МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Львівський національний університет
імені Івана Франка

Тимків Іван Романович

УДК 517.95+511.2

БАГАТОТОЧКОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Науковий керівник: член-кореспондент НАН України
доктор фізико-математичних наук, професор
Пташник Богдан Йосипович,
завідувач відділу математичної фізики
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Бокало Микола Михайлович,
професор кафедри диференціальних рівнянь
Львівського національного університету
імені Івана Франка;

доктор фізико-математичних наук, професор
Городецький Василь Васильович,
завідувач кафедри алгебри та інформатики
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича.

Захист відбудеться „___“ ______________ 2017 р. о ____ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, аудиторія 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий „___“ ______________ 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Остудін Б. А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною для еволюційних рівнянь та їх систем активно досліджуються з другої половини XX-го століття. Інтерес до вивчення цих задач зумовлений потребами загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними та їхніми застосуваннями до потреб практики. У роботах А. Т. Асанової, Ю. М. Березанського, В. М. Борок, П. М. Вабіщевича, Ю. М. Валіцького, В. І. Горбачук, М. Л. Горбачука, В. В. Городецького, О. О. Дезіна, Я. М. Дріня, П. І. Каленюка, Е. Кенне, Т. І. Кігурадзе, І. Я. Кміть, В. П. Лавренчука, О. А. Макарова, В. А. Маловічка, М. І. Матійчука, Ю. О. Митропольського, З. М. Нитребича, І. Д. Пукальського, В. К. Романка, О. Л. Скубачевського, Л. В. Фардиголи, Дж. Шабровскі (J. Chabrovski), М. Й. Юрчука та інших авторів розроблено методи дослідження багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними з широких класів. Цими авторами розглянуто випадки коректно поставлених задач.

Проте багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними є, назагал, некоректними за Адамаром, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

У роботах Б. Й. Пташника та його учнів П. Б. Василишина, В. С. Ільківа, І. С. Клюс, Л. І. Комарницької, Б. О. Салиги, Л. П. Силюги, М. М. Симотюка, П. І. Штабалюка використано метричний підхід для дослідження умовно коректних задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для лінійних гіперболічних та безтипних рівнянь, а також для деяких класів параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Було доведено метричні твердження про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків розглядуваних задач, з яких випливає коректність задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задачі.

В той же час задачі з локальними багатоточковими умовами за часовою змінною для параболічних рівнянь і систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами є слабо дослідженими. Встановлення умов коректної розв'язності таких задач є предметом досліджень даної дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертації отримані в рамках виконання держбюджетної теми „Дослідження коректності, побудова та вивчення властивостей розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач для некласичних еволюційних рівнянь" (номер держреєстрації № 0110U004817) відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України та проекту № 41.1/004 „Розподіли нулів поліномів і гладких функцій та їх застосування при дослідженні умовно коректних крайових задач математичної фізики" (номер держреєстрації № 0111U006625) Державного фонду фундаментальних досліджень України.

Мета і задачі дослідження. *Метою роботи* є дослідження коректності задач із локальними багатоточковими умовами за часовою змінною та певними умовами (періодичності, типу Діріхле) за просторовими змінними для лінійних параболічних рівнянь та систем зі змінними коефіцієнтами в обмежених циліндричних областях. Задачами дослідження є:

1) встановити умови існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних розв'язків двоточкових задач для параболічних за Петровським рівнянь та систем рівнянь другого порядку за часовою змінною зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами;

2) знайти умови коректності багатоточкової задачі з простими вузлами інтерполяції для параболічних за Петровським рівнянь вищих порядків за часовою змінною та $2\vec{b}$-параболічних рівнянь з оператором Бесселя за однією з просторових змінних;

3) встановити умови коректної розв'язності багатоточкової задачі з кратними вузлами інтерполяції для параболічних рівнянь із факторизованим оператором з коефіцієнтами, залежними як від часової, так і від просторових змінних;

4) знайти умови коректності задач з багатоточковими умовами, які містять дію диференціальних виразів за просторовими змінними на значення невідомої функції та її похідних у вузлах інтерполяції, для параболічних рівнянь і систем рівнянь вищих порядків за часовою змінною;

5) довести метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків розглядуваних задач.

Об'єкт дослідження: задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною для лінійних параболічних рівнянь і систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Предмет дослідження: умови однозначної розв'язності багатоточкових задач для лінійних параболічних рівнянь і систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами та побудова їх розв'язків.

Методи дослідження: методи функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь, алгебри та метричної теорії чисел.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

1) встановлено умови коректності двоточкової задачі для параболічних за Петровським рівнянь другого порядку за часовою змінною з операторами Штурма-Ліувілля за просторовими змінними; доведено, що такі умови виконуються для довільних фіксованих вузлів інтерполяції та для майже всіх (стосовно міри Гаусдорфа) векторів, складених із коефіцієнтів рівнянь;

2) встановлено однозначну розв'язність багатоточкової задачі з простими

вузлами для параболічних за Петровським рівнянь вищих порядків за часовою змінною з операторами Штурма-Ліувілля за просторовими змінними та для $2\vec{b}$-параболічних рівнянь з оператором Бесселя за однією із просторових змінних; доведено, що умови розв'язності виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компоненти яких є вузлами інтерполяції;

3) знайдено умови коректності багатоточкової задачі для параболічних за Петровським рівнянь коефіцієнти яких залежать від просторових змінних, а також для параболічних рівнянь із факторизованим оператором з коефіцієнтами залежними як від часової, так і від просторових змінних; доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків цих задач;

4) встановлено умови коректності двоточкової задачі для параболічних за Петровським систем другого порядку за часовою змінною та багатоточкової задачі для систем вищих порядків за часовою змінною і доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів систем, коефіцієнтів багатоточкових умов та значень вузлів інтерполяції;

5) для всіх розглянутих задач побудовано зображення розв'язків у вигляді рядів Фур'є за системами відповідних функцій.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна застосувати при подальшому вивченні задач з багатоточковими умовами для лінійних і нелінійних параболічних рівнянь та їх систем, а також при дослідженні конкретних задач практики, що моделюються розглянутими задачами.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. У спільних із науковим керівником роботах [1–4] Б. Й. Пташнику належить постановка задач, обговорення та аналіз отриманих результатів. У спільних роботах [5, 8] із М. М. Симотюком співавтору належить ідея доведення метричних теорем.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень доповідались та обговорювалися на: Дванадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2008 р.); Третій міжнародній конференції молодих математиків з диференціальних рівнянь та їхніх застосувань, присвяченій Ярославові Лопатинському (Львів, 2010 р.); Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 2015 р.); Міжнародній науковій конференції „Сучасні проблеми механіки та математики“ (Львів, 2013 р.); Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 2015 р.); Четвертій Всеукраїнській науковій конференції „Нелінійні проблеми аналізу“ (Івано-Франківськ, 2008 р.); Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача

(Львів, 2009 р.); Одинадцятій відкритій науковій конференції професорсько-викладацького складу ІПМФН Національного університету „Львівська політехніка“ (Львів, 2013 р.); Всеукраїнській науковій конференції „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“ (Івано-Франківськ, 2013 р.); засіданнях наукового семінару ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники: член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Б. Й. Пташник, д.ф.-м.н. В. О. Пелих; Львів, 2008–2012, 2014, 2016 рр.); засіданнях Львівського міського семінару з диференціальних рівнянь (керівники: д.ф.-м.н., проф. М. І. Іванчов, д.ф.-м.н., проф. П. І. Каленюк, член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Б. Й. Пташник; Львів, 2010, 2016 рр.); засіданні наукового семінару кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (керівники: д.ф.-м.н., проф. М. І. Матійчук, д.ф.-м.н., проф. І. Д. Пукальський; Чернівці, 2016 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 8 статтях [1–8] (з яких 2 — без співавторів) у фахових наукових журналах; з них 3 статті [2–4] — у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз, а також додатково висвітлено у 10 тезах [9–18] наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 153 сторінки, основний текст — 136 сторінок. Список використаних джерел налічує 137 найменувань і розташований на 17 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Надалі використовуватимемо такі позначення: $\mathbb{R}^p(\mathbb{C}^p)$ $(p \geqslant 1)$ — p-вимірний дійсний (комплексний) простір; $\mathbb{Z}^p$ — множина точок із $\mathbb{R}^p$ з цілими координатами; $\mathbb{N}^p$ — множина точок із $\mathbb{R}^p$ з натуральних координатами; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$; $dx = dx_1 \cdots dx_p$; $\partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right)$; $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$; $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}^p_+$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \cdots + |k_p|$; $b \in \mathbb{N}$; C_n^m, $1 \leq m \leq n$, — кількість комбінацій з n елементів по m; $J_\sigma(t)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, — функція Бесселя першого роду порядку σ; Ω^p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$; $\Pi^p = \{x \in \mathbb{R}^p_+ : x_r \in [0, \pi],\ r \in \{1, \ldots, p\}\}$; $G \subset \mathbb{R}^p$ — обмежена однозв'язна область, ∂G — межа області G, $\overline{G}$ — замикання області G; $Q^p_T = (0, T) \times G$; $\Sigma = [0, T] \times \partial G$; $D^p_T = (0, T) \times \Pi^p$; $\mathbf{X} = \{X_k(x) : k \in K^p\}$ — повна ортонормована система функцій від p змінних $x_1, \ldots, x_p$, де K^p співпадає з $\mathbb{Z}^p$ або з $\mathbb{N}^p$; $\eta_k = (\eta_{k_1}, \ldots, \eta_{k_p})$ — вектор із дійсними компонентами, $|\eta_k| = |\eta_{k_1}| + \ldots + |\eta_{k_p}|$, $k \in K^p$; $w(\alpha, \beta) := w(\alpha, \beta, \eta_k) = |\eta_k|^\alpha \exp(\beta|\eta_k|)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, — простір, одержаний поповненням простору скінченних сум $\varphi(x) = \sum\limits_{k \in K^p} \varphi_k X_k(x)$, за нормою

$\left\|\varphi; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right\| = \sqrt{\sum\limits_{k\in K^p} |\varphi_k|^2 w^2(\alpha,\beta,\eta_k)}$, де $\varphi_k \in \mathbb{C}$; $C^n\Big([0,T]; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\Big)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, — простір функцій $u(t,x) = \sum\limits_{k\in K^p} u_k(t) X_k(x)$, $u_k(t) \in C^n([0,T])$, таких, що для кожного фіксованого $t\in[0,T]$ похідні $\partial_t^j u(t,x) := \sum\limits_{k\in K^p} u_k^{(j)}(t) X_k(x)$, $j\in\{0,1,\ldots,n\}$, належать до простору $E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}$ і є неперервними за t в нормі цього простору

$$\left\|u; C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right)\right\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\|\partial_t^j u(t,\cdot); E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right\|;$$

$\overline{E}^{\mathbf{X},m}_{w(\alpha,\beta)}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$, — простір вектор-функцій $\vec{\varphi}(x) = \mathrm{col}(\varphi^1(x),\ldots,\varphi^m(x))$ таких, що $\varphi^q \in E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}$, $q\in\{1,\ldots,m\}$, із нормою $\left\|\vec{\varphi}; \overline{E}^{\mathbf{X},m}_{w(\alpha,\beta)}\right\| = \max\limits_{1\le q\le m} \left\|\varphi^q; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right\|$; $C^n\left([0,T]; \overline{E}^{\mathbf{X},m}_{w(\alpha,\beta)}\right)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, — простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x),\ldots, u^m(t,x))$ таких, що $u^q \in C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right)$, $q\in\{1,\ldots,m\}$, із нормою $\left\|\vec{u}; C^n\left([0,T]; \overline{E}^{\mathbf{X},m}_{w(\alpha,\beta)}\right)\right\| = \max\limits_{1\le q\le m} \left\|u^q; C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right)\right\|$; $C^{n,\varrho}(\overline{G})$ — клас визначених в $\overline{G}$ функцій, похідні n-го порядку яких задовольняють в $\overline{G}$ умову Ґельдера з показником ϱ, $0<\varrho<1$; $A^{n,\varrho}$ — клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать до класу $C^{n,\varrho}(\overline{G})$.

У **вступі** дисертаційної роботи розкрито сутність і стан наукової проблеми, обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету і задачі дослідження, вказано наукову новизну та апробацію одержаних результатів.

У **першому** розділі дисертації подано короткий огляд праць, які стосуються задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними. Детальніше висвітлено роботи, які є близькими до тематики дисертації.

У **другому** розділі наведено деякі допоміжні твердження з метричної теорії чисел, а також із теорії міри та розмірності Гаусдорфа. Показано, як за допомогою апарату поділених різниць будується фундаментальна система розв'язків звичайного лінійного диференціального рівняння та встановлено ряд властивостей цієї системи. Викладено загальну методику дослідження задач дисертації та проаналізовано структуру розв'язків цих задач.

У **розділі 3** встановлено коректну розв'язність задач з багатоточковими умовами за часовою змінною та певними умовами (періодичності, типу Діріхле) за просторовими змінними для лінійних параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

У **підрозділі 3.1** в області D_T^p розглянуто задачу

$$\prod_{q=1}^{2}\left(\partial_t+\sum_{j=1}^{p}a_j^qL_j^b+A_q(L_1,\ldots,L_p)\right)u(t,x)=0, \tag{1}$$

$$u(t_1,x)=\varphi_1(x),\ u(t_2,x)=\varphi_2(x),\quad 0\le t_1<t_2\le T, \tag{2}$$

$$L_j^m u(t,x)\Big|_{x_j=0}=L_j^m u(t,x)\Big|_{x_j=\pi}=0,\ m\in\{0,1,\ldots,2b-1\},\ j\in\{1,\ldots,p\}, \tag{3}$$

де $a_j^q>0$, $j\in\{1,\ldots,p\}$, $q\in\{1,2\}$, $A_q(L_1,\ldots,L_p):=\sum\limits_{|s|<b}A_s^qL_1^{s_1}\ldots L_p^{s_p}$, $A_s^q\in\mathbb{C}$, $q\in\{1,2\}$; $L_j:=-\partial_{x_j}\left(p_j(x_j)\partial_{x_j}\right)+q_j(x_j)$, $p_j(x_j)\in C^{4b-1}([0,\pi])$, $p_j(x_j)\ge p_{0,j}>0$, $q_j(x_j)\in C^{4b-2}([0,\pi])$, $q_j(x_j)>0$, $x_j\in[0,\pi]$, $j\in\{1\ldots,p\}$.

Нехай λ_{k_j}, $X_{k_j}(x_j), k_j\in\mathbb{N}$, $j\in\{1,\ldots,p\}$, — власні значення та власні функції відповідної задачі $L_jX(x_j)=\lambda X(x_j)$, $X(0)=X(\pi)=0$, $j\in\{1,\ldots,p\}$; $\lambda_k=(\lambda_{k_1},\ldots,\lambda_{k_p})$, $k\in\mathbb{N}^p$; $\mathbf{X_1}:=\{X_{k_1}(x_1)\cdots X_{k_p}(x_p), k\in\mathbb{N}^p\}$; $w_1(\alpha,\vec\beta):=w_1(\alpha,\vec\beta;\lambda_k)=(\lambda_{k_1}^b+\ldots+\lambda_{k_p}^b)^\alpha\exp(\beta_1\lambda_{k_1}^b+\ldots+\beta_p\lambda_{k_p}^b)$, де $\alpha\in\mathbb{R}$, $\vec\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_p)\in\mathbb{R}^p$; $\mu_q(k):=-\sum\limits_{j=1}^{p}a_j^q\lambda_{k_j}^b-A_q(\lambda_{k_1},\ldots,\lambda_{k_p})$, $q\in\{1,2\}$; $\mathcal{M}:=\{k\in\mathbb{N}^p:\mu_1(k)=\mu_2(k)\}$;

$$\Delta_1(k,\vec t):=\begin{cases} e^{\mu_1(k)t_2+\mu_2(k)t_1}\left[e^{(\mu_2(k)-\mu_1(k))(t_2-t_1)}-1\right], & \text{якщо}\quad k\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{M},\\ (t_2-t_1)e^{\mu_1(k)(t_1+t_2)}, & \text{якщо}\quad k\in\mathcal{M},\end{cases}$$

де $\vec t=(t_1,t_2)$.

