МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

МОСТОВА МАР'ЯНА РОМАНІВНА

УДК 517.93

ЛОГАРИФМІЧНА ПОХІДНА БЛИЗЬКИХ ДО ПОЛІНОМІВ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник :
Заболоцький Микола Васильович
доктор фіз. - мат. наук, професор

Львів 2016

Зміст

Перелік умовних позначень **4**

Вступ **7**

Розділ 1. Огляд літератури за темою та основні результати дисертації **14**

1.1 Основні означення та термінологія 14

1.2 Огляд літератури за темою та вибір напрямків досліджень . 20

1.3 Основні результати дисертації 32

Розділ 2. Асимптотика, коефіцієнти Фур'є, збіжність в $L^p[0, 2\pi]$-метриці логарифмічної похідної та кутова щільність нулів цілих функцій нульового порядку **39**

2.1 Апроксимаційна теорема для логарифмічної похідної цілих функцій нульового порядку 39

2.2 Асимптотика логарифмічної похідної та кутова υ-щільність нулів цілих функцій повільного зростання 45

2.3 Асимптотика логарифмічної похідної цілої функції та її коефіцієнти Фур'є 55

2.4 Коефіцієнти Фур'є та збіжність в $L^p[0, 2\pi]$-метриці логарифмічної похідної цілих функцій 61

2.5 Один приклад цілої функції з класу $H_0(\upsilon)$ 68

2.6 Висновки до розділу 2 74

Розділ 3. Критерії існування кутової υ-щільності нулів цілих функцій, близьких до поліномів, з нулями на скінченній системі променів 75

3.1 Асимптотика логарифмічної похідної цілих функцій з нулями на скінченній системі променів і кутова υ-щільність їхніх нулів 76

3.2 Коефіцієнти Фур'є логарифмічної похідної та існування кутової υ-щільності нулів функцій з класу $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ 85

3.3 Зв'язок між збіжністю в $L^p[0, 2\pi]$-метриці логарифмічної похідної та існуванням кутової υ-щільності нулів цілих функцій нульового порядку 91

3.4 Достатні умови існування кутової υ-щільності нулів цілих функцій в термінах регулярного поводження в $L^p[0, 2\pi]$-метриці їх логарифмічної похідної та коефіцієнтів Фур'є . . 95

3.5 Висновки до розділу 3 98

Висновки 99

Список використаних джерел 101

Перелік умовних позначень

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множини натуральних, цілих, дійсних і комплексних чисел відповідно;

$\mathbb{R}_+$ — множина невід'ємних дійсних чисел;

$\Omega = \{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$, (a_n) – послідовність нулів цілої функції f, розташованих в порядку неспадання їх модулів;

C, C_1, $C_2, \ldots$ — деякі додатні сталі;

$a^+ := \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ 0, & a < 0; \end{cases}$

$n(r) = n(r, 0, f) = \sum\limits_{|a_j| \leq r} 1$ — лічильна функція нулів a_j цілої функції f, $f(0) \neq 0$;

$N(r) = N(r, 0, f) = \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t} dt$ — усереднена лічильна функція нулів f, $f(0) \neq 0$;

$n(r, \alpha, \beta; f) = n(r, \alpha, \beta)$ — кількість нулів цілої функції f, які лежать в секторі $\{z\colon |z| \leq r, \alpha \leq \arg z < \beta\}$, $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$;

$n_k(r) = \sum\limits_{|a_j| \leq r} e^{-ik\alpha_j}$, $k \in \mathbb{Z}$, де $a_j = |a_j| e^{i\alpha_j}$ – нулі цілої функції f, $f(0) \neq 0$;

$N_k(r) = \int\limits_0^r \frac{n_k(t)}{t} dt$, $k \in \mathbb{Z}$;

$F(z) = zf'(z)/f(z)$ — логарифмічна похідна функції f;

$c_k(r,\Phi) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi(re^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi$, $k \in \mathbb{Z}$, $r > 0$ — коефіцієнти Фур'є $\Phi(re^{i\varphi})$ як функції від φ;

$\rho(r)$ — уточнений порядок;

$\lambda(r)$ — нульовий уточнений порядок;

$H_+(\rho(r))$ — клас цілих функцій f додатного порядку ρ, $\rho(r)$ — уточнений порядок f;

$H_+^*(\rho(r))$ — клас цілих функцій ц. р. зр. відносно $V(r) = r^{\rho(r)}$;

υ — функція зростання, тобто $\upsilon \geq 0$, зростаюча до $+\infty$, неперервна на $\mathbb{R}_+$;

L — клас неперервно-диференційовних функцій зростання υ, для яких $\dfrac{r\upsilon'(r)}{\upsilon(r)} \to 0$, $r \to +\infty$;

$H_0(\upsilon)$ — клас цілих функцій f нульового порядку, для яких $0 < \varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{n(r)}{\upsilon(r)} < +\infty$;

$H_0^*(\upsilon)$ — клас цілих функцій с. р. зр.;

C_0^α — сім'я множин $E \subset \mathbb{C}$, які можна покрити послідовністю кругів $\{z\colon |z - z_j| < r_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$ таких, що $\sum\limits_{|z_j|\leq r} r_j^\alpha = o(r^\alpha)$, $r \to +\infty$, $0 < \alpha \leq 2$; $C_0^1 = C_0$;

$\mathcal{E}_\delta$ — сім'я вимірних множин $G \subset \mathbb{R}_+$ таких, що $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\mathrm{mes}(G\cap[0,r])}{r} \leq \delta$, $0 \leq \delta < 1$; $\mathcal{E}_0 = E_0$;

$\lim\limits_{z\to\infty}^*$ означає прямування до границі при $z \to \infty$, z не належать деякій C_0-множині;

$\lim\limits_{r\to+\infty}^{*}$ означає прямування до границі при $r \to +\infty$, r не належать деякій E_0-множині;

$\Delta(\alpha,\beta)\colon = \lim\limits_{r\to+\infty} n(r,\alpha,\beta)/\upsilon(r),\ \upsilon(r)\in L$;

$||g||_p = \left\{\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|g(\theta)|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}$ — норма функції g в просторі $L^p[0,2\pi]$;

$\Gamma_m = \bigcup\limits_{j=1}^{m} l_{\theta_j}$ – скінченна система променів $l_{\theta_j}=\{z\colon\ \arg z=\theta_j\}$, $-\pi \le \theta_1 < \ldots < \theta_m < \pi$;

$H_0(\upsilon,\Gamma_m)$ — клас цілих функцій f нульового порядку з нулями на скінченній системі променів Γ_m, $H_0(\upsilon,\Gamma_m)\subset H_0(\upsilon)$;

$n(r,\theta_j;f)=n(r,\theta_j)$ – кількість нулів цілої функції f, які лежать на промені l_{θ_j}, модулі яких не перевищують r.

Крім наведених вище, у відповідних розділах вводимо деякі додаткові позначення.

Вступ

Актуальність теми. Цілі функції мають застосування у багатьох розділах математики, а тому їхнє вивчення відіграє важливу роль у розвитку цих галузей. Зокрема, важливим питанням є дослідження зв'язку між зростанням різних величин, які характеризують асимптотичне поводження цілої (мероморфної) функції. Ж. Валірон одним з перших дослідив зв'язок між регулярним зростанням функції та розподілом її нулів у випадку цілої функції додатного порядку з нулями, розташованими на одному промені. Також серед перших науковців, які займалися цим питанням, слід згадати таких відомих математиків як Е. Борель, К. Вейєрштрасс, Ж. Адамар, Е. Ліндельоф, Е. Тітчмарш та інші.

