Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Мостова Мар'яна Романівна

УДК 517.53

Логарифмічна похідна близьких до поліномів цілих функцій

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного моделювання Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Заболоцький Микола Васильович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка, завідувач кафедри
математичного моделювання.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Філевич Петро Васильович,
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника, завідувач кафедри
інформаційних технологій;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Дільний Володимир Миколайович,
Дрогобицький державний педагогічний
університет імені Івана Франка, доцент
кафедри математики.

Захист відбудеться «___» _____ 2017 р. о 15^{05} на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий «___» _____ 2017 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради І. Й. Гуран

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Цілі функції мають застосування у багатьох розділах математики, а тому їхнє вивчення відіграє важливу роль у розвитку цих галузей. Зокрема, важливим питанням є дослідження зв'язку між зростанням різних величин, які характеризують асимптотичне поводження цілої (мероморфної) функції. Ж. Валірон одним з перших дослідив зв'язок між регулярним зростанням функції та розподілом її нулів у випадку цілої функції додатного порядку з нулями, розташованими на одному промені. Також серед перших науковців, які займалися цим питанням, слід згадати таких відомих математиків як Е. Борель, К. Вейєрштрасс, Ж. Адамар, Е. Ліндельоф, Е. Тітчмарш та інші.

Їхні результати стали поштовхом для створення в 30-их роках минулого століття Б. Я. Левіним та А. Пфлюгером незалежно один від одного теорії цілих функцій цілком регулярного зростання (ц. р. зр.). Клас цілих функцій ц. р. зр. охоплює практично всі відомі цілі функції, зокрема: цілі тригонометричні функції; експоненційні многочлени; функції Бесселя та Міттаг-Леффлера; перетворення Фур'є скінченних функцій; функції експоненціального типу з класу L^p; цілі розв'язки лінійного диференціального рівняння будь-якого порядку з поліноміальними коефіцієнтами; тощо. Тому було важливим встановлення різних критеріїв належності цілих функцій до цього класу. Критерій ц. р. зр. цілої функції в залежності від розподілу її нулів за аргументами вказали Б. Я. Левін та А. Пфлюгер; в термінах коефіцієнтів Фур'є логарифма модуля цілої функції — В. С. Азарін; в залежності від поводження p-норми логарифма модуля цілої функції — А. А. Кондратюк.

Новий підхід до теорії цілих функцій ц. р. зр. дала створена В. С. Азаріним теорія граничних множин. Теорія цілих функцій ц. р. зр. скінченного ненульового порядку була поширена на аналітичні в півплощині (А. П. Грішин, М. В. Говоров), мероморфні в площині (А. А. Кондратюк, Ю. П. Лапенко), субгармонійні та δ-субгармонійні в просторі $\mathbb{R}^m$ функції (К. Г. Малютін, Н. Садик, Я. В. Васильків).

Знаходженням умов, за яких для цілих функцій правильні дещо тонші асимптотичні оцінки в порівнянні з цілими функціями ц. р. зр., займалися П. З. Агранович, В. М. Логвиненко, Ю. І. Мельник, Ю. І. Любарський, М. А. Субханкулов, М. М. Тян, Р. С. Юлмухаметов, Б. М. Хабібулін, Б. В. Винницький, Р. В. Хаць та інші. В цьому напрямку також важливі результати отримали Я. В. Васильків,

А. А. Гольдберг, А. П. Грішин, М. В. Заболоцький, О. Е. Єременко, А. А. Кондратюк, Й. В. Островський, Л. І. Ронкін, М. Л. Содін, С. Ю. Фаворов та інші.

Зв'язок між ц. р. зр. цілих функцій та асимптотичним поводженням характеристик їх логарифмічних похідних дослідили А. А. Гольдберг і М. Е. Коренков (асимптотика логарифмічної похідної зовні виняткових множин); А. А. Гольдберг, М. Л. Содін та М. М. Строчик (асимптотика коефіцієнтів Фур'є логарифмічної похідної). Для мероморфних функцій аналогічні питання досліджували Я. В. Васильків, А. А. Кондратюк (зростання логарифмічної похідної, її коефіцієнти Фур'є та поводження логарифмічної похідної в $L^p[0, 2\pi]$-метриці).