Теорема 3.1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1) — (3) *у шкалі просторів* $C^2\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec\beta)}\right)$, *де* $\alpha\in\mathbb{R}$, $\vec\beta\in\mathbb{R}^p$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{M},\quad \forall\,\ell\in\mathbb{Z}:\quad (\mu_2(k)-\mu_1(k))(t_2-t_1)\ne 2\pi i\ell. \tag{4}$$

Теорема 3.2. *Нехай справджується умова* (4) *та існують* $\omega\in\mathbb{R}$ *і* $\vec\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_p)\in\mathbb{R}^p$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta_1(k,\vec t)|>(\lambda_{k_1}^b+\ldots+\lambda_{k_p}^b)^{-\omega}\exp\left(-\nu_1\lambda_{k_1}^b-\ldots-\nu_p\lambda_{k_p}^b\right). \tag{5}$$

Якщо $\varphi_1,\varphi_2\in E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\vec\beta_0)}$, *де* $\alpha_0=\alpha+\omega+2$, $\vec\beta_0=\vec\beta+\vec\nu-\vec\phi t_1$, $\vec\phi=(\phi_1,\ldots,\phi_p)$, $0<\phi_j<\min\{a_j^1,a_j^2\}$, $j\in\{1,\ldots,p\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1) — (3) *з простору* $C^2\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec\beta)}\right)$. *Цей розв'язок справджує нерівність*

$$\left\|u;C^2\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec\beta)}\right)\right\|\le C_5\left(\left\|\varphi_1;E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\vec\beta_0)}\right\|+\left\|\varphi_2;E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\vec\beta_0)}\right\|\right).$$

У теоремі 3.3 встановлено ефект підвищення (зі зростанням часу t) гладкості за змінними $x_1,\ldots,x_p$ розв'язку $u(t,x)$ задачі (1) — (3), а в теоремі 3.4 описано задачі вигляду (1) — (3), для яких оцінка (5) виконується для всіх векторів $k\in\mathbb{N}^p$.

Позначимо: $s_j := (\underbrace{0,\ldots,0,b-1}_{j},0,\ldots,0)$, $j\in\{1,\ldots,p\}$, — мультиіндекс довжини p, на j-ому місці якого стоїть число $b-1$, а на решті місць — нулі; $y_j := \mathrm{Im}(A^1_{s_j}-A^2_{s_j})$, $j\in\{1,\ldots,p\}$, $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_p)$; $\vec{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_p)$, $\xi_j=\max\{a^1_j,a^2_j\}$, $j\in\{1,\ldots,p\}$.

Теорема 3.5. *Нехай $\rho\in(p-1;p]$. Для довільних фіксованих t_1,t_2 і для майже всіх (стосовно ρ-міри Гаусдорфа) векторів $\vec{y}\in\mathbb{R}^p$ нерівність* (5) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{N}^p$ при $\omega>\omega_1$, $\vec{\nu}=\vec{\xi}(t_1+t_2)$, де $\omega_1=\frac{p/(2b)+1-1/b}{\rho-p+1}-\frac{b-1}{b}$.*

У **підрозділі 3.2.1** у паралелепіпеді D^p_T розглянуто задачу з умовами (3) та багатоточковими умовами

$$u(t_j,x)=\varphi_j(x),\quad j\in\{1,\ldots,n\},\quad 0\le t_1<\ldots<t_n\le T, \tag{6}$$

для параболічного за Петровським рівняння

$$W(\partial_t,L_1,\ldots,L_p)u:=\sum_{s_0=0}^{n}\sum_{bs_0+|s|=bn}A_{s_0,s}\partial_t^{s_0}L_1^{s_1}\ldots L_p^{s_p}u(t,x)=f(t,x), \tag{7}$$

де $A_{s_0,s}\in\mathbb{C}$, $A_{n,(0)}=1$, L_j, $j\in\{1,\ldots,p\}$, — диференціальні вирази, означені в підрозділі 3.1. Тут система функцій $\mathbf{X_1}$ та послідовність $\{\lambda_k,k\in\mathbb{N}^p\}$, є такими, як в підрозділі 3.1, а $w_2(\alpha,\beta):=w_2(\alpha,\beta;\lambda_k)=|\lambda_k|^\alpha\exp(\beta|\lambda_k|^b)$, де $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Позначимо: $\mu_1(k),\ldots,\mu_{l(k)}(k)$ — корені рівняння $W(\mu,\lambda_{k_1},\ldots,\lambda_{k_p})=0$ з кратностями $n_1(k),\ldots,n_{l(k)}(k)$ відповідно, $n_1(k)+\ldots+n_{l(k)}(k)=n$, які справджують оцінку $\mathrm{Re}\mu_q(k)\le-\delta_1|\lambda_k|^b$, $\delta_1>0$;
$u_{k,q,r_q}(t):=R^{(n_1(k),\ldots,n_{q-1}(k),r_q)}_{(\mu_1(k),\ldots,\mu_{q-1}(k),\mu_q(k))}[\exp(\mu t)]$, $r_q\in\{1,\ldots,n_q(k)\}$, $q\in\{1,\ldots,l(k)\}$, — поділена різниця порядку $n_1(k)+\ldots+n_{q-1}(k)+r_q$ за набором коренів $\mu_1(k),\ldots,\mu_{q-1}(k),\mu_q(k)$ з кратностями $n_1(k),\ldots,n_{q-1}(k),r_q-1$ відповідно, від функції $\exp(\mu t)$; $\Delta_2(k,\vec{t}):=\det\left\|u_{k,q,r_q}(t_j)\right\|^{q\in\{1,\ldots,l(k)\}}_{j\in\{1,\ldots,n\},\,r_q\in\{1,\ldots,n_q(k)\}}$, $k\in\mathbb{N}^p$, де $\vec{t}=(t_1,\ldots,t_n)$.

Встановлено (теорема 3.6), що для єдиності розв'язку задачі (3), (6), (7) у шкалі просторів $C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)$, де $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\forall k\in\mathbb{N}^p\quad\Delta_2(k,\vec{t})\ne0. \tag{8}$$

Наведено приклади задач вигляду (3), (6), (7), для яких виконується або порушується умова (8).

Теорема 3.7. *Нехай справджується умова* (8) *та існують сталі* $\omega, \nu \in \mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{N}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta_2(k, \vec{t})| > |\lambda_k|^{-\omega} \exp(-\nu |\lambda_k|^b). \tag{9}$$

Якщо $f \in C\Big([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_1)}\Big)$, $\varphi_j \in E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_2)}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_0 = \alpha + \omega + bn$, $\beta_1 = \beta + \nu + (T - nt_1)\delta_1$, $\beta_2 = \beta + \nu - (n-1)\delta_1 t_1$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3), (6), (7) *із простору* $C^n\Big([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\Big)$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* f *та* φ_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Доведено (теорема 3.9), що оцінка (9) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{N}^p$ при $\omega > n(n-1)(p+2b)/4$, $\nu = n\delta_2 T$, де $\delta_2 = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}^p} \max\limits_{q \in \{1,\ldots,l(k)\}} \{|\mathrm{Re}\mu_q(k)|/|\lambda_k|^b\}$.

