

**ВІДГУК**  
**офіційного опонента**  
**на дисертаційну роботу Лопушанського Андрія Олеговича**  
**«Лінійні та нелінійні операторно-диференціальні рівняння**  
**на комплексних інтерполяційних шкалах»,**  
**подану на здобуття наукового ступеня**  
**доктора фізико-математичних наук**  
**за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння**

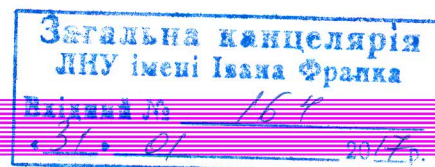
Дисертаційна робота присвячена знаходженню достатніх умов існування та максимальної регулярності розв'язків задач для лінійних та нелінійних операторно-диференціальних рівнянь, зокрема, задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною, нормальних параболічних диференціальних крайових задач із дробовою похідною за часом, а також дослідженню лінійних та нелінійних збурень таких задач, розв'язності прямих і обернених задач для рівнянь із дробовими похідними в просторах гладких та узагальнених функцій.

Основні результати дисертації одержано із застосуванням функціонального числення певних класів необмежених секторіальних операторів і методу функції Гріна.

Вивченню задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною присвячено праці В.А. Костіна, А.Н. Кочубея, А.А. Кілбаса, Б. Баеумера, Е. Бажлекової, М. Капуто, Е. Куести, С.Куваса, Р. Горенфіо та інших.

Розпочате працями М.Фреше, Р. Гато, А.Тейлора вивчення аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах активно продовжується в останні роки, зокрема, в зв'язку з потребами квантової теорії поля. У працях, зокрема, наукового консультанта А. Загороднюка означено та досліджено алгебру Вінера обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі гільбертового простору. У дисертації введено певний банахів аналог такої алгебри та побудовано функціональне числення операторів на ній, які володіють секторіальною властивістю. Ці результати застосовано до дослідження розв'язності задачі Коші над такою алгеброю Вінера аналітичних функцій нескінченної кількості змінних.

У дисертаційній роботі функціональне числення генераторів сильно неперервних півгруп операторів та метод комплексної інтерполяції банахових просторів застосовано до дослідження відомої проблеми максимальної регулярності розв'язку задачі Коші для абстрактного рівняння



з дробовою похідною. Отримані результати дозволили дисертанту також дослідити проблему максимальної регулярності розв'язку нормальної параболічної крайової задачі з дробовою похідною за часом. При цьому істотно було використано класичні результати С. Агмона, Р. Сілі, П. Гривара. Відзначу, що проблема максимальної регулярності розв'язків еліптичних та параболічних крайових задач шляхом інтерполяції гільбертових просторів Хермандера–Волевича–Панеяха досліджується у працях В. Михайлеця, О. Мурача, В. Лося та їх учнів.

З огляду на потреби практики в останні роки активно вивчається задача Коші для диференціальних рівнянь із дробовими похідними та крайові задачі для рівнянь із дробовою похідною за часом. Варто тут відзначити праці С. Ейдельмана, А. Кочубея, В. Анга та Н. Леоненка, А. Ворошилова та А. Кілбаса, Дж. Ш. Дуана (Jun Sheng Duan), Ю. Лучка, В. Рандела, де одержано класичну розв'язність таких задач. При цьому, особливо за наявності дробових похідних за різними змінними, ефективним виявився метод функції Гріна. Обернені задачі для рівнянь із дробовими похідними є також предметом дослідження у багатьох працях, однак при регулярних даних. У дисертаційній роботі прями та обернені задачі для таких рівнянь вивчаються у різних просторах узагальнених функцій.

Підсумовуючи вищенаведене, можна стверджувати, що тема дисертації є актуальною.

Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, шести розділів із висновками до них, загальних висновків та списку використаних джерел, що налічує 282 найменування.

Перший розділ присвячено огляду літератури та термінології за тематикою дисертації, короткому викладу основних результатів, одержаних у роботі.

У другому розділі описано функціональне числення широких класів секторіальних операторів на банахових парах просторів та одержано допоміжні результати для його застосування до задачі Коші. Введена (названа апроксимованою) банахова алгебра Вінера аналітичних комплексно значних функцій на одиничній кулі нескінченновимірною банахового простору. Виділено клас операторів із секторіальною властивістю на цій алгебрі, побудовано голоморфне числення операторів такого класу, яке застосоване до дослідження розв'язності задачі Коші над уведеною алгеброю Вінера.