Виявляється, якщо для цілих функцій нульового порядку аналогічно ввести поняття ц. р. зр., то отримана теорія буде тривіальною. В 90-их роках минулого століття М. В. Заболоцький ввів поняття сильного регулярного зростання (с. р. зр.) для цілих функцій нульового порядку, яке володіє властивостями, подібними до тих, якими володіє поняття ц. р. зр. цілих функцій додатного порядку. Пізніше М. В. Заболоцький та О. В. Костюк отримали зв'язки між с. р. зр., розподілом нулів цілої функції f за аргументами, асимптотичною поведінкою коефіцієнтів Фур'є $\ln f$, регулярним зростанням в $L^p[0, 2\pi]$-метриці $\ln|f|$ та $\arg f$. Питання зв'язку цих характеристик цілої функції нульового порядку з поводженням її логарифмічної похідної залишались не дослідженими.

Асимптотика та оцінки логарифмічної похідної цілих функцій зовні виняткових множин відіграють важливу роль в різних галузях математики. Так, добре відомою є роль леми про логарифмічну похідну в доведенні другої основної теореми теорії розподілу значень мероморфних функцій; важливими в неванліннівській теорії та її застосуваннях до диференціальних, функціональних та різницевих рівнянь є оцінка модуля логарифмічної похідної. Оцінки логарифмічної похідної зовні виняткових множин використовували у своїх дослідженнях В. Хейман і Дж. Майлз для вивчення швидкості зростання мероморфних функцій та їх похідних, О. Б. Скасків — похідних абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, А. А. Гольдберг — функцій Міттаг-Леффлера, М. М. Шеремета та його учні — функцій обмеженого індексу та l-індексу, В. Рудін, І. Е. Чижиков і Л. І. Коляса — субгармонійних функцій та інш. Логарифмічну похідну поліномів, зокрема виняткові множини, на яких вона необмежена, вивчали А. Макінтайр, В. Фукс, В. Я. Ейдерман, Дж. М. Андерсон та інш.

Тому дослідження поводження логарифмічної похідної цілих функцій повільного зростання та її характеристик є актуальною задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетних науково-дослідних тем кафедр математичного моделювання і математичного та функціонального аналізу Львівського національного університету імені Івана Франка "Нові методи комплексного та функціонального аналізу в теорії мероморфних і субгармонійних функцій, теорії операторів та нелінійних динамічних систем"(МА-107 Ф, номер держреєстрації 0112U001272, 2012-2014 рр.), "Інваріантні функціональні підпростори в нелінійних однорідних просторах та обернені задачі теорії операторів"(МА-06 Ф, номер держреєстрації 0115U003250, 2015-2017 рр.).

Мета і задачі дослідження. *Мета* дисертаційної роботи полягає у встановленні та дослідженні зв'язку між величинами, які характеризують асимптотичне поводження логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку та розподілом її нулів.

Об'єктом дослідження є цілі функції нульового порядку та їх логарифмічна похідна.

Предметом дослідження є взаємозв'язки між поводженням основних характеристик логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку та розподілом її нулів.

У дисертаційній роботі поставлено такі *завдання*:

— дослідити взаємозв'язок між кутовою υ-щільністю нулів цілої функції нульового порядку та асимптотикою її логарифмічної похідної $F = zf'/f$;
— одержати зв'язки між регулярним зростанням логарифмічної похідної цілої функції повільного зростання, коефіцієнтами Фур'є F та зростанням F в $L^p[0, 2\pi]$-метриці;
— виділити підкласи цілих функцій нульового порядку, для яких поводження характеристик логарифмічної похідної F рівносильне існуванню кутової υ-щільності її нулів.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач в дисертаційній роботі використовуються методи теорії цілих функцій та функцій комплексної змінної, зокрема метод рядів Фур'є, методи математичного і функціонального аналізу, а також деякі прийоми та результати робіт А. А. Гольдберга, М. Е. Коренкова, Я. В. Василь-

ківа та М. В. Заболоцького.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі одержані в дисертаційній роботі наукові результати є новими. У роботі вперше отримано:

— необхідні умови існування кутової v-щільності нулів цілої функції нульового порядку в термінах поводження її логарифмічної похідної та показано, що ці умови не є достатніми;
— зв'язки між регулярними поводженнями логарифмічної похідної F, її коефіцієнтів Фур'є та p-норми F в просторі $L^p[0, 2\pi]$, $1 \leqslant p < +\infty$, цілої функції повільного зростання;
— критерії існування кутової v-щільності нулів в деякому підкласі цілих функцій f нульового порядку в термінах асимптотичного поводження їх логарифмічної похідної F; регулярного зростання коефіцієнтів Фур'є F; збіжності F за p-нормою в просторі $L^p[0, 2\pi]$.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати дисертації мають теоретичний характер і є певним внеском в теорію аналітичних функцій. Вони можуть бути використані у подальших дослідженнях в теорії цілих функцій та її застосуваннях, а також в інших розділах сучасної математики.