У **підрозділі 3.2.2** в області $\mathcal{D}^p_T = (0,T)\times\Omega^{p-1}\times(0,\ell)$, для $2\vec{b}$-параболічного рівняння

$$W(\partial_t, \partial_{x'}, \mathcal{B}_\sigma)u := \partial_t^n u(t,x) + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{2bs_0+|s|^*=2bn} A_{s_0,s} \partial_t^{s_0} \partial_{x_1}^{s_1} \ldots \partial_{x_{p-1}}^{s_{p-1}} \mathcal{B}_\sigma^{s_p} u(t,x) = f(t,x), \tag{10}$$

досліджено задачу з умовами (6) та умовами 2π-періодичності за змінними $x' = (x_1, \ldots, x_{p-1})$, а за координатою x_p — з умовою

$$\begin{cases} \Big\|u(t,x',0); C([0,T]; E^{\mathbf{X}'}_{w'(\alpha,\beta)})\Big\| < \infty,\ \partial_{x_p}^{2m+1} u(t,x)\Big|_{x_p=0} = 0, \\ m \in \{0,1,\ldots,nb_p-2\}, \quad \mathcal{B}_\sigma^q u(t,x)\Big|_{x_p=\ell} = 0, \quad q \in \{0,1,\ldots,nb_p-1\}, \end{cases} \tag{11}$$

де $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{N}^p$, $p \geq 2$, — заданий вектор, b — найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_p$, $q_j = b/b_j$, $j \in \{1,\ldots,p\}$, $|s|^* := \sum\limits_{j=1}^{p-1} s_j q_j + 2s_p q_p$; $A_{s_0,s} \in \mathbb{C}$, $\mathcal{B}_\sigma = \partial^2_{x_p} + \frac{2\sigma+1}{x_p}\partial_{x_p}$ — оператор Бесселя порядку σ, $\sigma \geq -1/2$; $\mathbf{X}' := \{\exp(ik', x'),\ k' \in \mathbb{Z}^{p-1}\}$; $w'(\alpha,\beta) = \Big(k_1^{2b_1} + \ldots + k_{p-1}^{2b_{p-1}}\Big)^\alpha \exp\Big(\beta(k_1^{2b_1} + \ldots + k_{p-1}^{2b_{p-1}})\Big)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Нехай $j_\sigma(t) := 2^\sigma \Gamma(\sigma+1) J_\sigma(t)/t^\sigma$ — нормована функція Бесселя, θ_{k_p} — корені рівняння $j_\sigma(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$; $\lambda_k := (k', \lambda_{k_p}) = (k_1, \ldots, k_{p-1}, \lambda_{k_p})$, $k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}$, де $\lambda_{k_p} = (\theta_{k_p}/\ell)^2$; $\|\lambda_k^{2\vec{b}}\| = k_1^{2b_1} + \ldots + k_{p-1}^{2b_{p-1}} + \lambda_{k_p}^{b_p}$;
$\mathbf{X_2} = \big\{\exp(ik', x') j_\sigma(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p)/\|j_\sigma(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p)\|, k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}\big\}$, де $\|j_\sigma(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p)\|^2 = (2\pi)^{p-1} \int_0^\ell x_p^{2\sigma+1} j_\sigma^2(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p) dx_p$; $w_3(\alpha,\beta) := w_3(\alpha,\beta;\lambda_k) = \|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^\alpha \exp(\beta\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|)$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\mu_1(k), \ldots, \mu_{l(k)}(k)$ — корені рівняння $W(\mu, ik_1, \ldots, ik_{p-1}, \lambda_{k_p}) = 0$ з кратностями $n_1(k), \ldots, n_{l(k)}(k)$ відповідно, $n_1(k) + \ldots + n_{l(k)}(k) = n$, які справджують оцінку $\mathrm{Re}\mu_q(k) \leq -\delta_3 \|\lambda_k^{2\vec{b}}\|$, $k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}$, $\delta_3 > 0$; $\widetilde{b} = \min\limits_{j \in \{1,\ldots,n\}} \{b_j\}$;

$\delta_4 = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^{p-1}\times\mathbb{N}} \max\limits_{q\in\{1,\ldots,l(k)\}} \{|\mathrm{Re}\mu_q(k)|/\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|\}$.

Для задачі (6), (10), (11) встановлено умови єдиності розв'язку (теорема 3.10) та доведено існування розв'язку з простору $C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha,\beta)}\right)$ для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t}\in[0,T]^n$, якщо $f\in\ C\left([0,T];E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha_0,\beta_1)}\right)$, $\varphi_j\in E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha_0,\beta_2)}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, де $\alpha_0>\alpha+n+n(n-1)(1+p/(2\widetilde{b}))/2$, $\beta_1=\beta+\delta_3T+n(\delta_4T-\delta_3t_1)$, $\beta_2=\beta+\nu+n\delta_4T-(n-1)\delta_3t_1$ (наслідок 3.6).

У **підрозділі 3.2.3** в області Q_T^p для параболічного за Петровським рівняння

$$W(\partial_t,L)u:=\partial_t^n u(t,x)+\sum_{r=0}^{n-1}A_r\partial_t^r L^{b(n-r)}u(t,x)=f(t,x), \tag{12}$$

розглянуто задачу з умовами

$$V_j\left(\partial_t,L\right)u(t,x)\big|_{t=t_j}=\varphi_j(x),\ j\in\{1,\ldots,n\},\ 0\le t_1<\ldots<t_n\le T, \tag{13}$$

$$L^m u(t,x)\Big|_{\Sigma}=0,\quad m\in\{0,1,\ldots,(\psi-1)\},\ \psi=\max\{M,bn\}, \tag{14}$$

де $A_r\in\mathbb{C}$, L — самоспряжений в G, $\overline{G}\in A^{2\psi,\varrho}$, диференціальний вираз із дійснозначними коефіцієнтами

$$L:=-\sum_{i,j=1}^{p}\partial_{x_i}\left(p_{ij}(x)\partial_{x_j}\right)+q(x), \tag{15}$$

в якому $p_{ij}(x)\in C^{2\psi-1,\varrho}(\overline{G})$, $p_{ij}(x)>0$, $x\in\overline{G}$, $i,j\in\{1,\ldots,p\}$, $q(x)\in C^{2\psi-2,\varrho}(\overline{G})$, $0<\varrho<1$, $q(x)\ge 0$, $x\in\overline{G}$; $V_j\left(\partial_t,L\right)=\sum\limits_{r=0}^{N_j}a_r^j(L)\partial_t^r$, $a_r^j(L)=\sum\limits_{i=0}^{M}a_{r,i}^jL^i$, $0\le N_j\le n-1$, $M\in\mathbb{N}$, $a_{r,i}^j\in\mathbb{C}$, $a_{N_j,M}^j\ne 0$, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Тут та в усіх наступних підрозділах $\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, — послідовність власних значень задачі $LX=\lambda X$, $\ X\big|_{\partial G}=0$, (що є додатними) яким відповідає система власних функцій $\mathbf{X_3}:=\{X_k(x),k\in\mathbb{N}\}$; $w_4(\alpha,\beta):=w_4(\alpha,\beta,\lambda_k)=\lambda_k^\alpha\exp\left(\beta\lambda_k^b\right)$.

