МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

ФІРМАН

Тарас Іванович

УДК 517.956

ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗЛІЧЕННИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичної економіки та економетрії Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Кирилич Володимир Михайлович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка, завідувач кафедри
математичної економіки та економетрії.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Бігун Ярослав Йосипович,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича,
завідувач кафедри прикладної математики та
інформаційних технологій;

кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Симотюк Михайло Михайлович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України,
старший науковий співробітник відділу
математичної фізики.

Захист відбудеться ___ ________ 2017 року о 15^{00} на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий ___ ________ 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доцент Б. А. Остудін

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Багато математичних моделей біології, хімії, теорії популяцій, математичної економіки, теорії керування описано за допомогою зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь. До таких систем приводять також класичні методи знаходження наближених розв'язків початково-крайових задач для рівнянь із частинними похідними.

Побудова теорії зліченних систем розпочалася із робіт В. Харта (1917), В. Рейда (1930) та А. М. Тихонова (1934), в яких доведено теореми існування та єдиності розв'язків задач Коші для лінійних та напівлінійних зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь. Активне дослідження таких систем, починаючи з другої половини минулого століття, проводили М. О. Красносельський, М. Г. Крейн, С. Г. Крейн, Ю. Л. Далецький, К. П. Персидський, О. А. Жаутиков, К. Г. Валеєв, А. М. Самойленко, Ю. В. Теплінський, Е. Хілле та ін.

Близькими за структурою до зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь, а також за методикою їх досліджень, є системи великої розмірності, які можна розглядати як "укорочення" відповідних зліченних систем. Системи великої розмірності виникають у біології та хімії, зокрема в задачах, що моделюють багатостадійний синтез речовини. Задачі для систем великої розмірності розглянуто у працях Г. В. Демиденка, В. А. Лихошвая, С. І. Фадеєва, в яких ураховано зв'язок між розв'язками цих систем і розв'язками рівнянь із запізнюючим аргументом.

Знаходження наближених розв'язків крайових задач для рівнянь із частинними похідними за допомогою методу Фур'є, методу головних елементів або методів усереднення (Крилова–Боголюбова–Митропольського–Самойленка) веде до вивчення задач для зліченних систем рівнянь першого порядку із частинними похідними. Такі задачі вивчали, зокрема, К. П. Персидський, О. А. Жаутиков, Ю. О. Митропольський, Р. С. Хапко, М. В. Василенко, А. Ю. Пилипенко, Г. П. Хома, В. Т. Яцюк, М. І. Гром'як, В. Л. Мучник, М. Ю. Філімонов, Г. І. Чандіров, Т. К. Голдашов, Дж. Банас, Д. Бенні, А. Бержанов, А. Бекбауєва, Е. К. Курманґалієв, В. А. Недокіс, П. Бранді, Т. Члапінскі, Д. Ярушевська-Волчак, Г. Лещинські, В. Млак, М. Новотарська, Д. Шарскіта та ін.

Характерною особливістю проведених раніше досліджень задач для зліченних систем рівнянь з частинними похідними було зведення цих задач за допомогою операційних методів до розв'язування зліченних систем звичайних диференціальних або алгебричних рівнянь. Однак майже не проведено дослідження задачі Коші, мішаних задач та задач без початкових умов для зліченних гіперболічних систем рівнянь першого порядку за допомогою класичного методу характеристик або його модифікацій. Заповнити таку прогалину допоможе ця дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертації отримано в рамках виконання наукової теми кафедри диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка "Дослідження нелінійних задач для диференціальних операторів", номер держреєстрації 0114U004540.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є знаходження достатніх умов коректної розв'язності (локальної, глобальної узагальненої та класичної) задачі Коші та мішаних задач для зліченних гіперболічних систем напівлінійних та квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними.

Завданнями дисертаційного дослідження є:

– визначення умов локальної та глобальної узагальненої розв'язностей задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку у верхній півплощині;

– доведення теореми про близькість розв'язків укороченої, що відповідає задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку, та вихідної систем;

– з'ясування достатніх умов коректної глобальної розв'язності мішаної задачі для зліченної гіперболічної систем напівлінійних рівнянь у прямокутнику та побудова відповідної укороченої системи;

– визначення достатніх умов існування та єдиності розв'язку задачі без початкових умов для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь у смузі;

– з'ясування достатніх умов існування та єдиності глобального розв'язку задач для виродженої гіперболічної зліченної системи напівлінійних рівнянь у прямокутнику.

Об'єктом дослідження є початково-крайові задачі для зліченних гіперболічних систем лінійних, напівлінійних та квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними.

Предмет досліджень – достатні умови існування та єдиності глобального узагальненого та класичного розв'язків початково-крайових задач для зліченних гіперболічних систем рівнянь першого порядку.

Методи досліджень. У дисертації використано аналітичні методи досліджень, а саме метод характеристик, метод апріорних оцінок та метод стискуючих відображень. Крім того, використано результати теорії зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь із частинними похідними, функціонального аналізу та теорії інтегральних рівнянь типу Вольтерри другого роду.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі вперше отримано:

– умови глобальної узагальненої розв'язності задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь із двома незалежними змінними та побудовано вкорочену систему;

– умови глобальної класичної розв'язності задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь із однаковими характеристиками;

– умови глобальної узагальненої розв'язності мішаної задачі для зліченної гіперболічної системи лінійних рівнянь першого порядку в прямокутнику та доведено теорему про збіжність розв'язків задачі для укороченої системи до розв'язків задачі для зліченної системи;

– умови глобальної класичної розв'язності мішаної задачі для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку в півсмузі;

– умови глобальної розв'язності задачі без початкових умов для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку в смузі;

– умови глобальної розв'язності мішаної задачі для виродженої зліченної системи гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними в прямокутнику.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення. Їх можна застосувати в задачах радіофізики, теорії масового обслуговування, оптимальному керуванні, динаміці механічних систем тощо. Вони також можуть бути використані для знаходження наближених розв'язків крайових задач математичної фізики.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації отримані автором самостійно. У спільних працях В. М. Кириличу належить формулювання задач та аналіз одержаних результатів, а О. В. Пелюшкевич – доведення деяких допоміжних тверджень, які не увійшли до цієї дисертації.

Апробація результатів роботи.