Особистий внесок здобувача. Усі основні наведені у роботі результати отримані автором самостійно. У спільних з науковим керівником публікаціях М. В. Заболоцькому належить постановка задач, деякі ідеї щодо їх розв'язання, загальне керівництво роботою та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Усі основні результати дисертації доповідались та обговорювались на: міжнародній конференції "Комплексний аналіз і суміжні питання"(Львів, 23-28 вересня 2013 р.); всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 25 лютого - 1 березня 2015 р.); міжнародній математичній конференції імені В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25-28 серпня 2015 р.); міжнародній конференції "Комплексний аналіз і суміжні питання"(Львів, 30 березня - 4 липня 2016 р.); XVIII міжнародній конференції з теорії аналітичних функцій і суміжних тем (Холм, Польща, 26-29 липня 2016 р.).

Про результати дисертаційної роботи також доповідалося на семінарі з теорії функцій (Вюрцбург, Німеччина, керівники — проф. О.

Roth, проф. S. Ruscheweyh); Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники — проф. А. А. Кондратюк, проф. О. Б. Скасків); семінарі з теорії аналітичних функцій (Дрогобич, керівник — проф. Б. В. Винницький); науковому семінарі з теорії аналітичних функцій у Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, керівник — проф. П. В. Філевич).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 14 наукових працях, з яких 5 ([1-5]) — у фахових виданнях із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України (1 ([3]) — без співавторів, 2 ([1, 5]) — у наукових фахових виданнях, які включено до міжнародної наукометричної бази даних "Scopus"), 5 ([6-10]) — у матеріалах міжнародних наукових конференцій, 4 ([11-14]) — у матеріалах всеукраїнських наукових конференцій.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків і списку використаних джерел, який налічує 88 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 112 сторінок, обсяг списку використаних джерел – 12 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обгрунтована актуальність дисертаційного дослідження, визначені мета, завдання та методи досліджень, вказано наукову новизну і практичне значення отриманих результатів, наведено форми апробації одержаних результатів, описано особистий внесок здобувача, кількість публікацій, структура і обсяг дисертації.

У **першому розділі** дисертаційної роботи наведено необхідні означення та твердження, пов'язані з тематикою досліджень, подано огляд літератури за темою дисертації та сформульовано основні задачі, розв'язанню яких присвячена дисертаційна робота. У *третьому підрозділі* викладено основні результати дисертаційної роботи.

У **другому розділі** дисертації вивчаються зв'язки між існуванням кутової υ-щільності нулів цілої функції нульового порядку f, регулярними поводженнями її логарифмічної похідної F, коефіцієнтів Фур'є F та збіжністю F в $L^p[0, 2\pi]$-метриці.

Будемо говорити, що множина $E \subset \mathbb{C}$ має верхню μ-щільність, $1 < \mu \leqslant 2$, якщо її можна покрити послідовністю кругів $\{z\colon |z - z_j| <$

$r_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, $z_j \to \infty$, таких, що

$$D_\mu(E) \colon = \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\mu} \sum_{|z_j|\leqslant r} r_j^\mu = \eta,\ 0 \leqslant \eta < +\infty.$$

Сім'ю таких множин позначимо C_η^μ.

Через $\mathcal{E}_\delta$ позначимо сім'ю вимірних множин $G \subset \mathbb{R}_+$ таких, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{mes}(G \cap [0, r])}{r} \leqslant \delta, \quad 0 \leqslant \delta < 1.$$

У випадку $\delta = 0$ клас $\mathcal{E}_0$ позначатимемо через E_0 і множини з цього класу назвемо E_0-множинами.

Нехай L клас додатних, неспадних, необмежених, неперервно диференційовних на $\mathbb{R}_+$ функцій υ таких, що $r\upsilon'(r)/\upsilon(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Функції $\upsilon_1, \upsilon_2 \in L$ будемо вважати еквівалентними і ототожнювати, якщо $\upsilon_1(r) \sim \upsilon_2(r)$, $r \to +\infty$. Клас L співпадає з класом повільно зростаючих до $+\infty$ функцій l таких, що

$$l(2x) \sim l(x), \quad x \to +\infty.$$

Нехай $n(r, \alpha, \beta)$ – кількість нулів цілої функції в секторі $\{z \colon |z| \leqslant r, \alpha \leqslant \arg z < \beta\}$, $0 \leqslant \alpha < \beta < 2\pi$. Позначимо через $H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$, клас цілих функцій f нульового порядку, для яких

$$0 < \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{\upsilon(r)} < +\infty,$$

$n(r) = n(r, 0, 2\pi)$. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $f(0) = 1$, $\upsilon(0) = 0$.