Нехай для кожного $k\in\mathbb{N}$ рівняння $W(\mu,\lambda_k)=0$ має попарно різні корені $\mu_1(k),\ldots,\mu_n(k)$, які задовольняють нерівність $\mathrm{Re}\mu_q(k)\le-\delta_5\lambda_k^b$, $\ q\in\{1,\ldots,n\}$, $\ \delta_5>0$. Систему функцій $\{u_{k,1}(t),\ldots,u_{k,n}(t),k\in\mathbb{N}\}$ побудуємо, використовуючи техніку поділених різниць, як це було зроблено у підрозділі 3.2.1. Позначимо: $\Delta_3(k,\vec{t}):=\det\left\|V_j\left(\mu_q(k),\lambda_k\right)u_{k,q}(t_j)\right\|_{j,q\in\{1,\ldots,n\}}$, де $\vec{t}=(t_1,\ldots,t_n)$; $N_0=(N_1+\ldots+N_n)b+nM$; $\delta_6=\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\max\limits_{q\in\{1,\ldots,n\}}\{|\mathrm{Re}\mu_q(k)|/\lambda_k^b\}$.

Встановлено (теорема 3.14), що для єдиності розв'язку задачі (12) — (14) в класі $C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)$ необхідно й досить, щоб виконувалась умова

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \Delta_3(k,\vec{t}\,)\neq 0. \tag{16}$$

Теорема 3.15. *Нехай виконується умова* (16) *та існують сталі* $\omega,\nu\in\mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k\in\mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta_3(k,\vec{t}\,)|>\lambda_k^{-\omega}\exp(-\nu\lambda_k^b). \tag{17}$$

Якщо $f\in C\left([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha_1,\beta_1)}\right)$, $\varphi_j\in E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha_2,\beta_2)}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_1=\alpha+\omega+N_0+nb$, $\alpha_2=\alpha+\omega+nb+N_0-M-b\max\limits_{j=\overline{1,n}}\{N_j\}$, $\beta_1=\beta+\nu+(T-nt_1)\delta_5$, $\beta_2=\beta+\nu-(n-1)\delta_5t_1$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (12) — (14) *з простору* $C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* f *та* φ_j, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Доведено (теорема 3.16), що для довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння (12) та умов (13) і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t}\in[0,T]^n$ нерівність (17) виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k при $\omega>n(n-1)(p+2b)/4-(N_1+\ldots+N_n)-n(M-1)$ і $\nu=n\delta_6T$.

У **підрозділі 3.4** в області Q^p_T для рівняння з факторизованим параболічним оператором

$$\prod_{q=1}^{n}\left(\partial_t+a_q(t)L\right)u(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in Q^p_T, \tag{18}$$

розглянуто задачу з багатоточковими умовами за часовою змінною у випадку кратних вузлів інтерполяції

$$V_{j,q_j}[u]:=\partial_t^{q_j-1}u(t,x)\Big|_{t=t_j}=\varphi_{j,q_j}(x),\quad q_j\in\{1,\ldots,r_j\},\quad j\in\{1,\ldots,l\}, \tag{19}$$

$$2\le l\le n,\quad r_1+\cdots+r_l=n,\quad 0\le t_1<\ldots<t_l\le T,$$

та умовами (14), де $a_q(t)\in C^{n-q}([0,T])$, $a_q(t)>0$, $a_q(t)\neq a_j(t)$, $q\neq j$, $t\in[0,T]$, $q,j\in\{1,\ldots,n\}$; оператори $(\partial_t+a_q(t)L)$, $q\in\{1,\ldots,n\}$, у рівнянні (18) діють на функцію u у порядку зростання індекса q; L — самоспряжений в G, $\overline{G}\in A^{2n,\varrho}$, диференціальний вираз, заданий формулою (15), в якій $p_{ij}(x)\in C^{2n-1,\varrho}(\overline{G})$, $p_{ij}(x)>0$, $x\in\overline{G}$, $i,j\in\{1,\ldots,p\}$, $q(x)\in C^{2n-2,\varrho}(\overline{G})$, $0<\varrho<1$, $q(x)\ge 0$.

Запровадимо такі позначення: $I_0(t)=0$, $t\in[0,T]$, $I_q(t)=-\int\limits_0^t a_q(\tau)d\tau$, $q\in\{1,\ldots,n\}$, $\Theta_{j,k}(t)=\exp((I_j(t)-I_{j-1}(t))\lambda_k)$, $j\in\{1,\ldots,n\}$; $u_{k,1}(t)=\Theta_{1,k}(t)$,

$u_{k,2}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \Theta_{2,k}(\xi_1)d\xi_1$, $u_{k,3}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \left(\Theta_{2,k}(\xi_1)\int\limits_0^{\xi_1}\Theta_{3,k}(\xi_2)d\xi_2\right)d\xi_1$, $\ldots, u_{k,n}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \Theta_{2,k}(\xi_1)\times\ldots\left(\int\limits_0^{\xi_{n-2}}\Theta_{n,k}(\xi_{n-1})d\xi_{n-1}\right)\ldots d\xi_1$; $w_5(\alpha,\beta) := w_5(\alpha,\beta;\lambda_k) = \lambda_k^{\alpha}\exp(\beta\lambda_k)$, де $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\{\lambda_k,\, k\in\mathbb{N}\}$, — послідовність із підрозділу 3.2.3; $A_1 = \max\limits_{1\le j\le n-1}\left\{\max\limits_{t\in[0,T]}\int_0^t(a_j(\tau)-a_{j+1}(\tau))d\tau\right\}$, $A_2 = \max\limits_{t\in[0,T]}\int_0^t a_n(\tau)d\tau$; $\Delta_4(k,\vec{t}) := \det\left\|u_{k,r}^{(q_j-1)}(t_j)\right\|_{q_j\in\{1,\ldots,r_j\},j\in\{1,\ldots,l\}}^{r\in\{1,\ldots,n\}}$, $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_l)$.

Теорема 3.18. *Нехай існують сталі ω, $\nu\in\mathbb{R}$ такі, що для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k виконується нерівність*

$$|\Delta_4(k,\vec{t})| > \lambda_k^{-\omega}\exp(-\nu\lambda_k). \tag{20}$$

Якщо $f\in C\left([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha_1,\beta_1)}\right)$, $\varphi_{j,q_j}\in E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha_1,\beta_2)}$, $q_j\in\{1,\ldots,r_j\}$, $j\in\{1,\ldots,l\}$, де $\alpha_1 = \alpha+\omega+n+\sum_{j=1}^{l}C_{r_j}^2$, $\beta_1 = \beta+\nu+n(n-1)A_1/2$, $\beta_2 = \beta_1+(n-1)A_1+A_2$, то існує єдиний розв'язок задачі (14)*,* (18)*,* (19) *із простору $C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha,\beta)}\right)$. Цей розв'язок неперервно залежить від функцій f та φ_{j,q_j}, $q_j\in\{1,\ldots,r_j\}$, $j\in\{1,\ldots,l\}$.*

У випадку, коли в рівнянні (14) $a_q(t) = a(t)+\gamma_q$, $q\in\{1,\ldots,n\}$, де $a(t) > 0$, $t\in[0,T]$, $0<\rho_1\le\gamma_1<\ldots<\gamma_n\le\rho_2$, встановлено (теорема 3.19), що оцінка (20) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in[\rho_1,\rho_2]^n$ для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k при $\omega > n(n-1)(p+2)/4 - \sum\limits_{j=1}^{l}C_{r_j}^2 - \sum\limits_{m=2}^{l}r_m(r_1+\ldots+r_{m-1})$, $\nu = \sum\limits_{j=1}^{l}r_j\left(\rho_2 t_j + \int_0^{t_j}a(\tau)d\tau\right)$.

У **четвертому** розділі результати розділу 3 частково поширено на випадок параболічних за Петровським систем рівнянь зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами.