У третьому розділі встановлені властивості функціонального числення необмежених секторіальних операторів над банаховими просторами застосовуються до дослідження задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною. Зокрема, доведено теорему про максимальну регулярність розв'язку задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною. Особливо розглянуто випадок регулярного еліптичного оператора. Доведено теореми про розв'язність і максимальну регулярність розв'язку абстрактної задачі Коші, збуреної на комплексних інтерполяційних шкалах секторіального оператора, без обмежень на норму збурюючого оператора. Наведено приклади таких збурюючих операторів. Ними можуть бути псевдо-диференціальні оператори. Істотно використовуючи аналітичні властивості функціонального числення секторіальних операторів, описано наближення розв'язку збуреної задачі послідовністю ітерацій розв'язків незбуреної задачі і знайдено оцінки похибки.

У четвертому розділі знайдено достатні умови розв'язності нелінійних операторно-диференціальних рівнянь типу Гаммерштейна з ядрами на комплексних інтерполяційних шкалах фіксованого секторіального оператора. Такі рівняння узагальнюють рівняння, до яких зводиться, зокрема, задача Коші для півлінійного абстрактного рівняння з дробовою похідною та нормальна крайова задача для півлінійного параболічного диференціального рівняння з дробовою похідною за часом.

Крайові задачі для диференціальних і широких класів псевдо-диференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій досить добре вивчені, зокрема, у працях Ю.М. Березанського, С.Г. Крейна, Я.А. Ройтберга, Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса, В.В. Городецького, В.А. Михайлеця, О.О. Мурача, Л. Хермандера, а для абстрактного параболічного рівняння – у працях В.І. Горбачук та М.Л. Горбачука.

У четвертому розділі дисертації розпочато дослідження розв'язків задачі Коші для абстрактного рівняння з дробовою похідною, які мають значення у просторах узагальнених функцій та сильні степеневі особливості при  $t = 0$ .

Такі дослідження продовжено в п'ятому розділі для лінійних диференціальних рівнянь із дробовими похідними за часовою та просторовими вже в головній частині рівняння змінними. Тут задачі досліджуються методом функції Гріна. Доведено теореми про існування, єдиність та зображення розв'язків задачі Коші та крайових задач у просторах узагальнених функцій. Знайдено також достатні умови існування розв'язків, які є класичними за часом та мають значення з різних просторів узагальнених функцій.

У шостому розділі, із використанням одержаних у п'ятому розділі теорем про існування, єдиність та зображення розв'язків прямих задач, одержано теореми про існування та єдиність розв'язків нових обернених задач Коші та крайових задач у просторах гладких та узагальнених функцій.

Результати дисертації опубліковано в 53 працях, серед яких є 29 статей у фахових періодичних виданнях, а з них 8 у журналах, що входять до наукометричних баз даних, 17 статей одноосібних.

Основні результати дисертаційної роботи своєчасно опубліковані. Всі доведення повні.

Елементи кандидатської дисертації присутні на початку другого розділу, оскільки вони використовуються для одержання нових результатів.

Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

Зауваження:

1) в огляді літератури варто було б навести конкретніше декілька згаданих результатів, наприклад, згадуючи суть результатів П. Гривара і Г. да Прато, можна було б пояснити також суть результатів В. Михайлеця, О. Мурача та В. Лося про максимальну регулярність розв'язків еліптичних та параболічних крайових задач;

2) упродовж доведення деяких теорем для позначення тої самої півгрупи використовуються різні позначення ( $e^{tA}$  та  $\Phi_A(t)$ );

3) у підрозділі 2.6 для позначення банахової пари операторів варто було використати ті самі букви, що й у попередніх підрозділах цього розділу; також краще було б вживати позначення  $S^{\alpha,\beta}(\bar{Q}_T)$  замість  $S^{\alpha,\beta}(Q_T)$ ;

4) у доведеннях теорем 6.16 і 6.18 стверджується, що єдиність розв'язків впливає з одержаних для них оцінок, що є неправильним; потрібні інші аргументації;

5) дисертація в цілому оформлена добре, але зустрічаються іноді описки.

Ці зауваження істотно не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи.

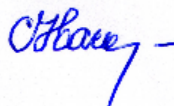
Дисертація є завершеною науковою працею. У ній одержано нові теоретичні результати в теорії розв'язності та регулярності розв'язків операторних та диференціальних рівнянь із частинними та дробовими похідними, в теорії обернених крайових задач для таких рівнянь.

Вважаю, що дисертаційна робота «Лінійні та нелінійні операторно-диференціальні рівняння на комплексних інтерполяційних шкалах» за своїм науковим рівнем, актуальністю і одержаними науковими результатами відповідає сучасному рівню розвитку математики та всім вимогам чинного «Порядку присудження наукових ступенів» (Постанова КМУ від 24 липня

2013 р. № 567), що висуваються до дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння, а її автор Лопушанський А.О. заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за вказаною спеціальністю.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук, професор,  
професор кафедри математичної фізики  
Національного технічного університету України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

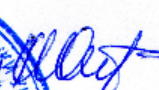
 – С.Д. Івасишен

25.01.2017

Підпис професора С.Д. Івасишена засвідчую

Учений секретар



 – А.А. Мельниченко