Про результати досліджень доповідали на таких конференціях: Міжнародній математичній конференції імені В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 2011), International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (Львів, 2012), Fourth International Conference for young mathematicians on Differential Equations and Its Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii (Донецьк, 2012), V Всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 2013), VI Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам'янець-Подільський, 2014), XV Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2014), III Міжнародній науково-практичній конференції "Математика в сучасному технічному університеті" (Київ, 2014), Конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2015" (Львів, 2015), Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 2015), International V. Skorobohatko mathematical conference (Дрогобич, 2015), Міжнародній науковій конференції “Диференціальні рівняння та їх застосування” (Ужгород, 2016), International Conference on Differential Equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Львів, 2016), International Scientific Conference “Differential-Functional Equations and their Application” dedicated to the 80th anniversary of Professor V. I. Fodchuk (Чернівці, 2016), семінарах кафедри математичної економіки та економетрії Львівського національного університету імені Івана Франка (керівники: проф. Кирилич В. М., доц. Андрусяк Р. В.), Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: член-кор. НАН України, проф. Пташник Б. Й., проф. Іванчов М. І., проф. Каленюк П. І.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 7-ми наукових працях у фахових періодичних виданнях, з них чотири – в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз, та додатково висвітлено в 13-ти тезах матеріалів наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, а також списку літературних джерел, що налічує 142 найменування. Загальний обсяг роботи становить 139 с.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету і завдання досліджень, наукову новизну, апробацію одержаних результатів та їхнє практичне і теоретичне значення.

У першому розділі проаналізовано праці, які стосуються задач для зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь та зліченних систем рівнянь з частинними похідними.

У другому розділі побудовано локальний узагальнений розв'язок задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь, а також доведено теорему про його укорочення. Доведено теорему про глобальну узагальнену розв'язність, а у випадку однакових характеристик – глобальну класичну розв'язність задачі Коші для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними.

У смузі $\Omega^T = \{(x,t) : -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$, $(0 < T < \infty)$ розглянемо задачу Коші для зліченної квазілінійної гіперболічної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u_1,u_2,\ldots)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u_1,u_2,\ldots), \;\; i \in \mathbb{N} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_i(x,0) = g_i(x), \;\; i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Позначимо через $\mathcal{C}^{(\infty)}(\Omega^T)$ – простір, елементами якого є зліченна сукупність неперервних, рівномірно обмежених функцій, визначених на множині

Ω^T, а через $\mathfrak{M}$ – простір обмежених числових послідовностей. У просторі $\mathcal{C}^{(\infty)}(\Omega^T)$ для вектора $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots)$ визначимо норму

$$||u|| = \sup_{\substack{i\in\mathbb{N}\\(x,t)\in\Omega^T}} |u_i(x,t)|.$$

Позначимо через $\varphi_i[u](\tau; x, t)$ характеристики системи (1), тобто розв'язок задачі

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau, u_1(\xi,\tau), u_2(\xi,\tau), \ldots),\ i\in\mathbb{N} \tag{3}$$

з початковими умовами

$$\xi|_{\tau=t} = x, \tag{4}$$

або, що еквівалентно рівнянню

$$\varphi_i[u](\tau;x,t) = x+ \\ +\int_t^\tau \lambda_i(\varphi_i[u](s;x,t), s, u_1(\varphi_i[u](s;x,t),s), u_2(\varphi_i[u](s;x,t),s),\ldots)ds.$$

Проінтегруємо кожне з рівнянь системи (1) уздовж відповідних характеристик $\varphi_i[u](\tau;x,t)$ на відрізку $[0,t]$. З урахуванням початкових умов (2) одержимо зліченну систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = g_i(\varphi_i[u](0;x,t))+ \\ +\int_0^t f_i(\varphi_i[u](\tau;x,t), \tau, u_1(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau), u_2(\varphi_i[u](\tau;x,t),\tau),\ldots)d\tau\ \ i\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Означення 2.1. *Функція $f:\mathbb{R}^2\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ задовольняє умову Коші-Ліпшиця за змінними $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ з деякою неперервною функцією $\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$, якщо виконується нерівність:*

$$|f_i(x,t,u_1',u_2',\ldots,u_n',\ldots) - f_i(x,t,u_1'',u_2'',\ldots,u_n'',\ldots)| \le \alpha(x,t)\cdot\Delta u,$$

де $\Delta u = \sup_i |u_i' - u_i''|$, $i\in\mathbb{N}$.

Будемо вважати, що функція $f:\mathbb{R}^2\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ задовольняє умову Ліпшиця за змінною x в $\overline{\Omega^T}$, якщо $f_i\in Lip_x(\overline{\Omega^T})$ для довільного $u\in\mathcal{C}^{(\infty)}$ та для всіх $i\in\mathbb{N}$.

Припустимо, що для вихідних даних задачі (1)–(2) виконуються умови:

A1. $\lambda, f:\Omega^T\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ задовольняють умову Коші-Ліпшиця, $\lambda, f\in\mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Omega^T})\cap Lip_x(\overline{\Omega^T})$ при довільних $u\in\mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Omega^T})$;

A2. $\sup_i |f_i(x,t,0,0,...)| \leq \kappa(x,t)$, $\sup_i |\lambda_i(x,t,0,0,...)| \leq \gamma(x,t)$, де $\kappa, \gamma \in C(\Omega^T)$;

A3. $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}) \cap Lip_x(\mathbb{R})$.

Означення 2.2. *Функцію* $u : \Omega^T \to \mathfrak{M}$ *назвемо узагальненим розв'язком задачі* (1)–(2), *якщо* $u \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\Omega^T) \cap Lip_x(\Omega^T)$ *і задовольняє систему інтегро-функціональних рівнянь* (5).

Теорема 2.1. *Нехай вихідні дані задачі* (1)–(2) *задовольняють умови* ***A1*** – ***A3***. *Тоді при достатньо малому* $T > 0$ *існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (1)–(2), *визначений на множині точок* $(x,t) \in \Omega^T$ *таких, що усі характеристики* $\varphi_i[u](\tau; x, t)$, *що виходять з цих точок в напрямку прямої* $t = 0$, *перетинають її за довільних значень* $u \in \mathcal{C}^{(\infty)}$.

У **підрозділі 2.2** поряд з системою (1) розглянемо систему рівнянь

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u_1^n,u_2^n,\ldots)\frac{\partial u_i^n}{\partial x} = f_i(x,t,u_1^n,u_2^n,\ldots), \qquad i \in \{1,\ldots,n\} \tag{6}$$

з початковими умовами

$$u_i^n(x,0) = g_i(x), \;\; i \in \{1,\ldots,n\}, \tag{7}$$

де

$$u_{n+j}^n(x,t) \equiv g_{n+j}(\varphi_{n+j}^n[u^n](0;x,t))), \; j \in \mathbb{N}.$$

Систему (6) назвемо вкороченою системою для системи (1).

Нехай також $\varphi_i^n[u^n](\tau; x, t)$ розв'язок системи

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi,\tau,u_1^n(\xi,\tau),\ldots,u_n^n(\xi,\tau),0,0,\ldots), i \in \mathbb{N} \tag{8}$$

з початковими умовами (4).