Їхні результати стали поштовхом для створення в 30-их роках минулого століття Б. Я. Левіним та А. Пфлюгером незалежно один від одного теорії цілих функцій цілком регулярного зростання (ц. р. зр.). Клас цілих функцій ц. р. зр. охоплює практично всі відомі цілі функції, зокрема: цілі тригонометричні функції; експоненційні многочлени; функції Бесселя та Міттаг-Леффлера; перетворення Фур'є скінченних функцій; функції експоненціального типу з класу L^p; цілі розв'язки лінійного диференціального рівняння будь-якого порядку з поліноміальними коефіцієнтами; тощо. Тому було важливим встановлення різних критеріїв належності цілих функцій до цього класу. Критерій ц. р. зр. цілої функції в залежності від розподілу її нулів за аргументами вказали Б. Я. Левін та А. Пфлюгер; в термінах

коефіцієнтів Фур'є логарифма модуля цілої функції — В. С. Азарін; в залежності від поводження p-норми логарифма модуля цілої функції — А. А. Кондратюк.

Новий підхід до теорії цілих функцій ц. р. зр. дала створена В. С. Азаріним теорія граничних множин. Теорія цілих функцій ц. р. зр. скінченного ненульового порядку була поширена на аналітичні в півплощині (А. П. Грішин, М. В. Говоров), мероморфні в площині (А. А. Кондратюк, Ю. П. Лапенко), субгармонійні та δ-субгармонійні в просторі $\mathbb{R}^m$ функції (К. Г. Малютін, Н. Садик, Я. В. Васильків).

Знаходженням умов, за яких для цілих функцій правильні дещо тонші асимптотичні оцінки в порівнянні з цілими функціями ц. р. зр., займалися П. З. Агранович, В. М. Логвиненко, Ю. І. Мельник, Ю. І Любарський, М. А. Субханкулов, М. М. Тян, Р. С. Юлмухаметов, Б. М. Хабібулін, Б. В. Винницький, Р. В. Хаць та інші. В цьому напрямку також важливі результати отримали Я. В. Васильків, А. А. Гольдберг, А. П. Грішин, М. В. Заболоцький, О. Е. Єременко, А. А. Кондратюк, Й. В. Островський, Л. І. Ронкін, М. Л. Содін, С. Ю. Фаворов та інші.

Зв'язок між ц. р. зр. цілих функцій та асимптотичним поводженням характеристик їх логарифмічних похідних дослідили А. А. Гольдберг і М. Е. Коренков (асимптотика логарифмічної похідної зовні виняткових множин); А. А. Гольдберг, М. Л. Содін та М. М. Строчик (асимптотика коефіцієнтів Фур'є логарифмічної похідної). Для мероморфних функцій аналогічні питання досліджували Я. В. Васильків, А. А. Кондратюк (зростання логарифмічної похідної, її коефіцієнти Фур'є та поводження логарифмічної похідної в $L^p[0, 2\pi]$-метриці).

Виявляється, якщо для цілих функцій нульового порядку аналогічно ввести поняття ц. р. зр., то отримана теорія буде тривіальною. В 90-их

роках минулого століття М. В. Заболоцький ввів поняття сильного регулярного зростання (с. р. зр.) для цілих функцій нульового порядку, яке володіє властивостями, подібними до тих, якими володіє поняття ц. р. зр. цілих функцій додатного порядку. Пізніше М. В. Заболоцький та О. В. Костюк отримали зв'язки між с. р. зр., розподілом нулів цілої функції f за аргументами, асимптотичною поведінкою коефіцієнтів Фур'є $\ln f$, регулярним зростанням в $L^p[0, 2\pi]$-метриці $\ln|f|$ та $\arg f$. Питання зв'язку цих характеристик цілої функції нульового порядку з поводженням її логарифмічної похідної залишались не дослідженими.

Асимптотика та оцінки логарифмічної похідної цілих функцій зовні виняткових множин відіграють важливу роль в різних галузях математики. Так, добре відомою є роль леми про логарифмічну похідну в доведенні другої основної теореми теорії розподілу значень мероморфних функцій; важливими в неванліннівській теорії та її застосуваннях до диференціальних, функціональних та різницевих рівнянь є оцінка модуля логарифмічної похідної. Використовували у своїх дослідженнях оцінку логарифмічної похідної зовні виняткових множин при дослідженні функцій Міттаг-Леффлера (А. А. Гольдберг), функцій обмеженого індексу та l-індексу (М. М. Шеремета та його учні), субгармонійних функцій (М. Л. Содін, І. Е. Чижиков, Л. І. Коляса) та інш. Логарифмічну похідну поліномів, зокрема виняткові множини, на яких вона необмежена, вивчали А. Макінтайр, В. Фукс, В. Я. Ейдерман, Дж. М. Андерсон та інш.

Тому дослідження поводження логарифмічної похідної цілих функцій повільного зростання та її характеристик є актуальною задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетних науково-дослідних тем кафедр математичного моделювання і математичного та

функціонального аналізу Львівського національного університету імені Івана Франка "Нові методи комплексного та функціонального аналізу в теорії мероморфних і субгармонійних функцій, теорії операторів та нелінійних динамічних систем"(МА-107 Ф, номер держреєстрації 0112U001272, 2012-2014 рр.), "Інваріантні функціональні підпростори в нелінійних однорідних просторах та обернені задачі теорії операторів"(МА-06 Ф, номер держреєстрації 0115U003250, 2015-2017 рр.).

Мета і задачі дослідження. *Мета* дисертаційної роботи полягає у встановленні та дослідженні зв'язку між величинами, які характеризують асимптотичне поводження логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку, та розподілом її нулів.

Об'єктом дослідження є цілі функції нульового порядку та їх логарифмічна похідна.

Предметом дослідження є взаємозв'язки між поводженням основних характеристик логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку та розподілом її нулів.

У дисертаційній роботі поставлено такі *завдання*:

- дослідити взаємозв'язок між кутовою υ-щільністю нулів цілої функції нульового порядку та асимптотикою її логарифмічної похідної $F = zf'/f$;

- одержати зв'язки між регулярним зростанням логарифмічної похідної цілої функції повільного зростання, коефіцієнтами Фур'є F та зростанням F в $L^p[0, 2\pi]$-метриці;

- виділити підкласи цілих функцій нульового порядку, для яких поводження характеристик логарифмічної похідної F рівносильне існуванню кутової υ-щільності її нулів.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач в дисертаційній роботі використовуються методи теорії цілих функцій та функцій комплексної змінної, зокрема метод рядів Фур'є, методи математичного і функціонального аналізу, а також деякі прийоми та результати робіт А. А. Гольдберга, М. Е. Коренкова, Я. В. Васильківа та М. В. Заболоцького.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі одержані наукові результати дисертації є новими. У роботі вперше отримано:

- необхідні умови існування кутової υ-щільності нулів цілої функції нульового порядку в термінах поводження її логарифмічної похідної та показано, що ці умови не є достатніми;

- зв'язки між регулярними поводженнями логарифмічної похідної F, її коефіцієнтів Фур'є та p-норми F в просторі $L^p[0, 2\pi]$, $1 \leq p < +\infty$, цілої функції повільного зростання;

- критерії існування кутової υ-щільності нулів в деякому підкласі цілих функцій f нульового порядку в термінах асимптотичного поводження їх логарифмічної похідної F; регулярного зростання коефіцієнтів Фур'є F; збіжності F за p-нормою в просторі $L^p[0, 2\pi]$.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати дисертації мають теоретичний характер і є певним внеском в теорію аналітичних функцій. Вони можуть бути використані у подальших дослідженнях в теорії цілих функцій та її застосуваннях, а також в інших розділах сучасної математики.

