МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Лопушанський Андрій Олегович

УДК 517.956

ЛІНІЙНІ ТА НЕЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ НА КОМПЛЕКСНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ШКАЛАХ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів - 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в ДВНЗ “Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника” Міністерства освіти і науки України

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
Загороднюк Андрій Васильович,
ДВНЗ “Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника” , м. Івано-Франківськ,
проректор з наукової роботи

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Івасишен Степан Дмитрович,
Національний технічний університет України “КПІ”, м. Київ,
професор кафедри математичної фізики

доктор фізико-математичних наук, професор
Городецький Василь Васильович
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці,
завідувач кафедри алгебри та інформатики

доктор фізико-математичних наук, професор
Нитребич Зіновій Миколайович
Національний університет “Львівська політехніка”, м. Львів,
завідувач кафедри вищої математики

Захист відбудеться " " лютого 2017 р. о 15^{00} на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий " " січня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доцент Б. А. Остудін

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У дисертаційній роботі знайдено достатні умови максимальної регулярності розв'язків лінійних та нелінійних операторних рівнянь, зокрема, задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною та її окремих випадків – нормальних параболічних крайових задач із дробовою похідною за часом, також при їх лінійних та нелінійних збуреннях, шляхом застосування властивостей функціонального числення необмежених секторіальних операторів. Встановлена однозначна розв'язність прямих і деяких обернених задач Коші та крайових задач для рівнянь із дробовими похідними у класах гладких та узагальнених функцій.

Функціональне числення обмежених операторів над банаховими просторами в класі аналітичних функцій побудовано Ф. Рісом та Н. Данфордом на базі інтегральної теореми Коші. С. Тейлор поширив ці результати на необмежені оператори, А. Пазі та Х. Хейманс, С. Ангенент і інші – на генератори аналітичних півгруп у банахових просторах. Актуальними залишаються дослідження властивостей функціонального числення у застосуванні до різних спеціальних класів секторіальних операторів, зокрема, для генераторів однопараметричних півгруп на апроксимовних алгебрах Вінера аналітичних функцій в кулі банахового нескінченновимірного простору.

У дисертаційній праці досліджуються автономні параболічні рівняння із дробовими та цілими похідними в абстрактних і функціональних банахових просторах, їхні лінійні та нелінійні збурення. Основи класичної теорії параболічних рівнянь у цілих похідних у термінах аналітичних півгруп розроблено, зокрема, в працях Е. Хілле і Р. Філіпса (1962), К. Іосіди (1967), С. Крейна (1967), М. Ріда і Б. Саймона (1978), В. Горбачук та М. Горбачука (1984), Ф. Клемента, Х. Хейманса, С. Ангенента, К. ван Дуйна, Б. де Пахтера (1992). Випадок неавтономних рівнянь досліджувався в працях П. Соболевського (1064), Х. Танабе (1979), А. Пазі (1983), а також Д. Хенрі (1985), Х. Аманна (1995), А. Лунарді (1995). Теорія збурень викладена в книгах Т. Като (1966), В. Маслова (1987).

У працях С. Агмона, А. Дугліса, Л. Ніренберга (1959) і С. Агмона (1962) знайдено алгебричні умови, при яких диференціальна еліптична крайова задача в обмеженій області генерує аналітичну півгрупу. Так серед автономних лінійних еволюційних диференціальних рівнянь було виділено клас рівнянь параболічного типу, які можуть досліджуватися методами теорії аналітичних півгруп.

У дисертації використовується техніка інтерполяції банахових прос-

торів та метод функції Гріна. Метод комплексної інтерполяції введено Ж. Ліонсом, А. Кальдероном і С. Крейном. Інтерполяційна техніка дослідження абстрактних параболічних задач розвинена в роботах Ф. Клемента, Х. Хейманса, С. Ангенента, К. ван Дуйна, Б. де Пахтера, Х. Аманна, Д. Хенрі, А. Лунарді, П. Грівара і Г. да Прато. Застосування інтерполяційних методів до диференціальних параболічних крайових задач базується на апріорних оцінках розв'язків відповідних еліптичних задач, встановлених у працях С. Агмона, А. Дугліса, Л. Ніренберга, Ж. Ліонса і Е. Мадженеса, Ю. Березанського, П. Грівара і Г. Геймонта та інших. Інтерполяційна техніка дослідження еліптичних операторів та проблема максимальної регулярності розв'язків еліптичних крайових задач розвинена у працях В. Михайлеця та О. Мурача.

Теорія крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь параболічного типу за Петровським, а також наступних їх узагальнень, зокрема із застосуванням методу функції Гріна, широко представлена у працях Т. Загорского (1961), С. Ейдельмана (1964), О. Ладиженської, В. Солоннікова, Н. Уральцевої (1967), А. Фрідмана (1968), М. Житарашу, С. Івасишена, А. Кочубея та інших.

Для оператора A, що не залежить від змінної $t \in [0,T]$ та є генератором аналітичної півгрупи в деякому банаховому просторі $(V_0, \|\cdot\|)$ із щільною областю визначення $V_1 \subset V_0$ відомо існування єдиного класичного розв'язку $v \in C([0,T]; V_1) \cap C^1((0,T]); V_0)$ задачі Коші

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + f(t), \;\; t \in \big(0,T\big], \quad v(0) = 0\,,$$

якщо f задовольняє умову Гельдера. Роботи П. Грівара і Г. да Прато зосереджені на ослабленні цієї умови щодо f, тобто, так званій проблемі максимальної регулярності.

Розв'язність абстрактної задачі Коші та її аналога для рівнянь із дробовою похідною $\beta \in (0,1)$ досліджувалась у працях Б. Баеумера, Е. Бажлекової, В. Костіна, А. Кочубея, А. Кілбаса та А. Ворошилова, А. Глушака, М. Капуто, Е. Куести, С. Куеваса, Р. Горенфіо та інших. Дослідження задач вигляду

$$D^\beta v(t) = Av(t) + f_{1-\beta}(t)v(0), \qquad v(0) = h$$

з регуляризованою похідною $D^\beta v(t)$ дробового порядку $\beta \in (0,1)$ за допомогою еквівалентних лінійних інтегральних рівнянь проводилось Г. Заславським, дослідження рівняння

$$D^\beta u(t) = Au(t) + D^{\beta-1}g(t) \text{ при } \beta \in (1,2)$$

– С. Куевасом (Cuevas), задачі

$$D^\beta u(t) = Au(t) + A_1(t)u(t), \quad \lim_{t\to 0} D_t^{\beta-1}u(t) = h$$

при $A_1(t) = 0$ – В. Костіним, а за умови, що $A_1(t)$ підпорядкований оператору $(-A)^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$ – у працях А. Глушака. Інтегральні рівняння в банахових просторах досліджувались Ж. Прусом.

Часткові випадки таких задач одержимо, якщо A є регулярним еліптичним оператором у функційному просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ над обмеженою областю $\Omega \subset \mathrm{R}^n$, який задовольняє умови параболічності Агмона. У цьому випадку задача Коші буде крайовою задачею для неоднорідного диференціального параболічного рівняння.

Тому актуальним є проведене в дисертаційній роботі дослідження задачі Коші для лінійних і нелінійних операторно-диференціальних рівнянь з регуляризованою дробовою похідною порядку $\beta \in (0,1)$ та необмеженим оператором в абстрактному банаховому просторі V_0 із щільною областю визначення $V_1 \subset V_0$, в результаті якого знайдено достатні умови класичної розв'язності та максимальної регулярності розв'язків на комплексних інтерполяційних шкалах банахової пари $\{V_0, V_1\}$.

До дослідження лінійних збурень абстрактних параболічних задач методи інтерполяції застосовувались у працях Ф. Клемента, Х. Хейманса, С. Ангенента, К. ван Дуйна, Б. де Пахтера, Х. Аманна, А. Лунарді. У працях Д. Хенрі збурення вивчались за допомогою техніки дробових степенів секторіальних операторів.

Ці дослідження знайшли своє продовження в дисертаційній роботі, де методом комплексної інтерполяції, з істотним використанням аналітичних властивостей функціонального числення секторіальних операторів, встановлено існування та максимальну регулярність розв'язків задач Коші для лінійних та півлінійних рівнянь із дробовою похідною, збурених на інтерполяційних просторах пари $\{V_0, V_1\}$ без обмеження на норму збурюючого оператора, також знайдено оцінки наближень розв'язків.

У роботі представлені також дослідження збурень диференціальних крайових задач параболічного типу, які базуються, зокрема, на результатах П. Грівара та Р. Сілі про комплексну інтерполяцію просторів функцій, що задовольняють крайові умови.

У працях А. Кочубея, також С. Ейдельмана та А. Кочубея доведено теореми про існування, єдиність, а також зображення за допомогою функції Гріна класичного розв'язку задачі Коші

$$D_t^\beta u(x,t) = A(x,D)u(x,t),\ (x,t) \in \mathrm{R}^n \times [0,T],$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad x \in \mathrm{R}^n$$

з регуляризованою похідною порядку $\beta \in (0,1)$, неперервною функцією g_1 певного росту на безмежності та еліптичним диференціальним оператором другого порядку $A(x,D)$ з гладкими коефіцієнтами, залежни-

ми від просторової змінної $x \in \mathrm{R}^n$. У випадку $A(x, D) = \Delta$ класичний розв'язок відповідної задачі Коші для рівняння з дробовою похідною Рімана-Ліувіля порядку $\beta \in (1, 2)$ побудовано у працях А. Кілбаса та А. Ворошилова, де також одержано зображення розв'язку за допомогою функції Гріна. Ю. Лучко та В. Ранделом із співавторами знайдено умови класичної розв'язності першої крайової задачі для рівняння

$$D_t^\beta u - a^2 \Delta u = F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \quad a = const$$

при $\beta \in (0, 1)$, побудовано розв'язок задачі за допомогою рядів Фур'є за власними функціями відповідної задачі Штурма-Ліувілля. Крайові задачі для рівнянь із декількома дробовими похідними вивчались А. Псху, для широких класів псевдодиференціальних рівнянь, також у просторах узагальнених функцій типу Шварца – у працях В. Городецького, Я. Дріня, В. Літовченка.

Актуальним залишається вивчення крайових задач для рівнянь із дробовими похідними і за часом, і за просторовими змінними, у просторах узагальнених функцій. Це також є предметом дослідження в дисертації, зокрема, дослідження максимальної регулярності класичних за часовою змінною зі значеннями в повній шкалі просторів беселевих потенціалів розв'язків задачі Коші та неоднорідних крайових задач.

У багатьох працях з прикладних галузей математики досліджуються обернені крайові задачі: коли за додаткових умов, так званих умов перевизначення, потрібно ще додатково визначати деякі коефіцієнти рівняння або інші елементи задачі. У випадку $\beta = 1$ обернені коефіцієнтні крайові задачі у просторах гладких функцій вивчались, зокрема М. Іванчовим, де доведено теореми існування та єдиності. Ж. Ченгом доведена єдиність розв'язку оберненої крайової задачі для рівняння вигляду

$$D_t^\beta u - a(x) u_{xx} = F_0(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T]$$

з невідомими $u(x, t)$, $a = a(x)$, $\beta \in (0, 1)$ при крайових умовах Неймана та додатково заданій $u(0, t)$, $t \in (0, T]$.