Означення 2.3. *Функція* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ *задовольняє посилену умову Коші-Ліпшиця за змінними* $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ *з деякою неперервною функцією* $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, *якщо виконується нерівність*

$$|\lambda_i(x,t,u_1,u_2,...,u_n,u'_{n+1},...) - \lambda_i(x,t,u_1,u_2,...,u_n,u''_{n+1},...)| \leq \\ \leq \varepsilon(n)\alpha(x,t)\cdot\Delta u,$$

де $\Delta u = \sup_{i\in\mathbb{N}} |u'_{n+i} - u''_{n+i}|$, *та* $\varepsilon(n) \to 0$, *при* $n \to \infty$.

Інтегруванням кожного з рівнянь системи (6) уздовж відповідних характеристик одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} u_i^n(x,t) &= g_i(\varphi_i^n[u^n](0;x,t)) + \\ &+ \int_0^t f_i[u^n(\varphi_i^n[u^n](\tau;x,t),\tau)](\varphi_i^n[u^n](\tau;x,t),\tau)d\tau, \quad i \in \{1,...,n\}, \\ u_i^n(x,t) &\equiv g_i(\varphi_i^n[u^n](0;x,t)), \;\; i \in \{n+1,...\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Означення 2.4. *Під узагальненим розв'язком задачі* (6)–(7) *будемо розуміти неперервний розв'язок системи* (9).

Теорема 2.2. *Нехай вихідні дані задачі* (1)–(2) *задовольняють умови:*

1) $\lambda, f : \Omega^T \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ задовольняють посилену умову Коші-Ліпшиця, $\lambda, f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Omega^T}) \cap Lip_x(\overline{\Omega^T})$ при довільних $u \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Omega^T})$;
2) $|f_i(x, t, 0, 0, ...)| \le a_i$, де a_i – деякі сталі такі, що $a_i \to 0$, при $i \to \infty$;
3) $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}) \cap Lip_x(\mathbb{R})$.

Тоді узагальнені розв'язки задач (1)–(2) *і* (6)–(7) *будуть як завгодно близькими за достатньо великого, але скінченного значення* n.

У **підрозділі 2.3** продовжено розгляд задачі (1)–(2), а саме показано, що при виконанні певних додаткових умов можна одержати розв'язок, визначений у всій верхній півплощині.

Позначимо через $\mathfrak{U}$ підпростір $\mathcal{C}^{(\infty)}(\Omega^T)$ ліпшицевих за x функцій.

Означення 2.5. *Функцію* $u \in \mathfrak{U}$ *назвемо узагальненим розв'язком задачі* (1)–(2) *в* Ω^T, *якщо* u *задовольняє систему інтегро-функціональних рівнянь* (5).

Теорема 2.3. *Нехай вихідні дані задачі* (1)–(2) *задовольняють умови* ***A1***–***A3***. *Тоді задача* (1)–(2) *в* $\mathfrak{U}$ *не може мати більше одного розв'язку.*

Позначимо через $\mathfrak{U}_o$ підмножину функцій з $\mathfrak{U}$, компоненти яких не спадають за x. Нехай також $u^x(t) = (u_1^x(t), u_2^x(t), \ldots)$ – розв'язок задачі Коші

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(x, t, u_1, u_2, ...),\ u_i(x, 0) = g_i(x), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Припустимо, що вихідні дані, крім **A1**–**A3**, задовольняють обмеження:

B1. компоненти функцій λ, f не спадають за x та за u;

B2. компоненти функції g не спадають за x;

B3. для довільного $x \in \mathbb{R}$, розв'язок $u^x(t) = (u_1^x(t), u_2^x(t), \ldots)$ можна продовжити на весь відрізок $[0, T]$, причому $||u^x|| < \infty$.

Теорема 2.4. *Нехай вихідні дані задачі* (1)–(2) *задовольняють умови* ***A1***–***A3*** *та* ***B1***–***B3***. *Тоді в* $\mathfrak{U}_o$ *існує узагальнений розв'язок задачі* (1)–(2).

Використовуючи результати попередніх підрозділів, у **підрозділі 2.4** встановлено глобальну класичну розв'язність задачі (1)–(2) у випадку однакової характеристики для всіх рівнянь системи. Тобто, розглядаємо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda(x, t, u_1, u_2, ...)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x, t, u_1, u_2, ...),\ \ i \in \mathbb{N} \tag{10}$$

з початковими умовами (2). На відміну від попередніх підрозділів, характеристику $\varphi(\xi; t)$ системи (10) визначаємо як розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial \varphi(\xi; t)}{\partial t} = \lambda(\varphi(\xi; t), t, u_1(\varphi(\xi; t), t), u_2(\varphi(\xi; t), t), ...) \tag{11}$$

з початковою умовою
$$\varphi(\xi;0)=\xi, \qquad \xi\in\mathbb{R}. \tag{12}$$

Кожне рівняння системи (10) на характеристиці $\varphi(\xi;t)$ можна записати у вигляді
$$\frac{du_i(\varphi(\xi;t),t)}{dt}=f_i(\varphi(\xi;t),t,u_1(\varphi(\xi;t),t),u_2(\varphi(\xi;t),t),...), \quad i\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

Проінтегрувавши рівняння (11) та кожне рівняння системи (13) на відрізку $[0,t]$ і зробивши заміну $v_i(\xi;t)=u_i(\varphi(\xi;t),t)$, $i\in\mathbb{N}$, одержимо зліченну систему нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерри
$$\begin{cases} \varphi(\xi;t)=\xi+\int\limits_0^t \lambda(\varphi(\xi;\tau),\tau,v_1(\xi;\tau),v_2(\xi;\tau),...)d\tau, \\ v_i(\xi;t)=g_i(\xi)+\int\limits_0^t f_i(\varphi(\xi;\tau),\tau,v_1(\xi;\tau),v_2(\xi;\tau),...)d\tau, \ \ i\in\mathbb{N}. \end{cases} \tag{14}$$

Поруч з системою (14) будемо розглядати систему інтегральних рівнянь, отриману диференціюванням системи (14) за змінною ξ.

Теорема 2.5. *Нехай вихідні функції задачі* (10), (2) *задовольняють умови* ***B1***–***B3*** *і умови:*

1) $\forall u\in\mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Omega^T}),\lambda,\lambda'_x\in C(\overline{\Omega^T})\cap Lip_x(\overline{\Omega^T})$;
2) $\forall u\in\mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Omega^T}), f,f'_x\in\mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Omega^T})\cap Lip_x(\overline{\Omega^T})$;
3) $g,g'\in\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$;
4) $\lambda,\lambda'_x,f,f'_x$ задовольняють умову Коші-Ліпшиця;
5) $\forall u\in\mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Omega^T}),\dfrac{\partial f}{\partial u_j}\in\mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Omega^T})$ задовольняють умову Коші-Ліпшиця з неперервними функціями $\varsigma_j(t)$, причому $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varsigma_j(t)\le\varsigma(t)$ та $\varsigma\in C([0,T])$;
6) $\forall u\in\mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Omega^T}),\dfrac{\partial\lambda}{\partial u_j}\in C(\overline{\Omega^T})$ задовольняють умову Коші-Ліпшиця з неперервними функціями $\zeta_j(t)$, причому $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\zeta_j(t)\le\zeta(t)$ та $\zeta\in C([0,T])$;
7) $|\lambda(x,t,0,0,...)|\le\gamma(t)$ та $|f_i(x,t,0,0,...)|\le\varkappa(t)$ для всіх $i\in\mathbb{N}$, де $\gamma,\varkappa\in C[0,T]$.