У **підрозділі 4.1** в області Q_T^p для параболічної за Петровським системи рівнянь

$$W(\partial_t,L)\,\vec{u} := \partial_t^2\vec{u} + \begin{pmatrix} a_{11}^1(L) & a_{12}^1(L)\\ a_{21}^1(L) & a_{22}^1(L)\end{pmatrix}\partial_t\vec{u} + \begin{pmatrix} a_{11}^0(L) & a_{12}^0(L)\\ a_{21}^0(L) & a_{22}^0(L)\end{pmatrix}\vec{u} = \vec{0}, \tag{21}$$

розглянуто задачу з умовами

$$\vec{u}(t_1,x) = \vec{\varphi}_1(x),\quad \vec{u}(t_2,x) = \vec{\varphi}_2(x),\quad 0\le t_1<t_2\le T, \tag{22}$$

$$L^m\vec{u}(t,x)\big|_{\Sigma} = 0,\quad m\in\{0,1,\ldots,2b-1\}, \tag{23}$$

де $a^r_{mj}(L) := \sum\limits_{q=0}^{(2-r)b} a^{r,q}_{mj} L^q$, $a^{r,q}_{mj} \in \mathbb{C}$, $m, j \in \{1,2\}$, $r \in \{0,1\}$, $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x), u^2(t,x))$, $\vec{\varphi}_q(x) = \mathrm{col}(\varphi^1_q(x), \varphi^2_q(x))$, $q \in \{1,2\}$, L — диференціальний вираз, визначений формулою (15). Будемо вважати, що для системи (21) виконуються умови: A_1) рівняння $\det \|W(\mu,\lambda_k)\| = 0$ має попарно різні корені $\mu_1(k), \ldots, \mu_4(k)$, які задовольняють нерівність $\mathrm{Re}\mu_q(k) \le -\delta_7 \lambda^b_k$, $q \in \{1,\ldots,4\}$, $\delta_7 > 0$; A_2) для кожного $q \in \{1,\ldots,4\}$ вектори $\vec{h}_{q,k} = \mathrm{col}\left(h^1_{q,k}, h^2_{q,k}\right)$, де $h^1_{q,k} := \mu^2_q(k) + \sum\limits_{r=0}^{b} a^{1,r}_{22}\lambda^r_k \mu_q(k) + \sum\limits_{r=0}^{2b} a^{0,r}_{22}\lambda^r_k$, $h^2_{q,k}(k) := -\sum\limits_{r=0}^{b} a^{1,r}_{21}\lambda^r_k \mu_q(k) - \sum\limits_{r=0}^{2b} a^{0,r}_{12}\lambda^r_k$, є ненульовими.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови A_1), A_2). Для єдиності розв'язку задачі (21) — (23) у шкалі просторів $C^2\Big([0,T]; \overline{E}^{\mathbf{X}_3,2}_{w_4(\alpha,\beta)}\Big)$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб справджувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \Delta_5(k,\vec{t}) \ne 0, \tag{24}$$

де $\Delta_5(k,\vec{t}) := \det \left\| \vec{h}_{q,k} \exp(\mu_q(k) t_j) \right\|^{q\in\{1,\ldots,4\}}_{j\in\{1,2\}}$.

Наведено приклади задач вигляду (21) — (23), коли умова (24) виконується або порушується.

Теорема 4.2. *Нехай виконується умова (24) і нехай для системи (21) справджуються умови A_1) і A_2), та існують сталі $\omega, \nu \in \mathbb{R}$ такі, що для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{N}$ виконується нерівність*

$$|\Delta_5(k,\vec{t})| > \lambda_k^{-\omega} \exp(-\nu \lambda^b_k). \tag{25}$$

Якщо $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2 \in \overline{E}^{\mathbf{X}_3,2}_{w_4(\alpha_0,\beta_0)}$, де $\alpha_0 = \alpha + \omega + 10b$, $\beta_0 = \beta + \nu - \delta_7(2t_1 + t_2)$, то існує єдиний розв'язок задачі (21) — (23) з простору $C^2\Big([0,T]; \overline{E}^{\mathbf{X}_3,2}_{w_4(\alpha,\beta)}\Big)$. Цей розв'язок неперервно залежить від вектор-функцій $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2$.

Якщо виконуються умови теореми 4.2, то для кожного фіксованого $t_* \in [0,T]$ вектор-функція $\vec{u}(t_*, x)$ за змінною x належить до простору $\overline{E}^{\mathbf{X}_3,2}_{w_4(\alpha,\beta+\delta_7 t_*)}$.

Оцінка (25) метричного характеру встановлена для задачі (21) — (23) у випадку систем (21), для яких виконуються певні оцінки знизу на функції $H_2(k)$ та $S_2(k)$, де $H_2(k) := \det\|\vec{H}_1(k), \ldots, \vec{H}_4(k)\|$, $\vec{H}_q(k) = \mathrm{col}(\vec{h}_{q,k}, \mu_q(k)\vec{h}_{q,k})$, $S_2(k) := \prod\limits_{(i_1,i_2)\ne(j_1,j_2)} (\mu_{i_1}(k) + \mu_{i_2}(k) - \mu_{j_1}(k) - \mu_{j_2}(k))^2$, $1 \le i_1 < i_2 \le 4$, $1 \le j_1 < j_2 \le 4$.

Теорема 4.3. *Нехай існують такі сталі $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, що для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності*

$$|H_2(k)| > \lambda_k^{-\gamma_1}, \quad |S_2(k)| > \lambda_k^{-\gamma_2}. \tag{26}$$

Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_2 \in (t_1; T]$ (при довільно фіксованому $t_1 \in [0,T)$) нерівність (25) виконується для всіх (крім *скінченної кількості) натуральних k, якщо $\omega > 5p/2 + \gamma_1 + \gamma_2/2 + 17b$ та $\nu = 2\delta_8(T + t_1)$, де* $\delta_8 = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \max\limits_{q\in\{1,\ldots,4\}} \{|\mathrm{Re}\mu_q(k)|/\lambda_k^b\}$.

Нехай $\vec{Y}_1 = \mathrm{col}(Y_1, \ldots, Y_\theta) := \mathrm{col}(a_{mj}^{r,q_r} : m, j \in \{1,2\}, r \in \{0,1\}, q_r \in \{0, 1, \ldots, (2-r)b\})$ — вектор, складений із усіх коефіцієнтів системи (21).

Встановлено (теореми 4.4, 4.5), що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^{12b+8}$) векторів $\vec{Y}_1$ нерівності (26) виконуються для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{N}$ при $\gamma_1 > 15p/2, \gamma_2 > 3p$.

У **підрозділі 4.2** в області Q_T^p розглянуто задачу: знайти вектор-функцію $\vec{u}(t,x)$, яка є розв'язком системи рівнянь

$$W(\partial_t, L)\,\vec{u} := \partial_t^n \vec{u}(t,x) + \sum_{r=0}^{n-1} A_r(L)\partial_t^r \vec{u}(t,x) = \vec{0}, \tag{27}$$

і справджує умови

$$V_q(\partial_t, L)[\vec{u}] := \sum_{r=0}^{N_q} B_r^q(L)\partial_t^r \vec{u}(t,x)\bigg|_{t=t_q} = \vec{\varphi}_q(x),\ 0 \le N_q \le n-1,\ q \in \{1,\ldots,n\}, \tag{28}$$

$$L^r \vec{u}(t,x)\big|_\Sigma = \vec{0}, \quad r \in \{0, 1, \ldots, (\max\{nb, M\} - 1)\}, \tag{29}$$

де $A_r(L) = \|a_{i,j}^r(L)\|_{i,j=1}^m$, $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $a_{i,j}^r(L) = \sum\limits_{q=0}^{(n-r)b} a_{i,j}^{r,q} L^q$, $a_{i,j}^{r,q} \in \mathbb{C}$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x), \ldots, u^m(t,x))$; $B_r^q(L) = \|b_{i,j}^{r,q}(L)\|_{i,j=1}^m$, $b_{i,j}^{r,q}(L) = \sum\limits_{s=0}^{M} b_{i,j}^{r,q,s} L^s$, $b_{i,j}^{r,q,s} \in \mathbb{C}$, $M \in \mathbb{N}$, $\vec{\varphi}_q(x) = \mathrm{col}(\varphi_q^1(x), \ldots, \varphi_q^m(x))$, $q \in \{1, \ldots, n\}$; L — той самий диференціальний вираз, що і в задачі (12) — (14).

