Ewert J. *Note on limits of simply continuous and cliquish functions* / Ewert J. // Internat. J. Math. Math. Sci. – 1994. – **17**. – P. 447—450.

78. Ewert J. *On almost quasicontinuity of functions* / Ewert J. // Tatra Mt. Math. Publ. – 1993. – **2**. – P. 81–91.

79. Ewert J. *On quasi-continuous multivalued maps with values in uniform spaces* / Ewert J. // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 1984. – **32**. – P. 81-–88.

80. Ewert J. *On the points of continuity, quasi-continuity and cliquishness of real functions* / Ewert J. , Lipiński J. // Real Anal. Exch. – 1983. – **8**, 2. – P. 473–478.

81. Fleissner R. *An almost continuous function* / Fleissner R. // Proc. Am. Math. Soc. – **45**. – P. 346–356.

82. Fotij O. *Characterization of quasi-continuity of multifunctions of two variables* / Fotij O., Maslyuchenko O., Nesterenko V. // Math. Slovaca. – 2016. – **66**, 1. – P. 281–286.

83. Frolik Z. *Remaaks concerning the invaaiance of Baire spaces under mappings* / Frolik Z. // Czech. Math. J. – 1961. – **86**. – P. 381—-385.

84. Fudali L. *On cliquish functions on product spaces* / Fudali L. // Math. Slovaca. – 1983. – **33**, 1. – P. 53–58.

85. Fuller R. *Relations among continuous and various non-continuous functions* / Fuller R. // Pac. J. Math. – 1968. – **25**. – P. 495–509.

86. Ganguly D. *On the points of one-sided cliquishness* / Ganguly D., Mallick P. // Real Anal. Exch. – 2007. – **32**. – P. 537–546.

87. Ganster M. *A decomposition of continuity* / Ganster M., Reilly I. // Acta Math. Hung. – 1990. – **56**, 3-4. –P. 299–301.

88. Ganster M. *Another decomposition of continuity* / Ganster M., Reilly I. // Ann. New York Acad. Sci. – 1993. – **704**. – P. 135–141.

89. Ganster M. *Locally closed sets and LC-continuous functions* / Ganster M., Reilly I. // Int. J. Math. Math. Sci. – 1989. – **12**, 3. – P. 417–424.

90. Garrett B. *Almost continuity on Peano continua* / Garrett B. // Houston J. Math. – 1983. – **9**. – P. 181–189.

91. Garrett B. *Types of almost continuity* / Garrett B., Kellum K. // Proc. Am. Math. Soc. – 1983. – **88**. – P. 555–559.

92. Garret B. *Characterization, of connected real functions* / Garret B., Nelms D., Kellum K. // Jber. Deutsch. Math. Ver. – 1971. – **73**. – P. 131–137.

93. Gauld D. *On variations of continuity* / Gauld D., Greenwood S., Reilly I. // Top. Atlas Inv. Contr. – 1999. – **4**, 1. – P. 1–54.

94. Gentry K. *Somewhat continuous functions* / Gentry K., Hoyle H. // Czech. Math. J. – 1971. – **21**, 1. – P. 5–12.

95. Gibson R. *Concerning a characterization of continuity* / Gibson R. // Real Anal. Exch. – 1996(97). – **22**, 1. – P. 437–442.

96. Gibson R. *Darboux like functions* / Gibson R., Natkaniec T. // Real Anal. Exch. – 1996. – **22**, 2. – P. 492–533.

97. Gibson R. *Darboux like functions. Old problems and new results* / Gibson R., Natkaniec T. // Real Anal. Exch. – 1999. – **24**, 2. – P. 487–496.

98. Gibson R. *Concerning functions with a perfect road* / Gibson R., Reclaw I. // Real Anal. Exch. – 1994. – **19**, 2. – P. 564–570.

99. Gibson R. *Concerning the extension of connectivity functions* / Gibson R., Roush F. // Topol. Proc. – 1985. – **10**. – P. 75–82.

100. Gibson R. *The Cantor intermediate valve property* / Gibson R., Roush F. // Topol. Proc. – 1982. – **7**, 1. – P. 55–62.

101. Gibson R. *The uniform limit of connectivity functions* / Gibson R., Roush F. // Real Anal. Exch. – 1986. – **11**, 1. – P. 254–259.

102. Gnilka S. *Notes on generalized continuity* / Gnilka S. // Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. – 1999. – **48**, 2. – P. 309–322.

103. Grande M. *On a property of functions* / Grande M. // Real Anal. Exch. – 2006. – **31**, 2. – P. 469–476.

104. Grande M. *On the sets of continuity points of Darboux quasicontinuous functions* / Grande M. // Demonstr. Math. – 2003. – **36**, 4. – P. 819–825.

105. Grande Z. *A note about the almost continuity* / Grande Z. // Math. Slovaca. – 1992. – **42**, 3. – P. 265–268.

106. Grande Z. *Borsik's bilateral quasicontinuity of functions of two variables* / Grande Z. // Real Anal. Exch. – 2004. – **29**, 2. – P. 851–856.

107. Grande Z. *On discrete limits of sequences of bilaterally quasicontinuous, Baire 1 functions* / Grande Z. // Real Anal. Exch. – 2001. – **26**, 1. – P. 429–435.

108. Grande Z. *On discrete limits of sequences of Darboux bilaterally quasicontinuous functions* / Grande Z. // Real Anal. Exch. – 2001. – **26**, 2. – P. 727–734.

109. Grande Z. *On functions of two variables whose vertical sections have closed graphs* / Grande Z. // Real Anal. Exch. – 2002. – **27**. – P. 661–668.

110. Grande Z. *On pointwise, discrete and transfinite limits of sequences of closed graph functions* / Grande Z. // Real Anal. Exch. – 2001. – **26**. – P. 933–942.

111. Grande Z. *On sequences of upper and lower semi-quasicontinuous functions* / Grande Z. // J. Appl. Anal. – 2001. – **7**, 2. – P. 235–242.

112. Grande Z. *On some lattices containing s. q. c. functions* / Grande Z. // Tatra Mt. Math. Publ. – 1996. – **8**. – P. 23–27.

113. Grande Z. *On some representations of a. e. continuous functions* / Grande Z. // Real Anal. Exch. – 1996. – **21**, 1. – P. 175–180.

114. Grande Z. *On strong quasi-continuity of functions of two variables* / Grande Z. // Real Anal. Exch. – 1996. – **21**, 1. – P. 236–243.

115. Grande Z. *On the continuity of symmetrically cliquish or symmetrically quasicontinuous functions* / Grande Z. // Real Anal. Exch. – 2007. – **32**, 1. – P. 195–204.

116. Grande Z. *On the convergence of sequences of* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*-quasicontinuous functions* / Grande Z. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2006. – **34**, 1. – P. 179–181.

117. Grande Z. *Quasicontinuity, cliquishness and the Baire property of functions of two variables* / Grande Z. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2002. – **24**, 1. – P. 29–35.

118. Grande Z. *Quelques remarques sur les fonctions presque continues* / Grande Z. // Probl. Mat. – 1988. – **10**. – P. 63–70.

119. Grande Z. *Some observations on the symmetrical quasicontinuity of Piotrowski and Vallin* / Grande Z. // Real Anal. Exch. – **31**, 1. – P. 309-–314.

120. Grande Z. *Sur les fonctions A-continues* / Grande Z. // Demonstr. Math. – 1978. – **11**. – P. 519–526.

121. Grande Z. *Sur le fonctions cliquish* / Grande Z. // Časop. Pěst. mat. – 1985. – **110**. – P. 225–236.

122. Grande Z. *Sur un probléme concernant les fonctions quasicontinues* / Grande Z. // Math. Slovaca. – 1982. – **32**. – P. 309–312.

123. Grande Z. *On quasi-continuous bijections* / Grande Z., Natkaniec T. // Acta Math. Univ. Comen., New Ser. – 1991. – **60**, 1. – P. 31–34.