Будемо говорити, що нулі функції $f \in H_0(\upsilon)$ мають υ-щільність (кутову υ-щільність), якщо існує границя

$$\Delta \colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{\upsilon(r)} \quad \left(\Delta(\alpha, \beta) \colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{\upsilon(r)}\right.$$

для всіх α і β, що не належать деякій не більш ніж зліченній множині з $[0, 2\pi]$), $0 < \Delta < +\infty$.

Нехай $F(z) = z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ логарифмічна похідна цілої функції нульо-

вого порядку f відносно $\ln z$, $c_k(r,F) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(re^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi$, $k \in \mathbb{Z}$, її коефіцієнти Фур'є. Вони визначені для $r \neq |a_j|$, де (a_j) послідовність нулів f. Нехай $\Omega = \{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$, де (a_n) – послідовність нулів цілої функції f, розташованих в порядку неспадання їх модулів.

В *підрозділі 2.1* доведено апроксимаційну теорему для логарифмічної похідної цілих функцій повільного зростання, яка відіграє важливу роль в наших дослідженнях.

Теорема 2.1. *Нехай $\upsilon \in L$, $f_1, f_2 \in H_0(\upsilon)$, послідовності нулів $(a_{1,k})$, $(a_{2,k})$ відповідно функцій f_1, f_2 мають υ-щільність, $|a_{1,k}| = |a_{2,k}|$, $|\arg a_{1,k} - \arg a_{2,k}| < \delta$. Тоді для будь-яких $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $1 < \mu \leqslant 2$ існують $\delta > 0$ і множина E, $D_\mu(E) < \eta$, така, що*

$$|F_1(z) - F_2(z)| < \varepsilon\upsilon(r), \quad z \notin E.$$

В *підрозділі 2.2* знайдено асимптотику логарифмічної похідної F зовні деякої C_0^α-множини, $1 < \alpha \leqslant 2$, за умови, що нулі цілої функції $f \in H_0(\upsilon)$ мають кутову υ-щільність.

Теорема 2.2. *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ і нулі функції f мають кутову υ-щільність. Тоді існує множина $E \in C_0^\alpha$, $1 < \alpha \leqslant 2$, така, що*

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty, \quad re^{i\varphi} \notin E.$$

Доведення цієї теореми проведено у три етапи. Спершу теорема 2.2 доводиться для цілої функції f з від'ємними нулями, потім це доведення узагальнюється для f з нулями, розташованими на скінченній системі променів. Перехід до загального випадку розташування нулів здійснюється за допомогою теореми 2.1.

В *підрозділі 2.3* досліджується питання взаємозв'язків між регулярним поводженням логарифмічної похідної F, цілої функції f нульового порядку, регулярним поводженням коефіцієнтів Фур'є її логарифмічної похідної та існуванням кутової υ-щільності нулів f.

Через $\lim\limits_{r\to+\infty}{}^*$ позначаємо прямування до границі по всіх $r \to +\infty$ за винятком тих, які належать деякій E_0-множині.

Теорема 2.3. *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ і існує така множина $E \in C_0^\alpha$, $1 < \alpha \leqslant 2$, що*

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty, \quad re^{i\varphi} \notin E.$$

Тоді для $k \in \mathbb{Z}$ існують границі

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \quad \lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0, \quad k \neq 0. \tag{2.18}$$

З теорем 2.2, 2.3 отримуємо таке твердження.

Наслідок 2.1. *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ і нулі функції f мають кутову υ-щільність. Тоді для $k \in \mathbb{Z}$ існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \quad \lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0, \quad k \neq 0.$$

Питання зв'язку між коефіцієнтами Фур'є $c_k(r,F)$ та регулярним зростанням в $L^p[0,2\pi]$-метриці логарифмічної похідної F цілої функції нульового порядку досліджено у *підрозділі 2.4*. Основними в цьому підрозділі є наступні твердження.

Теорема 2.4. *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ і для $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0.$$

Тоді існує множина $G \in \mathcal{E}_\delta$, $0 < \delta < 1$, така, що для довільного $p \in [1,+\infty)$

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{\upsilon(r)} \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty, \quad r \notin G.$$

Теорема 2.5. *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ і виконуються співвідношення (2.18). Тоді існує множина $G \in \mathcal{E}_\delta$, $0 < \delta < 1$, така, що для $p \in [1,+\infty)$*

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi})}{\upsilon(r)} - \Delta \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty, \quad r \notin G.$$

Виявляється, що на відміну від цілих функцій додатного скінченного порядку, для яких аналоги теорем 2.2–2.4 є критеріями, твердження обернені до теорем 2.2–2.4 неправильні. В *підрозділі 2.5* побудовано приклад функції з класу $H_0(\upsilon)$, нулі якої не мають кутової υ-щільності.