Тоді задача (10),(2) *має єдиний класичний розв'язок, визначений в усій смузі* Ω^T.

Третій розділ присвячено побудові глобального узагальненого розв'язку мішаної задачі для зліченної гіперболічної системи лінійних рівнянь, а також доведено теорему про його вкорочення. На модельному прикладі мішаної задачі для диференціального рівняння четвертого порядку показано її зведення до мішаної задачі для зліченної системи рівнянь першого порядку й побудовані вкорочений та точний розв'язки.

У прямокутнику $\Pi = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ розглянемо зліченну гіперболічну систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x,t)u_j(x,t) + f_i(x,t), \ \ i \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Нехай $I^+ = \{2k-1 |\, k \in \mathbb{N}\}$, а $I^- = \mathbb{N}/I^+$ і, крім того, λ_i впорядковані в кожній точці прямокутника Π так

$$\lambda_1(x,t) \geq \lambda_3(x,t) \geq ... \geq \lambda_{2k-1}(x,t) \geq ...,$$

$$\lambda_2(x,t) \leq \lambda_4(x,t) \leq ... \leq \lambda_{2k}(x,t) \leq ...,$$

де λ_i з непарними індексами є додатними величинами, а з парними – від'ємними.

Для системи (15) сформулюємо початкові та крайові умови

$$u_i(x,0) = g_i(x), \ \ x \in [0,l], \ \ \ i \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} u_i(0,t) &= \sum_{j \in I^-} \alpha_{ij}(t)u_j(0,t) + h_i(t), \ \ t \in [0,T], \ \ i \in I^+, \\ u_i(l,t) &= \sum_{j \in I^+} \beta_{ij}(t)u_j(l,t) + r_i(t), \ \ t \in [0,T], \ \ i \in I^-. \end{aligned} \tag{17}$$

Через $\varphi_i(\tau; x, t)$ позначимо розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau), \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

$$\xi|_{\tau=t} = x. \tag{19}$$

Розв'язки задачі (18)–(19) називатимемо характеристиками системи (15). Нехай $t_i(x,t)$ – ордината точки перетину i-ї характеристики з прямою $x = 0$ або $x = l$ у напрямку спадання t.

Інтегруванням кожного з рівнянь системи (15) вздовж відповідних характеристик одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = \omega_i[u](x,t) + \int\limits_{\max\{t_i(x,t),0\}}^{t} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}u_j + f_i\Big)[(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)]d\tau, \tag{20}$$

де

$$\omega_i[u](x,t) = \begin{cases} u_i(0,t_i(x,t)), & \text{при } \varphi_i(t_i(x,t);x,t) = 0, \\ g_i(\varphi_i(0;x,t)), & \\ u_i(l,t_i(x,t)), & \text{при } \varphi_i(t_i(x,t);x,t) = l. \end{cases} \tag{21}$$

Означення 3.1. *Неперервну функцію* $u : \overline{\Pi} \to \mathfrak{M}$, *яка задовольняє систему інтегро-функціональних рівнянь* (20), *назвемо узагальненим розв'язком задачі* (15)–(17).

Припустимо, що вихідні дані задовольняють обмеження:

C1. $\lambda \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Pi}) \cap Lip_x(\overline{\Pi})$;

C2. $a_{ij}(x,t)$, $a_i \equiv \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(x,t)|$, $f_i(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Pi}$,

$\alpha_{2i-1,2j}(t)$, $\alpha_{2i-1} \equiv \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\alpha_{2i-1,2j}(t)|$, $h_{2i-1}(t)$, $t \in [0,T]$,

$\beta_{2i,2j-1}(t)$, $\beta_{2i} \equiv \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\beta_{2i,2j-1}(t)|$, $r_{2i}(t)$, $t \in [0,T]$,

неперервні для всіх $i, j \in \mathbb{N}$;

C3. $a_i(x,t) \le a(x,t)$, $\alpha_{2i-1}(t) \le \alpha(t)$, $\beta_{2i}(t) \le \beta(t)$, де $a \in C(\overline{\Pi})$ та $\alpha, \beta \in C[0,T]$;

C4. $g_{2i-1}(0) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_{2i-1,2j}(0) g_{2j}(0) + h_{2i-1}(0)$, $i \in \mathbb{N}$,

$g_{2i}(l) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_{2i,2j-1}(0) g_{2j-1}(l) + r_{2i}(0)$, $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.1. *Нехай вихідні дані задачі* (15)–(17) *задовольняють умови* ***C1*** – ***C4***. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (15)–(17).

У **підрозділі 3.2** для задачі (15)–(17) побудовано вкорочену систему та доведено теорему про близькість розв'язків вихідної та вкороченої систем.

Нехай $P^+_{2k} = \{(x,t) : x \le \varphi_{2k}(t; l, 0),\ (x,t) \in \Pi\}$ і $P^-_{2k} = \Pi \backslash P^+_{2k}$, а також $P^+_{2k-1} = \{(x,t) : x \le \varphi_{2k-1}(t; 0, 0),\ (x,t) \in \Pi\}$ і $P^-_{2k-1} = \Pi \backslash P^+_{2k-1}$.

Поряд з системою (15) розглянемо вкорочену систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u^n_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t) \frac{\partial u^n_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x,t) u^n_j(x,t) + f_i(x,t), \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{22}$$

де $u^n_i(x,t)$ для $i \in \{n+1, \ldots\}$ визначені так

$$u^n_{2k}(x,t) = \begin{cases} g_{2k}(\varphi_{2k}(0; x,t)), \qquad \text{при } (x,t) \in P^+_{2k}, \\ \sum\limits_{j=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \beta_{2k,2j-1}(t_{2k}(x,t)) u^n_{2j-1}(l, t_{2k}(x,t)) + \\ \qquad + \sum\limits_{j=[\frac{n+1}{2}]+1}^{\infty} \beta_{2k,2j-1}(t_{2k}(x,t)) g_{2j-1}(\varphi_{2j-1}(0; l, t_{2k}(x,t))) + \\ \qquad\qquad + r_{2k}(t_{2k}(x,t)), \quad \text{при } (x,t) \in P^-_{2k}, \end{cases} \tag{23}$$

$$u_{2k-1}^n(x,t) = \begin{cases} g_{2k-1}(\varphi_{2k-1}(0;x,t)), \quad \text{при } (x,t)\in P_{2k-1}^-, \\ \sum\limits_{j=1}^{[\frac{n}{2}]} \alpha_{2k-1,2j}(t_{2k-1}(x,t))u_{2j}^n(0,t_{2k-1}(x,t)) + \\ \qquad + \sum\limits_{j=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} \alpha_{2k-1,2j}(t_{2k-1}(x,t))g_{2j}(\varphi_{2j}(0;0,t_{2k-1}(x,t))) + \\ \qquad\qquad + h_{2k-1}(t_{2k-1}(x,t)), \quad \text{при } (x,t)\in P_{2k-1}^+ \end{cases} \tag{24}$$