124. Hagan M. *A note on connected and peripherally continuous functions* / Hagan M. // Proc. Am. Math. Soc. – 1970. – **26**. – P. 219–223.

125. Hahn H. *Reelle Funktionen. I: Punktfunktionen* / H.Hahn. – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., 1932. – XII+415 S.

126. Hahn H. *Theorie der reellen Funktionen. 1 Band* / H.Hahn. – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1921. – VIII+600 S.

127. Hahn H. *Über Functionen mehrerer Veränderlicher, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sind* / Hahn H. // Math. Z. – 1919. – **4**. – S. 306–319.

128. Halperin I. *Discontinuous functions with the Darboux property* / Halperin I. // Can. Math. Bull. – 1959. – **2**. – P. 111–118.

129. Hamilton O.H. *Fixed points for certain noncontinuous transformations* / Hamilton O.H. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – **8**. – P. 750–756.

130. Hamlett T.R. *The closed graph and P-closed graph properties in general topology* / Hamlett T.R., Herrington L.L. // Contemporary Mathematics. Amer. Math. Soc. – 1981. – **3** – 81p.

131. Hatice Y. *Decompositions of continuity* / Hatice Y. // Acta Math. Hung. – 1994. – **64**, 3. – P. 309–313.

132. Hatir E. *On decompositions of continuity and α-continuity* / Hatir E., Caldas M. // Arab. J. Sci. Eng. (AJSE), Math. – 2010. – **35**, 2. – P. 197–202.

133. Hatir E. *A decomposition of continuity* / Hatir E., Noiri T., Yuksel S. // Acta Math. Hung. – 1996. – **70**, 1-2. – P. 145–150.

134. Haworth R.C. *Baire spaces* / Haworth R.C., McCoy R.A. // Dissertationes Math. – 1997. – **141**. – P. 1–77.

135. Holaá L. *Almost continuous functions with closed graphs* / Holaá L. // Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. – 1987. – **14**. – P. 329–333.

136. Holá L. *Some conditions that imply continuity of almost continuous multifunctions* / Holá L. // Acta Mat. Univ. Comenianae. – 1987. – **52-53**. – P. 159–165.

137. Holá L. *Pointwise convergence of quasicontinuous mappings and Baire spaces* / Holá L., Holý D. // Rocky Mount. J. Math. – 2011. – **41**. – P. 1883–1894.

138. Holá L. *Set of continuity points of functions with values in generalized metric spaces* / Holá L., Piotrowski Z. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2009. – **42**. – P. 149–160.

139. Hu S. *Handbook of multivalued analysis. Theory* / S. Hu, N. Papageorgiou. -– Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 1997. -– 964 p.

140. Husain T. *Some remarks about real almost continuous functions* / Husain T. // Math. Mag. – 1967. – **40**. – P. 250–254.

141. Jalocha J. *Quotients of quasi-continuous functions* / Jalocha J. // J. Appl. Anal. – 2000. – **6**, 2. – P. 251–258.

142. Jastrzebski J. *On some subclasses of Darboux functions* / Jastrzebski J., Jedrzejewski J., Natkaniec T. // Fundam. Math. – 1991. – **138**, 3. – P. 165–173.

143. Jastrzebski J. *Points of almost continuity of real functions* / Jastrzebski J., Jedrzejewski J., Natkaniec T. // Real Anal. Exch. – 1991. – **16**. – P. 415–421.

144. Jelinek J. *A discontinuous function with a connected closed graph* / Jelinek J. // Acta Univ. Carol., Math. Phys. – 2003. – **44**, 2. – P. 73–77.

145. Jordan F. *Sums of Darboux-like functions from* $\mathbb{R}^n$ *to* $\mathbb{R}^m$ / Jordan F. // Real Anal. Exch. – 1999. – **24**, 2. – P. 729–759.

146. Karlova O. *On Gibson functions with connected graphs* / Karlova O., Mykhaylyuk V. // Math. Slovaca. – 2013. – **63**, 3. – C. 479–492.

147. Keller P. *Chaotic behavior of Newton's method* / Keller P. // Real Anal. Exch. – 1993. – **18**, 2. – P. 490—507.

148. Kellum K. *Compositions of Darboux-like functions* / Kellum K. // Real Anal. Exch. – 1998. – **23**, 1. – P. 211–216.

149. Kellum K. *Functions that separate* $X \times \mathbb{R}$ / Kellum K. // Real Anal. Exch. Summer Symposium 2009. – P. 21–23.

150. Kellum K. *Sums and limits of almost continuous functions* / Kellum K. // Colloq. Math. – 1974. – **31**. – P. 125–128.

151. Kellum K. *Almost continuous real functions* / Kellum K., Garrett B. // Proc. Am. Math. Soc. – 1972. – **33**. – P. 181–184.

152. Kellum K. *Compositions of continuous functions and connected functions* / Kellum K., Rosen H. // Proc. Am. Math. Soc. – 1992. – **115**, 1. – P. 145–149.

153. Kempisty S. *Sur les fonctions quasicontinues* / Kempisty S. // Fund. Math. – 1932. – **19**. – P. 184–197.

154. Kenderov P. S. *Continuity points of quasi-continuous mappings* / Kenderov P. S., Kortezov I., Moors W. B. // Topology Appl. – 2001. – **109**. – P. 321–346.

155. Keskin A. *On new decompositions of complete continuity and continuity* / Keskin A., Noiri T. // Stud. Cercet. Stiint., Ser. Mat., Univ. Bacau. – 2007. – **17**. – P. 105–124.

156. Kostyrko P. *A note on the functions with closed graphs* / Kostyrko P. // Čas. Pést. Mat. – 1969. – **94**, N 2. – P. 202–205.

157. Kotlicka E. *On quasi-continuity and cliquishness of sections of functions of two variables* / Kotlicka E., Maliszewski A. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2002. – **24**. – P. 105–108.

158. Köthe G. *Topological vector spaces II* / G.Köthe. – New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1979. – XII+331 p.

159. Kulpa W. *Applications of automatic quasi-continuity* / Kulpa W., Szymanski A. // Ann. Math. Sil. – 2005. – **19**. – P. 31–40.

160. Kuratowski K. *Sur l'opération $\overline{A}$ de l'analysis situs* // Fund. math. – 1922. – **3**. – P. 182-199.

161. Lee J. *Another note on Kempisty's generalized continuity* / Lee J., Piotrowski Z. // Int. J. Math. Math. Sci. – 1988. – **11**, 4. – P. 657–664.

162. Lee J. *On Kempisty's generalized continuity* / Lee J., Piotrowski Z. // Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. II. – 1985. – **34**. – P. 380–386.

163. Levine N. *A decomposition of continuity in topological spaces* / Levine N. // Am. Math. Mon. – 1961. – **68**. – P. 44–46.

164. Levine N. *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces* / Levine N. // Amer. Math. Monthly. – 1963. – **70**. – P. 36–43.

165. Lin S.-Y. *On almost continuous mappings and Baire spaces* / Lin S.-Y., Lin Y.-F. // Canad. Math. Bull. – 1978. – **21**. – P. 183–186.

166. Lindenbaum A. *Sur quelques propriétiés des fonctions de variable réele* / Lindenbaum A. // Ann. Soc. Math. Polon. – 1927. – **6**. – P. 129–130.

167. Lipiński J. *On Darboux points* / Lipiński J. // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys. – 1978. – **26**, 11. – P. 869-–873.

168. Lipiński J. *On some extensions of almost continuous functions and of connectivity functions* / Lipiński J. // Tatra Mt. Math. Publ. – 1993. – **2**. – P. 15–18.

169. Lipiński J. *On the points of quasi-continuity and cliquishness of functions* / Lipiński J., Šalát T. // Czechoslov. Math. J. – 1971, **21**, 3. – P. 484–489.

170. Long P. *Properties of almost continuous functions* / Long P., McGehee E. // Proc. Am. Math. Soc. – 1970. – **24**. – P. 175–180.