Визначенню регулярної правої частини рівняння при різних умовах перевизначення присвячено найбільше праць. Зокрема, М. Ель-Бораї (El-Borai) встановлено однозначну розв'язність оберненої задачі про визначення розв'язку u задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною порядку $\beta \in (0, 1]$ у гільбертовому просторі X та регулярної правої частини цього рівняння за умови $(u, \varphi_0) = h$, де φ_0, h – задані елементи простору X, а під дужками розуміють скалярний добуток в X.

Обернені крайові задачі для рівняння дифузії з дробовою похідною при різних невідомих функціях чи параметрах активно вивчаються в

останні роки. Такі задачі важливі для практики. У просторах узагальнених функцій такі задачі практично не вивчались. Тому актуальним є вивчення нових обернених задач Коші та крайових задач як у просторах гладких, так і у просторах узагальнених функцій. У дисертації доведено теореми існування та єдиності розв'язків різних обернених задач для рівнянь із частинними дробовими похідними у випадку правих частин із просторів узагальнених функцій.

Зупинимось на перспективах розвитку проведених досліджень. У дисертації для дослідження параболічних рівнянь із дробовими похідними застосовується техніка комплексної інтерполяції банахових просторів. Можливе також використання інших методів інтерполяції, наприклад, неперервного методу інтерполяції Г. да Прато. Такий підхід приведе, зокрема, до опису нових класів збурень на абстрактних гельдерових просторах. Техніка еволюційних операторів, розвинена Х. Амманом, дозволяє узагальнити деякі результати на випадок неавтономних параболічних задач.

П. Грівaром і Г. Геймонтою умови параболічності Агмона узагальнено на випадок необмежених областей, що створює можливість досліджувати крайові задачі для диференціальних рівнянь та їх збурення в необмежених областях, подібно до зробленого у дисертації для обмежених областей. А. Лунарді встановлено умови параболічності Агмона для просторів типу Гельдера, L_1 та L_∞, що дає можливість перенесення отриманих результатів на ці складні випадки.

Запропоновані у дисертації методи дослідження задачі Коші, прямих та обернених крайових задач для рівнянь із дробовими похідними дають можливість знаходити достатні умови їх розв'язності при нових лінійних та нелінійних збуреннях.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження дисертації пов'язані з науковими дослідженнями кафедри математичного і функціонального аналізу факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. Дисертація виконана, зокрема, в рамках науково-дослідних тем у ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника": "Розробка аналітичних методів у нескінченновимірному комплексному аналізі та теорії операторів" (номер держреєстрації 0113U000184), "Гомоморфізми та функціональне числення в алгебрах аналітичних функцій на банахових просторах" (номер держреєстрації 0115U002305).

Мета і задачі дослідження.

Метою дисертаційної роботи є встановлення існування та макси-

мальної регулярності розв'язків нелінійних операторно-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна з дробовими похідними та ядрами на комплексних інтерполяційних шкалах, породжених необмеженими секторіальними операторами, задачі Коші для рівнянь із дробовою похідною при їх лінійних та нелінійних збуреннях, головним чином шляхом застосування функціонального числення секторіальних операторів, а також дослідження розв'язності прямих та обернених крайових задач для рівнянь із дробовими похідними у класах гладких та узагальнених функцій.

Задачі дослідження полягають у побудові та знаходженні достатніх умов максимальної регулярності розв'язків задачі Коші для лінійних рівнянь із дробовою похідною, побудові наближень розв'язків таких задач для рівнянь, збурених на комплексних інтерполяційних шкалах оператора, розв'язками незбурених задач, у застосуванні одержаних результатів до регулярних еліптичних диференціальних операторів, у знаходженні достатніх умов існування та максимальної регулярності розв'язків нелінійних операторно-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна та застосуванні одержаних результатів до задачі Коші для півлінійних рівнянь із дробовою похідною, доведенні теорем існування та єдиності розв'язків прямих та обернених крайових задач для рівнянь із дробовими похідними у класах гладких та узагальнених функцій.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є задача Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною, її лінійні та нелінійні збурення, нормальні крайові задачі для параболічних рівнянь із дробовими похідними та їх збурення, задача Коші та неоднорідні крайові задачі для рівнянь із дробовими похідними у різних просторах узагальнених функцій, обернені задачі для рівнянь із дробовими похідними та правими частинами з просторів гладких чи узагальнених функцій, функції від секторіальних операторів у банахових просторах і апроксимовних алгебрах Вінера, лінійні та нелінійні збурення секторіальних операторів, операторні нелінійні рівняння на комплексних інтерполяційних шкалах довільного секторіального оператора.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є побудова розв'язків задач Коші за допомогою функцій від необмежених секторіальних операторів у абстрактних банахових просторах та у алгебрах Вінера, розв'язність та максимальна регулярность розв'язків нелінійних операторно-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна на комплексних інтерполяційних шкалах оператора ядра, задач Коші для абстрактних лінійних та півлінійних рівнянь із дробовою похідною, зокрема, збурених на комплексних інтерполяційних шкалах банахового простору, конкретизація на випадок регулярних еліптичних диференціальних

операторів, побудова фундаментальних функцій деяких рівнянь із дробовими похідними за часовою та просторовими змінними, знаходження їх оцінок, вивчення спряжених операторів Гріна крайових задач, теореми існування та єдиності розв'язків прямих та обернених задач для рівнянь із дробовими похідними та правими частинами із просторів узагальнених функцій, зокрема, зі значеннями в просторах беселевих потенціалів.

Методи дослідження. Методи теорії диференціальних рівнянь та функціонального аналізу, зокрема, функціональне числення, дробове диференціювання, методи комплексної інтерполяції, метод Радона, метод функції Гріна, застосування H-функцій Фокса, принципів Шаудера та стисних відображень.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати, що виносяться на захист, одержані автором самостійно. У роботі одержані такі нові результати:

- Описано властивості числення широких класів секторіальних операторів, що діють на банахових просторах та на апроксимовних алгебрах Вінера аналітичних в одиничній кулі банахового нескінченновимірного простору функцій, розвинуто їх застосування до дослідження задачі Коші для рівнянь із дробовими похідними.

- Одержано нові достатні умови розв'язності та максимальної регулярності розв'язків нелінійних операторно-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна на комплексних інтерполяційних шкалах секторіального оператора.

- Одержано нові достатні умови розв'язності та максимальної регулярності розв'язків задачі Коші для абстрактних лінійних та півлінійних рівнянь із дробовою похідною, нормальних параболічних крайових задач із дробовою похідною за часом.

- Використовуючи аналітичні властивості числення секторіальних операторів, побудовано новий метод наближення розв'язків задачі Коші для операторно-диференціального рівняння з дробовою похідною, збуреного на комплексних інтерполяційних шкалах секторіального оператора, без обмеження на норму збурюючого оператора.

- Побудовано наближення розв'язків нормальних параболічних крайових задач, збурених псевдодиференціальними доданками, за допомогою ітерацій операторів Гріна незбурених задач.

- Вперше досліджено узагальнені початкові значення регулярних розв'язків півлінійних абстрактних рівнянь зі збуреною дробовою похідною.

- Вперше встановлено однозначну розв'язність задачі Коші для операторно-диференціального рівняння з дробовою похідною у вагових просторах узагальнених функцій.

- Одержано теореми про існування та єдиність розв'язків задачі Коші для рівнянь із дробовими похідними як за часовою, так і за просторовими змінними, нормальних параболічних крайових задач для рівнянь із дробовою похідною за часом у просторах узагальнених функцій, зокрема, теореми про існування та єдиність класичних за часом зі значеннями в просторах беселевих потенціалів розв'язків таких задач.

- Вперше сформульовано та встановлено однозначну розв'язність деяких обернених задач Коші та крайових задач для диференціальних рівнянь із дробовими похідними, також при заданих у правих частинах узагальнених функціях.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертація має теоретичне значення і результати її досліджень є певним внеском у теорію розв'язності операторно-диференціальних рівнянь із дробовими похідними, теорію максимальної регулярності розв'язків операторних та диференціальних рівнянь із частинними та дробовими похідними, в теорію обернених крайових задач для таких рівнянь. Їх можна застосовувати також у теорії аналітичних функцій нескінченної кількості змінних та нелінійному аналізі.

Особистий внесок здобувача. Із 29 наукових статей 17 опубліковано дисертантом одноосібно. Усі результати, винесені на захист, отримані автором самостійно. У всіх спільних працях Г. Лопушанській належить аналіз одержаних результатів, у [5] автору належить вибір функціональних просторів, у [26] – ідея збурення дробової похідної та одна з основних лем (лема 2), у [27] – формулювання 2 задачі та формула розв'язку задачі у випадку однорідного рівняння, у [8] автору належить формулювання задачі та методика її дослідження, у [4, 29] – основний результат.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на: конференціях молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. ак. Я. С. Підстригача (24-26 травня 2004 р., м. Львів; 24-27 травня 2005 р., м. Львів; 25-27 травня 2009 р., м. Львів), II summer school in algebra, analysis and topology (Aug. 2-14, 2004, Dolyna), міжнародних математичних конференціях імені В. Я. Скоробогатька (27 вересня-1 жовтня 2004 р., м. Дрогобич; 24-28 вересня 2007 р., м. Дрогобич; 10-23 вересня 2011 р., м. Львів),

міжнародній конференції "Геометрія в Одесі – 2004. Диференціальна геометрія та її застосування"(17-29 травня 2004, м. Одеса), International conference of analysis and related topics (Nov. 17-20, 2005, Lviv), International conference on Differential Equations – Dedicated to the 100-th Anniverversary of Ja. B. Lopatynsky (Sept. 12-17, 2006, Lviv), міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування"(11-14 жовтня 2006р., м. Чернівці), Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (Rethym, Greece, 18-22 Sept. 2009), міжнародній конференції "Нескінченновимірний аналіз і топологія"(27 травня–1 червня 2009 р., м. Івано-Франківськ), міжнародній конференції до 100-річчя М. М. Боголюбова та 70-річчя М. І. Нагнибіди (8-13 червня 2009 р., м. Чернівці), міжнародній науковій конференції імені Академіка Михайла Кравчука (15-17 травня 2010 р., м. Київ), всеукраїнській науковій конференції "Застосування математичних методів в науці і техніці"(24-26 листопада 2011 р., м. Луцьк), Всеукраїнській науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" (11-15 червня 2012р., м. Чернівці), International conference on Differential Equations – Dedicated to Ja. B. Lopatynsky (Nov. 12-17, 2012, Donetsk), International conference dedicated to the 120-th Anniverversary of S. Banach (Sept. 17-21, 2012, Lviv), міжнародній конференції "Геометрія в Одесі – 2012. Диференціальна геометрія та її застосування"(червень 2012, м. Одеса), XIV Міжнародній конференції імені академіка Михайла Кравчука, присвяченій 120-й річниці до дня народження М. Кравчука (19-21 квітня 2012 р., м. Київ), "Нелінійні проблеми аналіу"(19-22 вересня 2013 р., м. Івано-Франківськ), науковій конференції DDELU-60, присвяченій 60-річчя кафедри диференціальних рівнянь ЛНУ імені Івана Франка (18-19 жовтня 2013 р., м. Львів), XV Міжнародній конференції імені академіка Михайла Кравчука, присвяченій 120-й річниці до дня народження М. Кравчука (19-21 квітня 2014 р., м. Київ), IV міжнароднвй Ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (30 червня–5 липня 2014 р., м. Чернівці), Internetional V. Skorobohatko Mathematical Conference (August 25-28, 2015, Drogobych, Ukraine), міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" , присвяченій 70-річчю ак. НАН України Перестюку М.О. (19-21 травня 2016 р., Ужгород), семінарах ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України (м. Львів), факультету прикладної математики Національного університету "Львівська політехніка"(м. Львів), кафедри математичного та функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (м. Івано-Франківськ), на наукових конференціях та семінарах із диференціальних рівнянь Львівського національного універ-

ситету імені Івана Франка.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 53 працях, серед яких 29 статей у наукових фахових виданнях з математики [1–29] (8 статей [1–8] у журналах, що входять до науко-метричних баз даних Scopus та Web of Science), 24 праці – у матеріалах і тезах конференцій [30–53].