Особистий внесок здобувача. Усі основні наведені у роботі результати отримані автором самостійно. У спільних з науковим керівником публікаціях М. В. Заболоцькому належить постановка задач, деякі ідеї що-

до їх розв'язання, загальне керівництво роботою та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Усі основні результати дисертації доповідались та обговорювались на: міжнародній конференції "Комплексний аналіз і суміжні питання"(Львів, 23-28 вересня 2013 р.); всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(Ворохта, 25 лютого - 1 березня 2015 р.); міжнародній математичній конференції імені В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25-28 серпня 2015 р.); міжнародній конференції "Комплексний аналіз і суміжні питання"(Львів, 30 березня - 4 липня 2016 р.); XVIII міжнародній конференції з теорії аналітичних функцій і суміжних тем (Холм, Польща, 26-29 липня 2016 р.).

Про результати дисертаційної роботи також доповідалося на семінарі з теорії функцій (Вюрцбург, Німеччина, керівники — проф. O. Roth, проф. S. Ruscheweyh); Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники — проф. А. А. Кондратюк, проф. О. Б. Скасків); семінарі з теорії аналітичних функцій (Дрогобич, керівник — проф. Б. В. Винницький); науковому семінарі з теорії аналітичних функцій у Прикарпатському національному університеті імені Василя Стефаника (Івано-Франківськ, керівник — проф. П. В. Філевич).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 14 наукових працях, з яких 5 ([75-79]) — у фахових виданнях із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України (1 ([77]) — без співавторів, 2 ([75, 79]) — у наукових фахових виданнях, які включено до міжнародної наукометричної бази даних "Scopus"), 5 ([80-84]) — у матеріалах міжнародних наукових конференцій, 4 ([85-88]) — у матеріалах всеукраїнських наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, поділених на підрозділи, висновків і списку використаних джерел, який налічує 88 найменувань. Загальний обсяг дисертації — 112 сторінок, обсяг списку використаних джерел — 12 сторінок.

Розділ 1

Огляд літератури за темою та основні результати дисертації

1.1 Основні означення та термінологія

Дослідження взаємозв'язку між зростанням цілої функції f та розподілом її нулів є однією з головних задач теорії аналітичних функцій. Нагадаємо, що цілою функцією називають функцію f аналітичну в усій комплексній площині $\mathbb{C}$.

Основними величинами, які характеризують розподіл нулів $a_n = |a_n|e^{i\alpha_n}$ цілої функції f, є їхня лічильна функція

$$n(r) = n(r, 0, 2\pi) = \sum_{|a_n| \le r} 1;$$

усереднена (неванліннова) лічильна функція нулів

$$N(r) = N(r, 0, f) = \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + n(0) \ln r;$$

лічильна функція нулів $n(r, \alpha, \beta)$ в секторі $\{z : |z| \le r, \alpha < \arg z \le \beta\}$; лічильні функції аргументів нулів f $(f(0) \ne 0)$

$$n_k(r) = \sum_{|a_n| \le r} e^{-ik\alpha_n}$$

та їхні усереднення

$$N_k(r) = \int_0^r \frac{n_k(t)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Зауважимо, що $n(r) = n_0(r)$, $N(r) = N_0(r)$ не залежать від аргументів нулів функції f, на відміну від функцій $n(r, \alpha, \beta)$, $n_k(r)$, $N_k(r)$, $k \neq 0$.

Зростання цілої функції f описують поводженням максимума модуля

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| \colon |z| \leq r\},$$

її логарифма модуля $\ln|f(re^{i\varphi})|$, аргумента $\arg f(re^{i\varphi})$, а, отже, і логарифма $\ln f(re^{i\varphi})$, логарифмічної похідної $F(z) = z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ функції f та коефіцієнтів Фур'є $c_k(r, \ln|f|)$, $c_k(r, \arg f)$, $c_k(r, \ln f)$, $c_k(r, F)$ відповідних функцій.

Тут під $\arg f$ розуміємо однозначну вітку многозначної функції $\operatorname{Arg} f$, яку визначаємо наступним чином. Нехай f — ціла трансцендентна функція, тобто функція, яка не є поліномом. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $f(0) = 1$. Тоді за теоремою Вейєрштрасса (див., наприклад, [1, с. 26])

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{a_j \neq 0} E\left(\frac{z}{a_j},\ p_j - 1\right),$$

де $g(z)$ – ціла функція, (a_j) – послідовність нулів функції f, (p_j) – послідовність натуральних чисел така, що ряд $\sum\limits_{a_j \neq 0} (r/|a_j|)^{p_j}$ є збіжним для кожного $r \in [0, +\infty)$ і первинний множник Вейєрштрасса

$$E(u, p) = \begin{cases} 1 - u, & p = 0, \\ (1 - u)\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{u^k}{k}\right), & p \geq 1. \end{cases}$$

Для заданої таким чином функції f визначимо функцію $\arg E(u, p)$ в площині u з розрізом вздовж променя $[1, +\infty)$ так, щоб вона дорівнювала $-\pi$ на верхній межі розрізу, і продовжимо її на всю розрізану площину за неперервністю. Таким чином, визначена функція $\ln E(u, p)$, а отже, і логарифм довільної цілої функції.

Дане означення $\ln f$ еквівалентне наступному

$$\ln f(z) = \int_0^z \frac{f'(w)}{f(w)} dw, \ z \in G := \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \{z \colon |z| \geq |a_j|, \ \arg z = \arg a_j\},$$

якщо довизначити функцію $\ln f$ на берегах розрізів області G за неперервністю. Тут інтеграл береться вздовж довільної кривої з області G з початком в точці 0 і кінцем в точці z (зокрема, вздовж відрізку $[0, z]$).

Порядком цілої функції f називається число

$$\rho = \rho[f] = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ M(r, f)}{\ln r}.$$

У випадку $0 < \rho < \infty$ тип цілої функції f визначається за формулою

$$\sigma = \sigma[f] = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^\rho}.$$

Якщо $\sigma = 0$, то цілу функцію f називають функцією мінімального типу, якщо $0 < \sigma < \infty$ — нормального типу і якщо $\sigma = \infty$ — максимального. Для того, щоб ввести поняття типу для цілої функції нульового і нескінченного порядків, вводять поняття уточненого порядку цілої функції f.

Функція $\rho(r)$ називається уточненим порядком (див., наприклад, [2, с. 69]), якщо вона задовольняє такі умови:

1) $\rho(r)$ — невід'ємна, неперервно диференційовна на $[0, +\infty)$ функція;

2) $\rho(r) \to \rho \geq 0$ при $r \to +\infty$;

3) $r\rho'(r) \ln r \to 0$ при $r \to +\infty$.