171. Mashhour A. *α-continuous and α-open mappings* / Mashhour A., Hasanein I., El-Deeb S. // Acta Math. Hung. – 1983. – **41**. – P. 213–218.

172. Mashhour A. *On pre-continuous and weak pre-continuous mappings* / Mashhour A., Abd El-Monsef M., El-Deeb S. // Proc. Math. Phys. Soc. Egypt. – 1982. – **53**. – P. 47-–53.

173. Maliszewski A. *Averages of quasi-continuous functions* / Maliszewski A. // Math. Bohem. – 1999. – **124**, 1. – P. 29–34.

174. Maliszewski A. *Comparable almost continuous functions* / Maliszewski A. // Real Anal. Exch. – 2003. – **28**, 1. – P. 87–91.

175. Maliszewski A. *Darboux Property and Quasi-Continuity. A Uniform Approach* / A.Maliszewski. – WSP, Slupsk. – 1996. – 130+XII.

176. Maliszewski A. *Maximums of almost continuous functions* / Maliszewski A. // Real Anal. Exch. – 2004. – **30**, 2. – P. 813–818.

177. Maliszewski A. *Maximums of Darboux quasi-continuous functions* / Maliszewski A. // Math. Slovaca. – 1999. – **49**, 3. – P. 381–386.

178. Maliszewski A. *On products of bounded quasi-continuous functions* / Maliszewski A. // Real Anal. Exch. – 2000. – **25**, 1. – P. 185–203.

179. Maliszewski A. *On the averages of Darboux functions* / Maliszewski A. // Trans. Am. Math. Soc. – 1998. – **350**, 7. – P. 2833–2846.

180. Maliszewski A. *On the sums and the products of Darboux cliquish functions* / Maliszewski A. // Acta Math. Hung. – 1996. – **73**, 1-2. – P. 87–95.

181. Maliszewski A. *On the sums and the products of quasi-continuous functions* / Maliszewski A. // Real Anal. Exch. – 1995. – **20**. – P. 418–421.

182. Maliszewski A. *On the sums and the products of Darboux cliquish functions* / Maliszewski A. // Acta Math. Hung. – 1996. – **73**, 1-2. – P. 87–95.

183. Maliszewski A. *On the sums of non-negative quasi-continuous functions* / Maliszewski A. // Acta Math. Hung. – 1995. – **69**, 1-2. P. 149–157.

184. Maliszewski A. *Products of almost continuous functions* / Maliszewski A. // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 1997. – **45**. – P. 109–110.

185. Maliszewski A. *Products of bounded Darboux and almost continuous functions* / Maliszewski A. // Real Anal. Exch. – 2003. – **28**, 1. – P. 71–85.

186. Maliszewski A. *Sums and products of quasi-continuous functions* / Maliszewski A. // Real Anal. Exch. – 1996. – **21**, 1. – P. 320–329.

187. Maliszewski A. *Almost continuous functions of two variables* / Maliszewski A., Natkaniec T. // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales. – 1993. – **87**, 2-3. – P. 395–404.

188. Marciniak M. *Maximums of internally quasi-continuous functions* / Marciniak M., Szczuka P. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2012. – **52**. – P. 83–90.

189. Marciniak M. *Products of internally quasi-continuous functions* / Marciniak M., Szczuka P. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2013. – **55**. – P. 17–25.

190. Marcus S. *Functions with the Darboux property and functions with connected graphs* / Marcus S. // Math. Ann. – 1960. – **141**. – P. 311–317.

191. Marcus S. *Sur les fonctions quasicontinues an sens de S. Kempisty* / Marcus S. // Colloq. Math. – 1961. – **8**. – P. 47–53.

192. Martin N. *Quasi-continuous functions on product spaces* / Martin N. // Duke Math. J. – 1961. – **28**. – P.39–43.

193. Maslyuchenko O. *The discontinuity point sets of quasi-continuous functions* / Maslyuchenko O. // Bull. Aust. Math. Soc. – 2007. – **3**. – P. 373–379.

194. Maslyuchenko O. *On extensions of quasi-continuous functions* / Maslyuchenko O., Nesterenko V. // Modern Real Analysis. – Lódz : Lódz University Press. – 2015. – P. 161–184.

195. Masljuchenko V. *Hahn spaces and Dini's problem* / Masljuchenko V. // J. Math. Sci., New York. – **107**, 1. – P. 3577–3582.

196. Maslyuchenko V. *A new generalization of Calbrix-Troallic's theorem* / Maslyuchenko V., Nesterenko V. // Topology Appl. – 2014. – **164**. – P. 162–169.

197. MaslyuchenkoV. *Analogues of transition and decomposition of continuity* / MaslyuchenkoV., Nesterenko V. // Real Anal. Exch. – 2015. – **40**, 2. – P. 355–370.

198. Maslyuchenko V. *Some open problems on functional analysis* / Maslyuchenko V., Plichko A. // Extr. Math. – 2005. – **20**, 1. – P. 51–70.

199. Matejdes M. *Continuity points of functions on product spaces* / Matejdes M. // Real Anal. Exch. – 1998(99). – **23**, 1. – P. 275–281.

200. Matejdes M. *On the cliquish, quasicontinuous and measurable selections* / Matejdes M. // Math. Bohem. – 1991. – **116**, 2. – P. 170–173.

201. Maximoff I. *Sur les fonctions ayant la propriété de Darboux* / Maximoff I. // Prace Mat.-Fiz. – 1936. – **43**. – P. 241–265.

202. Mibu Y. *On quasi-continuous mappings defined on a product space* / Mibu Y. // Proc. Japan Acad. – 1958. – **34**, 4. – P. 189–192.

203. Mikucka A. *On graph quasi-continuous functions* / Mikucka A. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2006. – **34**, 2. – P. 93–105.

204. Mikucka A. *Graph quasi-continuity* / Mikucka A. // Demonstr. Math. – 2003. – **36**. – P. 483-–494.

205. Mimna R. *A note on separate continuity and connectivity properties* / Mimna R. // Math. Bohem. – 1997. – **122**, 1. – P. 57–61.

206. Mimna R. *Continuity and generalized continuity in dynamics and other applications: Thesis Doctoral Ph.D.* – Rhodes University Faculty of Science, Mathematics, 2002. – 84 p.

207. Mimna R. *Omega-limit sets and non-continuous functions* / Mimna R.// Real Anal. Exch. – 1998. – **23**, 1. – P. 267–273.

208. Mimna R. *A note on closed graph functions and local w^*-continuity* / Mimna R., Rose D. // Real Anal. Exch. – 19993. – **18**. – P. 549–552.

209. Mimna R. *On local relative continuity* / Mimna R., Rose D. // Real Anal. Exch. – 1995. – **20**, 2. – P. 823–830.

210. Mirmostafaee A. *Continuity of separately continuous mappings* / Mirmostafaee A. // Math. Slovaca. – 2014. – **64**, 4. – P. 1019–1026.

211. Mirmostafaee A. *Quasi-continuity of horizontally quasi-continuous functions* / Mirmostafaee A. // Real Anal. Exch. – 2015. – **39**, 2. – P. 335–344.

212. Mirmostafaee A. *Topological games and strong quasi-continuity* / Mirmostafaee A. // Banach J. Math. Anal. – 2011. – **5**, 2. – P. 131—137.

213. Naimpaly S. *Continuity of the group operation* / Naimpaly S. // Mathematic Report, Lakehead University. – 1983. – **8**. – P. 83–96.

214. Namioka I. *Separate continuity and joint continuity* / Namioka I. // Pacif. J. Math. – 1974. – **51**, 2. – P. 515–531.

215. Nash J. *Generalized Brouwer theorem* / Nash J. // Bull. Amer. Math. Soc. Research Problem. – 1956. – **62**, 1. – P. 76.

216. Natkaniec T. *Almost continuity* / Natkaniec T. // Real Anal. Exch. – 1992. – **17**. – P. 462–520.

217. Natkaniec T. *Extendability and almost continuity* / Natkaniec T. // Real Anal. Exch. – 1996. – *21*. – P. 349–355.

218. Natkaniec T. *On compositions and products of almost continuous functions* / Natkaniec T. // Fund. Math. – 1991. – **139**. – P. 59–74.