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків і списку використаних джерел, що містить 282 найменування. Загальний об'єм дисертації – 310 сторінок, з яких 21 сторінок займає список використаних джерел.

ЗМІСТ РОБОТИ.

У в с т у п і зроблено короткий огляд результатів за темою дисертації, обгрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та задачі дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення, апробацію одержаних результатів.

У р о з д і л і 1 наведено огляд літератури за темою дисертації, введено основні поняття та сформульовано відомі результати, що використовуються в дисертаційній праці, вказано основні напрямки досліджень та сформульовано деякі одержані основні результати.

У р о з д і л і 2 описано відомі та одержано нові [11–13] властивості необмежених секторіальних операторів, які суттєво використовуються у наступних розділах. Виділено спеціальні класи секторіальних операторів. Встановлено умови належності операторів до таких класів. Досліджено властивості аналітичних функцій від секторіальних операторів над фіксованою парою банахових просторів. Показано застосування до дослідження абстрактної задачі Коші. Введена інтерполяційна шкала просторів для секторіального оператора, яка у наступних розділах використана при одержанні теорем про максимальну регулярність розв'язку абстрактної задачі Коші та про розв'язність такої задачі з необмеженими збуреннями секторіального оператора без обмеження на норму збурюючого оператора.

У підрозділі 2.6 виділено клас операторів із секторіальною властивістю на апроксимовній алгебрі Вінера аналітичних функцій нескінченної кількості змінних, що має застосування в теорії стохастичних процесів, побудовано голоморфне числення операторів такого класу та описано розв'язок задачі Коші для операторно-диференціального рівняння на такій алгебрі [1]. Зупинимось детальніше на цих результатах.

Нехай $(X, \|\cdot\|)$– комплексний банахів простір із нормованим спряженим $(X', \|\cdot\|)$, $\langle X \mid X' \rangle = \{\langle x \mid \xi \rangle \colon x \in X, \xi \in X'\}$ – їх дуальна

пара, $B_{X'} = \{\xi \in X' \colon \|\xi\| < 1\}$, $\bar{B}_{X'} = \{\xi \in X' \colon \|\xi\| \le 1\}$, $\odot^n_\varepsilon X$ – поповнення симетричного тензорного добутку $\odot^n X$ ін'єктивною нормою $\|x\|_{\odot^n_\varepsilon X} = \sup\left\{\left|\sum_j \lambda_j \langle \xi \mid x_j\rangle^n\right| \colon \xi \in \bar{B}_{X'}\right\}$, де $x = \sum_j \lambda_j (\otimes^n x_j) \in \odot^n X$ і $x_j \in X$, $\lambda_j \in \mathrm{C}$. Простір $\odot^n_\varepsilon X$ ізометричний простору $\mathcal{P}^n_\varepsilon(X')$ апроксимовних n-однорідних поліномів на X', які *-слабо неперервні на обмежених множинах. Апроксимовна алгебра Вінера визначається як пряма ℓ_1-сума

$$W_\varepsilon(B_{X'}) = \sum\nolimits_{n\ge1} \mathcal{P}^n_\varepsilon(X') = \left\{x = \sum\nolimits_{n\ge1} \frac{d^n x}{n!} \colon d^n x \in \mathcal{P}^n_\varepsilon(X')\right\}$$

і складається з аналітичних комплексних функцій $x \colon B_{X'} \ni \xi \longmapsto x(\xi)$ із скінченною ℓ_1-нормою $\|x\|_W = \sum\limits_{n\ge1} \frac{\|d^n x\|}{n!}$, де $\|d^n x\| = \sup\limits_{\xi\in\bar{B}_{X'}} |d^n x(\xi)|$.

Для заданих банахових просторів $\{X_\imath, \|\cdot\|_\imath\}_{\imath=0,1}$ із тотожним відображенням $I_0 \colon X_0 \to X_0$ і щільним вкладенням $I_1 := I_0|_{X_1} \colon X_1 \to X_0$ визначено пари $\mathcal{P}^n_\imath := \mathcal{P}^n_\varepsilon(X'_\imath)$, $W_\imath := W_\varepsilon(B_{X'_\imath})$, $\imath = 0, 1$, та трійку із щільними неперервними вкладеннями $W_1 \subset W_0 \subset W_0^+$, де

$$W_0^+ = \left\{x = \sum_{n\ge1} \frac{d^n x}{n!} \colon d^n x \in \mathcal{P}^n_\varepsilon(X'_0), \quad \|x\|_{W_0^+} := \sum_{n\ge1} \frac{\|d^n x\|_{\odot^n_\varepsilon X_0}}{(n+1)!} < \infty\right\}.$$

За заданим оператором $A \in \mathcal{L}(X_1, X_0)$ у просторі $\mathcal{L}(W_1, W_0^+)$ визначаємо

$$\Gamma(\tbinom{n}{j} A) := \otimes^{j-1} I_0 \otimes A \otimes^{n-j} I_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^n_1, \mathcal{P}^n_0), \quad \Gamma(^n A) := \textstyle\sum_{j=1}^n \Gamma(\tbinom{n}{j} A)$$

та матричний діагональний оператор

$$\Gamma(A) := \left[\left\{\begin{array}{ll} \Gamma(^n A) & : n = k \\ 0 & : n \ne k \end{array}\right.\right]_{n,k\in\mathrm{N}}.$$

Нехай $\Lambda(\vartheta) = \{re^{i\vartheta} \in \mathrm{C} \colon \mathrm{r} \ge 0\}$ – промінь із фіксованим $\vartheta \in [0, 2\pi]$ та $\Theta(\alpha) = \{\Lambda(\vartheta) \colon \vartheta \in [-\alpha, \alpha]\} \subset \mathrm{C}$ – замкнений сектор із фіксованим $\alpha \in (\pi/2, \pi)$. Як відомо, оператор $A \in \mathcal{L}(X_1, X_0)$ є *секторіальним*, якщо існує сектор $\Theta(\alpha)$ і такі сталі $\delta = \delta(A)$, $K_\delta = K_\delta(A)$, що

$$\sup_{\lambda\in\Theta^\alpha_\delta} \|(\lambda I_1 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0,X_1)} := K_\delta, \quad \Theta^\alpha_\delta := \Theta(\alpha) \setminus \{\lambda \in \mathrm{C} \colon |\lambda| < \delta\} \subset \varrho(\mathrm{A}),$$

де $\varrho(A)$ – резольвентна множина A. Підмножину в $\mathcal{L}(X_1, X_0)$ секторіальних операторів із кутом Θ^α_δ позначаємо через $\Theta^\alpha_\delta(X_1, X_0)$. Якщо $A \in \Theta^\alpha_\delta(X_1, X_0)$, то для його спектру маємо $\sigma(A) \subset \mathrm{C} \setminus \Theta^\alpha_\delta$. Подібно визначаємо множину секторіальних операторів на парах $\mathcal{P}^n_\imath$.

Кажемо, що оператор $T \in \mathcal{L}(W_1, W_0^+)$ є *секторіальним*, якщо $\Theta^\alpha_\delta \subset \varrho(T)$ і $\sup\limits_{\lambda\in\Theta^\alpha_\delta} \|(\lambda \mathrm{I}_1 - T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(W_1)} < \infty$, де $\mathrm{I}_1 := \left[\left\{\begin{array}{ll} \otimes^n I_1 & : n = k \\ 0 & : n \ne k \end{array}\right.\right]_{n,k\in\mathrm{N}}$.

Підмножину в $\mathcal{L}(W_1, W_0^+)$ операторів із такою властивістю в куті Θ_δ^α позначаємо через $\Theta_\delta^\alpha(W_1)$. Якщо $T \in \Theta_\delta^\alpha(W_1)$, то $\sigma(T) \subset \mathrm{C} \setminus \Theta_\delta^\alpha$.

Доведено, що для секторіального оператора A оператор $\Gamma(A)$ також є секторіальним.

Теорема 2.3 [1]. *Якщо $A \in \Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$, то $\Gamma(A) \in \Theta_\gamma^\alpha(W_1)$ і норми відповідних резольвент мають наступні оцінки*

$$\sup_{\lambda \in \Theta_\delta^\alpha} \|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X_0)} \le 1 + K_\delta \|A\|_{\mathcal{L}(X_1, X_0)} := C_\delta,$$

$$\sup_{\lambda \in \Theta_\gamma^\alpha} \|\lambda R[\lambda, \Gamma(A)]\|_{\mathcal{L}(W_1)} \le C_\delta$$

із $\gamma = \max\{\delta,\ 4C_\delta \|A\|_{\mathcal{L}(X_1, X_0)}\}$, *де* $\Theta_\gamma^\alpha \subset \varrho[\Gamma(A)] \bigcap \Theta_\delta^\alpha$.

Нехай $\mathcal{H}(\mathrm{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha) = \{\mathrm{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha \ni \lambda = \mathrm{re}^\vartheta \longmapsto \mathrm{f}(\lambda) \in \mathrm{C}\}$ – банахів простір скалярних неперервних функцій, аналітичних у відкритій частині $\mathrm{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha$.

