

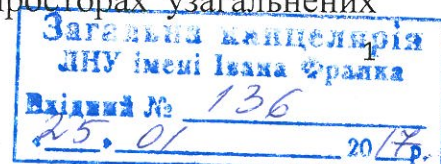
Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Лопушанського Андрія Олеговича «Лінійні та нелінійні
операторно-диференціальні рівняння на комплексних
інтерполяційних шкалах», подану на здобуття наукового
ступеня доктора фізико-математичних наук за
спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння

У дисертаційній роботі Лопушанського А.О. розвивається теорія абстрактної задачі Коші для еволюційних рівнянь з дробовою похідною за часом та крайових задач для диференціальних рівнянь із дробовими похідними за часовою та просторовими змінними. Досліджується проблема максимальної регулярності розв'язків лінійних та нелінійних операторних рівнянь. Якщо розглянути задачу Коші для еволюційного рівняння $u'(t) = Au(t) + f(t)$, $t \in [0, T]$, $u(0) = 0$, з оператором A , який є генератором аналітичної півгрупи в деякому банаховому просторі зі щільною областю визначення, то, якщо f задовольняє умову Гельдера, існує єдиний розв'язок вказаної задачі. Проблема максимальної регулярності полягає в ослабленні умов на функцію f . Ця проблема досліджувалася у багатьох працях, зокрема, П. Гривара і Г. де Прато, В. Михайлеця, О. Мурача, В. Лося, при цьому використовувались різні методи інтерполяції. У дисертаційній роботі за допомогою методу комплексної інтерполяції, а також операційного числення секторіальних операторів одержано послаблені щодо правих частин умови розв'язності абстрактної задачі Коші для рівнянь з дробовою похідною.

Зазначимо, що метод комплексної інтерполяції введено Ж. Ліонсом, А. Кальдероном і С. Крейном і розвинено в працях Ф. Клімента, Х. Хейманса, Д. Хенрі, С. Агмона, А. Дугліса, Л. Ніренберга, Ю. Березанського, В. Михайлеця, О. Мурача та інших математиків. Операційне числення обмежених операторів над банаховими просторами в класі аналітичних функцій побудовано Ф. Ріссом та Н. Данфордом. С. Тейлор поширив ці результати на деякі класи необмежених операторів. А. Пазі та Х. Хейманс, С. Ангенетті та інші – на генератори аналітичних півгруп у банахових просторах. У дисертації розвивається операційне числення секторіальних операторів, ці дослідження є актуальними з точки зору різноманітних застосувань, зокрема, в теорії задачі Коші для збурених рівнянь параболічного типу.

Крайові задачі для рівнянь з частинними похідними мають природну постановку і в різних просторах узагальнених функцій, оскільки граничні функції можуть мати особливості в одній або декількох точках межі області і можуть допускати регуляризацию у тих чи інших просторах узагальнених



функцій типу розподілів Соболева-Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій та ін. Тому актуальними є також дослідження, проведені в дисертаційній роботі, які стосуються крайових задач для диференціальних рівнянь з дробовою похідною за часом та за просторовими змінними у різних просторах узагальнених функцій.

Ще один напрям досліджень, проведених у дисертаційній роботі, стосується прямих та обернених задач для псевдодиференціальних рівнянь з дробовими похідними. Обернені коефіцієнтні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними, зокрема, для рівняння дифузії з дробовою похідною з різними невідомими функціями чи параметрами активно вивчаються в останні роки (М. Іванчов, J. Cheng, J. Nakagawa, M. Yamazaki, K. Sakamoto, X. Xu, L. Zuo, W. Rundell та ін.). Рівняння з дробовими похідними більш точно відображають реальні процеси у фізиці, хімії, різні стохастичні процеси. Теорія рівнянь дробового порядку істотно доповнює картину загальної теорії диференціальних рівнянь, дозволяє знайти зв'язок між речами, які, якщо залишатись в рамках цілочисельного диференціювання, здаються незалежними. Наприклад, той факт, що для єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності необхідно накласти умову обмеженості на зростання розв'язку, а у випадку хвильового рівняння – ні, виглядає узгодженим після того, як стає відомо, що відповідна умова для дифузійно-хвильового рівняння порядку $\alpha \leq 2$ при $\alpha = 1$ співпадає з умовою для рівняння теплопровідності, а при $\alpha \rightarrow 2$ функція, яка обмежує зростання розв'язку, прямує до нескінченності. У просторах узагальнених функцій обернені задачі для псевдодиференціальних рівнянь з дробовими похідними раніше, практично, не вивчались.