У випадку $\rho = 0$ додатково вимагатимемо, щоб функція $r^{\rho(r)}$ монотонно зростала до $+\infty$ при $r \to +\infty$.

Уточненим порядком функції $\psi \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ називають уточнений порядок $\rho(r)$, якщо

$$0 < \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\psi(r)}{r^{\rho(r)}} < +\infty.$$

Уточнений порядок $\rho(r)$ називатимемо уточненим порядком цілої функції f, якщо $\rho(r)$ є уточненим порядком $\ln M(r,f)$, тобто

$$0 < \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r,f)}{r^{\rho(r)}} < +\infty.$$

Зауважимо, що кожна ціла функція скінченного порядку є цілою функцією деякого уточненого порядку (див., наприклад, [3]).

Через $\lambda(r)$ позначаємо нульовий уточнений порядок лічильної функції нулів $n(r)$ цілої функції нульового порядку

$$0 < \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{r^{\lambda(r)}} < +\infty.$$

Нагадаємо означення цілої функції цілком регулярного зростання (ц. р. зр.). Позначимо через $H_+(\rho(r))$ клас цілих функцій f додатного порядку ρ, $\rho(r)$ — уточнений порядок f, $V(r) = r^{\rho(r)}$.

Множину $D \subset \mathbb{C}$ будемо називати C_0^α-множиною $(0 < \alpha \le 2)$ і писати $D \in C_0^\alpha$, якщо її можна покрити послідовністю кругів $\{z\colon |z - z_k| < r_k\}$ таких, що

$$\sum_{|z_k|\le r} r_k^\alpha = o(r^\alpha), \quad r \to +\infty.$$

Клас C_0^1 позначатимемо C_0.

Через $\mathcal{E}_\delta$ позначимо сім'ю вимірних множин $G \subset \mathbb{R}_+$ таких, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{mes}(G \cap [0,r])}{r} \le \delta, \quad 0 \le \delta < 1.$$

У випадку $\delta = 0$ клас $\mathcal{E}_0$ позначатимемо через E_0 і множини з цього класу назвемо E_0-множинами.

Нехай $\lim\limits_{z\to\infty}{}^*$ означає, що $z = re^{i\varphi} \to \infty$, $z \notin E$, де E — деяка C_0^1-множина.

Ціла функція $f \in H_+(\rho(r))$ називається функцією ц. р. зр. ([4, с. 183]), якщо для всіх $\varphi \in [0, 2\pi]$ існує границя

$$\lim_{z\to\infty}{}^* \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{V(r)} = h_f(\varphi).$$

Те, що в означенні ц. р. зр. потрібно виключати з розгляду деяку виняткову множину, випливає з можливої наявності нулів у функції f. Клас цілих функцій ц. р. зр. позначимо $H_+^*(\rho(r))$.

Множина нулів цілої функції $f \in H_+(\rho(r))$ має кутову щільність [4, с. 118-119], якщо величина

$$\Delta(\alpha, \beta) = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{V(r)} \tag{1.1}$$

існує для всіх α, β за винятком, можливо, деякої зліченної кількості їхніх значень. Рівність $\Delta(\beta) - \Delta(\alpha) = \Delta(\alpha, \beta)$ визначає при кожному фіксованому α з точністю до сталого доданку неспадну функцію $\Delta(\beta)$.

Промінь $l_\theta = \{z : \arg z = \theta\}$ називаємо звичайним для цілої функції нульового порядку, якщо виконується умова

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, \theta - h, \theta + h)}{r^{\lambda(r)}} = 0.$$

Всі інші промені називаємо винятковими. З монотонності функції $\Delta(\beta)$ випливає, що якщо нулі цілої функції f мають кутову щільність відносно $r^{\lambda(r)}$, то множина виняткових променів f не більш ніж зліченна.

Ціла функція f нульового порядку має сильно регулярне зростання (с. р. зр.) на звичайному промені $l_\theta = \{z : \arg z = \theta\}$, якщо існує границя

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{r^{\lambda(r)}} = H_f(\theta).$$

Тут $\lim\limits_{r\to+\infty}{}^{*}$ означає прямування до границі при $r \to +\infty$, r не належать деякій E_0-множині. Функцію f називаємо функцією с. р. зр., якщо вона є функцією с. р. зр. на всіх звичайних променях l_θ, $-\pi \le \theta < \pi$.

Коефіцієнти Фур'є функцій $\ln|f|$, $\ln f$ та $F(z) = zf'(z)/f(z)$ визначаються за формулами

$$c_k(r, \ln|f|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\varphi})| e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$c_k(r, \ln f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln f(re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$c_k(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} F(re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

які були відповідно введені Й. Йенсеном [5], А. А. Кондратюком [6, с. 10] і Д. Таунсендом [7].

Під функцією зростання φ будемо розуміти невід'ємну, зростаючу до $+\infty$, неперервну на $\mathbb{R}_+$ функцію, $\varphi(0) = 0$. Функції φ і $\widetilde{\varphi}$ такі, що $\varphi(r) \sim \widetilde{\varphi}(r)$, $r \to +\infty$, вважатимемо еквівалентними і будемо ототожнювати.

Нагадаємо, що повільно зростаючою функцією називаємо функцію зростання φ таку, що

$$\varphi(2r)/\varphi(r) \to 1, \quad r \to +\infty.$$

Клас таких функцій позначимо через L_0. За теоремою Карамати $\varphi \in L_0$ тоді і лише тоді, коли φ можна зобразити у вигляді

$$\varphi(r) = \varphi_0(r) exp \left\{ \int_0^r \frac{\delta(t)}{t} dt \right\},$$

де φ_0 і δ — неперервні на $[0, +\infty)$ функції, $\varphi_0(t) \to a > 0$, $\delta(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Позначимо через L клас неперервно-диференційовних функцій зростання υ, для яких $r\upsilon'(r)/\upsilon(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Легко бачити (див., наприклад, [8, с. 15]), що $L \subset L_0$ і для довільної повільно зростаючої до $+\infty$ функції існує еквівалентна функція з класу L.

Через $H_0(\upsilon)$ позначимо клас цілих функцій f нульового порядку, нулі яких задовольняють умову

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{n(r)}{\upsilon(r)} < +\infty, \quad \upsilon \in L.$$

Означення кутової υ-щільності нулів $f \in H_0(\upsilon)$ запроваджуємо так само, як в (1.1) покладаючи $\upsilon(r)$ замість $V(r)$.

1.2 Огляд літератури за темою та вибір напрямків досліджень

Метод рядів Фур'є для вивчення асимптотичних властивостей логарифма модуля цілих і мероморфних функцій почали систематично застосовувати з 60-х років минулого століття А. Рубел, Б. Тейлор, Д. Майлз, Д. Шіа та інш. [9-12]. Перевага цього методу полягає в тому, що він дозволяє вивчати функції, які мають нерегулярне зростання, а також функції нескінченного порядку. Метод рядів Фур'є є ефективним засобом дослідження фундаментальних задач загальної теорії аналітичних та мероморфних функцій, неванліннової теорії розподілу значень, теорії цілих та мероморфних функцій цілком регулярного зростання.