У *теоремі* 2.4 [1] доведено, що для довільних $A \in \Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$ і $\gamma = \max\{\delta,\ 4C_\delta \|A\|_{\mathcal{L}(X_1, X_0)}\}$ відображення

$$\begin{aligned} \Phi \quad &: \mathcal{H}(\mathrm{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha) \ni \mathrm{f} \longrightarrow \mathrm{f(A)} \in \mathcal{L}(\mathrm{X_0}), \\ \Gamma(\Phi) \quad &: \mathcal{H}(\mathrm{C} \setminus \Theta_\gamma^\alpha) \ni \mathrm{f} \longrightarrow \mathrm{f[\Gamma(A)]} \in \mathcal{L}(\mathrm{W_1}), \end{aligned}$$

визначені для одної й тої ж функції f відповідно формулами

$$\begin{aligned} f(A) \quad &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Theta_\gamma^\alpha} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda, \\ f[\Gamma(A)] \quad &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Theta_\gamma^\alpha} f(\lambda) R[\lambda, \Gamma(A)] d\lambda, \end{aligned}$$

є неперервними гомоморфізмами відповідних операторних алгебр. Вище контури інтегрування $\partial \Theta_\gamma^\alpha$ додатно орієнтовані щодо спектрів і інтеграли не залежать від вибору контурів такого вигляду.

Із теореми 2.4 випливає

Теорема 2.5 *Для довільного $A \in \Theta_\delta^\alpha(X_1, X_0)$ на алгебрі Вінера W_1 з генератором $\Gamma(A)$ визначена аналітична операторна півгрупа*

$$z \longmapsto e^{z\Gamma(A)} \in \mathcal{L}(W_1), \qquad \{z \in \mathrm{C} \colon |\arg(\mathrm{z})| < \alpha - \pi/2\}.$$

Функція $u(t) = e^{t\Gamma(A)} u_0$ $(t \ge 0)$ є єдиним розв'язком задачі Коші на алгебрі Вінера W_1:

$$\frac{du}{dt} = \Gamma(A) u, \quad u(0) = u_0 \in W_1.$$

У р о з д і л і 3 встановлено результат про максимальну регулярність розв'язку задачі Коші для абстрактного автономного лінійного рівняння з регуляризованою дробовою похідною (також при певних його лінійних збуреннях): якщо значення неоднорідної частини рівняння належать

комплексній інтерполяційній шкалі деякого секторіального оператора, то існує єдиний класичний розв'язок задачі Коші. Цей факт є перенесенням відомого результату для неперервних інтерполяційних шкал на випадок комплексних інтерполяційних шкал та рівняння з дробовою похідною, також при певних лінійних необмежених збуреннях оператора.

Нехай $\mathcal{A}$ – клас необмежених замкнених лінійних секторіальних операторів від'ємного типу $r(A)$ у комплексному банаховому просторі $\big(V_0, \|\cdot\|_0\big)$ із щільною областю визначення $V_1 \subset V_0$. Якщо $A \in \mathcal{A}$, то A є генератором сильно неперервної півгрупи $\{E_A(t)\}_{t\geq 0}$ на банаховому просторі V_0. Позначимо

$$S_{\beta,A}(t)h = \int_0^\infty \frac{t}{\beta s^{1+\frac{1}{\beta}}} g_\beta(\frac{t}{s^{\frac{1}{\beta}}}) E_A(s)hds = \int_0^\infty E_A((\frac{t}{s})^\beta) g_\beta(s)hds, \quad t \geq 0,$$

де g_β – прообраз перетворення Лапласа для $\exp(-\lambda^\beta)$. Використовуємо функцію

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0, \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \leq 0,$$

де $\theta(t)$ – одинична функція Хевісайда, $\Gamma(\lambda)$ – гама-функція, через $f * v$ позначаємо згортку функцій f та v,

$$u_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * u(x,t)$$

– похідна Рімана-Ліувіля порядку $\beta > 0$ функції u,

$$D^\beta u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{u(0)}{t^\beta} \right)$$

– регуляризована дробова похідна порядку $\beta \in (0,1)$ функції u, також $D^1 u(t) = du/dt$.

У підрозділі 3.1 розглянуто задачу Коші

$$D^\beta u(t) = Au(t) + (f_{1-\beta} * f)(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = h \tag{1}$$

при $\beta \in (0,1)$ та задачу Коші для лінійного параболічного рівняння

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + f(t), \quad t \in \big(0,T\big], \quad v(0) = h\,,$$

яку можна розглядати як окремий випадок задачі (1) при $\beta = 1$.

Зафіксуємо довільний оператор $J \in \mathcal{A}$. Через V_ϑ позначимо область визначення дробового степеня J^ϑ $(0 < \vartheta < 1)$ із нормою графіка $\|x\|_\vartheta := \|J^\vartheta x\|_0$. Простір $V_\vartheta = \big[\cdot,\cdot\big]_\vartheta$ — проміжний для інтерполяційної пари $\big\{V_0; V_1\big\}$, породжений комплексним методом інтерполяції.

Розв'язком задачі (1) називаємо функцію $u(t)$ класу

$$C^{\beta,\eta} := \Big\{ v \in C\big([0,T]; V_{1+\eta}\big) \colon D_t^\beta v \in C_b\big((0,T]; V_\eta\big),$$
$$\|u\|_{C^{\beta,\eta}} = \max\Big\{ \max_{t\in[0,T]} \big\|u(t)\big\|_{1+\eta}, \sup_{t\in(0,T]} \big\|D^\beta u(t)\big\|_\eta \Big\} < \infty \Big\},$$

що задовольняє рівняння задачі в V_η та початкову умову.

Доведена наступна теорема про максимальну регулярність розв'язку задачі Коші.

Теорема 3.1 [2]. *Нехай задані оператори $A, J \in \mathcal{A}$ та числа $0 \le \eta < \vartheta \le 1$, $f(t) \in C\big([0,T]; V_\vartheta\big)$, $h \in V_\vartheta$. Тоді існує єдиний розв'язок $u \in C^{\beta,\eta}$ задачі (1). Цей розв'язок має вигляд*

$$u(t) = \int_0^t S_{\beta,A}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + S_{\beta,A}(t) h \tag{2}$$

та існують такі сталі $K > 0$, $K_1 > 0$, що виконується нерівність

$$\|u\|_{C^{\beta,\eta}} \le K \max_{t\in[0,T]} \big\|f(t)\big\|_\vartheta + K_1 \|h\|_\vartheta.$$

У підрозділі 3.2 досліджуються лінійні збурення секторіального оператора A на проміжних просторах банахової пари, породженої деяким секторіальним оператором. Доведено [20] теорему про однозначну розв'язність задачі Коші

$$D^\beta u(t) = (A+X)u(t) + (f_{1-\beta} * f)(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = g,$$

де $X \in \mathcal{L}(U, V_0)$ – збурюючий оператор для оператора A, U – правильний проміжний простір банахової пари $\{V_0, V_1\}$, зокрема, $U = V_\theta$, $\theta \in (0,1)$. Побудовано наближення розв'язку такої збуреної на комплексних інтерполяційних шкалах задачі Коші скінченними ітераціями резольвенти незбуреного оператора, при цьому без обмеження на норму збурюючого оператора, якщо $U = V_\theta$. Результат одержаний на базі встановленої аналітичної залежності розв'язку задачі Коші від збурюючого оператора. Одержані оцінки збіжності таких наближень. Вони є точнішими, ніж, наприклад, у працях А. Кальдерона.

У підрозділі 3.3 наведені результати застосовуються до диференціального оператора A, заданого на дробових шкалах просторів беселевих потенціалів. А саме, розглянуто задачу

$$\begin{gathered} D_t^\beta u = L(x,D)u + f_{1-\beta}(t) * f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \\ B_j u|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 1,\dots,m, \quad u(x,0) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \end{gathered} \tag{3}$$

в обмеженій області $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ класу C^∞ за припущень

(A): $L(x,D) = \sum\limits_{|\gamma|\le 2m} a_\gamma(x) D^\gamma$ – сильно еліптичний лінійний диференціальний вираз, $a_\gamma(x) \in L_\infty(\Omega)$, а при $|\gamma| = 2m$ неперервні в $\overline{\Omega}$,

$(B_j u)(x) = B_j(x,D)u = \sum\limits_{|\alpha|\le k_j} b_{j,\alpha}(x) D^\alpha u(x)$, $x \in \partial\Omega$ – нормальна система крайових диференціальних виразів, $b_{j,\alpha} \in C^{2m-k_j}(\partial\Omega)$, $j = 1,\dots,m$.

Породжений задачею (3) оператор A є регулярним еліптичним диференціальним оператором у функційному просторі $V_0 = L_p(\Omega)$ $(p > 1)$ над обмеженою областю $\Omega \subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, якщо він додатково задовольняє умови Агмона

(**Ag**): • $\dfrac{a(x,\xi)}{|a(x,\xi)|} \ne e^{i\omega}$ при $x \in \bar{\Omega}$, $\xi \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \setminus \{0\}$, $\omega \in [-\omega_0\, \omega_0]$, де $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$;

• для будь-якого $\omega \in [-\omega_0\,, \omega_0]$, дотичного в точці $x \in \partial\Omega$ вектора μ_x та нормального в точці $x \in \partial\Omega$ вектора ν_x кожен поліном $\mathrm{C} \ni z \to a(x, \mu_x + z\,\nu_x) - \lambda$, де $\arg\lambda = \omega$, має m коренів $z_1\,,\dots,z_m$ з додатною уявною частиною і поліноми $\left\{\sum_{|\gamma|=k_j} b_{j,\gamma}(x)(\mu_x + z\,\nu_x)^\gamma\right\}_{j=1}^m$ є лінійно незалежними за модулем $\prod_{j=1}^m (z - z_j)$.

Нехай $V_1 = H_p^{2m}(\Omega)$ – простір беселевих потенціалів,

$H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega) = \Big\{v \in H_p^{2m}(\Omega) :\ B_j(x,D)v_{\,|\,\partial\Omega} = 0;\ j = \overline{1,m}\Big\}$ з нормою простору $H_p^{2m}(\Omega)$ (це щільний в $L_p(\Omega)$ підпростір, замкнений в $H_p^{2m}(\Omega)$),

$C^{\beta,\eta}\big(H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big) =$

$$\Big\{v \in C\Big([0,T]; H^{2m(1+\eta)}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big) \mid D_t^\beta v \in C_b\Big((0,T]; H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)\Big\}.$$

Теорема 3.6 [14]. *Якщо* $0 \le \eta < \theta \le 1$, *виконуються припущення* **(A)**, **(Ag)**, *нерівності Сілі* $k_j < 2m\vartheta - \frac{1}{p}$, $j = 1,\dots,m$, $g \in H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)$, $f \in C\Big(\Omega \times [0,T]; H^{2m\theta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\Big)$, *то існує єдиний розв'язок* $u \in C^{\beta,\eta}\big(H^{2m\eta}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big)$ *задачі (3).*

Використали результати Р. Сілі та П. Грівара: за умов теореми реалізується ізоморфізм банахових просторів

$$H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \simeq \big[L_p(\Omega), H^{2m}_{p,\{B_j\}}(\Omega)\big]_\vartheta := V_\vartheta.$$

Також доведено (теорема 3.7) однозначну розв'язність задачі Коші з оператором $A + X$, де збурюючим є заданий замкнений в $L_p(\Omega)$ лінійний оператор

$$X : H^{2m\vartheta}_{p,\{B_j\}}(\Omega) \longrightarrow L_p(\Omega).$$

Наприклад, $X = (-\Delta)^{m\vartheta}$, де Δ – оператор Лапласа. Побудовано наближення розв'язку за допомогою ітерацій функції Гріна незбуреної задачі.