Отже, проведені в дисертації дослідження проблеми максимальної регулярності розв'язків задачі Коші для операторних та диференціальних рівнянь з дробовими похідними, дослідження прямих і обернених задач у просторах узагальнених функцій є актуальними. Науковий інтерес представляє також вивчення задачі Коші для збуреного абстрактного параболічного рівняння з необмеженим оператором у банаховому просторі. Збурення вивчаються за допомогою техніки дробових степенів секторіальних операторів. Ці дослідження є продовженнями досліджень Ф. Клімента, Х. Хейманса, Б. де Пастера, А. Лунарді, Д. Хенрі, П. Гравара, Р. Сілі та інших, які стосуються лінійних збурень абстрактних параболічних рівнянь методами інтерполяції.

Дисертація складається зі вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету й задачі дослідження, відзначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, наведено відомості про апробацію результатів роботи та публікації за темою дисертації.

У першому розділі наведено огляд літератури за темою дисертації, введено основні поняття, сформульовано основні результати, що використовуються в дисертаційній роботі, вказано основні напрями досліджень та деякі з одержаних основних результатів.

У розділі 2 наведено відомі та одержано нові допоміжні результати з операційного числення секторіальних операторів, зокрема, введено комплексну інтерполяційну шкалу для банахової пари фіксованого секторіального оператора, досліджено збурення секторіального оператора від'ємного типу і розв'язність задачі Коші, збуреної на проміжних просторах банахової пари такого оператора. Також тут побудовано операційне числення секторіальних операторів, що діють на апроксимованих алгебрах Вінера аналітичних функцій в одиничній кулі банахового нескінченновимірною простору, показано його застосування до розв'язності задачі Коші на таких алгебрах. Слід зауважити, що ці результати є істотним доповненням досліджень автора, представлених у кандидатській дисертації.

У третьому розділі доведена теорема про однозначну розв'язність та максимальну регулярність розв'язку абстрактної задачі Коші для рівняння з дробовою похідною порядку $\beta \in (0, 1)$. А саме, показано, що якщо вільний член рівняння має значення на інтерполяційному просторі банахової пари фіксованого секторіального оператора та початкові дані беруться з такого простору, то розв'язок задачі володіє підвищеною регулярністю. Зауважимо, що при $\beta = 1$ таке рівняння є звичайним абстрактним параболічним лінійним рівнянням. Встановлено, що цей результат зберігається і при збуреннях оператора задачі на таких комплексних інтерполяційних шкалах без обмеження на норму збурюючого оператора.

Побудоване операційне числення секторіальних операторів від'ємного типу та встановлена аналітична залежність розв'язку від збурюючого оператора дала можливість побудувати нові наближення розв'язку збуреної задачі за допомогою скінченних ітерацій резольвенти незбуреного оператора. Отримані результати застосовано до крайової задачі для параболічного рівняння з дробовою похідною за часом у просторах Бесселевих потенціалів. Знайдено оцінки наближень розв'язків нормальних параболічних крайових задач із псевдодиференціальними доданками та правими частинами за допомогою ітерацій функції Гріна відповідної незбуреної крайової задачі.

У четвертому розділі знайдено достатні умови розв'язності нелінійного диференціально-операторного рівняння типу Гамерштейна з дробовими похідними на комплексних інтерполяційних шкалах деякого фіксованого секторіального оператора, зокрема, абстрактної задачі Коші для півлінійного рівняння з дробовою похідною та крайової задачі для параболічного рівняння з дробовою похідною за часом. Побудовано наближення розв'язків збурених задач для півлінійних рівнянь розв'язками таких задач із незбуреним

оператором. У теоремі 4.7 результати проілюстровано у випадку оператора, породженого регулярною еліптичною крайовою задачею, збуреною псевдодиференціальними доданками. Знайдено достатні умови існування узагальнених початкових значень регулярних розв'язків півлінійних абстрактних рівнянь із секторіальним оператором від'ємного типу в банаховій алгебрі та збуреними дробовими похідними. Доведено теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння з дробовою похідною Рімана-Ліувіля у вагових просторах узагальнених функцій.

У розділі 5 вивчається задача Коші для диференціальних рівнянь із дробовими похідними як за часовою, так і за просторовими змінними (у головній частині). Доведено теореми існування та єдиності, за допомогою вектор-функції Гріна знайдено зображення розв'язків задачі Коші для рівнянь вигляду

$$u_t^{(\beta)}(x, t) + a^2(-\Delta)^{\alpha/2} u(x, t) = F(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T], a = \text{const},$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

з похідною Рімана-Ліувіля порядку $\beta \in (0, 1)$ та u_0, F із просторів узагальнених функцій \mathcal{D}' , вагових просторів узагальнених функцій. Встановлено характер особливостей розв'язку при $t = 0$ залежно від порядку сингулярності заданої узагальненої функції в початковій умові та характеру степеневих особливостей функції у правій частині рівняння.

У підрозділах 5.3 та 5.4 доведено теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші для одновимірного за просторовою змінною рівняння зі змінним коефіцієнтом зі значеннями в просторі S' повільно зростаючих узагальнених функцій та типу S' . Доведено теорему про існування, єдиність та зображення розв'язку за допомогою вектор-функції Гріна розв'язку першої крайової задачі для рівняння дробової дифузії в обмеженій області з даними із просторів узагальнених функцій, зокрема, з даними зі значеннями в просторах бesselевих потенціалів.