В 1927 р. Н. І. Ахієзер [13] отримав зображення коефіцієнтів Фур'є логарифма модуля цілої функції $c_k(r, \ln|f|)$ через послідовність її нулів (a_j), а саме

$$c_k(r, \ln|f|) = \frac{1}{2}\gamma_k r^k + \frac{1}{2k}\sum_{|a_j|\le r}\left[\left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k\right],$$

$$c_0(r, \ln|f|) = N(r), \quad c_{-k}(r, \ln|f|) = \overline{c_k(r, \ln|f|)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

де γ_k — коефіцієнти розвинення

$$\ln f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\gamma_k z^k$$

в деякому околі нуля, і дав їх застосування до нового доведення теореми Ліндельофа про тип цілої функції цілого порядку.

Аналогічні формули для $c_k(r, \ln f)$ та $c_k(r, F)$ були отримані А. А. Кондратюком в [6, с. 11] та Д. Таунсендом в [7]. Ґрунтуючись на формулах для

$c_k(r,F)$ А. А. Кондратюк та Р. З. Калинець в [14] встановили для $c_k(r,\ln f)$ так звані прямі

$$c_0(r,\ln f)=N(r),$$

$$c_k(r,\ln f)=r^k\int\limits_0^r\frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt,\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

та обернені формули

$$N_k(r)=c_k(r,\ln f)-k\int\limits_0^r\frac{c_k(t,\ln f)}{t}dt,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Подальший розвиток методу рядів Фур'є для повних логарифмів цілих і мероморфних функцій та їх логарифмічних похідних дав Б. Я. Васильків [15 – 17]. Зокрема, він отримав прямі та обернені формули для $c_k(r,F)$, встановив критерії ц. р. зр. цілої функції додатного порядку в термінах коефіцієнтів Фур'є $c_k(r,\ln f)$, $c_k(r,F)$, регулярного поводження p-норм $\ln f$ та F в $L^p[0,2\pi]$-метриці.

Цілі та мероморфні функції f, для яких величини $n(r,0,f)$, $N(r,0,f)$, $\ln M(r,f)$ є повільно зростаючими функціями, володіють цікавими і специфічними властивостями і часто є екстремальними у багатьох задачах теорії розподілу значень. Дослідженню цих функцій присвячено багато робіт (див., наприклад, [18– 24]). Зауважимо, що порядок цілих функцій, у яких одна з вищенаведених характеристик є повільно зростаючою, дорівнює нулю.

Ж. Валірон в 1914 р. дослідив взаємозв'язок між $\ln f$ та лічильною функцією $n(r)$ нулів f, розташованих на одному промені [25]. Цей зв'язок описує наступна теорема.

Теорема 1.1. *Нехай $f(z)$ — ціла функція нецілого додатного порядку ρ, $\rho(r)$ — її уточнений порядок, всі нулі f від'ємні і $\Delta\in(0,\infty)$. Якщо*

$n(r) \sim \Delta r^{\rho(r)}$, $r \to \infty$, *то для довільного* $\delta > 0$

$$\ln f(re^{i\theta}) \sim \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho\theta} r^{\rho(r)} \quad (r \to \infty)$$

рівномірно відносно $\theta \in [-\pi + \delta, \pi - \delta]$.

Навпаки, якщо $f(z)$ *— ціла функція нецілого додатного порядку* ρ *з від'ємними нулями і*

$$\ln |f(r)| \sim \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} r^{\rho(r)} \quad (r \to \infty),$$

то $n(r) \sim \Delta r^{\rho(r)}$, $r \to \infty$.

Простіше доведення цієї теореми дав Е. Тітчмарш в [26]. Теореми, в яких знаходять асимптотику функції $\ln f(z)$ за відомою асимптотикою функції $n(r)$, називають теоремами типу Валірона, а обернені теореми — типу Валірона-Тітчмарша.

Знаходженням умов, за яких для цілих функцій правильні дещо тонші асимптотичні оцінки, займалися П. З. Агранович, В. М. Логвиненко, Ю. І. Мельник, Ю. І. Любарський, М. А. Субханкулов, М. М. Тян, Р. С. Юлмухаметов, Б. М. Хабібулін, Б. В. Винницький, Р. В. Хаць та інші. Так, наприклад [27, 28], В. М. Логвиненко довів теореми типу Валірона та Валірона-Тітчмарша у випадку двочленної асимптотики:

$$n(t) = \Delta t^{\rho(t)} + \Delta_1 t^{\rho_1(t)} + o(t^{\rho_1(t)}), \quad t \to \infty$$

і

$$\ln f(re^{i\theta}) = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho\theta} r^{\rho(r)} + \frac{\pi\Delta_1}{\sin \pi\rho_1} e^{i\rho_1\theta} r^{\rho_1(r)} + o(r^{\rho_1(r)}), \quad r \to \infty,$$

де $\Delta \in (0, +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho(r)$, $\rho_1(r)$ — уточнені порядки, $\rho(r) \to \rho$, $\rho_1(r) \to \rho_1$ при $r \to \infty$, $[\rho] < \rho_1 < \rho$.

В [18] М. В. Заболоцький довів теореми типу Валірона та Валірона-Тітчмарша для цілих трансциндентних функцій нульового порядку. Зокрема, з результатів роботи [18] випливає таке твердження.

Теорема 1.2. *Нехай* f *— ціла функція нульового порядку з від'ємними нулями такими, що*

$$n(r) = \Delta r^{\lambda(r)} + o(r^{\lambda(r)}), \quad r \to \infty, \quad 0 < \Delta < +\infty.$$

Тоді для θ, $-\pi < \theta < \pi$,

$$\ln f(re^{i\theta}) = N(r) + i\Delta\theta r^{\lambda(r)} + o(r^{\lambda(r)}), \quad r \to \infty,$$

причому величина $H_f(r,\theta)$ *прямує до* $i\Delta\theta$ *при* $r \to \infty$ *рівномірно відносно* θ *в будь-якому куті* $\{z : \arg z \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]\}$, $\delta > 0$.

Виходячи з теореми 1.1, в 1936-42 роках Б. Я. Левін та А. Пфлюгер незалежно один від одного побудували теорію цілих функцій цілком регулярного зростання (ц. р. зр.), яка встановлює зв'язок між аргументами нулів цілої функції f і регулярністю зростання $\ln|f|$. В 1998 р. М. В. Заболоцький, враховуючи теорему 1.2, ввів поняття сильного регулярного зростання (с. р. зр.) для функцій класу $H_0(\upsilon)$, яке дає взаємозв'язок між регулярним зростанням логарифма цілої функції $\ln f$ та розподілом її нулів.

Зупинимось спочатку на властивостях функцій класу $H_+^*(\rho(r))$, тобто цілих функцій додатного порядку ц. р. зр. Теорія цих функцій детально викладена в монографії Б. Левіна [4]. Клас функцій ц. р. зр. $H_+^*(\rho(r))$ є досить широким, оскільки до нього належать майже всі відомі на сьогодні цілі функції, зокрема: цілі тригонометричні функції; експоненційні многочлени; функції Бесселя та Міттаг-Леффлера; перетворення Фур'є скінченних функцій; функції експоненціального типу з класу L^p; цілі розв'язки лінійного диференціального рівняння будь-якого порядку з поліноміальними коефіцієнтами; тощо.

Знайдено багато необхідних і достатніх умов належності цілої функції до класу $H_+^*(\rho(r))$. Одним з основних серед цих результатів є критерій ц. р.