У р о з д і л і 4 знайдено достатні умови класичної розв'язності нелінійних операторних рівнянь типу Гаммерштейна з ядрами на комплексних інтерполяційних шкалах, породжених секторіальними операторами.

На $C^{\beta,\eta}$ вивчено нелінійне рівняння

$$v(t) = \int_0^t S_{\beta,A}(t-\tau) f(\tau, v(\tau), D^\beta v(\tau))\, d\tau + h(t). \tag{4}$$

Припущення (F1): $\beta \in (0,1)$, $0 \le \eta < \theta \le 1$, $h \in C^{\beta,\theta}$, $f \in C_b\big((0,T] \times V_{1+\eta} \times V_\eta;\, V_\vartheta\big)$.

Припущення (F2): Існують такі додатні сталі K_1, M_1, K_2, M_2, q, r, що для довільних $(z,\xi), (z_1,\xi_1), (z_2,\xi_2) \in V_{1+\eta} \times V_\eta$

$$\sup_{t\in(0,T]} \|f(t,z,\xi)\|_{V_\vartheta} \le K_1 \|z\|^q_{V_{1+\eta}} + M_1 \|\xi\|^r_{V_\eta}$$

$$\sup_{t\in(0,T]} \|f(t,z_1,\xi_1) - f(t,z_2,\xi_2)\|_{V_\vartheta} \le K_2 \|z_1 - z_2\|^{q_0}_{V_{1+\eta}} + M_2 \|\xi_1 - \xi_2\|^{r_0}_{V_\eta},$$

де $\quad q_0 = \min\{q,1\}$, $r_0 = \min\{r,1\}$.

Розглянуто випадки: 1) $q, r \in (0,1)$ при $\beta \in (0,1]$; 2) $q \ge 1$ та $r \ge 1$ при $\beta \in (0,1)$.

Теорема 4.1 [18]. *Нехай виконуються припущення* **(F1), (F2)**. *Тоді існує розв'язок $v \in C^{\beta,\eta}$ рівняння (4) (у випадку 2 розв'язок визначений на $[0,T_0]$ при деякому $T_0 \in (0,T]$).*

Зауважимо, що коли функція f не залежить від третього аргументу, $h(t) = S_{\beta,A}(t)h$, $h \in V_\theta$, то розв'язок $v \in C\big([0,T];\, V_{1+\eta}\big)$ рівняння (4) є розв'язком класу $C^{\beta,\eta}$ задачі Коші

$$D^\beta v(t) = Av(t) + f_{1-\beta}(t) * f(t, v(t)), \qquad v(0) = h,$$

а при $\beta = 1$ – розв'язком (класу $C^{1,\eta}$) задачі Коші для півлінійного абстрактного параболічного рівняння

$$v'(t) = Av(t) + f(t, v(t)), \qquad v_0(0) = h.$$

Результат теореми 4.1 застосовано в підрозділі 4.2 [15, 16] до задачі Коші для абстрактного півлінійного рівняння з дробовою похідною.

У підрозділі 4.3 в теоремі 4.3 знайдено [19] достатні умови розв'язності нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна у просторах функцій, неперервно диференційовних за часовою змінною та зі значеннями в просторах беселевих потенціалів. Цей результат застосовано в підрозділі 4.4 до крайових задач для півлінійних параболічних рівнянь із частинною та дробовою похідною за часом.

У підрозділі 4.5 в теоремах 4.5, 4.6 одержано достатні умови розв'язності задачі Коші для півлінійного рівняння з дробовою похідною зі

збуреним на комплексній інтерполяційній шкалі секторіальним оператором [20], побудовано наближення розв'язку збуреної задачі розв'язками таких задач для незбуреного півлінійного абстрактного рівняння. В теоремі 4.7 результати проілюстровано у випадку оператора A, породженого регулярною еліптичною крайовою задачею, збуреною псевдодиференціальними доданками [17].

Узагальнені крайові значення регулярних в області розв'язків гіпоеліптичних диференціальних рівнянь із частинними похідними були предметом вивчення у працях В. Горбачук, М. Горбачука, В. Грушина, А. Гущина, В. Михайлова, І. Петрушко, В. Городецького, С. Івасишена, В. Літовченка, Г. Гупало, Г. Лопушанської, О. Чмир та інших. Доведено, що такі розв'язки належать до вагових просторів Лебега з вагами порядків степенів відстані від точки області до межі і розв'язки з певних вагових L_p-просторів набувають на межі узагальнених крайових значень.

У підрозділі 4.6 знайдено достатні умові існування узагальнених початкових значень регулярних розв'язків півлінійних абстрактних рівнянь із секторіальним оператором від'ємного типу в банаховій алгебрі V та збуреними дробовими похідними. Як для диференціальних операторів [26, 27], знайдено два узагальнення задачі Коші для півлінійних абстрактних рівнянь із дробовою похідною. Доведено теорему 4.10 про їх порівняння.

У підрозділі 4.7 доведено теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння з дробовою похідною Рімана-Ліувіля в вагових просторах узагальнених функцій. Тут використовуємо позначення $f_\lambda(t)\hat{*}v(t) = (f_\lambda(\tau), v(t+\tau))$, де (f, v) – значення узагальненої функції f на основній функції v, і нехай V – банахова алгебра (наприклад, $V = C(\Omega)$), V' – простір лінійних неперервних функціоналів на V, $\rho(t)-$ функція із $C^\infty[0,T]$, додатна на $(0,T)$, яка має порядок t при $t \to 0$ ($\lim\limits_{t\to 0+} \frac{\rho(t)}{t} = const$) та $0 \le \rho(t) \le 1$, $t \in [0,T]$,

$$(L_\beta v)(t) = f_{-\beta}(t) * v(t) - (Av)(t),$$

$$(\widehat{L}_\beta v)(t) = f_{-\beta}(t)\hat{*}v(t) - (Av)(t),$$

$$D^0(V) = \{\varphi \in C^\infty\big([0,T]; V\big) : D_t^m \varphi|_{t=T} = 0,\, m \in \mathrm{Z}_+\},$$

$$D_k(V) = \{\varphi \in D^0(V) :\ \rho^{m-k}\varphi^{(m)} \in C\big([0,T]; V\big),\, m \in \mathrm{Z}_+\},$$

$$X_k(V) = \{\varphi \in D^0(V) :\ \widehat{L}_\beta \varphi \in D_k(V)\}.$$

Кажемо, що узагальнена функція $f \in V'$ має порядок сингулярності $s_A(f) \le s_0$ щодо оператора $A : V \to V$, якщо існує така додатна стала $\hat{C}$, що

$$|(f,\varphi)| \le \hat{C} \max_{0\le l\le s_0} ||A^l\varphi||_V \ \ \forall \varphi \in V.$$

Припущення (S')**:** $A \in \mathcal{A}$, $\beta \in (0,1)$, $u_0 \in V'$, $s_A(u_0) \le s$, $\quad k \ge s\beta$, $f \in X'_k(V)$.

За припущення (S') розв'язком задачі Коші

$$(L_\beta u)(t) = f(t),\ t \in (0,T], \quad u(0) = u_0 \tag{5}$$

називаємо функцію $u \in D'_k(V)$, що задовольняє тотожність

$$(u, \widehat{L}_\beta \psi) = (f,\psi) + \left(u_0, \int_0^T f_{1-\beta}(t)\psi(t)dt\right) \quad \forall \psi \in X_k(V).$$

Теорема 4.11. *За припущення (S') існує єдиний розв'язок $u \in D'_k(V)$ задачі (5). Він заданий формулою*

$$(u,\varphi) = \left(f, (f_{\beta-1} * S_{\beta,A})\hat{*}\varphi\right) + \left(u_0, \int_0^T S_{\beta,A}(t)\varphi(t)dt\right) \quad \forall \varphi \in D_k(V).$$

У р о з д і л і 5 вивчається задача Коші для диференціальних рівнянь із дробовими похідними як за часовою, так і за просторовими (вже у головній частині) змінними. Доведено теореми існування та єдиності розв'язків у різних просторах узагальнених функцій.

У підрозділі 5.1 доведено теорему 5.1 існування та єдиності та одержано зображення за допомогою вектор-функції Гріна розв'язку задачі Коші

$$u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F(x,t), \quad (x,t) \in \mathrm{R^n} \times (0,\mathrm{T}] := \mathrm{Q_T},$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathrm{R}^n \tag{6}$$

з похідною Рімана-Ліувілля $u_t^{(\beta)}$ порядку $\beta \in (0,1)$ та u_0, F із просторів узагальнених функцій. Тут $(-\Delta)^{\alpha/2}$ визначено за допомогою перетворення Фур'є: $\mathcal{F}[(-\Delta)^{\alpha/2}\psi(x)] = |\lambda|^\alpha \mathcal{F}[\psi(x)]$.

Припущення $(\mathcal{L}_{\alpha,\beta})$: $\beta \in (0,1)$, $\min\{n,2,\alpha\} > (n-1)/2$, $\alpha \ne \beta$.

Нехай $\mathcal{D}(\bar{Q}_T)$ – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями за просторовими змінними і таких, що $(\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0$, $k \in \mathrm{Z}_+$, $\quad X(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q}_T) : \widehat{L}\varphi \in D(\bar{Q}_T)\}$, $\quad \mathcal{E}'(\mathrm{R}^n)$ – простір фінітних узагальнених функцій, $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y))$ – вектор-функція Гріна задачі (6), існування та властивості якої одержуємо з використанням результатів Джун Шенг Дуан (Jun Sheng Duan) та властивостей H-функцій Фокса,

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int_\tau^T \int_{\mathrm{R^n}} G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t)dxdt,$$
$$(\widehat{\mathcal{G}}_1\varphi)(y,\tau) = \int_0^T \int_{\mathrm{R^n}} G_1(x-y,t)\varphi(x,t)dxdt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q}_T).$$

Теорема 5.1 [6]. *За припущення* $(\mathcal{L}_{\alpha,\beta})$ *та при* $u_0 \in \mathcal{E}'(R^n)$, $F \in X'(\bar{Q}_T)$ *існує єдиний розв'язок* $u \in \mathcal{D}'(\bar{Q}_T)$ *задачі (6). Він визначений формулою*

$$(u, \varphi) = (F, \widehat{\mathcal{G}}_0\varphi) + (u_0, \widehat{\mathcal{G}}_1\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q}_T).$$

У теоремі 5.2 встановлено характер особливостей розв'язку при $t = 0$ залежно від порядку сингулярності заданої узагальненої функції в початковій умові та характеру степеневих особливостей функції в правій частині рівняння. Характер особливостей при $t = 0$ розв'язку задачі у випадку лінійного однорідного рівняння уточнено в теоремі 5.3.