У розділі 6 розглянуто нові обернені задачі Коші та нові обернені крайові задачі для дифузійно-хвильових рівнянь. Встановлено існування вектор-функції Гріна та доведено однозначну розв'язність задачі про визначення пари функцій $a(t) > 0, t \in [0, T]$, та класичного розв'язку $u(x, t)$ першої крайової задачі для дифузійно-хвильового рівняння

$$D_t^\beta u(x, t) + a(t)u_{xx}(x, t) = F(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T], \beta \in (0, 2),$$

при додатковій умові (умові перевизначеності)

$$a(t)u_x(0, t) = F(t), \quad t \in [0, T].$$

Розглянуто багатовимірний аналог такої задачі. Встановлено, що розв'язок першої крайової задачі для вказаного рівняння з правою частиною

$F(x, t) = F_0(x)g(t)$ при узагальненій функції F_0 та неперервній функції $g(t)$, є узагальненою функцією, неперервною за змінною t . Цей результат використовується для доведення розв'язності деяких обернених крайових задач для такого рівняння із заданими узагальненими функціями в правих частинах, зокрема, із узагальненими функціями із просторів Бесселевих потенціалів.

При інтегральній за часом умові перевизначення встановлено існування, єдиність та неперервну залежність від даних узагальненого розв'язку оберненої крайової задачі про відновлення початкових даних, узагальненого, а також класичного розв'язку оберненої задачі про відновлення правої частини у рівнянні дробової дифузії.

Широке і грамотне використання математичних понять і підходів забезпечує належний науковий рівень проведених досліджень. Всі основні результати дисертаційної роботи є новими та строго доведеними. Вони в достатньому обсязі викладені в 53 працях: у 29 статтях фахових періодичних видань, зокрема, у 8 статтях у журналах, що входять до наукометричних баз даних, та у 24 тезах доповідей на республіканських та міжнародних математичних конференціях, 17 статей одноосібні.

Зміст автореферату правильно і повністю відображає основні положення дисертації.

Дисертаційна робота оформлена акуратно і згідно з вимогами, які ставляться до оформлення дисертацій. Викладення матеріалу чітко, логічне і послідовне, хоча є деякі зауваження щодо цього:

- 1) Огляд літератури варто було б подати більш детально, зокрема, до списку використаних джерел бажано було б включити монографію М.І. Матійчука «Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні» (Чернівці, 2010. – 248 с.) та проаналізувати результати, наведені в розділі 4 «Задачі з операторами дробового диференціювання та еліптичними операторами».
- 2) У розділі 1, п. 1.2, де даються різні допоміжні поняття, слід було б навести означення та властивості інтеграла Коші від неперервної функції із значеннями в банаховому просторі $L(X, X)$ (операторний інтеграл Коші), який істотно використовується в дисертаційній роботі.
- 3) Означення простору $Z_p(\bar{Q}_T)$ (стор. 196) є некоректним, у точці $t = T$ відповідна оцінка не має змісту; функцію $\varphi(t) = \exp\{-|t|^{-\gamma}\}$, $\gamma > 0$, яка наведена як приклад функції з класу Жевре $G_{1+1/\gamma}$, потрібно довизначити у точці $t = 0$ нулем.
- 4) При позначенні просторів Бесселевих потенціалів використано позначення з частиною індексів внизу (у розділах 3 і 4) та вгорі (у розділах 5 і 6); варто було б перейти до однакових позначень. Також деякі однакові

простори основних та узагальнених функцій дещо по-різному позначено: у розділі 5 використано символ D , а у розділі 6 – \mathcal{D} .

Вказані зауваження, а також граматичні і технічні огріхи, які зустрічаються в тексті, не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

Дисертація є завершеною науковою роботою. В ній отримано нові науково обґрунтовані теоретичні результати, що в сукупності є значним досягненням для розвитку теорії еволюційних рівнянь. Результати роботи і методи їх одержання можуть бути застосовані в подальших дослідженнях операторних та диференціальних рівнянь, обернених крайових задач у різних просторах узагальнених функцій.

Вважаю, що дисертаційна робота «Лінійні та нелінійні операторно-диференціальні рівняння на комплексних інтерполяційних шкалах» за своїм науковим рівнем, актуальністю і одержаними науковими результатами відповідає сучасному рівню розвитку математики і всім вимогам чинного «Порядку присудження наукових ступенів» (Постанова КМУ від 24 липня 2013 р. № 567), що висуваються до дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, а її автор Лопушанський А. О. заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри
алгебри та інформатики
Чернівецького національного
університету імені Юрія Федьковича

В.В. Городецький

Підпис *В.В. Городецький* засвідчую
Учений секретар Чернівецького національного
університету імені Юрія Федьковича
Григорук І.М.