з початковою та крайовими умовами (16), (17). Інтегруванням кожного рівняння вкороченої системи вздовж відповідної характеристики одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i^n(x,t) = \sigma_i[u^n](x,t) + \int\limits_{\max\{t_i(x,t),0\}}^{t} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}u_j^n + f_i\Big)[(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)]d\tau, \;\; i\in\{1,...,n\}, \tag{25}$$

$$\sigma_{2k}[u^n](x,t) = \begin{cases} g_{2k}(\varphi_{2k}(0;x,t)), \quad \text{при } (x,t)\in P_{2k}^+, \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_{2k,2j-1}(t_{2k}(x,t))u_{2j-1}^n(l,t_{2k}(x,t)) + r_{2k}(t_{2k}(x,t)), \\ \qquad\qquad \text{при } (x,t)\in P_{2k}^-, \end{cases} \tag{26}$$

$$\sigma_{2k-1}[u^n](x,t) = \begin{cases} g_{2k-1}(\varphi_{2k-1}(0;x,t)), \quad \text{при } (x,t)\in P_{2k-1}^-, \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_{2k-1,2j}(t_{2k-1}(x,t))u_{2j}^n(0,t_{2k-1}(x,t)) + h_{2k-1}(t_{2k-1}(x,t)), \\ \qquad\qquad \text{при } (x,t)\in P_{2k-1}^+. \end{cases} \tag{27}$$

Означення 3.2. *Неперервну функцію* $u : \overline{\Pi} \to \mathfrak{M}$, *яка задовольняє систему інтегро-функціональних рівнянь* (25), *назвемо узагальненим розв'язком укороченої задачі* (22),(16),(17).

Теорема 3.2. *Нехай вихідні дані задачі* (15)–(17) *задовольняють умови* ***C1*** – ***C4*** *та:*

$\forall u \in D$, де $D \subset \mathcal{C}^{(\infty)}$ – обмежена область, виконуються умови:

$\Big|\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x,t)u_j(x,t) + f_i(x,t)\Big| \le A_i$, $\Big|\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_{2i-1,2j}(t)u_{2j}(0,t)\Big| \le \Lambda_{2i-1}$,

$\Big|\sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_{2i,2j-1}(t)u_{2j-1}(l,t)\Big| \le B_{2i}$, де $A_i, \Lambda_{2i-1}, B_{2i}$ – деякі сталі,

причому $A_i, \Lambda_{2i-1}, B_{2i} \to 0$, при $i \to \infty$.

Тоді розв'язки задачі (15)–(17) *та задачі для вкороченої системи* (22), (16), (17) *будуть як завгодно близькі за достатньо великого, але скінченного значення* n.

У **підрозділі 3.3**, керуючись результатами попередніх двох розділів, показано, як мішану задачу в прямокутнику для рівняння четвертого порядку з трьома незалежними змінними методом Фур'є можна звести до мішаної задачі для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку, для якої також побудовано вкорочену систему.

У четвертому розділі визначено коректну класичну глобальну розв'язність мішаної задачі для напівлінійної зліченної гіперболічної системи з нелінійними крайовими умовами у верхній півсмузі. Для таких систем наведено достатні умови узагальненої розв'язності задачі без початкових умов з лінійними крайовими умовами. Встановлено також достатні умови локальної та глобальної розв'язностей мішаної задачі для виродженої зліченної гіперболічної системи в прямокутнику.

Нехай у півсмузі $G_0 = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < \infty\}$ задана зліченна гіперболічна система напівлінійних рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u_1,u_2,...), \ \ i \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Уведемо множини $I_0 = \{i|\lambda_i(0,t) > 0\}$, а $I_l = \{i|\lambda_i(l,t) < 0\}$. Через $\chi_i(x,t)$ позначимо найменше значення t $(0 \le \chi_i(x,t) \le t)$ таке, що $(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) \in \overline{G_0}$, $\tau \in [\chi_i(x,t),t]$. Тоді якщо $\chi_i(x,t) > 0$, то $\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t)$ дорівнює 0 або l. Тобто, $\chi_i(x,t)$ – ордината точки перетину характеристики $\varphi_i(\tau;x,t)$ системи (28) з межею півсмуги $\overline{G_0}$ в напрямку спадання τ.

Позначимо $v_i(t) = u_i(x_i,t)$, де $x_i = 0$ для $i \in I_l$ та $x_i = l$ для $i \in I_0$, а також $\tilde{x}_i = 0$ для $i \in I_0$ та $\tilde{x}_i = l$ для $i \in I_l$.

Для системи (28) задамо початкові умови

$$u_i(x,0) = g_i(x), \quad x \in [0,l], \ \ i \in \mathbb{N} \tag{29}$$

та нелінійні крайові умови

$$u_i(\tilde{x}_i,t) = h_i(t,v_1(t),v_2(t),...), \quad t \ge 0, \ \ i \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Формальним інтегруванням кожного з рівнянь системи (28) уздовж відповідних характеристик одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = \omega_i[u](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u_1(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),u_2(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),...)d\tau, \ \ i \in \mathbb{N}, \tag{31}$$

$$\omega_i[u](x,t) = \begin{cases} g_i(\varphi_i(0;x,t)), & \text{якщо } \chi_i(x,t) = 0, \\ h_i(\chi_i(x,t),v_1(\chi_i(x,t)),v_2(\chi_i(x,t)),...), & \text{якщо } \chi_i(x,t) > 0. \end{cases} \tag{32}$$

Означення 4.1. *Неперервну функцію* $u : \overline{G_0} \to \mathfrak{M}$, *яка задовольняє систему інтегро-функціональних рівнянь* (31)–(32), *назвемо узагальненим розв'язком задачі* (28)–(30).

Припустимо, що виконуються умови:

D1. $\lambda \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{G_0}) \cap Lip_x(\overline{G_0})$;

D2. $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{G_0}), h \in \mathcal{C}^{(\infty)}([0,\infty))$ при довільних $u \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{G_0})$;

D3. f, h задовольняють умову Коші-Ліпшиця;

D4. $g_i(r) = h_i(0, v_1(0), v_2(0), ...)$, $i \in I_r$, де $v_i(0) = g_i(x_i)$, $r \in \{0, l\}$.

Теорема 4.1. *Нехай вихідні дані задачі* (28)–(30) *задовольняють умови* ***D1*** – ***D4***. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (28)–(30) *в* G_0.