У підрозділі 5.2 для задачі Коші

$$D_t^\beta u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u = F_0(x,t),\ (x,t) \in \mathrm{R^n} \times (0, \mathrm{T}],$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathrm{R}^n, \tag{7}$$

з регуляризованою дробовою похідною встановлено існування єдиного розв'язку, класичного за часовою змінною зі значеннями в просторах беселевих потенціалів $H^{s,p}(\mathrm{R^n}) = \mathrm{H^s_p}(\mathrm{R^n}) = \Big\{\mathrm{v} \in \mathrm{S}'(\mathrm{R^n}) : \big\|\mathrm{v}\big\|_{\mathrm{H^{s,p}(R^n)}} = \big\|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}\mathrm{v}]\big\|_{\mathrm{L_p(R^n)}} < \infty\Big\}$, де S' – простір повільно зростаючих узагальнених функцій. Нехай $C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathrm{R^n})\big) = \Big\{\mathrm{v} \in \mathrm{C}\big([0,\mathrm{T}]; \mathrm{H^{s+\alpha,p}(R^n)}\big) : \mathrm{D_t^\beta v}, (-\Delta)^{\alpha/2}\mathrm{v} \in \mathrm{C_b}\big((0,\mathrm{T}]; \mathrm{H^{s,p}(R^n)}\big)\Big\}$ – простір із нормою $\|v\|_{C_{\alpha,\beta}([0,T];H^{s,p}(\mathrm{R^n}))} =$

$$= \max\Big\{\|v\|_{C([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathrm{R^n}))}, \|(-\Delta)^{\alpha/2}v\|_{C_b([0,T];H^{s,p}(\mathrm{R^n}))}, \|D_t^\beta v\|_{C_b([0,T];H^{s,p}(\mathrm{R^n}))}\Big\}.$$

Теорема 5.4 [3]. *Нехай виконане припущення* $(L_{\alpha,\beta})$, $1 < p < \frac{1}{\beta}$, $s \in \mathrm{R}$, $u_0 \in H^{s+\alpha,p}(\mathrm{R^n})$, $F_0(x,t) = f_{1-\beta}(t) * f(x,t)$, $f \in C\big([0,T]; H^{s,p}(\mathrm{R^n})\big)$. *Тоді існує єдиний розв'язок*

$$u(x,t) = f(x,t) * G_1(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T$$

задачі (7), причому $u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathrm{R^n})\big)$ *та*

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}\left([0,T];H^{s,p}(\mathrm{R^n})\right)} \le b_0\|f\|_{C\left([0,T];H^{s,p}(\mathrm{R^n})\right)} + b_1\|u_0\|_{H^{s+\alpha\theta,p}(\mathrm{R^n})},$$

де b_0, b_1 *– додатні сталі.*

Теорема 5.5 [3]. *Нехай виконане припущення* $(L_{\alpha,\beta})$, $0 < \theta < 1$, $s \in \mathrm{R}$, $p > 1$, $p(1-\beta\theta) < 1$, $u_0 \in H^{s+\alpha,p}(\mathrm{R^n})$, $F_0 \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha\theta,p}(\mathrm{R^n})\big)$. *Тоді існує єдиний розв'язок*

$$u(x,t) = F_0(x,t) * G_0(x,t) + u_0(x) * G_1(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T$$

задачі (7), причому $u \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathrm{R}^n)\big)$ *та*

$$\|u\|_{C_{\alpha,\beta}([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathrm{R}^n))} \le k_0\|F_0\|_{C([0,T];H^{s+\alpha\theta,p}(\mathrm{R}^n))} + k_1\|u_0\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathrm{R}^n)},$$

де k_0, k_1 *– додатні сталі.*

Такі результати поширено [9] на випадок даних зі значеннями в уточнених шкалах просторів беселевих потенціалів, побудованих подібно до уточнених шкал гільбертових соболєвських просторів, введених і вивчених у працях В. Михайлеця та О. Мурача.

У підрозділах 5.3 та 5.4 одержано [5, 9] теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння одновимірної фрактальної дифузії зі змінним коефіцієнтом (теорема 5.7), також зі значеннями в просторах S' та типу S' (теореми 5.8, 5.9).

У підрозділі 5.5 теорема 5.1 поширена [21] на випадок $\beta \in (1,2)$.

У підрозділі 5.6 методом Радона одержано [28] оцінки фундаментального розв'язку рівняння

$$u_t^{(\beta)} - \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j}^{(\alpha)} = \delta(x,t), \quad (x,t) \in \mathrm{R}^{n+1}$$

з частинними дробовими похідними Рімана-Ліувіля та сталими коефіцієнтами b_j, $j = \overline{1,n}$ за умови $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j p_j^{\alpha} \ge C_0$ для всіх $p \in \mathrm{R}^n$, $|p| = 1$. Так що одержані вище результати розділу 5 можна поширити на такі рівняння.

У підрозділі 5.7 доведено [25] теорему 5.13 про існування, єдиність та зображення за допомогою вектор-функції Гріна розв'язку першої крайової задачі для рівняння дробової дифузії в обмеженій області з даними із просторів узагальнених функцій, зокрема, в теоремі 5.14, з даними зі значеннями в просторах беселевих потенціалів.

У р о з д і л і 6 вивчено обернені задачі для дифузійно-хвильових рівнянь, які іншими авторами не вивчались.

У підрозділі 6.1 доведено [7] однозначну розв'язність задачі на визначення пари функцій $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$ та класичного розв'язку $u(x,t)$ першої крайової задачі для дифузійно-хвильового рівняння

$$D_t^{\beta} u - a(t)u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in Q_T := (0,l) \times (0,T], \quad \beta \in (0,2)$$

при додатковій умові (умові перевизначення)

$$a(t)u_x(0,t) = F(t), \quad t \in [0,T].$$

Розглянуто багатовимірний аналог такої задачі [22].

У підрозділі 6.2 в теоремі 6.5 встановлено [23], що у випадку узагальненої функції вигляду $F_0(x) \cdot g(t)$ у правій частині рівняння регулярність

за змінною t узагальненого розв'язку задачі визначається властивостями функції $g(t)$, зокрема, що при неперервній $g(t)$, узагальненій функції F_0 розв'язок $u(x,t)$ цієї задачі є узагальненою функцією, неперервною за змінною t в узагальненому сенсі – належить простору

$$\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_T) = \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}_T) : (v(\cdot,t), \varphi(\cdot)) \in C[0,T] \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,l)\}.$$

Цей результат використовується для доведення розв'язності обернених крайових задач при заданих узагальнених функціях у правих частинах прямої задачі.

У підрозділі 6.3 доведено однозначну розв'язність задач про визначення пар функцій: розв'язку u першої крайової задачі для дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною Рімана-Ліувіля порядку $\beta \in (0,2)$, узагальненими функціями $F_0(x)$ та в початкових умовах, а також невідомого старшого (теореми 6.6, 6.7) або молодшого (теореми 6.8, 6.9) коефіцієнта, або невідомої компоненти правої частини рівняння при відомих значеннях шуканої узагальненої функції на заданій основній функції [7, 8, 24].

У підрозділах 6.4, 6.5 встановлено існування та єдиність розв'язків такого типу обернених крайових задач та задачі Коші із заданими в правих частинах узагальненими функціями із просторів беселевих потенціалів.

Зокрема, за припущень

$$\beta \in (0,1], \quad \theta \in (0,1), \quad 1 < p < \tfrac{1}{1-\beta\theta}, \quad s \in \mathrm{R}, \ F_0 \in H^{s+2\theta,p}(\Omega),$$
$$F_1 \in C\big([0,T]; B^{s+2\theta+1-\frac{1}{p},p}(\Omega_1)\big), \ F_2 \in H^{s+2,p}(\Omega), \ \Omega_1 = \partial\Omega,$$
$$\Phi, D^\beta\Phi \in C[0,T], \quad \varphi_0 \in L_{p'}(\Omega) \ (\tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{p} = 1), \ < F_0, \varphi_0 > \neq 0$$

доведено (теорема 6.11) існування, єдиність та одержано зображення розв'зку оберненої крайової задачі

$$D_t^\beta u(x,t) - (Au)(x,t) = g(t)F_0(x), (x,t) \in \Omega \times [0,T],$$

$$u(x,t) = F_1(x,t), \ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \quad u(x,0) = F_2(x), \ x \in \Omega,$$
$$< u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot) >= \Phi(t), \ t \in [0,T],$$

на визначення пари функцій

$$(u,g) \in C_{2,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\Omega)\big) \times C[0,T].$$

Тут $A = A(x,t,D)$ – еліптичний диференціальний оператор другого порядку з нескінченно диференційовними коефіцієнтами, для якого головна функція Гріна прямої задачі існує, зокрема, при $A = a(t)\Delta$ її існування доведено в дисертації, $H^{s,p}(\Omega) = H_p^s(\Omega)$, $B^{s,p}(\Omega_1)$ при $s > 0$ збігається з

простором слідів на Ω_1 елементів із $H^{s+\frac{1}{p},p}(\Omega)$, норма еквівалентна нормі $||g||_{s,p} = \inf\limits_{v\in H^{s+\frac{1}{p},p}(\Omega), v|_S=g} ||v||_{H^{s+\frac{1}{p}}(\Omega)}$, а при $s<0$ є спряженим до простору $B^{-s,p'}(\Omega_1)$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega_1)$,

$$< u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot) >= \int_\Omega \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}_{z\to\xi}[u(z,t)]\Big]\varphi_0(x)dx.$$

Доведені теореми 6.13, 6.14 відповідно про існування та єдиність розв'язку оберненої задачі Коші

$$D_t^\beta u + a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u - b(t)u = F_0(x,t),\ (x,t)\in \mathrm{R^n}\times(0,\mathrm{T}],$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x\in R^n,$$

$$< u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot) >= F(t), \quad t\in[0,T]$$

на знаходження пари функцій

$$(u,b)\in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathrm{R^n})\big)\times \mathrm{C}[0,\mathrm{T}]$$

при заданих $\varphi_0\in L_{p'}(\mathrm{R^n})$, $F\in C[0,T]$, F_0, u_0 зі значеннями в просторах беселевих потенціалів. Необхідна умова погодження даних $< u_0, \varphi_0 >= F(0)$.

У підрозділі 6.6 доведено [4] теореми 6.16 та 6.17 про однозначну розв'язність у просторах періодичних за просторовою змінною узагальнених функцій обернених крайових задач на відновлення відповідно початкових даних та правої частини дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною при інтегральній за часом умові перевизначення. У теоремі 6.18 знайдено [29] достатні умови класичної розв'язності другої з цих задач.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена встановленню умов існування та максимальної регулярності розв'язків нелінійних операторних рівнянь типу Гаммерштейна на комплексних інтерполяційних шкалах секторіального оператора, задачі Коші для абстрактних рівнянь із дробовою похідною, також при їх лінійних і нелінійних збуреннях, розв'язності прямих та обернених задач для рівнянь із дробовими похідними у просторах гладких та узагальнених функцій.