219. Natkaniec T. *On quasi-continuous functions having Darboux property* / Natkaniec T. // Math. Pannonica. – 1992. – **3**, 2. – P. 81–96.

220. Natkaniec T. *On sums of Darboux functions* / Natkaniec T. // Acta Univ. Carol., Math. Phys. – 1993. – **34**, 2. – P. 107–111.

221. Natkaniec T. *On the maximum and the minimum of quasi-continuous functions* / Natkaniec T. // Math. Slovaca. – 1992. – **42**. – P. 103–110.

222. Natkaniec T. *Products of quasi-continuous functions* / Natkaniec T. // Math. Slovaca. – 1990. – **40**, 4. – P. 401–405.

223. Njåstad O. *On some classes of nearly open sets* / Njåstad O. // Pacific J. Math. – 1965. – **15**. – P. 961–970.

224. Nesterenko V. *Characterization of jointly quasi-continuous multifunctions* / Nesterenko V. // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, 17 - 21 September 2012./ Abstracts of Reports. – Lviv, 2012. – P. 100.

225. Nesterenko V. *Mild continuity of functions of two variable* / Nesterenko V. // International conference dedicated to the 70th anniversary of A.F.Grishin, August 15-18, 2011. – Kharkiv. – 2011. – P. 34.

226. Nesterenko V. *On symmetrical cliquishness and quasi-continuity of functions oftwo variables* / Nesterenko V. // Topology Appl. – 2014. – **178**. – P. 331–338.

227. Nesterenko V. *On symmetrically quasi-continuity and symmetrically cliquishness* / Nesterenko V. // Set Theory, Topology and Banach Spaces (Second International Topology Conference in Kielce) July 7-11, 2008 (http://at.yorku.ca/c/a/x/g/12.htm).

228. Nesterenko V. *On topological cliquishness* / Nesterenko V. // International Conference "Infinite Dimensional Analysis and Topology, May 27 - June 1, 2009" – Ivano-Frankivsk, 2009. – P.107–108.

229. Nesterenko V. *On two classes of functions with the Hahn property* / Nesterenko V. // International Conference "Analysis and Topology, June 2 - 7, 2008", Part II. Topology./ Theses of lectures. – Lviv, 2008. – P. 45–46.

230. Nesterenko V. *Separate and joint properties of some analogues of pointwise discontinuity* / Nesterenko V. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2014. – **58**. – P. 155–167.

231. Neubrunn T. *A generalized continuity and product spaces* / Neubrunn T. // Math. Slovaca. – 1976. – **26**. – P. 97-—99.

232. Neubrunn T. *A note on mappings of Baire spaces* / Neubrunn T. // Math. Slovaca. – 1977. – **27**, 2. – P. 173-176.

233. Neubrunn T. *Generalized continuity and separate continuity* / Neubrunn T. // Math. Slovaca. – 1977. – **27**. – P. 307–314.

234. Neubrunn T. *On quasicontinuity of multifunctions* / Neubrunn T. // – Math. Slovaca. – 1982. – **32**, 2. – P. 147–154.

235. Neubrunn T. *Quasi-continuity* / Neubrunn T. // Real Anal. Exch. – 1989. – **14**, 3. – P. 259–306.

236. Neubrunn T. *Separate continuity and continuity for some generalized continuity notions* / Neubrunn T. // Gen. Topol. Relat. mod. Anal. Algebra, Proc. 4th Prague Topol. Symp. – 1976. – Part B. – P. 338–341.

237. Neubrunnová A. *On certain generalizations of the notion of continuity* / Neubrunnová A. // Mat. Cas. – 1973. – **23**, 4. – P. 374–380.

238. Neubrunnová A. *On quasicontinuous and cliquish functions* / Neubrunnová A. // Časop. Pěst. Mat. – 1974. – **99**. – P. 109-—114.

239. Neubrunnová A. *On almost quasicontinuity* / Neubrunnová A., Šalát T. // Math. Bohem. – 1992. – **117**. – P. 197–205.

240. Noiri T. *A function which preserves connected spaces* / Noiri T. // Časop. Pěst. Mat. – 1982. – **107**, 4. – P. 393–396.

241. Noiri T. *A decomposition of a weaker form of continuity* / Noiri T., Rajamani M., Sundaram P. // Acta Math. Hung. – 2001. – **93**, 1-2. – P. 109–114.

242. Noiri T. *On decomposition of continuity* / Noiri T., Sayed O. // Acta Math. Hung. – 2006. – **111**, 1-2. – P. 1–8.

243. Osgood W.H. *Ueber die ungleichmässige Convergenz und die gliedweise Integration der Reihen* / Osgood W.H. // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. – 1896. – P. 288–291.

244. Pawlak R. *On local characterization of closed functions and functions with closed graphs* / Pawlak R. // Demonstratio Mathematica. – 1986. – **19**, 1. – P. 181–188.

245. Pawlak R. *On some properties of the spaces of almost continuous functions* / Pawlak R. // Int. J. Math. Math. Sci. – 1996. – **19**, 1. – P. 19–23.

246. Pawlak R. *On the topological properties of the spaces $\mathcal{A}_u$ and $\mathcal{A}_p$ formed by almost continuous functions* / Pawlak R. // Tatra Mt. Math. Publ. – 1996. – **8**. – P. 77–82.

247. Pawlak H. *Dynamics of Darboux functions* / Pawlak H., Pawlak R. // Tatra Mt. Math. Publ. – 2009. – **42**. – P. 51–60.

248. Phillips D. *Real functions having graphs connected and dense in the plane* / Phillips D. // Fund. Math. – 1972. – **75**. – P. 47–49.

249. Piotrowski Z. *A survey of results concerning generalized continuity in topological spaces* / Piotrowski Z. // Acta Math. Univ. Comenian. – 1987. – **52-53**. – P. 91–110.

250. Piotrowski Z. *Continuity points in $\{x\} \times Y$* / Piotrowski Z. // Bull. Soc. France. – 1980. – **108**. – P. 113-–115.

251. Piotrowski Z. *On some problems on separate versus joint continuity* / Piotrowski Z. // Real Anal. Exch. – 1997. – **22**. – P. 87–88.

252. Piotrowski Z. *On the theorems of Y. Mibu and G. Debs on separate continuity* / Piotrowski Z. // Int. J. Math. Math. Sci. – 1996. – **19**, 3. – P. 495–500.

253. Piotrowski Z. *Quasi-continuity and product spaces* / Piotrowski Z. // Geometric topology, Proc. int. Conf., Warszawa: – 1980. – P. 349–352.

254. Piotrowski Z. *Separate almost continuity and joint continuity* / Piotrowski Z. // 4th Colloq. Budapest 1978, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 23, Topology, Vol. II. – 1980. – P. 957–962.

255. Piotrowski Z. *Separate and joint continuity* / Piotrowski Z. // Real Anal. Exch. – 1986. - **11**, 2. – P.293–322.

256. Piotrowski Z. *Separate and joint continuity in Baire groups* / Piotrowski Z. // Tatra Mt. Math. Publ. – 1998 – **14**. – P. 109-–116.

257. Piotrowski Z. *Some remarks on almost continuous functions* / Piotrowski Z. // Math. Slovaca. – 1989. – **39**, 1. – P. 75–80.

258. Piotrowski Z. *Closed graph theorem: Topological approach* / Piotrowski Z., Szymanski A. // Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. – 1988.– **37**, 1. – P. 88–99.

259. Piotrowski Z. *Conditions which imply continuity* / Piotrowski Z., Vallin R. W. // Real Anal. Exch. – 2003. – **29**, 1. – P. 211–218.

260. Piotrowski Z. *Baire and weakly Namioka spaces* / Piotrowski Z., Waller R. // Topology Appl. – 2012. – **159**, 15. – P. 3294–3299.