зр. в термінах розподілу нулів. Для спрощення наведемо основну теорему теорії цілих функцій ц. р. зр. у випадку її нецілого порядку.

Теорема 1.3. ([4, с. 205]). *Для того, щоб ціла функція f нецілого порядку $\rho \in (0, +\infty)$ була функцією ц. р. зр., необхідно і достатньо, щоб множина її нулів мала кутову щільність, причому*

$$h_f(\varphi) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \cos \rho(\varphi - \psi - \pi) d\Delta(\psi).$$

Виявляється, якщо f є функцією ц. р. зр., то регулярно зростає не тільки $\ln|f|$, а й $\arg f$, а отже, $\ln f$ (див. [4, с. 125]).

В. С. Азарін отримав критерій ц. р. зр. в термінах коефіцієнтів Фур'є [29] і граничних множин [30].

Теорема 1.4. ([29]). *Для того, щоб ціла функція $f \in H_+(\rho(r))$ була функцією ц. р. зр., необхідно і достатньо, щоб для всіх $k \in \mathbb{Z}$ існували границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r, \ln|f|)}{V(r)} = c_k, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

причому $h_f(\varphi) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\varphi}$.

Для доведення цієї теореми В. С. Азарін використав такий результат А. А. Гольдберга.

Теорема 1.5. ([29]). *Для того, щоб $f \in H_+^*(\rho(r))$ порядку $\rho \in (0, +\infty)$ була функцією ц. р. зр., необхідно і достатньо, щоб для кожних $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ існувала границя*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{V(r)} \int_{\alpha}^{\beta} \ln|f(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

А. А. Кондратюк використав останню умову для означення ц. р. зр. мероморфних функцій додатного порядку. Використовуючи метод рядів

Фур'є, він (див. [6]) побудував теорію мероморфних функцій ц. р. зр. відносно функцій зростання λ таких, що $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$ при $r \to \infty$, зокрема отримав аналог теореми В. С. Азаріна [29] та дослідив зростання $\ln|f|$ за p-нормою простору $L^p[0, 2\pi]$.

Нехай $\|\cdot\|_p-$ норма в просторі $L^p[0, 2\pi]$. З результатів А. А. Кондратюка ([6, с. 78]) випливає такий критерій ц. р. зр.

Теорема 1.6. *Якщо* $f \in H_+^*(\rho(r))$, *то для кожного* $1 \le p < +\infty$ *виконується*

$$\lim_{r\to+\infty} \left\| \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{V(r)} - h_f(\varphi) \right\|_p = 0.$$

Навпаки, якщо $f \in H_+(\rho(r))$, *існують число* $p \in [1, +\infty)$ *і функція* $\tilde{h} \in L^p[0, 2\pi]$ *такі, що*

$$\lim_{r\to+\infty} \left\| \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{V(r)} - \tilde{h}(\varphi) \right\|_p = 0,$$

то $f \in H_+^*(\rho(r))$ *і* $\tilde{h}(\varphi) = h_f(\varphi)$ *майже скрізь на* $[0, 2\pi]$.

Асимптотична поведінка основних характеристик логарифмічної похідної мероморфних та цілих функцій додатного порядку ц. р. зр. вивчалась А. А. Гольдбергом, М. Е. Коренковим, М. Л. Содіним, М. М. Строчиком. Зауважимо, що в якості виняткових множин в цих дослідженнях виступають C_0^α-множини з $\alpha \in (1, 2]$. При цьому встановлено [31], що при вивченні асимптотики логарифмічної похідної $\alpha = 1$ брати вже не можна.

В [31] А. А. Гольдберг та М. Е. Коренков знайшли асимптотичні зображення для логарифмічної похідної $F(z) = zf'(z)/f(z)$ функцій $f \in H_+^*(\rho(r))$. З їхніх результатів випливає таке твердження

Теорема 1.7. *Якщо* $f \in H_+^*(\rho(r))$, *то існують множина* $E \in C_0^2$ *і функція* $H \in L_1(0, 2\pi)$ *такі, що*

$$F(z) = H(\varphi)V(r) + o\left(V(r)\right), \quad r \to \infty, \quad z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus E.$$

В [32] А. А. Гольдберг, М. Л. Содін, М. М. Строчик дослідили зв'язок між ц. р. зр. мероморфних функцій додатного порядку, регулярним поводженням логарифмічної похідної F та її коефіцієнтів Фур'є $c_k(r, F)$. З їхніх результатів випливає обернене твердження до теореми 1.7 та критерій належності функцій класу $H_+^*(\rho(r))$ в термінах коефіцієнтів Фур'є $c_k(r, F)$ логарифмічної похідної.

Теорема 1.8. *Якщо* $f \in H_+(\rho(r))$ *та існують функція* $H \in L^1[0, 2\pi]$, *множина* $E \in C_0^2$ *такі, що*

$$F(z) = H(\varphi)V(r) + o\left(V(r)\right), \quad z \to \infty, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E,$$

то $f \in H_+^*(\rho(r))$.

Теорема 1.9. *Функція* $f \in H_+^*(\rho(r))$ *тоді і лише тоді, коли для всіх цілих* k *існують границі*

$$\lim_{r \to +\infty}^{*} \frac{c_k(r, F)}{V(r)} = d_k.$$

Асимптотиче поводження логарифмічної похідної мероморфних функцій ц. р. зр. в $L^p[0, 2\pi]$-метриці дослідив Я. В. Васильків [15, 16]. З його результатів випливає такий критерій.

Теорема 1.10. *Для того, щоб* $f \in H_+^*(\rho(r))$, *необхідно і досить, щоб існували функція* $g \in L^1[0, 2\pi]$ *і множина* $G \in \mathcal{E}_\eta$, $0 < \eta < 1$, *такі, що для довільного* $p \in [1, +\infty)$

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi})}{r^{\rho(r)}} - g(\varphi) \right\|_p \to 0, \ r \to +\infty, \ r \notin G.$$

Я. В. Васильків також описав асимптотичну поведінку p-тих інтегральних середніх $(1 \le p < +\infty)$ та середніх за площею повних логарифмів і логарифмічних похідних мероморфних функцій ц. р. зр. у розумінні А. А. Кондратюка [17].

Теорія цілих функцій ц. р. зр. ненульового порядку була поширена на канонічні добутки Нафталевича-Цудзі з єдиною точкою скупчення нулів (М. А. Гірник [40, 41], Р. С. Галоян [42]) та на аналітичні в півплощині (А. П. Грішин [33]-[36], М. В. Говоров [37], А. І. Хейфіц [38, 39]), мероморфні в площині (А. А. Кондратюк [6], Ю. П. Лапенко [43]), субгармонійні та δ-субгармонійні в просторі $\mathbb{R}^m$ (Я. В. Васильків [44]), δ-субгармонійні в півплощині (К. Г. Малютін і Н. Садик [45]) функції. Ряд важливих результатів в певних класах функцій ц. р. зр. отримали П. З. Агранович, В. С. Азарін, Л. І. Ронкін, І. Ф. Красічков-Терновський, В. М. Логвиненко, В. С. Бойчук, С. Ю. Фаворов, Н. М. Черних, С. К. Балашов, Г. Опитц, Л. Груман, К. Кизельман, А. Ю. Рашковський, С. І. Тарасюк, Р. Сигурдсон та інші.