В дисертаційній роботі одержано такі нові результати.

1. Описано властивості числення широких класів секторіальних операторів, що діють на банахових просторах та на апроксимовних алгебрах Вінера аналітичних в одиничній кулі банахового нескінченновимірного

простору функцій, розвинуто їх застосування до дослідження задачі Коші для рівнянь із дробовими похідними.

2. На базі відомих та одержаних властивостей функціонального числення секторіальних операторів знайдено нові достатні умови класичної розв'язності та максимальної регулярності розв'язків:

а) нелінійних операторно-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна на комплексних інтерполяційних шкалах секторіального оператора;

б) задачі Коші для абстрактних лінійних та півлінійних рівнянь із дробовою похідною;

в) нормальних параболічних крайових задач із дробовою похідною за часом.

3. Використовуючи аналітичні властивості функціонального числення секторіальних операторів, побудовано:

а) новий метод наближення розв'язку задачі Коші для операторно-диференціального рівняння з дробовою похідною, збуреного на комплексних інтерполяційних шкалах секторіального оператора, без обмеження на норму збурюючого оператора;

б) наближення розв'язків нормальних параболічних крайових задач, збурених псевдодиференціальними доданками, за допомогою ітерацій операторів Гріна незбурених задач.

4. Вперше досліджено узагальнені початкові значення регулярних розв'язків півлінійних абстрактних рівнянь зі збуреною дробовою похідною.

5. Вперше встановлено однозначну розв'язність задачі Коші для лінійного операторно-диференціального рівняння з дробовою похідною у вагових просторах узагальнених функцій.

6. Доведено однозначну розв'язність задачі Коші для рівнянь із дробовими похідними як за часовою, так і за просторовими змінними, неоднорідних крайових задач для рівнянь із дробовою похідною за часом у просторах узагальнених функцій, зокрема, одержано теореми про існування та єдиність класичних за часом зі значеннями в просторах беселевих потенціалів розв'язків таких задач.

7. Вперше сформульовано та встановлено однозначну розв'язність деяких обернених задачі Коші та крайових задач для диференціальних рівнянь із дробовими похідними, також при заданих у правих частинах узагальнених функціях.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Їх можна використати в теорії розв'язності та дослідженні регулярності розв'язків операторних та диференціальних рівнянь із частинними та

дробовими похідними, в теорії обернених крайових задач для таких рівнянь, при дослідженні практичних задач, які моделюються розглянутими в дисертації задачами, а також у теорії аналітичних функцій нескінченної кількості змінних та нелінійному аналізі.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Lopushansky A.* Sectorial operators on Wiener algebras of analytic functions / A. Lopushansky // Topology. – 2009. – **48**(2-4). – P. 105-110.

2. *Лопушанский А.О.* Абстрактная параболическая задача Коши в комплексных интерполяционных шкалах / А.О. Лопушанский // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т.46, №12. – С. 1799 - 1803.

3. *Лопушанский А.О.* Задача Коши для уравнения с дробными производными в пространствах бесселевых потенциалов / А.О. Лопушанский // Сиб. матем. ж. – 2014. – 55, №6.–С. 1089-1097.

4. *Lopushanska H.* Inverse problem in a space of periodic spatial distributions for a time fractional diffusion equation / H. Lopushanska, A. Lopushansky, O. Myaus // Electronic J. Diff. Equ. – 2016 (2016). – no 14. – p. 1-9.

5. *Лопушанская Г.П.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций / Г.П. Лопушанская, А.О. Лопушанский, О.В. Пасичник // Сиб. матем. ж. – 2011.– Т.52, №6.–С. 1288-1299.

6. *Лопушанська Г.П.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними в просторах узагальнених функцій / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський // Укр. матем. журн. – 2012. – Т. 64, №8. – С. 1067-1080.

7. *Лопушанський А.О.* Одна обернена крайова задача для дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною / А.О. Лопушанський, Г.П. Лопушанська // Укр. мат. журн.– 2014.– Т. 66, №5. – С. 666-678.

8. *Лопушанський А.О.* Обернена задача у просторі узагальнених функцій / А.О. Лопушанський, Г.П. Лопушанська, В.Р. Рапіта // Укр. матем. журн.– 2016. – Т. 68, №2. – С. 241-253.

9. *Лопушанський А.О.* Розв'язок задачі Коші зі значеннями в уточнених просторах беселевих потенціалів / А.О. Лопушанський, Г.П. Лопушанська // Збірник праць Ін-ту математики НАН України.–2015.– Т. 12, №2.– 250-275.

10. *Лопушанський А.О.* Розв'язність неоднорідної задачі Коші для абстрактних параболічних рівнянь в комплексних інтерполяційних шка-

лах / А.О. Лопушанський // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. – 2004. – Вип. 191-192. – Математика. – С. 89-94.

11. *Лопушанський А.О.* Числення секторіальних операторів з від'ємним типом і аналітичні півгрупи / А.О. Лопушанський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – Т.49, №2. – С. 65 - 73.

12. *Лопушанський А.О.* Числення секторіальних операторів з від'ємним типом і комплексні интерполяційні шкали / А.О. Лопушанський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – Т.49, №4. – С. 19 - 27.

13. *Лопушанський А.О.* Числення секторіальних операторів з від'ємним типом: аналітичність на проміжних просторах / А.О. Лопушанський // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2007. – Т.48, №2. – С. 36 - 47.

14. *Лопушанський А.О.* Розв'язок крайової задачі для параболічного рівняння, збуреного псевдо-диференціальним доданком / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. –2006. –Вип. 66. – С. 115-127.

15. *Лопушанський А.О.* Розв'язність півлінійної параболічної задачі Коші, збуреної на комплексних інтерполяційних шкалах / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. –2011. – Вип. 75. – С. 158-169.

16. *Лопушанський А.О.* Регулярність розв'язків абстрактної задачі Коші для півлінійного параболічного рівняння / А.О. Лопушанський // Математичний вісник НТШ. – 2011. – Т. 8. – С. 122-132.

17. *Лопушанський А.О.* Нелінійні збурення параболічних крайових задач у просторах беселевих потенціалів / А.О. Лопушанський // Математичний вісник НТШ. – 2012. – Т. 9. – С. 100-109.

18. *Лопушанський А.О.* Нелінійні операторні рівняння в комплексних інтерполяційних шкалах / А.О. Лопушанський // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2011. – Т.9. – С. 63 - 73.

19. *Лопушанський А.О.* Нелінійні рівняння типу Гаммерштейна у просторах беселевих потенціалів / А.О. Лопушанський // Вісник НУ "Львівська політехніка". – Фіз.-мат. науки. –2011. – Т. 718, №718. – С. 40-45.

20. *Лопушанський А.О.* Збурена абстрактна задача Коші для рівняння з дробовою похідною за часом / А.О. Лопушанський // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – 2012. – Вип. 9. – С. 70-76.

21. *Лопушанський А.О.* Розв'язок задачі Коші для рівнянь з дробовими похідними в просторах узагальнених функцій / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77.– С. 132-144.

22. *Лопушанський А.О.* Розв'язність оберненої крайової задачі для рівняння з дробовою похідною / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2014. – Вип. 79.– С. 97-110.

23. *Лопушанський А.О.* Регулярність розв'язків крайових задач для дифузійно-хвильового рівняння з узагальненими функціями в правих частинах / А.О. Лопушанський // Карп. матем. публікації. –2013. – Т. 5, №2. – С. 279-289.

24. *Лопушанський А.О.* Обернені крайові задачі для дифузійно-хвильового рівняння з узагальненими функціями в правих частинах / А.О. Лопушанський, Г.П. Лопушанська // Карп. матем. публікації. – 2014. – Т. 6, №1. – С. 79–90.

25. *Lopushansky A. O.* Non-homogeneous fractional boundary value problems in spaces of generalized functions / A.O. Lopushansky, H.P. Lopushanska // Visnyk Lviv. Un-ty. Ser. Mech.-Mat. – 2012. – Vol. 78. – P. 92–107.

26. *Лопушанська Г.П.* Сліди розв'язків півлінійних рівнянь з дробовою похідною за часом / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.В. Пасічник // Карпатські матем. публ. – 2011. – Т.3, №1. – С. 85-93.

27. *Лопушанська Г.П.* Два формулювання узагальненої задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною за часом / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.В. Пасічник // Карпатські матем. публ. – 2012. – Т.4, №1. – С. 72-82.

28. *Лопушанська Г.П.* Фундаментальний розв'язок рівнянь з частинними дробовими похідними / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський // Вісник Львів. унту. Сер. мех.-мат.– 2012. – Вип. 76. – С. 46-55.

29. *Лопушанська Г.П.* Класичний розв'язок оберненої задачі для рівняння дробової дифузії при інтегральній за часом умові перевизначення / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.М. М'яус // Мат. студії. – 2015. – 44, no 2. – С. 215-220.

30. *Лопушанський А.О.* Про наближення збуреної абстрактної задачі Коші / А.О. Лопушанський // Міжнародна конференція "Геометрія в Одесі - 2004. Диференціальна геометрія та застосування". Одеса, 17 тр.-29 тр. - Тези доп. Одеса-2004. – С. 52-53.

31. *Лопушанський А.О.* Наближений метод для збуреного абстрактного параболічного рівняння / А.О. Лопушанський // Конференція молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. ак. Я.С.Підстригача. Львів, 24-26 тр. 2004 р.– Тези доповідей. – С.94-96.

32. *Лопушанський А.О.* Про наближення розв'язку задачі Коші для збуреного абстрактного параболічного рівняння / А.О. Лопушанський // Міжнародна математична конференція імені В.Я.Скоробагатька. Дрого-

бич, 27 вер. - 1 ж. – Тези доп. Львів-2004. – С. 130.

33. *Лопушанський А.О.* Властивості розв'язків лінійних параболічних задач, збурених необмеженими операторами / А.О. Лопушанський // Конференція молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. ак. Я.С.Підстригача. Львів, 24-27 тр. 2005 р. – Тези допо. – С.298-299.

34. *Лопушанський А.О.* Збурення лінійних параболічних рівнянь у комплексних інтерполяційних просторах / А.О.Лопушанський // Диф. рівняння та їх застосування. Чернівці, 11-14 ж. 2006 р. – Тези доп. – С. 93.

35. *Лопушанський А.О.* Про експоненту диференціювань за некомутативними напрямками / А.О.Лопушанський // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я. Скоробогатька. Дрогобич, 24-28 вер. 2007 р. – Тези доп. – Львів, 2007. – С. 171.

36. *Лопушанський А.О.* Збурена абстрактна задача Коші з дробовою похідною за часом / А.О.Лопушанський // Міжнар. мат. конф. ім. В.Я. Скоробогатька. Дрогобич, 19-23 вер. 2011 р. – Тези доп. – Львів, 2007. – С. 118.