261. Piotrowski Z. *A note on continuity points of functions* / Piotrowski Z., Wingler E. // Real. Anal. Exch. – 1991. – **16**. – P. 408–414.

262. Popa V. *Asupra unei decompuneri a cvasicontinuitatii multifunctilor* / Popa V. // St. Cere. Mat. – 1975. – **27**. – P. 323–328.

263. Popa V. *Asupra unor forme slabite de continuitate* / Popa V. // Stud. Cerc. Mat. – 1981. – **33**. – P. 543-–546.

264. Poreda T. *On the sums of two quasi-continuous functions with closed graphs* / Poreda T., Poreda W. // Real Anal. Exch. – 2010. – **35**, 2. – P. 413–422.

265. Prakash A. *Somewhat continuity and some other generalisations of continuity* / Prakash A., Srivastava P. // Math. Slovaca. – 1977. – **27**. – P. 243–248.

266. Przemski M. *A decomposition of continuity and α-continuity* / Przemski M. // Acta Math. Hung. – 1993. – **61**, 1-2. – P. 93–98.

267. Przemski M. *A note on the graph continuity* / Przemski M. // Demonstr. Math. – 2006. – **39**, 4. – P. 927–937.

268. Przemski M. *On forms of continuity and cliquishness* / Przemski M. // Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. – 1993. – **42**, 3. – P. 417–452.

269. Przemski M. *On some forms of cliquishness on topological spaces* / Przemski M. // Serdica Bul. Pub. – 1992. – **18**, 1-4. – P. 99–117.

270. Pták V. *On the closed graph theorem* / Pták V. // Czech. Math. J. – 1959. – **9**, 4. – P. 523—527.

271. Richter C. *Generalized continuity and uniform approximation by step functions* / Richter C. // Real Anal. Exch. – 2006. – **31**, 1. – P. 215–238.

272. Rodrigues B. *Some new classes of topological vector spaces with closed graph theorems* / Rodrigues B. // Comment. Math. Univ. Carolin. – 1991. – **32**, 2. – P. 287-–296.

273. Rose D. *A note on Levine's decomposition of continuity* / Rose D. // Indian J. Pure Appl. Math. – 1990. – **21**, 11. – P. 985–987.

274. Rose D. *On Levine's decomposition of continuity* / Rose D. // Canad. Math. Bull. – 1978. – **21**. – P. 477–481.

275. Rose D. *Another note on Levine's decomposition of continuity* / Rose D., Mimna R., Jankovic D. // Int. J. Math. Math. Sci. – 1996. – **19**, 2. – P. 317–320.

276. Rosen H. *Connectivity points and Darboux points of a real functions* / Rosen H. // Fund. Math. – 1975. – **89**. – P. 265-–269.

277. Rosen H. *Darboux quasicontinuous functions* / Rosen H. // Real Anal. Exch. – 1998. – **23**, 2. – P. 631–639.

278. Rosen H. *Every real function is the sum of two extendable connectivity functions* / Rosen H. // Real Anal. Exch. – 1996. – **21**, 1. – P. 299–303.

279. Rosen H. *Extendable functions and almost continuous functions with a perfect road* / Rosen H., Gibson R. G., Roush F. // Real Anal. Exch. – 1991. – **17**. – P. 248–257.

280. Roy B. *On a type of decomposition of continuity* / Roy B., Sen R. // Afr. Mat. – 2015. – **26**, 1-2. – P. 153–158.

281. Sakálová K. *Graph continuity and quasicontinuity* / Sakálová K. // Tatra Mt. Math. Publ. – 1993. – **2**. – P. 69–75.

282. Sakálová K. *On graph continuity of functions* / Sakálová K. // Demonstratio Math. – 1994. – **27**. – P. 123-–128.

283. Sakálová K. *On structural properties of graph continuous functions* / Sakálová K. // Tatra Mt. Math. Publ. – 1996. – **8**. – P. 147–151.

284. Sakálová K. *On the maximal multiplicative family for the class of graph continuous functions* / Sakálová K. // Demonstr. Math. – 1999. – **32**, 3. – P. 615–620.

285. Sakálová K. *The maximal additive family for the class of graph continuous real functions* / Sakálová K. // Tatra Mt. Math. Publ. – 200. – **19**, 2. – P. 183–186.

286. Šalát T. *On discontinuity points of functions of some classes* / Šalát T. // Acta Math. Univ. Comen. – 1983. – **42-43**. – P. 121–124.

287. Saleemi B. *Almost continuity vs closure continuity* / Saleemi B., Shahzad N., Alghamdi M. // Arch. Math., Brno. – 2001. – **37**, 1. – P. 39–44.

288. Sieg W. *Functions represented as sums of two quasicontinuous functions with a closed graph* / Sieg W. // J. Math. Anal. Appl. – 2010. – **361**, 2. – P. 558–565.

289. Sieg W. *Maximal classes for the family of quasi-continuous functions with closed graph* / Sieg W. // Demonstr. Math. – 2009. – **42**, 1. – P. 41–45.

290. Sierpiński W. *Sur une propriété de fonctions réelles quelconques* / Sierpiński W. // Matematiche (Catania). – 1953. – **8**, 2. – P. 43–48.

291. Smital J. *Some characterizations of the Darboux continuity of real functions* / Smital J. // Mat. Cas., Slovensk. Akad. Vied. – 1972. – **22**. – P. 59–70.

292. Smital J. *On almost continuous functions* / Smital J., Stanova E. // Acta Math. Univ. Comen. – 1980. **37**. – P. 147–155.

293. Smith B.D. *An alternate characterization of continuity* / Smith B.D.// Proc. Amer. Math. Soc. – 1973. – **39**. – P. 318–320.

294. Stallings J. *Fixed point theorems for connectivity maps* / Stallings J. // Fund. Math. – 1959. – **47**. – P. 249–263.

295. Strońska E. *L'espace linéaire des fonctions cliquées sur* $\mathbb{R}^n$ *est généré par les fonctions quasi-continues* / Strońska E. // Math. Slovaca – 1989. – **39**. – P. 155–164.

296. Strońska E. *On the group generated by quasi continuous functions* / Strońska E. // Real Anal. Exch. – 1992. – **17**, 2. – P. 577–589.

297. Szczuka P. *Maximums of upper semicontinuous strong Światkowski functions* / Szczuka P. // Demonstr. Math. – 2011. – **44**, 1. – P. 59–65.

298. Szczuka P. *Products of strong Światkowski functions* / Szczuka P. // J. Appl. Anal. – 2006. – **12**, 1. – P. 129–145.

299. Szczuka P. *The maximal class with respect to maximums for the family of upper semicontinuous strong Światkowski functions* / Szczuka P. // Math. Slovaca. – 2014. – **64**, 5. – P. 1153–1164.

300. Szuca P. *Every almost continuous function is polygonally almost continuous* / Szuca P. // Real Anal. Exch. – 2000. – **25**, 2. – P. 691–694.

301. Thielman H.P. *Types of functions* / Thielman H.P. // Amer. Math. Monthly. – 1953. – **60**. – P. 156–161.

302. Tong J. *A decomposition of continuity* / Tong J. // Acta Math. Hung. – 1986. – **48**. – P. 11–15.

303. Tong J. *A note on almost continuous mappings and Baire spaces* / Tong J. // Int. J. Math. Math. Sci. – **6**. – P. 197–199.

304. Tong J. *Another note on almost continuous mappings and Baire spaces* / Tong J. // Int. J. Math. Math. Sci. – 1984. – **7**. – P. 619–620.

305. Tong J. *Expansion of open sets and decomposition of continuous mappings* / Tong J. // Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. – 1994. – **43**, 2. – P. 303–308.

306. Tong J. *On decomposition of continuity in topological spaces* / Tong J. // Acta Math. Hung. – 1989. – **54**, 1-2. – P. 51–55.

307. Valdivia M. *On the closed graph theorem in topological spaces* / Valdivia M. // Manuscr. Math. – 1978. – **23**. – P. 173–184.