Додатково припустимо виконання умов:

E1. $\lambda^{-1}, \lambda'_x \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{G}_0)$;

E2. $\forall u \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{G_0})$, $f'_x \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{G_0})$, $h' \in \mathcal{C}^{(\infty)}([0,\infty))$;

E3. f'_x, h' задовольняють умову Коші-Ліпшиця;

E4. $\forall u \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{G}_T)$, $\dfrac{\partial f}{\partial u_j} \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{G}_T), \dfrac{\partial h}{\partial v_j} \in \mathcal{C}^{(\infty)}([0,\infty))$, $j \in \mathbb{N}$;

E5. $\dfrac{\partial f}{\partial u_j}, \dfrac{\partial h}{\partial v_j} j \in \mathbb{N}$ задовольняють умову Коші-Ліпшиця з неперервними функціями $\tilde{f}_j(x,t)$ та $\tilde{h}_j(t)$, відповідно, причому $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \tilde{f}_j(x,t) \le \tilde{F}(x,t)$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \tilde{h}_j(t) \le \tilde{H}(t)$ та $\tilde{F} \in C(\overline{G}_T), \tilde{H} \in C([0,\infty))$;

E6. $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j}(x,t,0,0,...)\right| \le \zeta_j(x,t), \left|\dfrac{\partial h_i}{\partial v_j}(x,t,0,0,...)\right| \le \eta_j(x,t)$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$, де $\zeta_j(x,t), \eta_j(x,t)$ – деякі неперервні функції, причому $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \zeta_j(x,t) \le \zeta(x,t)$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \eta_j(x,t) \le \eta(x,t)$, $\zeta, \eta \in C(\overline{G}_T)$;

E7. $g' \in \mathcal{C}^{(\infty)}([0,l])$;

E8. $$\frac{du_i^T}{dx}(0) = \frac{1}{\lambda_i(0,T)}\big(f_i(0,T,u_1^T(0),u_2^T(0),...) - \frac{dh_i}{dt}(T)\big),\ i \in I_0,$$
$$\frac{du_i^T}{dx}(l) = \frac{1}{\lambda_i(l,T)}\big(f_i(l,T,u_1^T(l),u_2^T(l),...) - \frac{dh_i}{dt}(T)\big),\ i \in I_l.$$

Теорема 4.2. *Нехай вихідні дані задачі* (28)–(30) *задовольняють умови* ***D1*** – ***D4*** *та* ***E1*** – ***E7***. *Тоді існує єдиний класичний розв'язок задачі* (28)–(30) *в* G_0.

У **підрозділі 4.2** розглянуто задачу без початкових умов. Позначимо $\Pi_T^{T_1} = \{(x,t) : 0 < x < l, T < t < T + T_1\}$.

Нехай у смузі $G = \{(x,t) : 0 < x < l, -\infty < t < \infty\}$ задана зліченна гіперболічна система напівлінійних рівнянь (28).

Для системи (28) задамо крайові умови

$$u_i(0,t)=h_i(t),\ i\in I_0,\qquad u_i(l,t)=h_i(t),\ i\in I_l,\ -\infty<t<\infty. \tag{33}$$

Формальним інтегруванням кожного з рівнянь системи (28) уздовж відповідних характеристик одержимо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t)=h_i(\chi_i(x,t))+$$
$$+\int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,u_1(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),u_2(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),...)d\tau,\ i\in\mathbb{N}. \tag{34}$$

Означення 4.2. *Неперервну функцію* $u:\overline{G}\to\mathfrak{M}$, *яка задовольняє систему інтегро-функціональних рівнянь* (34), *назвемо узагальненим розв'язком задачі* (28), (33).

Поруч з (28), (33) розглянемо відповідну задачу в області $G_T=\{(x,t):0<x<l,T<t<\infty\}$ для довільного фіксованого $T\in\mathbb{R}$ з початковими умовами

$$u_i(x,T)=u_i^T(x),\qquad 0\le x\le l,\qquad i\in\mathbb{N}. \tag{35}$$

Скажемо, що вихідні дані задачі (28), (33), (35) задовольняють умову **F1**, якщо для всіх $T^*\in\mathbb{R}$ та $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що за

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{(x,t)\in\overline{\Pi}_T^{T^*-T}}|f_i(x,t,0,0,\ldots)|\le\delta,\quad \sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{T\le t\le T^*}|h_i(t)|\le\delta,$$
$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{0\le x\le l}|u_i^T(x)|\le\delta, \tag{36}$$

для розв'язку задачі (28), (33), (35) в $\overline{\Pi}_T^{T^*-T}$ правильна нерівність

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{x,t}|u_i(x,t)|<\varepsilon. \tag{37}$$

Будемо вважати, що вихідні дані задачі (28), (33), (35) задовольняють також умову **F2**, якщо для всіх $T^*\in\mathbb{R}$ та $\varepsilon>0$ існує таке $T<T^*$, що за

$$f_i(x,t,0,0,...)\equiv 0,\ h_i(t)\equiv 0,\ i\in\mathbb{N},$$
$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{0\le x\le l}|u_i^T(x)|<1, \tag{38}$$

для розв'язку задачі (28), (33), (35) в $\overline{\Pi}_T^{T^*-T}$ правильна нерівність

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}\max_{0\le x\le l}|u_i(x,T^*)|<\varepsilon. \tag{39}$$

Нехай для деякого $T^*\in\mathbb{R}$, $G^{T^*}=\{(x,t):0<x<l,\ -\infty<t<T^*\}$.

Припустимо, що вихідні дані задовольняють умови:

H1. $\lambda, \lambda_x, \lambda^{-1}, f, f'_x, h, h' \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{G}^{T^*})$;

H2. $\alpha, \gamma, \tilde{F}, \zeta$ обмежені при $t \leq 0$;

Теорема 4.3. *Нехай в області в* G^{T^*} *виконуються умови* ***D1*** – ***D4***, ***E1*** – ***E7***, ***F1***, ***H1***, ***H2***. *Тоді задача* (28), (33) *має узагальнений розв'язок в* G^{T^*}.

Теорема 4.4. *Нехай в області в* G^{T^*} *виконуються умови* ***D1*** – ***D4***, ***E1*** – ***E7***, ***F2***, ***H1***, ***H2***. *Тоді задача* (28), (33) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку в* G^{T^*}.

Наслідок 4.1. *Нехай в області в* G^{T^*} *виконуються умови* ***D1*** – ***D4***, ***E1*** – ***E7***, ***F1***, ***F2***, ***H1***, ***H2***. *Тоді задача* (28), (33) *має єдиний узагальнений розв'язок в* G^{T^*}.