Теорема 2.6. *Для довільної функції $\upsilon \in L$ існують функція $f \in$*

$H_0(\upsilon)$ і множина $E \in C_0^2$ такі, що

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(1), \quad z = re^{i\varphi} \to \infty, \quad z \notin E;$$

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0, \quad k \neq 0;$$

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{\upsilon(r)} \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty,\ r \notin G,\ G \in \mathcal{E}_\delta,\ 0 < \delta < 1$$

і нулі f не мають кутової υ-щільності.

В **третьому розділі** дисертаційної роботи досліджується, за яких умов, накладених на розподіл нулів цілої функції f, будуть правильні й обернені твердження до теорем 2.2–2.4. Виявляється, що у випадку цілої функції повільного зростання для того, щоб отримати результати, які дадуть нам не лише необхідні, а й достатні умови для існування кутової υ-щільності нулів f, потрібно розглянути випадок розташування нулів на скінченній системі променів і дещо точніші асимптотики характеристик логарифмічної похідної F.

Нехай $\Gamma_m = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \{z\colon \arg z = \theta_j\} = \bigcup\limits_{j=1}^{m} l_{\theta_j}$, $-\pi \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < \pi$, — скінченна система променів. Розглянемо підклас цілих функцій з класу $H_0(\upsilon)$, нулі яких лежать на скінченній системі променів Γ_m, і позначимо його $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$. Для $\widetilde{\upsilon} \in L$ приймемо

$$\upsilon(r) = \int\limits_0^r \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t} dt,$$

$\upsilon(0) = 0$.

Покладемо $n(r, \theta_j; f) = n(r, \theta_j)$ – кількість нулів функції $f \in H_0(\upsilon)$, що лежать на промені $l_{\theta_j} = \{z\colon \arg z = \theta_j\}$, модулі яких не перевищують r, $h_j(\theta) = (\theta - \pi - \theta_j)$, $\theta_j < \theta < \theta_j + 2\pi$, а $\widehat{h}_j(\theta)$ – її періодичне продовження з $(\theta_j, \theta_j + 2\pi)$ на $\mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$.

В *підрозділі 3.1* для цілої функції з підкласу $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ доведено наступний аналог теореми 2.2.

Теорема 3.1. *Нехай $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$, для кожного $j = \overline{1, m}$*

$$n(r, \theta_j) = \Delta_j \upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad r \to +\infty, \tag{3.1}$$

$\Delta = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j$, $H_f(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j \widehat{h}_j(\theta)$, $\Delta_j \geqslant 0$. *Тоді для* $\theta \neq \theta_j$,

$$F(re^{i\theta}) = \Delta\upsilon(r) + iH_f(\theta)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad r \to +\infty,$$

причому для довільного $\delta > 0$ *останнє співвідношення виконується рівномірно щодо* θ *на множині* $[-\pi, \pi) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} (\theta_j - \delta, \theta_j + \delta)$.

На основі цього твердження знайдено достатню умову існування кутової υ-щільності нулів функції $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ в термінах асимптотики її логарифмічної похідної.

Теорема 3.2. *Нехай* $G \in L^1[0, 2\pi]$, $\Delta > 0$, $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і для* $\theta \neq \theta_j$

$$F(re^{i\theta}) = \Delta\upsilon(r) + iG(\theta)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad r \to +\infty, \tag{3.6}$$

причому для довільного $\delta > 0$ *співвідношення (3.6) виконується рівномірно щодо* θ *на множині* $[-\pi, \pi) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} (\theta_j - \delta, \theta_j + \delta)$. *Тоді нулі* f *мають кутову* υ*-щільність, причому для всіх* $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} \theta_j$ *виконується*

$$\Delta(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \left(G(\alpha) - G(\beta) + \Delta(\beta - \alpha) \right).$$

Зв'язок між кутовою υ-щільністю нулів цілої функції з класу $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ і коефіцієнтами Фур'є її логарифмічної похідної вивчається в *підрозділі 3.2*. Основною теоремою цього підрозділу є теорема 3.4, поштовхом до сформулювання якої стала теорема 3.3.

Теорема 3.3. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і виконуються співвідношення (3.1). Тоді*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{c_0(r, F) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = 0, \qquad \lim_{r \to +\infty, r \notin \Omega} \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

де $\delta_k = -\dfrac{1}{k} \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j e^{-ik\theta_j}$.