308. Van Vleck E. *A proof of some theorems on pointwise discontinuous functions* / Van Vleck E. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1907. – **8**. – P. 180–204.

309. Vanscó Ö. *On jointly somewhat nearly continuous functions* / Vanscó Ö. // Acta Math. Un. Comen. New Series. – 1994. – 63. – **2**. – P. 241–245.

310. Vielma J. *$(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continuous mappings and their decomposition* / Vielma J., Rosas E. // Divulgaciones Matematicas. – 2004. – **12**, 1. – P. 53–64.

311. Whyburn G. *Connectivity of peropherally continuous functions* / Whyburn G. // Proc. Natl. Acad. Sci. – 1966. – **55**. – P. 1040–1041.

312. Wojcik M.R. *Closed and connected graphs of functions; examples of connected punctiform spaces* / Wojcik M.R. – Rozprawa doktorska, Katowice. – 2008. – 40 p.

313. Wojcik M.R. *Separately continuous functions with closed graphs* / Wojcik M.R., Wojcik M.S. // Real. Anal. Exch. – 2005. – **30**, 1. – P. 23–28.

314. Yan E. *On decomposition of $\mathcal{A}$-continuity* / Yan E., Yang P. // Acta Math. Hung. – 2006. – **110**, 4. – P. 309–313.

315. Young J. *A theorem in the theory of functions of a real variable* / Young J. // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1907. – **24**. – P. 187-–192.

316. Zaharescu A. *Functii grafc continue* / Zaharescu A. // Stud. Cerc. Mat. – 1983. – **53**. – P. 89-—99.

317. Александров П. *Введение в теорию множеств и общую топологию* / П. Александров. – М.: Наука, 1977. – 370 с.

318. Банах С. *Курс функціонального аналізу* / С.Банах. – К.: Рад. школа, 1948. – 216 с.

319. Банах Т. О. *Точки розриву майже неперервних функцій* / Банах Т. О., Маслюченко В. К., Михайлюк В. В., Пшеничко М. І. // Матем. Студ. — 2000. — **14**, 1. -– С. 89-–96.

320. Бурбаки Н. *Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов* / Н.Бурбаки. – М.: Наука, 1975. – 408с.

321. Вітренко О.В. *Про нарізно ледь неперервні функції* / Вітренко О.В., Маслюченко В.К. // Мат. студії. – 1996. – **6**. – С. 113–118.

322. Энгелькинг Р. *Общая топология* / Р.Энгелькинг. – Москва: Мир. – 1986. – 752 с.

323. Крецу В.І. *Неперервність за Стеллінґзом, нарізна неперервність та функції з замкненим графіком* / Крецу В.І., Маслюченко В.К. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 349. Математика. – Чернівці: Рута. – 2007. – С. 50–54.

324. Кожукар О.Г. *Навколо теореми Дебса про многозначні відображення* / Кожукар О.Г., Маслюченко В.К. // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. -– 2004. — **191**–**192**. -– С. 61-–66.

325. Куратовский К. *Топология* / К.Куратовский. – Том 1. М.: Мир, 1966. – 594 с.

326. Маслюченко О.В. *Множина точок розриву $\mathcal{A}$-неперервних функцій* / Маслюченко О. // Мат. Студії. – 2012. – **37**, N1. – С. 89–97.

327. Маслюченко О.В. *Побудова ω-первісних та різні аналоги компактних операторів*: дис. ... д-ра фіз.-мат. наук : 01.01.01 / Маслюченко Олександр Володимирович. – Чернівці, 2012. – 320 с.

328. Маслюченко В.К. *Елементи теорії двоїстості* / Маслюченко В.К. – Чернівці: Рута, 2005. – 159 с.

329. Маслюченко В.К. *Задача Діні і рівномірна неперервність* / Маслюченко В.К. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 46. Математика. – Чернівці: ЧДУ. – 1999. – С. 80–87.

330. Маслюченко В.К. *Лінійні неперервні оператори* / В.К.Маслюченко. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.

331. Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення і простори Кете*: дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01 / Маслюченко Володимир Кирилович. – Чернівці, 1999. – 345 с.

332. Маслюченко В.К. *Перші типи топологічних векторних просторів* / В.К.Маслюченко. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.

333. Маслюченко В.К. *Про нарізні і сукупні модифікації неперервності* // Мат. Студії. – 2006. – **25**, 2. – С. 213–218.

334. Маслюченко В.К. *Простори Гана і задача Діні* / Маслюченко В.К. // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, 4. – С. 39–45.

335. Маслюченко В.К. *Часткова неперервність многозначних відображень і узагальнення однієї теореми Бера* / Маслюченко В.К. // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. В. 76. Математика. – Чернівці: Рута, 2000. – С. 62–66.

336. Маслюченко В.К. *Зв'язки між різними типами квазінеперервності* / Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Нестеренко В.В. // Матеріали міжнародної наук. конф. "Сучасні проблеми математики", – Чернівці. – 1998. – Ч.3. – С. 40–42.

337. Маслюченко В.К. *Симетрична квазінеперервність сукупно квазінеперервних функцій* / Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Нестеренко В.В. // Мат. Студії. – 1999. – **11**, 2. – С. 204–208.

338. Маслюченко В.К. *Точкова розривність функцій багатьох змінних* / Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Нестеренко В.В. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 111. Математика. – Чернівці: Рута. – 2001. – С. 70–75.

339. Маслюченко В.К. *Дослідження про нарізно неперервні відображення* / Маслюченко В.К., Михайлюк О.В., Собчук О.В. // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С.192–246.

340. Маслюченко В.К. *Сукупна неперервність K_hC-функцій зі значеннями в просторах Мура* / Маслюченко В.К, Михайлюк В.В., Філіпчук О.І. // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, 11. – С. 1539–1547.

341. Маслюченко В.К. *Зв'язки між нарізними та сукупними властивостями многозначних відображень* / Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Фотій О.Г. // Мат. Студії. – 2011. – **35**, 1. – С. 106—112.

342. Маслюченко В.К. *Горизонтальна квазінеперервність та її застосування* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // - Чернівці, 1996. – 15 с. – Деп. в УкрІНТЕІ 01.11.96, N98 - Ук. 96.

343. Маслюченко В.К. *Декомпозиція неперервності та перехідні відображення* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Математичний вісник НТШ – 2011. – **8**. – С. 132–150.

344. Маслюченко В.К. *Множина точок α-неперервності* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.// Матеріали міжнародної конференції, присвяченої 125 річниці від дня народження Ганса Гана. – Чернівці. – 2004. – С. 63–65.

345. Маслюченко В.К. *Неперервність лінійних перехідних відображень* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.// Міжнародна науково-практична конференція "Математика. Інформаційні технології. Освіта", 7 - 9 вересня 2012 / Тези доповідей. – Луцьк – Світязь, 2012. – С. 22–23.

346. Маслюченко В.К. *Обернена задача для квазінеперервних функцій* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Збірник наукових праць Камянець-Подільского державного педагогічного університету. Камянець-Подільський держ.пед. універ.. Серія фізико-математична (математика). – 1998. – Випуск 4. – С. 76-79.

347. Маслюченко В.К. *Про декомпозицію неперервності, яка пов'язана з перехідними функціями* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Міжнародна конференція "Сучасні проблеми аналізу" присвячена 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету/ Тези доповідей. – Чернівці, 2010. – С. 106–108.

348. Маслюченко В.К. *Про множини точок майже неперервності та інші послаблення неперервності* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. **191 - 192**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2004. – С. 100–102.

349. Маслюченко В.К. *Про нове узагальнення теореми Калбрі-Троалліка* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу 25 лютого - 3 березня 2013/ Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 65–66.

350. Маслюченко В.К. *Про розвиток одного результату Беєеля* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Всеукр. наук. конф., присв. 70-річч. нар. проф. П.С.Казимірського (5-7 жовтня 1995). Тези доп. Ч.І. – Львів, 1995. – С. 80.