Теорія функцій ц. р. зр. застосовується в багатьох розділах сучасного комплексного аналізу, серед яких аналітична теорія диференціальних рівнянь, теорія краєвих задач Рімана, теорія майже періодичних функцій, інтерполяція цілих функцій, зображення функцій рядами звичайних і узагальнених експонент, розв'язність рівнянь типу згортки в різних класах аналітичних функцій, а також опосередковано у ряді задач теоретичної та радіофізики, тощо.

Якщо для цілих функцій нульового порядку аналогічно ввести поняття ц. р. зр., то f буде функцією ц. р. зр. тоді і лише тоді, коли f має ц. р.зр. хоча б на одному промені, причому ([46, с. 72], [47])

$$h_f(\theta) = \lim_{z\to\infty}{}^{*} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{V(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{N(r)}{V(r)} = K, \quad 0 < K < +\infty.$$

З останнього співвідношення бачимо, що ц. р. зр. цілої функції нульового порядку не залежить від аргументів її нулів, а лише від їхніх модулів.

Якщо порядок цілої функції f дорівнює нулю, її уточнений порядок

$\rho(r)$ вже не є уточненим порядком лічильної функції її нулів $n(r)$. В [47] показано, що в цьому випадку $n(r) = o(V(r))$, $r \to \infty$, а отже, нулі f завжди матимуть кутову щільність відносно функції порівняння $V(r)$ ($\Delta(\alpha, \beta) = 0$ для всіх α і β, $0 \le \alpha < \beta < 2\pi$).

В 1998 році М. В. Заболоцький для цілих функцій нульового порядку вводить нове поняття "сильно регулярне зростання", яке володіє властивостями подібними до властивостей функцій ц. р. зр. Клас цілих функцій с. р. зр. позначимо через $H_0^*(\upsilon)$, $\upsilon \in L$. З результатів роботи [19] випливає наступний критерій с. р. зр.

Теорема 1.11. *Нехай $f \in H_0(\upsilon)$ і нулі f мають кутову υ-щільність. Тоді $f \in H_0^*(\upsilon)$, причому для всіх звичайних променів l_θ*

$$H_f(\theta) = i \int\limits_{\theta-2\pi}^{\theta} (\theta - \psi - \pi) d\Delta(\psi).$$

Навпаки, якщо $f \in H_0^*(\upsilon(r))$ і нулі f лежать на скінченній системі променів Γ_m, то множина нулів f має кутову υ-щільність.

Те, що в загальному випадку із с. р. зр. не випливає існування кутової υ-щільності нулів показано в [48]. Достатні умови для існуванння кутової щільності нулів цілої функції с. р. зр. знайдено в [49].

М. В. Заболоцький разом з О. В. Костюк дослідили зв'язок між с. р. зр. цілих функцій нульового порядку, розподілом нулів цілої функції f за аргументами, асимптотичною поведінкою коефіцієнтів Фур'є $\ln f$, регулярним зростанням в $L^p[0, 2\pi]$-метриці $\ln|f|$ та $\arg f$ ([48–52]).

Приймемо

$$\delta_k = \lim_{r \to +\infty} \frac{n_k(r)}{\upsilon(r)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$G(\theta, f) = i \sum_{k \neq 0} \frac{\delta_k}{k} e^{ik\theta}, \quad \upsilon_1(r) = \int_0^r \frac{\upsilon(t)}{t} dt.$$

Неважко показати, що функція $G(\theta, f)$ дійснозначна, а саме маємо

$$G(\theta, f) = -2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Im}(\delta_k e^{ik\theta})}{k}.$$

Теорема 1.12. *Нехай* $f \in H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$ *і нулі* f *мають кутову* υ*-щільність. Тоді існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r, \ln f)}{\upsilon(r)} = l_k, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{1.2}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r, \ln f)}{\upsilon_1(r)} = l_0. \tag{1.3}$$

Навпаки, якщо $f \in H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$, *існують границі* (1.2), (1.3) *і нулі* f *лежать на одному промені, то нулі* f *мають кутову* υ*-щільність.*

Теорема 1.13. *Нехай* $f \in H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$ *і нулі* f *мають кутову* υ*-щільність. Тоді для всіх* $p \in [1, +\infty)$

$$\left\| \frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{\upsilon(r)} - iG(\theta, f) \right\|_p \to 0, \ r \to +\infty, \tag{1.4}$$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{\upsilon_1(r)} = \Delta_0. \tag{1.5}$$

Навпаки, якщо $f \in H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$, *існують число* $b_0 \in \mathbb{R}$ *і функція* $H \in L^p[0, 2\pi]$ *такі, що виконуються* (1.4), (1.5) *з* $G = H$, $\Delta_0 = b_0$, *і нулі* f *лежать на одному промені, то нулі* f *мають кутову* υ*-щільність.*

Теорема 1.14. *Якщо* $f \in H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$ *і для деяких числа* $p \in [1, +\infty)$ *та функції* $H \in L^p[0, 2\pi]$ *виконується* (1.4) *з* $G = H$, *то* $\int\limits_0^{2\pi} H(\theta)d\theta = 0$ *і для всіх* $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ *існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{N_k(r)}{\upsilon_1(r)} = \Delta_k.$$

З теорем 1.11-1.14 бачимо, що на відміну від функцій класу $H_+^*(\rho(r))$ (див. теореми 1.3, 1.4, 1.6), регулярні поводження характеристик $\ln f$,

$c_k(r, \ln f)$ функцій класу $H_0(\upsilon)$ в загальному випадку не є рівносильними існуванню кутової υ-щільності їх нулів. Якщо обмежитися деякою підмножиною функцій зростання $\upsilon \in L$ і деяким підкласом класу $H_0(\upsilon)$, то в [50–53] отримано повні аналоги теорем 1.3, 1.4, 1.6.

Нехай $L^\wedge \subset L$ — множина функцій зростання $\upsilon \in L$ така, що $\dfrac{r\upsilon'(r)}{\upsilon(r)} \searrow 0$, $r \to +\infty$, $H_0(\upsilon, \Gamma_m) \subset H_0(\upsilon)$ — клас функцій $f \in H_0(\upsilon)$ з нулями на скінченній системі променів Γ_m, де $\Gamma_m = \bigcup\limits_{j=1}^{m} l_{\theta_j}$, $-\pi \le \theta_1 < \ldots < \theta_m < \pi$. З результатів робіт [50, 51, 53] отримуємо таке твердження.

Теорема 1.15. *Нехай* $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$, $\upsilon \in L^\wedge$. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) $f \in H_0^*(\upsilon)$,

2) нулі f *мають кутову* υ*-щільність;*

3) існують границі (1.2), (1.3)*;*

4) для довільного $p \in [1, +\infty)$

$$\left\| \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{v_1(r)} - \delta_0 \right\|_p \to 0, \ r \to +\infty,$$

$$\left\| \frac{\arg f(re^{i\theta})}{v(r)} - G(\theta, f) \right\|_p \to 0, \ r \to +\infty.$$

Питання взаємозв'язку поводження основних характеристик логарифмічної похідної цілої функції $f \in H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$, та існування кутової υ-щільності нулів f досі залишалося не дослідженим.