Теорема 3.4. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і для* m *послідовних цілих*

чисел $k = \overline{k_0, k_0 + m - 1}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, *існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \qquad \lim_{r\to+\infty, r\notin\Omega} \frac{c_k(r,F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = \delta_k, \quad k \neq 0.$$

Тоді нулі f *мають кутову* υ*-щільність.*

В *підрозділі 3.3* знайдено необхідні та достатні умови для існування кутової υ-щільності нулів функції $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ в термінах збіжності її логарифмічної похідної за p-нормою в просторі $L^p[0, 2\pi]$.

Теорема 3.5. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і виконуються співвідношення (3.1). Тоді*

$$\left\| \frac{F(re^{i\theta}) - n(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - iH_f(\theta) \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty,$$

де $H_f(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j \widehat{h}_j(\theta)$, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j$.

Теорема 3.6. *Нехай* $G \in L^1[0, 2\pi]$, $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і*

$$\left\| \frac{F(re^{i\theta}) - n(r)}{\tilde{\upsilon}(r)} - iG(\theta) \right\|_p \to 0, \ r \to +\infty.$$

Тоді нулі f *мають кутову* υ*-щільність, причому* $\int\limits_0^{2\pi} G(\theta) d\theta = 0$.

Обернені твердження до теорем 2.3 і 2.4 розділу 2 без умови розташування нулів на скінченній системі променів, як у теоремах 3.3, 3.5 розділу 3, можливі лише за умови розгляду деяких уточнених співвідношень для k-тих коефіцієнтів Фур'є $c_k(r, F)$ та збіжності F в $L^p[0, 2\pi]$-метриці. Ці твердження доведено в *підрозділі 3.4*.

Теорема 3.7. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, $\Delta > 0$ *та існує функція* $G \in L^1[0, 2\pi]$ *така, що*

$$\lim_{r\to+\infty} \left\| \frac{F(re^{i\theta}) - \Delta\upsilon(r)}{\tilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_p = 0.$$

Тоді існують границі

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \qquad \lim_{r\to+\infty, r\notin\Omega} \frac{c_k(r,F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = c_k, \quad k \neq 0. \tag{3.21}$$

Теорема 3.8. *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ та існують границі (3.21). Тоді нулі f мають кутову υ-щільність.*

З теорем 3.7 і 3.8 випливає наступне твердження.

Наслідок 3.2. *Нехай $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, $\Delta > 0$ та існує функція $G \in L^1[0, 2\pi]$ така, що*

$$\lim_{r \to +\infty} \left\| \frac{F(re^{i\theta}) - \Delta\upsilon(r)}{\tilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_p = 0.$$

Тоді нулі f мають кутову υ-щільність.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розв'язанню ряду актуальних задач теорії цілих функцій, а саме: дослідженню взаємозв'язків між розподілом нулів цілої функції нульового порядку і регулярним зростанням її логарифмічної похідної F та її основних характеристик, серед яких коефіцієнти Фур'є F і збіжність F в $L^p[0, 2\pi]$-метриці.

У роботі знайдено необхідні умови існування кутової υ-щільності нулів цілої функції нульового порядку в термінах поводження її логарифмічної похідної та показано, що ці умови не є достатніми.

В дисертації досліджено взаємозв'язки між регулярними поводженнями логарифмічної похідної F, її коефіцієнтів Фур'є та p-норми F в просторі $L^p[0, 2\pi]$, $1 \leqslant p < +\infty$, цілої функції повільного зростання. Зокрема, показано, що з асимптотики логарифмічної похідної F зовні деякої виняткової множини випливає регулярне поводження її коефіцієнтів Фур'є. Встановлено, що регулярне поводження коефіцієнтів Фур'є $c_k(r, F)$, $k \neq 0$, є достатньою умовою збіжності логарифмічної похідної F функції $f \in H_0(\upsilon)$ за нормою простору $L^p[0, 2\pi]$, $p \geqslant 1$.

У роботі виділено підклас цілих функцій f нульового порядку, в якому отримано критерії існування кутової υ-щільності нулів в термінах асимптотичного поводження їх логарифмічної похідної F; регулярного зростання коефіцієнтів Фур'є F; збіжності F за p-нормою в просторі $L^p[0, 2\pi]$. Для цілих функцій цього підкласу встановлено уточнені асимптотичні співвідношення для логарифмічної похідної та її коефіцієнтів Фур'є. Показано, що деякі з цих співвідношень також є достатніми умовами існування кутової υ-щільності нулів для всього класу цілих функцій нульового порядку.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані для подальшого розвитку теорії цілих функцій в різних напрямках.