351. Маслюченко В.К. *Розриви двосторонньо квазінеперервних перехідних функцій* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Мат. Студії. – 2014. – **41**, 1. – С. 18–27.

352. Маслюченко В.К. *Слабка властивість Дарбу і перехідність лінійних відображень у топологічних векторних просторах* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Карпатські математичні публікації. – 2013. – **5**, 1. – С. 79–88.

353. Маслюченко В.К. *Сукупна неперервність та квазінеперервність горизонтально квазінеперервних функцій* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, N12. – С. 1711–1714.

354. Маслюченко В.К. *Точки сукупної неперервності та великі коливання* / Маслюченко В.К., Нестеренко В.В. // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, N6. – С.791–800.

355. Маслюченко В.К. *Майже нарізно неперервні відображення* / Маслюченко В.К., Репало Б.Г. // Чернів. ун-т. – Чернівці, 1993. – 15 с. – Деп. в ДНТБ України, N956-Ук93.

356. Маслюченко В.К. *Зв'язки між кліковістю та її аналогами* / Маслюченко В.К., Філіпчук О.І. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 528. Математика. - Чернівці: Рута. - 2010. – С. 100–103.

357. Михайлюк В.В. *Берівська класифікація нарізно напівнеперервних і монотонних функцій* / Михайлюк В.В. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. **349**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2007. – С. 95–97.

358. Михайлюк В.В. *Координатний метод і теорія нарізно неперервних відображень*: дис. ... докт. фіз.-мат. наук: – 01.01.01 / Михайлюк Володимир васильович. – Чернівці, 2008. – 333 с.

359. Нестеренко В. *Властивості псевдоквазінеперервності* / Нестеренко В. // Укр. мат. вісник. – 2015. – 12, 2. – С. 243–256. (преклад: Nesterenko V. Properties of pseudoquasicontinuity, Journal of Mathematical Sciences, 2015, Vol. **211**, 5. – P. 684–693.)

360. Нестеренко В.В. *Достатні умови існування точок симетричної квазінеперервності та кліковості функцій двох змінних* / Нестеренко В.В. // Карпатські математичні публікації. – 2011. – **3**, 2. – С. 114–119.

361. Нестеренко В.В. *Квазінеперервність оберненого відображення* / Нестеренко В.В. // Диф. рівняння та їх застосування. Міжн. конф., 11 - 14 жовтня 2006 року / Тези доповідей. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 116.

362. Нестеренко В.В. *Класифікація точок розриву деяких аналогів неперервності та декомпозиція неперервності* / Нестеренко В.В. // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика: зб. наук. пр. – **2**, 1. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – С. 63–67.

363. Нестеренко В.В. *Множина точок α-неперервності* / Нестеренко В.В. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. **269**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2005. – С. 79–80.

364. Нестеренко В.В. *Нові характеризації деяких ослаблень неперервності* / Нестеренко В.В. // Буковинський математичний журнал. – 2013. – **1**, 3-4. – С. 106–113.

365. Нестеренко В. *Ослаблена неперервність оберненого відображення* / Нестеренко В. // Бук. мат. журнал. – 2015. – **3**, 1. – С. 81–86.

366. Нестеренко В.В. *Перехідність в теорії функцій* / Нестеренко В.В. // Всеукр. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу 25 лютого - 1 березня 2015, Тези доповідей. – Ворохта, 2015. – С. 50–52.

367. Нестеренко В.В. *Про аналоги перехідності та декомпозицію неперервності* / Нестеренко В.В. // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 25 лютого - 3 березня 2013/ Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 72–74.

368. Нестеренко В.В. *Про властивість Гана* / Нестеренко В.В. // Міжнародна математична конференція ім.. В.Я. Скоробогатька, 24 - 28 вересня 2007 року/ Тези доповідей. - Львів, 2007. - С. 205.

369. Нестеренко В.В. *Про властивість Гана* / Нестеренко В.В. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. **374**. Математика. - Чернівці: Рута. - 2008, - С. 99–102.

370. Нестеренко В.В. *Про властивість Гана та сукупні властивості деяких ослаблень неперервності* / Нестеренко В.В. // IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. Тези доповідей. – Чернівецький національний університет, 2014. – С. 146–147.

371. Нестеренко В.В. *Про два класи функцій, які мають властивість Гана* / Нестеренко В.В. // Мат. Студії. – 2009. – **31**, 2. – С. 183–188.

372. Нестеренко В.В. *Про квазінеперервність функцій двох змінних* / Нестеренко В.В. // Всеукраїнська наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" присвячена 50-річчю кафедри прикладної математики аналізу Чернівецького університету/ Тези доповідей. – Чернівці, 2012. – С. 117.

373. Нестеренко В.В. *Про множину точок квазінеперервності* / Нестеренко В.В. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип.. **46**. Математика. – Чернівці: ЧДУ. – 1999. – С. 104–106.

374. Нестеренко В.В. *Про одну характеризацію кліковості функцій двох змінних* / Нестеренко В.В. // Міжнародна конференція "Теорія наближень функцій та її застосування", 28 травня - 3 червня, 2012/ Тези доповідей. – Кам'янець-Подільський. – 2012. – С. 73–74.

375. Нестеренко В.В. *Про одну характеризацію сукупної квазінеперервності* / Нестеренко В.В. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Математика. - Чернівці: Рута. - 2007. – **336** - **337**. – С. 137–141.

376. Нестеренко В.В. *Про ослаблену неперервність оберненого відображення* / Нестеренко В.В. // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу 24 лютого – 27 лютого 2016 / Тези доповідей. – Ворохта, 2015. – С. 106–108.

377. Нестеренко В.В. *Про псевдоквазінеперервність* / Нестеренко В.В. // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге, Тези доповідей. - Чернівці: ЧНУ, 2015. – С. 88–89.

378. Нестеренко В.В. *Про симетричну квазінеперервність та її аналоги* / Нестеренко В.В. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. **485**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2009. – С. 78–83.

379. Нестеренко В.В. *Про симетричну квазінеперервність та кліковість функцій двох змінних* / Нестеренко В.В. // International Conference on Functional Analysis dedicated to the 90-th anniversary of V.E. Lyantse, 17-21 November 2010/ Abstracts of Reports. – Lviv, 2010. – С. 124–126.

380. Нестеренко В.В. *Про слабку горизонтальну квазінеперервність* / Нестеренко В.В. // Міжнародна конференція, 19 серпня - 2 вересня 2007 року/ Тези доповідей. – Київ, 2007. – С. 86–87.

381. Нестеренко В.В. *Різні типи квазінеперервності та їх застосування*: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. /Нестерено Василь Володимирович. – Чернівці, 1999. – 113с.

382. Нестеренко В.В. *Слабка горизонтальна квазінеперервність* / Нестеренко В.В. // Математичний вісник НТШ. – 2008. – **5**. – С. 177–182.

383. Нестеренко В.В. *Сукупна квазінеперервність многозначних відображень* / Нестеренко В.В. // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. **349**. Математика. – Чернівці: Рута. – 2007. – С. 98–100.

384. Нестеренко В.В. *Сукупні властивості відображень, які повязані із замкненістю графіка* / Нестеренко В.В. // Мат. Студії. – 2015. – **43**, 1. – С. 27–35.

385. Нестеренко В.В. *Сукупні властивості деяких аналогів точкової розривності* / Нестеренко В.В. // IX-а Літня школа. Алгебра, топологія і аналіз, 7 липня - 18 липня, 2014, Поляниця, Україна. – 55–57.

386. Нестеренко В.В. *Сукупні властивості функцій, які монотонні відносно першої змінної* / Нестеренко В.В. // Математичний вісник НТШ. - 2009. – **6**. – С. 195–201.

387. Нестеренко В.В. *Сукупні властивості функцій двох змінних, які монотонні відносно однієї із змінних* / Нестеренко В.В. // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М.Боголюбова та 70-річчя М.І.Нагнибіди, 8 - 13 червня 2009 року/ Тези доповідей. – Чернівці, 2009. – С. 124–126.