37. *Лопушанський А.О.* Збурена абстрактна задача Коші для рівняння з дробовою похідною за часом / А.О.Лопушанський // Всеукр. наукова конф. "Застосування математичних методів в науці і техніці". Луцьк, 24-26 лист. 2011 р. – Збірник тез доп. – Луцьк, 2011. – С. 45-46.

38. *Лопушанський А.О.* Оператори Гріна задачі Коші для рівняння дифузії з дробовою похідною за часом / А.О.Лопушанський, О.В. Пасічник // Конф. мол. учених із суч. проблем мех. і мат. ім. ак. Я.С.Підстригача. Львів, 25-27 тр. 2009 р. – Тези доп. – С. 217-219.

39. *Лопушанський А.О.* Регулярність розв'язків абстрактної задачі Коші для півлінійного рівняння / А.О. Лопушанський // Всеукр. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці". Чернівці, 11-13 черв. 2012. – Матеріали конф. – Чернівці, 2012. – С. 105.

40. *Лопушанський А.О.* Нелінійні операторні рівняння в комплексних інтерполяційних шкалах / А.О. Лопушанський // Міжнародна конференція "Геометрія в Одесі - 2012. Диференціальна геометрія та застосування". Одеса, 17 тр.-29 тр. - Тези доп. – Одеса-2012. – С. 52-53.

41. *Лопушанська Г.П.* Задача Коші для рівняння з дробовою похідною за часом у просторі узагальнених функцій / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.В. Пасічник // Міжнар. конф. до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди. Чернівці, 8-13 червня 2009 р. – Тези доп. – Чернівці: Книги – XXI, 2009. – С. 94-96.

42. *Лопушанська Г.П.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними в просторах узагальнених функцій / Г.П. Лопушанська, А.О.Лопушанський // Чотирнадцята міжнар. наукова конф. ім. ак. М. Кравчука. Київ, 14-21 кв. 2012 р. – Матеріали конф. – Київ, 2012. – С. 280.

43. *Lopushansky A.O.* About unbounded perturbations of the mixed non-homogeneous parabolic boundary problems / A. O. Lopushansky // II Summer School in Algebra fnd Topology. Dolyna, Aug. 2-14, 2004. – Program of Invited Lectures and Abstracts of Reseach Reports. – Lviv-Dolyna, 2004. – P. 22-23.

44. *Lopushansky A.O.* The solution of the boundary value problem for parabolic equation with pseudo-differential terms / A.O. Lopushansky // Int. Conf. on Dif. Eq. dedicated to 100-Annyv. of Yu. Lopatynsky. Lviv, 12-17 Sept. 2006. – Book of Abstr. –Lviv, 2006. – P. 118-119.

45. *Lopushansky A.O.* Analytic functions of sectorial operators: perturbations on complex interpolation subspaces / A.O. Lopushansky // Int. Conf. "Infinite Dimentional Analysis and Topology". Івано-Франківськ-Яремче, 27 тр.-1 чер. 2009.

46. *Lopushansky A.O.* Of an approximation of solutions of abstract parabolic equations / A.O. Lopushansky // Conf. on Numerical Analysis and Applied Mathematics. Rethym, Greece, 18-22 Sept. 2009.

47. *Lopushansky A.O.* Analytic semi-groups in Wiener Algebras over Banach balls / A.O. Lopushansky // Міжнар. конф. з функц. аналізу до 90-річчя В.Е. Лянце. Львів, 17-21 лист. 2010 р. – Тези доп. – С. 44.

48. *Lopushansky A.O.* Non-homogeneous fractional boundary value problems in spaces of generalized functions / A.O. Lopushansky, H.P. Lopushanska // Int. Conf. dedicated to the 120-th Anniversary of Stefan Banach. Lviv, Sept. 17-21, 2012. – Book of abstracts. – Lviv, 2012. – P. 214.

49. *Lopushansky A.O.* Boundary value problems for semi-linear parabolic equations in Bessel potentials' spaces / A.O. Lopushansky // Int. Conf. dedicated to the 120-th Anniversary of Stefan Banach. Lviv, Sept. 17-21, 2012. – Book of abstracts. – Lviv, 2012. – P. 215.

50. *Lopushansky A.O.* One inverse problem to fractional diffusion-wave equation in bounded domain / A.O. Lopushansky, H.P. Lopushanska // V всеукр. наук. конф. "Нелінійні проблеми аналізу". Івано-Франківськ, 19-21 вер. 2013 р. – Тези доп. – С. 86.

51. *Лопушанський А.О.* Обернені крайові задачі для дифузійно-хвильового рівняння з узагальненими функціями в правих частинах / А.О.Лопушанський, Г.П. Лопушанська // IV міжнар. Ганська конф., присвячена 135 річниці від дня нар. Ганса Гана. Чернівці, 30 ч.–5 лип.

2014 р. – Тези доп. – С. 98-99.

52. *Lopushansky A.O.* Inverse coefficient problems for equations with fractional derivatives / A.O. Lopushansky, H.P.Lopushanska, V. Rapita // ISMC (Int. V. Skorobohatko Math. Conf.). Drogobych, Ukraine, August 25-28, 2015. –Abstracts. – P. 98.

53. *Лопушанський А.О.* Регулярність розв'язку задачі Коші для рівняння з дробовою похідною / А.О. Лопушанський // Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування", присв. 70-річчю ак. НАН України Перестюку М.О. Ужгород, 19-21 тр. 2016 р. – Тези доп. – Ужгород, 2016. – С. 92.

АНОТАЦІЯ

Лопушанський А.О. *Лінійні та нелінійні операторно-диференціальні рівняння на комплексних інтерполяційних шкалах.* – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника", Івано-Франківськ, 2016.

У дисертаційній роботі одержано нові достатні умови класичної розв'язності та максимальної регулярності розв'язків нелінійних операторних рівнянь типу Гаммерштейна з ядрами на комплексних інтерполяційних шкалах, породжених секторіальними операторами, задачі Коші для абстрактних рівнянь із дробовою похідною, також при їхніх лінійних та нелінійних збуреннях, нормальних параболічних крайових задач із дробовою похідною за часом.

Використовуючи аналітичні властивості функціонального числення секторіальних операторів, побудовано новий метод наближення розв'язку задачі Коші для операторно-диференціального рівняння з дробовою похідною, збуреного на комплексних інтерполяційних шкалах секторіального оператора, без обмеження на норму збурюючого оператора, побудовано наближення розв'язків нормальних параболічних крайових задач, збурених псевдодиференціальними доданками, за допомогою ітерацій операторів Гріна незбурених задач.

Доведена однозначна розв'язність прямих і деяких обернених задач Коші для рівнянь із дробовими похідними як за часовою, так і за просторовими змінними (вже також у головній частині рівняння), нормальних параболічних крайових задач для рівнянь із дробовою похідною за часом у класах гладких та узагальнених функцій, зокрема, зі значеннями в повній шкалі просторів беселевих потенціалів.

Ключові слова: узагальнена функція, похідна дробового порядку, комплексні інтерполяційні шкали, простори беселевих потенціалів, нелінійні операторно-диференціальні рівняння, максимальна регулярність розв'язку, регулярний еліптичний диференціальний оператор, секторіальний оператор, операторне числення, алгебра Вінера.

АННОТАЦИЯ

Лопушанский А.О. *Линейные и нелинейные операторно-дифференциальные уравнения на комплексных интерполяционных шкалах.* – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные упавнения. – ГВУЗ "Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника" , Ивано-Франковск, 2016.

Диссертационная работа посвящена исследованию проблемы существования и максимальной регулярности решений линейных и нелинейных операторно-дифференциальных уравнений.

Диссертационная работа состоит из введения, шести разделов с выводами, выводов и списка литературы.

В разделе 1 приведен обзор литературы по теме диссертации, указаны основные направления исследований и сформулированы некоторые полученные основные результаты.

В разделе 2 описаны известные и получены новые свойства секториальных операторов, сушественно используемые в следующих разделах. Введена аппроксимирующая алгебра Винера аналитических функций бесконечного количества переменных, выделен класс операторов, обладающих секториальным свойством на этой алгебре и построено голоморфное исчисление операторов такого класса.

В разделе 3 установлен результат о максимальной регулярности решения задачи Коши для абстрактного автономного линейного уравнения с регуляризованной дробной производной: если значения неоднородной части уравнения принадлежат комплексной интерполяционной шкале некоторого секториального оператора, то существует единственное классическое решение задачи Коши. Получены обобщения на случай линейных возмущений оператора. Результаты конкретизированы для эллиптического дифференциального оператора.

В разделе 4 найдены достаточные условия классической разрешимости нелинейных операторных уравнений типа Гаммерштейна с ядрами на комплексных интерполяционных шкалах, порожденных секториальными операторами. Получены различные применения.

В разделе 5 доказаны теоремы существования и единственности решений задач Коши для уравнений с дробными производными как по временной, так и по пространственным (в главной части) переменным, нормальных краевых задач с дробной производной по времени в пространствах обобщенных функций, получены их представления с помощью вектор-функций Грина.

В разделе 6 изучены обратные задачи для диффузионно-волновых уравнений, которые другими авторами для таких уравнений не изучались. Доказаны теоремы существования и единственности их решений, причем также при наличии обобщенных функций в правых частях.

Ключевые слова: обобщенная функция, производная дробного порядка, комплексные интерполяционные шкалы, пространства бесселевых потенциалов, нелинейные операторно-дифференциальные уравнения, максимальная регулярность решения, регулярный эллиптический дифференциальный оператор, секториальний оператор, операторное исчисление, алгебра Винера.

ABSTRACT

Lopushansky A.O. *Linear and nonlinear operator-differential equations on complex interpolation scales.* – On rights of a manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.02 – Differential Equations. – Vasyl Stefanyk Precarpatian National University, Ivano-Frankivsk, 2016.

New sufficient conditions of the classical solvability and maximum regularity of solutions of the nonlinear Hammerstein type operator-differential equations with kernels on complex interpolation scales of sectorial operators, an abstract fractional Cauchy problem, also under linear and nonlinear perturbations, are found. The obtained results are defined concretele to the operators generated by regular elliptic boundary value problems.

Using the analytic properties of the sectorial operators' functional calculus, a new method of approximation of a solution of an abstract fractional Cauchy problem, perturbed on complex interpolation scales of a sectorial operator, built without restrictions on the norm of the perturbed operator, the approximations of solutions of normal parabolic boundary value problems, perturbed by pseudodifferential terms, built with the use of iterations of the Green operators of nutbourne boundary value problems.

Unique solvability of direct and some inverse time-space fractional Cauchy problems and boundary value problems for a time fractional diffusion-wave equations in spaces of distributions and smooth, in particular, with values in Bessel potentials spaces, are obtained.

Key words: distribution, fractional derivative, complex interpolation scales, Bessel potentials spaces, nonlinear integral-differential equations, maximum regularity of solution, regular elliptic differential operator, sectorial operator, functional calculus, Wiener type algebras.