У **підрозділі 4.3** в прямокутнику $\Pi = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ розглянуто вироджену зліченну гіперболічну систему напівлінійних рівнянь

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u_1,u_2,\ldots,v_1,v_2,\ldots),\ \ i \in \mathbb{N},\\ \frac{\partial v_j}{\partial x} = g_j(x,t,u_1,u_2,\ldots,v_1,v_2,\ldots),\ \ j \in \mathbb{N}.\end{gathered} \tag{40}$$

Для системи (40) задано початкові та крайові умови при $0 \leq t \leq T$

$$u_i(x,0) = q_i(x),\ 0 \leq x \leq l,\ i \in \mathbb{N} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} u_i(0,t) &= \gamma_i^0\Big(t, \big(u_s(0,t)\big)_{s\in I_l}\Big), \quad i \in I_0,\\ u_i(l,t) &= \gamma_i^l\Big(t, \big(u_s(l,t)\big)_{s\in I_0}\Big), \quad i \in I_l,\\ v_j(0,t) &= \psi_j\Big(t, \big(u_s(0,t)\big)_{s\in I_l}\Big), \quad j \in \mathbb{N},\end{aligned} \tag{42}$$

де

$$I_0 = \Big\{i \in \{1,\ldots\} : \lambda_i(0,t) > 0\Big\}, \qquad I_l = \Big\{i \in \{1,\ldots\} : \lambda_i(l,t) < 0\Big\}.$$

Проінтегрувавши рівняння системи (40) уздовж відповідних характеристик, одержимо системи інтегро-операторних рівнянь

$$\begin{aligned} u_i(x,t) = {} & F_i[u](x,t) + \\ & + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau), \tau, u_1(\varphi_i(\tau),\tau), u_1(\varphi_i(\tau),\tau), \ldots, v_1(\varphi_i(\tau),\tau), v_2(\varphi_i(\tau),\tau), \ldots\Big)d\tau,\end{aligned}$$

$$i \in \mathbb{N}, \tag{43}$$

$$\begin{aligned} v_j(x,t) = {} & \psi_j\Big(t, \big(u_s(0,t)\big)_{s\in I_l}\Big) + \\ & + \int\limits_0^x g_j\big(y,t,u_1(y,t),u_2(y,t),\ldots,v_1(y,t),v_2(y,t),\ldots\big)dy,\ j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{44}$$

$$F_i[u](x,t) = \begin{cases} q_i(\varphi_i(0;x,t)), & (x,t) \in \Pi_q^i, \\ \gamma_i^0\Big(\chi_i(x,t), \big(u_s(0,\chi_i(x,t))\big)_{s\in I_l}\Big), & (x,t) \in \Pi_0^i, \\ \gamma_i^l\Big(\chi_i(x,t), \big(u_s(l,\chi_i(x,t))\big)_{s\in I_0}\Big), & (x,t) \in \Pi_l^i, \end{cases}$$

де

$$\Pi_q^i = \{(x,t) \in \Pi : \chi_i(x,t) = 0\},\ i \in \mathbb{N},$$
$$\Pi_r^i = \{(x,t) \in \Pi : \chi_i(x,t) > 0,\ \varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = r\},\ i \in I_r,\ r \in \{0,l\}.$$

Теорема 4.5. *Нехай вихідні дані задачі* (40)–(42) *задовольняють умови:*
1) $\lambda \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Pi}) \cap Lip_x(\overline{\Pi})$;
2) $f,\ g,\ q,\ \gamma^0,\ \gamma^l,\ \psi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\overline{\Pi})$ при довільних $u, v \in \mathcal{C}^{(\infty)}$;
3) $f,\ g, \gamma^0,\ \gamma^l,\ \psi$ задовольняють умову Коші-Ліпшиця;
4) $q_i(0) = \gamma_i^0(0,(q_s(0))_{s\in I_l}),\ i \in I_0,\ q_i(l) = \gamma_i^l(0,(q_s(l))_{s\in I_0}),\ i \in I_l,$
$v_j(0,0) = \psi_j(0,(q_s(0))_{s\in I_l}),\ j \in \mathbb{N}.$

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (40)–(42).

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню різних типів задач для зліченних гіперболічних систем рівнянь з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними. Задачі для таких систем гіперболічних рівнянь описують математичні моделі радіофізики, техніки, економіки, теорії масового обслуговування, оптимального керування тощо.

У роботі одержано такі основні результати:

• визначено достатні умови локальної та глобальної узагальненої розв'язностей задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь з двома незалежними змінними;

• доведено теорему про глобальну класичну розв'язність задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь з однаковою характеристикою;

• вивчено достатні умови коректної глобальної узагальненої розв'язності мішаної задачі для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку в прямокутнику та вкороченої системи;

• з'ясовано достатні умови глобальної узагальненої та класичної розв'язностей мішаної задачі для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку в півсмузі;

• доведено теореми існування та єдиності глобальної розв'язності задачі без початкових умов для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку в смузі;

• вивчено достатні умови коректної глобальної розв'язності мішаної задачі для виродженої зліченної системи гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними в прямокутнику.

Результати дисертації є новими щодо задач для зліченних квазілінійних гіперболічних систем рівнянь з двома незалежними змінними. Ці результати мають теоретичний характер, їх можна використати в теорії початково-крайових задач для рівнянь з частинними похідними, а також під час дослідження практичних проблем, які моделюються зліченними гіперболічними системами.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Фірман Т. І.* Розв'язність задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку / Т. І. Фірман // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. – 2013. – Вип. 24. – № 2. – С. 206–213.

2. *Фірман Т. І.* Укорочення зліченної гіперболічної системи квазілінійних диференціальних рівнянь/ Т. І. Фірман // Буковинський матем. журн. – 2014. – Т. 2. – № 1.– С. 125–129.

3. *Фірман Т. І.* Укорочення мішаної задачі для зліченної гіперболічної системи лінійних рівнянь / Т. І. Фірман // Вісник Львів. ун-ту. – 2014. – Вип. 79. – С. 154–162.

4. *Firman T.* Mixed Problem for Countable Hyperbolic System of Linear Equations / T. Firman, V. Kyrylych // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 5. – № 2. – P. 47–60.

5. *Пелюшкевич О. В.* Мішана задача для виродженої гіперболічної зліченної системи напівлінійних рівнянь / О. В. Пелюшкевич, Т. І. Фірман // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. – 2015. – Вип. 29. – № 2. – С. 137–144.

6. *Firman T. I.* Countable hyperbolic systems in the theory of nonlinear oscillations / T. I. Firman // Carpathian Math. Publ. – 2016. – Vol. 8. – № 1. – P. 163–171.

7. *Кирилич В. М.* Задача без початкових умов для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку / В. М. Кирилич, Т. І. Фірман // Укр. мат. журн. – 2016. – Т. 68. – № 8. – С. 1043–1055.

8. *Фірман Т. І.* Задача Коші для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь / Т. І. Фірман // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька : тези доп., 19–23 вересня 2011, Дрогобич, Україна. — Львів, 2011. — С. 211.