388. Нестеренко В.В. *Характеризація властивості Гана* / Нестеренко В.В. // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 20-26 лютого 2012/ Тези доповідей. – Ворохта, 2012. – С. 45–46.

389. Нестеренко В.В. *Характеризація властивості Гана* / Нестеренко В.В. // Доповіді НАН України. – 2014. – **2**. – С. 32–37.

390. Нестеренко В.В. *Характеризація деяких ослаблень неперервності* / Нестеренко В.В. // Всеукраїнська конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", 24 лютого - 2 березня 2014/ Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2014. – С. 79–81.

391. Нестеренко В.В. *Характеризації різних ослаблень неперервності з допомогою замикання* / Нестеренко В.В. // Буковинський математичний журнал. – 2014. – **2**, 2-3. – С. 177–182.

392. Нестеренко В.В. *Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних мультифункцій* / Нестеренко В.В., Фотій О.Г. // International Conference on Functional Analysis dedicated to the 90-th anniversary of V.E. Lyantse, 17-21 November 2010/ Abstracts of Reports. – Lviv, 2010. – С. 126–127.

393. Нестеренко В.В. *Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних мультифункцій* / Нестеренко В.В., Фотій О.Г. // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика: зб. наук. пр. – **1**, 3. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2011. – С. 72–74.

394. Філіпчук О.І. *Нарізно неперервні відображення та їх аналоги зі значеннями в неметризовних просторах*: дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.01/ Філіпчук Ольга Ігорівна. – Чернівці, 2010. – 112 с.

395. Фотій О.Г. *Зв'язки між неперервністю зверху і знизу, H^+-неперервністю і H^--неперервністю* / Фотій О.Г. // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. — 2007. — **336–337**. — С. 189–196.

ПОКАЖЧИК ТЕРМІНІВ

$A(f)$, 16
$AK(X \times Y, Z)$, 149
$A^s_Y(f)$, 136
$B(f)$, 17
$B(\mathcal{V})$, 72
$C(F)$, 53
$C(f)$, 14
$C(f, x)$, 27
$CC(X \times Y, Z)$, 31
$C\widetilde{K}(X \times Y, Z)$, 36
$C^+(F)$, 53
$C^+(f, x)$, 23
$C^-(F)$, 53
$C^-(f, x)$, 23
$C^x(f)$, 171
$C_B(f)$, 32
$C_Y(f)$, 32
$C_y(f)$, 32
$D(f)$, 14
$D^+(f)$, 124
$D^-(f)$, 124
$Dar(f)$, 23
$E(f)$, 17
$Gr(f)$, 24
$H(X \times Y, Z)$, 33
$H(f)$, 27
$K(f)$, 15
$KC(X \times Y, Z)$, 32
$KK(X \times Y, Z)$, 35
$K\widetilde{K}_w(X \times Y, Z)$, 37
$K^+(f)$, 17
$K^-(f)$, 17
$K^s(f)$, 132
$K^s_Y(f)$, 132
$K_hC(X \times Y, Z)$, 33
$K_hK(X \times Y, Z)$, 36
$L^s_Y(f)$, 136
$M\tilde{A}$, 75
$M\tilde{C}(\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R})$, 69
$M\tilde{K}$, 75
$M\tilde{L}$, 75
$P(X, Y)$, 138
S_f, 19
$V(y)$, 72
$\overline{C}C(X \times Y, Z)$, 32
$\overline{K}C(X \times Y, Z)$, 32
відображення
$(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-неперервне, 42
B-квазінеперервне, 18
LC-неперервне, 29
O-зв'язне, 23
S-квазінеперервне, 18
T-квазінеперервне, 18
α-неперервне, 29
β-неперервне, 22
$\mathcal{A}$-квазінеперервне, 42, 88
$\mathcal{A}$-неперервне, 42, 103
$\mathcal{A}$-псевдоквазінеперервне, 173
$\mathcal{O}_*$-неперервне, 42
ic-неперервне, 30

w^*-квазінеперервне, 28, 231
w^*-неперервне, 27, 229
$\mathcal{A}_x$-квазінеперервне, 88
екстремально β-неперервне, 29
екстремально майже неперервне, 29
горизонтально квазінеперервне, 21
графічно неперервне, 29
квазінеперервне, 13
квазінеперервне справа, 17
квазінеперервне зліва, 17
квазінеперервне знизу відносно x, 21
квазіперехідне, 64, 233
ледь неперервне, 18, 118
локально w^*-неперервне, 28, 226
локально відносно неперервне, 28, 230
м'яко неперервне, 20
має слабку властивість Дарбу, 23
має щільну властивість, 30
має властивість Бера, 20
має властивість Дарбу, 23
має властивість Гана, 33, 181
майже квазінеперервне, 22
майже ледь неперервне, 30
майже неперервне, 21
многозначне, 52
  горизонтально квазінеперервне знизу, 83
  горизонтально квазінеперервне зверху, 83
  категорно клікове знизу, 73, 205
  компактнозначне, 83
  квазінеперервне, 54
  квазінеперервне знизу, 54
  квазінеперервне зверху, 54
  ледь неперервне, 55
  ледь неперервне знизу, 55
  ледь неперервне зверху, 55
  неперервне, 53
  неперервне знизу, 53
  неперервне зверху, 53
  покриттєво категорно клікове знизу, 72, 199
  псевдоквазінеперервне знизу, 59, 72, 198
  симетрично квазінеперервне відносно x, 55
  симетрично квазінеперервне відносно x знизу, 55
  симетрично квазінеперервне відносно x зверху, 55
  умова (A), 73, 205
неперервне відносно пари систем $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, 100
неперервне відносно системи, 61, 90
переднеперервне, 22
перехідне, 63
периферійно неперервне, 26
просто неперервне, 19
псевдоквазінеперервне, 58
псевдоквазінеперевне, 112, 115
розширювальне, 30
сильно квазінеперервне, 14
симетрично квазінеперервне, 20
симетрично майже

квазінеперервне відносно x, 145
симетрично майже ледь неперервне відносно x, 145
скінченновимірне, 246
слабко горизонтально квазінеперервне, 59, 139
слабко квазіперехідне, 63, 221
слабко неперервне, 31
слабко перехідне, 63, 220
суб-LC-неперервне, 30
точково розривне, 16, 264
умова (B^*), 172
умова (B^*), 152
властивість Дарбу, 225
зв'язне, 24
S-неперервність, 24
декомпозиція неперервності, 49
двостороння гранична точка, 123
ізольована точка, 252
коливання функції на множині, 16
коливання в точці, 70
ламана, що породжена точками, 241
ламано зв'язні точки, 242
множина
α-відкрита, 29
β-відкрита, 22
досконала, 252
гранична, 27
квазівідкрита, 14
ламано зв'язна, 242
локально замкнена, 29
має властивість Бера, 20
напіввідкрита, 14
передвідкрита, 95
просто відкрита, 19
внутрішньо-замкнена, 29
простір
W-простір, 37
w-простір, 37
Гана, 68
має властивість нерухомої точки, 24
прямолінійний шлях, 240
система спряжена з сім'ю, 101
умова (B), 60
умова (B^*), 60
функція
S-неперервна справа, 25
S-неперервна зліва, 25
Ґібсона, 30
Шварца, 24
двосторонньо квазінеперервна, 17
клікова, 15
лінійна, 240
має досконалий шлях, 123
має лівосторонню властивість Юнґа, 259
має правосторонню властивість Юнґа, 259
має властивість Юнґа, 259
має властивість проміжного значення, 22
має властивістю Юнґа, 25
напівнеперервна, 13
околова, 13
перехідна, 28, 62, 217

перехідна знизу, 28, 62, 217
перехідна зверху, 28, 62, 217
регульована, 83, 126
симетрично клікова, 20
симетрично клікова відносно x, 145
слабка Ґібсона, 30
типу Чезаро, 30, 221
типу Дарбу, 26, 263
умова (B), 80, 156
умова (C), 78, 152, 156
умова (B^*), 78