Основні результати дисертації є новими і носять завершений ха-

рактер. При їх отриманні використовувались методи комплексного та математичного аналізу, сучасні методи теорії цілих функцій.

Достовірність результатів дисертації підтверджується повними та строгими доведеннями, а також тим, що вони опубліковані у фахових журналах і були оприлюднені на багатьох міжнародних наукових конференціях і спеціалізованих наукових семінарах.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Заболоцький М. В.* Логарифмічна похідна і кутова щільність нулів цілої функції нульового порядку / *М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова* // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 4. — С. 473–481.
2. *Заболоцький М. В.* Асимптотичне поводження логарифмічної похідної цілих функцій нульового порядку / М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 237–241.
3. *Мостова М.* Зв'язок між асимптотикою логарифмічної похідної і кутовою щільністю нулів цілих функцій повільного зростання / *М. Р. Мостова* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2015. — Вип.80. — С. 112–116.
4. *Mostova M. R.* Convergence in $L^p[0, 2\pi]$-metric of logarithmic derivative and angular υ-density for zeros of entire function of slowly growth / *M. R. Mostova, M. V. Zabolotskyj* // Carpathian Math. Publ. — 2015. — V. 7, № 2. — P. 209–214.
5. *Заболоцький М. В.* Достатні умови існування кутової υ-щільності нулів цілої функції нульового порядку / *М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова* // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 4. — С. 506–516.
6. *Заболоцький М. В.* Регулярне зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці логарифмічної похідної цілої функції та її коефіцієнтів Фур'є / *М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова* // Міжнародна конференція "Комплексний аналіз і суміжні питання " , Львів, 23-28 вересня, 2013 : тези доповідей. — Львів, 2013. — С. 103.
7. *Mostova M. R.* Logarithmic derivative and angular density of zeros of entire functions of zero order / *M. R. Mostova, M. V. Zabolotskyi* // XVII-th International Conference "Analytic functions and Related Topics" , June 29 - July 2 2014, Chelm, Poland : abstracts of reports. — Chelm, 2014. — P. 37.

8. *Mostova M.* Asymptotic behavior of logarithmic derivative and angular density of zeros for entire function / *M. Mostova, M. Zabolotskyi* // 10-th International V. Skorobohatko Mathematical Conference, Drohobych, Ukraine, August 25-28 2015 : abstracts of reports. — Lviv, 2015. — P. 109.
9. *Mostova M.* The logarithmic derivative of entire functions that close to polynomials / *M. Mostova, M. Zabolotskyi* // International Conference "Complex analysis and related topics" , Lviv, May 30 - June 4, 2016: abstracts of reports. — Lviv, 2016. — P. 57.
10. *Mostova M. R.* Logarithmic derivative of entire functions with zeros lying on a finite system of rays / *M. Mostova, M. Zabolotskyi* // XVIII-th International Conference on Analytic functions and Related Topics, June 26-29, 2016, Chelm, Poland: abstracts of reports. — Chelm, 2016. — P. 43.
11. *Мостова М. Р.* Зв'язок між кутовою щільністю нулів цілої функції та регулярним зростанням її логарифмічної похідної / *М. Р. Мостова* // II всеукраїнська наукова конференція "Застосування математичних методів в науці і техніці" , Луцьк, 22-23 листопада 2013 року : тези доповідей. — Луцьк, 2013. — С. 77–78.
12. *Заболоцький М. В.* Апроксимаційна теорема для логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку / *М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , Ворохта, 25 лютого - 1 березня 2015 : тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2015. — С. 22–23.
13. *Заболоцький М. В.* Асимптотичне поводження коефіцієнтів Фур'є логарифмічної похідної і кутова щільність нулів цілої функції / *М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова* // Наукова конференція присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге, Чернівці, 1-4 липня, 2015 : тези доповідей. — Чернівці, 2015. — С. 39.
14. *Заболоцький М. В.* Достатні умови існування кутової v-щільності нулів цілої функції нульового порядку / *М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , Ворохта, 24-27 лютого 2016 року : тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2016. — С. 77–78.

АНОТАЦІЯ

Мостова М.Р. Логарифмічна похідна близьких до поліномів цілих функцій. — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2016.