9. *Фірман Т. І.* Укорочення нескінченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь / Т. І. Фірман // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: Abstracts of Reports, Lviv, Ukraine, 17–21 September 2012. — Lviv, 2012. — P. 245,246.

10. *Фірман Т. І.* Мішана задача для зліченної гіперболічної системи лінійних рівнянь / Т. І. Фірман // V Всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми ана-

лізу" : тези доп., Івано-Франківськ, 19–21 вересня 2013. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 76.

11. *Фірман Т. І.* Задача оптимального керування зліченними гіперболічними системами лінійних рівнянь першого порядку / Т. І. Фірман // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : тези доп. VI Міжнар. наук. конф., Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 4–5 квітня, 2014 р. – Кам'янець-Подільський, 2014. – С. 168,169.

12. *Фірман Т. І.* Класична глобальна розв'язність мішаної задачі для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь / Т. І. Фірман // XV Міжнар. наук. конф. ім. акад. Михайла Кравчука : матер. конф. I, Київ, 15–17 травня 2014 р. – Київ, 2014. – С. 317.

13. *Фірман Т. І.* Задача без початкових умов для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь / Т. І. Фірман // Математика в сучасному технічному університеті : матер. III міжнар. науково-практ. конф. 25–26 грудня 2014. — Київ, 2015. — С. 119-120.

14. *Фірман Т. І.* Глобальна класична розв'язність задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь з однаковою характеристикою / Т. І. Фірман // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2015", Львів, 26–28 травня 2015. – Львів, 2015. – Режим доступу : http://iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Firman.pdf.

15. *Firman T. I.* Cauchy Problem for Countable Quasi-linear Hyperbolic System / T. I. Firman // Fourth Intern. Conf. for Young Mathematics on Diff. Eq. and Appl. dedicated to Ya. B. Lopatynskii: Book of abstracts, November 14–17, 2012, Donetsk, Ukraine. — Donetsk, 2012. — P. 97.

16. *Firman T. I.* Global solvability of the Cauchy problem for countable system of differential equations / T. I. Firman // Inter. Conf. of Young Mathematicians, June 3–6, 2015, Kyiv, Ukraine. – Kyiv, 2015. – P. 119.

17. *Firman T. I.* Problem without initial conditions for the countable hyperbolic system of differential equations / T. I. Firman // International V. Skorobohatko mathematical conference, August 25–28, 2015, Drohobych, Ukraine. – Drohobych, 2015. – P. 42.

18. *Firman T. I.* Initial-boundary value problem for countable degenerate hyperbolic system / T. I. Firman, O. V. Peliushkevych // International Scientific Conference "Differential equations and their applications", May 19–21, 2016, Uzhhorod, Ukraine. – Uzhhorod, 2016. – P. 23.

19. *Firman T. I.* Application of countable systems theory to nonlinear dynamics / T. I. Firman // International Conference on Differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky, September 20–24, 2016, Lviv, Ukraine. – Lviv, 2016. – P. 49

20. *Firman T. I.* Classical solvability of the initial-boundary value problem for countable hyperbolic system / T. I. Firman, V. M. Kyrylych // International

Scientific Conference “Differential-Functional Equations and their Application” dedicated to the 80th anniversary of Professor V. I. Fodchuk, September 28–30, Chernivtsi, Ukraine. – Chernivtsi, 2016. – P. 112,113.

Анотація

Фірман Т. І. Задачі для зліченних гіперболічних систем рівнянь першого порядку. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Львівський національний університет імені Івана Франка. Львів, 2016.

Дисертацію присвячено дослідженню задач для зліченних гіперболічних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними. Вивчено достатні умови локальної та глобальної узагальненої розв'язностей задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь з двома незалежними змінними. Доведено теорему про глобальну класичну розв'язність задачі Коші для зліченної гіперболічної системи квазілінійних рівнянь з однаковим характеристичним числом. З'ясовано достатні умови коректної глобальної узагальненої розв'язності мішаної задачі для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку в прямокутнику та побудовано вкорочену систему. Визначено достатні умови глобальної класичної розв'язності мішаної задачі для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку в півсмузі. Доведено теореми існування та єдиності глобальної розв'язності задачі без початкових умов для зліченної гіперболічної системи напівлінійних рівнянь в смузі. Вивчено достатні умови глобальної розв'язності мішаної задачі для виродженої зліченної системи гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними в прямокутнику.

Ключові слова: гіперболічна система, квазілінійні рівняння, метод характеристик, зліченна система, теорема Банаха про нерухому точку.

Abstract

Firman T. I. Problems for countable hyperbolic systems of first order equations. – Manuscript.

The thesis presented for the degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics in speciality 01.01.02 – differential equations. – The Ivan Franko National University of Lviv. Lviv, 2016.

The thesis addresses the investigation of the problems for countable hyperbolic systems of partial first-order equations with two independent variables.

The local and global solvability of Cauchy problem for hyperbolic system of partial first-order quasi-linear equations in semi-plane is examined. For this system builded truncated finite system. The sufficient conditions of existence and uniqueness of global generalized solutions of initial-boundary value problem for hyperbolic system of semi-linear first-order equations in half-strip are investigated. The problem without initial conditions in strip for a semi-linear hyperbolic system of partial first-order equations are studied. The theorems of existence and uniqueness of global generalized solvability of mixed problem for hyperbolic degenerate quasi-linear system in rectangle was proved.

Key words: hyperbolic system, quasi-linear equation, countable system, method of characteristics, Banach Theorem of the fixed point, method of successive approximations.

Аннотация

Фирман Т. И. Задачи для счетных гиперболических систем уравнений первого порядка. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко. Львов, 2016.

Диссертация посвящена исследованию задач для счетных гиперболических систем квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными. Работа состоит из введения, четырех розделов, выводов и списка использованных литературных источников. Во введении обосновано актуальность темы, указаны цель и задачи исследования, научная новизна, апробация полученных результатов, их практическое значение. В первом розделе приведен обзор работ по задачам для счетных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Во втором розделе установлены условия локальной и глобальной разрешимостей задачи Коши для счетных гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка в верхней полуплоскости. В третьем розделе исследовано условия существования и единственности обобщенного решения смешаной задачи для счетной гиперболической системы квазилинейных уравнений первого порядка в полуполосе и приведен пример укороченной системы. В четвертом розделе установлены достаточные условия разрешимости задачи без начальных условый для счетной гиперболической полуленейной системы и смешаной задачи для счетной вырожденной системы квазилинейных уравнений.

Полученные результаты являются новыми для счетных гиперболических систем квазилинейных уравнений. Они имеют как теоретический характер, так и могут быть применены в теории задач для уравнений в частных производных, а также при исследовании практических проблем, которые моделируються счетными системами.

Ключевые слова: гиперболическая система, квазилинейные уравнения, счетная система, метод характеристик, теорема Банаха о неподвижной точке.