Будемо вважати, що для системи (27) виконуються умови: A_3) рівняння $\det\|W(\mu, \lambda_k)\| = 0$ має попарно різні корені $\mu_1(k), \ldots, \mu_{mn}(k)$, які задовольняють нерівність $\mathrm{Re}\mu_q(k) \le -\delta_9\lambda_k^b$, $q \in \{1, \ldots, mn\}$, $\delta_9 > 0$; A_4) для кожного $q \in \{1, \ldots, mn\}$ вектори $\vec{h}_{q,k} = \mathrm{col}\left(h_{q,k}^1, \ldots, h_{q,k}^m\right)$, є ненульовими, де вектор $\vec{h}_{q,k}$ — це перший стовпець матриці $W^*(\mu_q(k), \lambda_k)$, приєднаної до матриці $W(\mu_q(k), \lambda_k)$, $q \in \{1, \ldots, mn\}$.

Позначимо:

$$\Delta_6(k, \vec{t}) := \det\|V_q(\mu_\ell(k), \lambda_k)\vec{h}_{\ell,k}\exp(\mu_\ell(k)t_q)\|_{q\in\{1,\ldots,n\}}^{\ell\in\{1,\ldots,mn\}},$$

$N = bn(m-1)(mn-1) + bm(N_1 + \ldots + N_n) - b\min\limits_{q\in\{1,\ldots,n\}}\{N_q\} + M(mn-1)$, $\beta_1 = m\delta_9(t_1 + \ldots + t_n) - \delta_9 t_n$.

Теорема 4.7. *Нехай для системи* (27) *справджуються умови* A_3) *і* A_4), $\Delta_6(k) \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, *та існують сталі* $\omega, \nu \in \mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості)* $k \in \mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta_6(k, \vec{t})| > \lambda_k^{-\omega}\exp(-\nu\lambda_k^b). \tag{30}$$

Якщо $\vec{\varphi}_q \in \overline{E}^{\mathbf{X_3},m}_{w_4(\alpha_0,\beta_0)}$, $q \in \{1,\dots,n\}$, *де* $\alpha_0 = \alpha+\omega+bnm+N$, $\beta_0 = \beta+\nu-\beta_1$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (27) — (29) *з простору* $C^n\left([0,T];\overline{E}^{\mathbf{X_3},m}_{w_4(\alpha_0,\beta_0)}\right)$. *Цей розв'язок неперервно залежить від вектор-функцій* $\vec{\varphi}_q$, $q \in \{1,\dots,n\}$.

Позначимо: $\vec{Y}_2 := \mathrm{col}(a^{q,r_q}_{i,j}, i,j \in \{1,\dots,m\}, q \in \{0,\dots,n-1\}, r_q \in \{0,1,\dots,(n-q)b\})$ — вектор розміру $\theta = m^2n((n+1)b+2)/2$, складений з усіх коефіцієнтів системи (27); $\vec{Z} := \mathrm{col}\left(b^{N_q,q,M}_{i,i} : q \in \{1,\dots,n\},\, i \in \{1,\dots,m\}\right)$;

$$H_m(k) := \det\|\vec{H}_1(k),\dots,\vec{H}_{mn}(k)\|,\ \vec{H}_l(k) = \mathrm{col}(\vec{h}_{l,k}, \mu_l(k)\vec{h}_{l,k}\dots,\mu_l^{n-1}(k)\vec{h}_{l,k}),$$

$$S_m(k) := \prod_{(j_1,\dots,j_m)\neq(i_1,\dots,i_m)} \left(\mu_{j_1}(k)+\dots+\mu_{j_m}(k)-\mu_{i_1}(k)-\dots-\mu_{i_m}(k)\right)^2,$$

де $1 \le j_1 < \dots < j_m \le mn$, $1 \le i_1 < \dots < i_m \le mn$; $\delta_{10} = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \max\limits_{q=\overline{1,mn}} \{|\mathrm{Re}\mu_q(k)|/\lambda_k^b\}$.

Встановлено (теореми 4.8, 4.9), що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^\theta$) векторів $\vec{Y}_2$ нерівності

$$|H_m(k)| > \lambda_k^{-\gamma_1}, \quad |S_m(k)| > \lambda_k^{-\gamma_2} \tag{31}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{N}$ при $\gamma_1 > m^2np(2mn-n-1)/8$, $\gamma_2 > mpC^m_{mn}(C^m_{mn}-1)/4$.

Теорема 4.10. *Нехай для системи* (27) *справджуються умови* (31). *Тоді для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^{mn}$) *векторів* $\vec{Z}$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0;T]^n$ *нерівність* (30) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних* k *при* $\omega > \omega_1$, $\nu = mn\delta_{10}T$, *де* $\omega_1 = \omega_1(m,n,b,p,\gamma_1,\gamma_2,M,N_1,\dots,N_n)$.

Вибір коефіцієнтів при найстарших похідних в умовах (28) в якості параметрів метричної теореми 4.10 зумовлений кращою (порівняно з вибором інших параметрів) оцінкою в теоремі 4.10.

Із теорем 4.7 — 4.10 випливає твердження про коректну розв'язність задачі (27) — (29) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів системи (27), коефіцієнтів багатоточкових умов (28) та значень вузлів інтерполяції $t_1,\dots,t_n$ (наслідок 4.2).

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню в обмежених циліндричних областях задач із локальними багатоточковими умовами за часовою змінною та певними умовами (періодичності, типу Діріхле) за просторовими змінними для лінійних параболічних рівнянь та систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Такі задачі, в загальному випадку, є умовно коректними, а їхня розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників.

Одержано такі нові результати:

1) встановлено умови коректності двоточкової задачі для параболічних за Петровським рівнянь другого порядку за часовою змінною з операторами Штурма-Ліувілля за просторовими координатами; доведено, що такі умови виконуються для довільних фіксованих вузлів інтерполяції і для майже всіх (стосовно міри Гаусдорфа) векторів, складених із коефіцієнтів рівнянь;

2) для параболічних за Петровським рівнянь вищих порядків з операторами Штурма-Ліувілля за просторовими координатами та для $2\vec{b}$-параболічних рівнянь з оператором Бесселя за однією з просторових змінних встановлено однозначну розв'язність багатоточкової задачі з простими вузлами для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із вузлів інтерполяції;

3) знайдено умови коректної розв'язності багатоточкових задач для параболічних за Петровським рівнянь коефіцієнти яких залежать від просторових змінних, а також для параболічних рівнянь із факторизованим оператором із коефіцієнтами, залежними як від часової, так і від просторових змінних; доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виниклають при побудові розв'язків;

4) встановлено умови коректної розв'язності двоточкової задачі для параболічних за Петровським систем другого порядку за часовою змінною та багатоточкової задачі для систем вищих порядків за часовою змінною і доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів систем, коефіцієнтів багатоточкових умов та значень вузлів інтерполяції;

5) для всіх розглянутих задач побудовано зображення розв'язків у вигляді рядів Фур'є за системами відповідних функцій.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна застосувати у подальших дослідженнях задач з багатоточковими умовами за часом для лінійних і нелінійних параболічних рівнянь та систем рівнянь, а також при дослідженні конкретних задач практики, які моделюються розглянутими задачами.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків // Доп. НАН України. — 2008. — № 12. — С. 42–48.

2. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для параболічних рівнянь високого порядку в паралелепіпеді / Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 252–265. (Переклад: *Ptashnyk B. I.* Multipoint problem for higher-order parabolic equations in a parallepiped / B. I. Ptashnyk, I. R. Tymkiv // Nonlinear oscillations. — 2009. — **12**, N 3. — P. 346–357.)

3. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області / Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — **54**, № 1. — С. 15–26. (Переклад: *Ptashnyk B. Yo.* A multipoint problem for a parabolic equation with variable coefficients in a cylindrical domain / B. Yo. Ptashnyk, I. R. Tymkiv // J. Math. Sci. — 2012. — **183**, N.1. — P. 1–16.)

4. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для B-параболічних рівнянь / Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 3. — С. 418–429. (Переклад: *Ptashnyk B. I.* Multipoint problem for B-parabolic equations / B. I. Ptashnyk, I. R. Tymkiv // Ukrainian Mathematical Journal. — 2013. — **65**, N 3. — P. 463–477.)

5. *Симотюк М. М.* Задача з багатоточковими умовами для системи параболічних рівнянь високого порядку зі змінними коефіцієнтами / М. М. Симотюк, І. Р. Тимків // Прикарпатський вісник НТШ. Серія „Число“. — 2015. — №1 (29). — С. 45–59.

6. *Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами / І. Р. Тимків // Карпатські математичні публікації. — 2011. — **3**, №2. — С. 120–130.

7. *Тимків І. Р.* Задача з двоточковими умовами для системи параболічних рівнянь другого порядку за часом / І. Р. Тимків // Прикарпатський вісник НТШ. Серія „Число“. — 2016, №1 (33). — С. 124–138.

8. *Symotyuk M. M.* Problem with two-point conditions for parabolic equation of second order on time / M. M. Symotyuk, I. R. Tymkiv // Carpathian Math. Publ. — 2014. — **6**, N. 2. — P. 151–160.

9. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння / Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків // IV Всеукраїнська наукова конференція „Нелінійні проблеми аналізу“ (9–11 вересня 2008 р., Івано-Франківськ): Тези доповідей. — Івано-Франківськ: Плай, 2008. — С. 80.

10. *Симотюк М. М.* Оцінки характеристичного визначника задачі з двоточковими умовами для параболічного рівняння / М. М. Симотюк, І. Р. Тимків // Всеукраїнська наукова конференція „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“ (25–лютого – 3 березня 2013 р., Ворохта): Тези доповідей. — Івано-Франківськ: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2013. — С. 82–83.

11. *Симотюк М. М.* Двоточкова задача для системи параболічних рівнянь / М. М. Симотюк, І. Р. Тимків // Міжнародна наукова конференція „Сучасні проблеми механіки і математики“ (21–25 травня 2013 р., Львів): Матеріали конференції. — Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. — Т. 3. — С. 160–162.

12. *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для системи параболічних рів-

нянь високого порядку / М. М. Симотюк, І. Р. Тимків // Міжнародна конференція молодих математиків (3–6 червня, 2015 р., Київ): Тези доповідей. — Київ. — 2015. — С. 166.

13. *Симотюк М. М.* Метричні оцінки характеристичного визначника задачі з багатоточковими умовами для системи параболічних рівнянь високого порядку / М. М. Симотюк, І. Р. Тимків // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге (1–4 липня, 2015 р., Чернівці): Тези доповідей. — Чернівці: ЧНУ, 2015. — С. 106–108.

14. *Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами / І. Р. Тимків // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (15–17 травня 2008 р., Київ): Тези доповідей. Т. 1. — Київ, 2008. — С. 394.

15. *Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для факторизованого параболічного рівняння / І. Р. Тимків // Конференція молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача (25–27 травня 2009 р., Львів): Тези доповідей. — Львів, 2009. — С. 228–229.

16. *Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для B-параболічного рівняння / І. Р. Тимків // Third international conferens for younng mathematical on differential equations and applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky (3–6 November, 2010, Lviv): Donetsk. — 2010. — P. 89–91.

17. *Тимків І. Р.* Метричні оцінки малих знаменників, які виникають у двоточковій задачі для параболічної системи рівнянь / І. Р. Тимків // Одинадцята відкрита наукова конференція ІМФН „PSC-IMFS-11“ (13–14 червня 2013 р., Львів): Збірник матеріалів та програма конференції. — Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2013. — С. 109–110.

18. *Tymkiv I.* Problem with multipoint conditions for system parabolic equations of higt order / I. Tymkiv // International V. Skorobohatko mathematical conference (25–28 august, 2015, Drohobych): Lviv. — 2015. — P. 166.

АНОТАЦІЯ

Тимків І. Р. *Багатоточкові задачі для лінійних параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами* — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2017.

У дисертаційній роботі розглянуто задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною та певними умовами (періодичності, типу Діріхле) за просторовими змінними для лінійних параболічних рівнянь та систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Встановлено умови коректності та побудовано явні формули для розв'язків цих задач. Доведено нові метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при дослідженні розглянутих у дисертації задач. Виділено часткові випадки задач, в яких відсутня проблема малих знаменників.

Ключові слова: параболічні рівняння, багатоточкові умови, поділені різниці, функція Ґріна, малі знаменники, міра Лебега, міра Гаусдорфа.

АННОТАЦИЯ

Тымкив И. Р. *Многоточечные задачи для линейных параболических уравнений с переменными коэффициентами.* — На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2017.

В диссертационной работе рассмотрены задачи с многоточечными условиями по временной переменной и определенными условиями (периодичности, типа Дирихле) по пространственным переменным для линейных параболических уравнений и систем уравнений с переменными коэффициентами. Установлены условия корректности и построены явные формулы для решений этих задач. Доказано новые метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, которые возникли при исследовании рассмотренных в диссертации задач. Выделены частные случаи задач, в которых отсутствует проблема малых знаменателей.

Ключевые слова: параболические уравнения, многоточечные условия, разделенные разности, функция Грина, малые знаменатели, мера Лебега, мера Хаусдорфа.

ABSTRACT

Tymkiv I. R. *Multipoint problems for linear parabolic equations with variable coefficients.* — On the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.02 — Differential equations. — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2017.

The thesis deals with the research of the problems in bounded cylindrical domains with local multipoint conditions on time variable and certain conditions in the other variables (conditions of periodicity, conditions of Dirichlet type) for linear parabolic equations and systems of equations with variable coefficients. In general case these problems are conditionally correct and their solvability is related to the problem of small denominators.

The following new results have been obtained:

— the correctness conditions of two-point problem for Petrovskii parabolic equations of second order on time with Sturm-Liouville operators on spatial

coordinates are established; it is proved that these conditions are fulfilled for an arbitrary fixed interpolation nodes and almost for all (with respect to the Hausdorff measure) vectors composed of equation coefficients;

— the unique solvability of multipoint problem with simple nodes for Petrovskii parabolic equations of a high order with Sturm-Liouville operators on spatial coordinates and for $2\vec{b}$-parabolic equations with Bessel operator on one of the spatial variables is established for almost all (with respect to Lebesgue measure) vectors, which consist of interpolation nodes;

— the conditions of correct solvability of multipoint problems for Petrovskii parabolic equations with variables on spatial coordinates of coefficients, and also for factorized parabolic operator with coefficients depended on time and spatial variables are established; metric theorems about lower-bound estimate of small denominators to these problems are proved;

— the conditions of correct solvability of two-point problem for Petrovskii parabolic systems of second order on time and problems with multipoint conditions for the systems of high order are established; it is proved that this conditions are performed for almost all (with respect to the Lebesgue measure) vectors composed of coefficients of systems, coefficients of multipoint conditions and values of interpolation nodes;

— explicit formulas for solutions in form of Fourier series based on systems of orthogonal functions of considered problems are constructed.

The thesis results are of theoretical importance. They can be applied in further researches of problems with multipoint conditions on time for linear and nonlinear parabolic equations and systems of equations, and also in the study of specific problems of practice which are modelled by considered problems.

Key words: parabolic equations, multipoint conditions, divided differences, Green's function, small denominators, Lebesgue measure, Hausdorff measure.