У дисертаційній роботі досліджено взаємозв'язки між розподілом нулів цілої функції нульового порядку і регулярним поводженням таких характеристик її логарифмічної похідної, як асимптотика, коефіцієнти Фур'є, збіжність в $L^p[0;2\pi]$-метриці. Зокрема, знайдено необхідні умови існування кутової υ-щільності нулів цілої функції нульового порядку в термінах поводження її логарифмічної похідної та показано, що ці умови не є достатніми; доведено критерії існування кутової υ-щільності нулів в деякому підкласі цілих функцій нульового порядку в термінах асимптотичного поводження їх логарифмічної похідної F, регулярного зростання коефіцієнтів Фур'є F, збіжності F за p-нормою в просторі $L^p[0,2\pi]$; для всього класу цілих функцій повільного зростання отримано достатні умови існування кутової υ-щільності нулів в термінах коефіцієнтів Фур'є і збіжності в $L^p[0,2\pi]$-метриці логарифмічної похідної цих функцій.

Ключові слова: ціла функція, нульовий порядок, кутова щільність нулів, логарифмічна похідна, коефіцієнти Фур'є, регулярне зростання в $L^p[0,2\pi]$-метриці.

ABSTRACT

Mostova M.R. The logarithmic derivative of entire functions that close to polynomials. — On the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. — Ivan Franko Lviv National University, Lviv, 2016.

In the thesis the relationships between the distribution of zeros of a zero-order entire function and regular behavior of such characteristics of its logarithmic derivative as the asymptotic, the Fourier coefficients, the convergence in $L^p[0;2\pi]$-metric are investigated. In particular, the necessary conditions for the existence of angular υ-density for zeros of a zero-order entire function are found in terms of the behavior of its

logarithmic derivative and there are shown that these conditions are not sufficient; criteria for the existence of angular υ-density for zeros in some subclass of entire functions of order zero are proved in terms of the asymptotic behavior of its logarithmic derivative F, regular growth of the Fourier coefficients of F, convergence of F by p-norm in the space $L^p[0, 2\pi]$; the sufficient conditions for the existence of angular υ-density for zeros are obtained for the whole class of entire functions of slowly growth in terms of the Fourier coefficients and convergence in $L^p[0, 2\pi]$-metric of the logarithmic derivative of these functions.

Key words: entire function, zero order, angular density of zeros, logarithmic derivative, Fourier coefficients, regular growth in $L^p[0, 2\pi]$-metric.

АННОТАЦИЯ

Мостова М. Р. *Логарифмическая производная близких к полиномов целых функций.* – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2016.

В диссертации исследуются свойства целых функций близких к полиномов. В ней развязана такая задача, как установление связей между регулярным поведением величин, характеризующих асимптотическое поведение логарифмической производной, и регулярным распределением аргументов нулей этих функций.

Диссертация состоит из списка условных обозначений, введения, 3 разделов разбитых на подразделы, выводов и списка используемых источников. Объем диссертации составляет 112 страниц, список используемых источников из 88 наименований — 12 страниц.

Во введении дано обоснование актуальности темы, указываются цель и задачи исследования, научная новизна, практическое значение и апробация полученных результатов, количество публикаций.

В первом разделе приводится обзор результатов, имеющих непосредственное отношение к теме диссертационной работы и основных результатов диссертации.

В разделе 2 для целых функций нулевого порядка, нули которых имеют угловую плотность, получено асимптотику логарифмической

производной, доказано существование регулярного роста коэффициентов Фурье логарифмической производной, показано сходимость логарифмической производной по норме пространства $L^p[0, 2\pi]$ вне некоторых исключительных множеств. В подразделе 2.1 получена аппроксимационная теорема для логарифмической производной целых функций медленного роста, которая играет важную роль в исследовании связи между угловой плотностью нулей и асимптотикой логарифмической производной. В подразделе 2.5 построен пример целой функции нулевого порядка, логарифмическая производная которой эквивалентна счетной функции ее нулей вне некоторого множества и нули не имеют угловой плотности.

В разделе 3 исследуются достаточные условия существования угловой плотности нулей целых функций медленного роста. В подразделах 3.1–3.3 для целых функций нулевого порядка с нулями на конечной системе лучей получены уточненные соотношения для асимптотики логарифмической производной, регулярного роста ее коэффициентов Фурье, сходимости логарифмической производной по норме пространства $L^p[0, 2\pi]$. Также установлено, что с этих соотношений следует существование угловой плотности нулей целой функции. В подразделе 3.4 доказывается, что некоторые уточненные соотношения для коэффициентов Фурье, сходимости логарифмической производной по норме пространства $L^p[0, 2\pi]$ есть также и достаточными условиями для существования угловой плотности нулей целой функций в более общем случае, а не только в случае размещения ее нулей на конечной системе лучей.

Ключевые слова: целая функция, нулевой порядок, угловая плотность нулей, логарифмическая производная, коэффициенты Фурье, сходимость в $L^p[0, 2\pi]$-метрике.