Асимптотика та оцінки логарифмічної похідної цілих функцій зовні виняткових множин відіграють важливу роль в різних галузях математики. Так, добре відомою є роль леми про логарифмічну похідну в доведенні другої основної теореми теорії розподілу значень мероморфних функцій

([2]). Вперше доведена ще Р. Неванлінною, через своє широке застосування сьогодні ця лема має багато уточнень (див., наприклад, [54, 55]). Оцінки логарифмічної похідної зовні виняткових множин використовували у своїх дослідженнях В. Хейман і Дж. Майлз ([56]), А. З. Мохонько і Л. І. Коляса ([57]) для вивчення швидкості зростання мероморфних функцій та їх похідних, О. Б. Скасків ([58]) — похідних абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, А. А. Гольдберг ([59]) — функцій Міттаг-Леффлера, М. М. Шеремета та його учні ([60]) — функцій обмеженого індексу та l-індексу, В. Рудін ([61]), І. Е. Чижиков і Л. І. Коляса ([62]) — субгармонійних функцій та інш. Логарифмічну похідну поліномів, зокрема виняткові множини, на яких вона необмежена, вивчали А. Макінтайр і В. Фукс ([63]), В. Я. Ейдерман і Дж. М. Андерсон ([64, 65]) та інш.

Оцінка логарифмічної похідної мероморфних функцій займає центральне місце не лише в неванліннівській теорії розподілу значень, а й в аналітичній теорії диференціальних рівнянь ([66–70]). Встановлено, що розв'язки деяких диференціальних рівнянь, коефіцієнтами яких є мероморфними функціями, часто теж є мероморфними. Тому, щоб отримати про них певну інформацію, не знаходячи при цьому розв'язку рівняння у явному вигляді, простіше дослідити поводження їхніх логарифмічних похідних. Найчастіше такі оцінки застосовуються для визначення кількості розв'язків диференціального рівняння або оцінки порядків цих розв'язків. Тому дослідження поводження логарифмічної похідної цілих функцій повільного зростання та її характеристик є актуальною задачею.

В дисертаційній роботі досліджено взаємозв'язки між основними характеристиками логарифмічної похідної та існуванням кутової υ-щільності нулів функції класу $H_0(\upsilon)$, зокрема отримано аналоги теорем 1.7–1.10. Сформулюємо досліджувані задачі:

1) дослідити взаємозв'язок між кутовою υ-щільністю нулів цілої функції нульового порядку та асимптотикою її логарифмічної похідної $F = zf'/f$;

2) одержати зв'язки між регулярним зростанням логарифмічної похідної цілої функції повільного зростання, коефіцієнтами Фур'є F та зростанням F в $L^p[0, 2\pi]$-метриці;

3) виділити підкласи цілих функцій нульового порядку, для яких поводження характеристик логарифмічної похідної F рівносильне існуванню кутової υ-щільності її нулів.

1.3 Основні результати дисертації

В цьому підрозділі нумерація теорем, наслідків і формул є така сама, як надалі в розділах 2 і 3 відповідно.

В роботі досліджуються властивості цілих функцій близьких до поліномів. Зокрема, розв'язано таку актуальну задачу, як встановлення зв'язків між регулярним поводженням величин, які характеризують асимптотичне поводження логарифмічної похідної, і розподілом аргументів нулів таких функцій.

Нехай f — ціла функція нульового порядку, $\upsilon \in L$. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $f(0) = 1$, $\upsilon(0) = 0$.

Будемо говорити, що нулі функції $f \in H_0(\upsilon)$ мають υ-щільність (кутову υ-щільність), якщо існує границя

$$\Delta\colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{\upsilon(r)} \quad \left(\Delta(\alpha,\beta)\colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r,\alpha,\beta)}{\upsilon(r)}\right.$$

для всіх α і β, що не належать деякій не більш ніж зліченній множині з $[0, 2\pi]$), $0 < \Delta < +\infty$.

Нехай $F(z) = z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ логарифмічна похідна цілої функції нульового порядку f.

У другому розділі дисертації вивчаються зв'язки між існуванням кутової υ-щільності нулів цілої функції нульового порядку f, асимптотикою її логарифмічної похідної F, коефіцієнтами Фур'є F та збіжністю F в $L^p[0, 2\pi]$-метриці. Розділ 2 складається з п'яти підрозділів і висновків.

В підрозділі 2.2 знайдено асимптотику логарифмічної похідної F зовні деякої C_0^α-множини, $1 < \alpha \leq 2$, за умови, що нулі цілої функції $f \in H_0(\upsilon)$ мають кутову υ-щільність.

Теорема 2.2. *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ і нулі функції f мають кутову υ-щільність. Тоді існує множина $E \in C_0^\alpha$, $1 < \alpha \leq 2$, така, що*

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty, \quad re^{i\varphi} \notin E. \tag{2.9}$$

Доведення цієї теореми проведено у три етапи. Спершу теорема 2.2 доводиться для цілої функції f з від'ємними нулями, потім це доведення узагальнюється для f з нулями, розташованими на скінченній системі променів. Перехід до загального випадку розташування нулів здійснюється за допомогою апроксимаційної теореми, яка є основним результатом підрозділу 2.1.

Теорема 2.1. *Нехай $\upsilon \in L$, $f_1, f_2 \in H_0(\upsilon)$, послідовності нулів $(a_{1,k})$, $(a_{2,k})$ відповідно функцій f_1, f_2 мають υ-щільність, $|a_{1,k}| = |a_{2,k}|$, $|\arg a_{1,k} - \arg a_{2,k}| < \delta$. Тоді для будь-яких $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $1 < \mu \leq 2$ існують $\delta > 0$ і множина E, $D_\mu(E) < \eta$, така, що*

$$|F_1(z) - F_2(z)| < \varepsilon\upsilon(r), \quad z \notin E. \tag{2.1}$$

В підрозділі 2.3 досліджується питання взаємозв'язку між регулярним розподілом нулів цілої функції нульового порядку та регулярним поводженням коефіцієнтів Фур'є її логарифмічної похідної.

Теорема 2.3. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ *та існує така множина* $E \in C_0^\alpha$, $1 < \alpha \le 2$, *що*

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty, \quad re^{i\varphi} \notin E.$$

Тоді для $k \in \mathbb{Z}$ *існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \quad \lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0, \quad k \ne 0. \tag{2.18}$$

З теорем 2.2, 2.3 отримуємо таке твердження.

Наслідок 2.1. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ *і нулі функції* f *мають кутову* υ*-щільність. Тоді для* $k \in \mathbb{Z}$ *існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \quad \lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0, \quad k \ne 0.$$

Питання зв'язку між коефіцієнтами Фур'є $c_k(r,F)$ та регулярним зростанням в $L^p[0,2\pi]$-метриці логарифмічної похідної F цілої функції нульового порядку досліджено у підрозділі 2.4. Основними в цьому підрозділі є наступні твердження.

Теорема 2.4. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ *і для* $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ *існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0.$$

Тоді існує множина $G \in \mathcal{E}_\delta$, $0 < \delta < 1$, *така, що для довільного* $p \in [1,+\infty)$

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{\upsilon(r)} \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty, \quad r \notin G.$$

Теорема 2.5. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ *і виконуються співідношення* (2.18). *Тоді існує множина* $G \in \mathcal{E}_\delta$, $0 < \delta < 1$, *така, що для* $p \in [1,+\infty)$

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi})}{\upsilon(r)} - \Delta \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty, \quad r \notin G.$$

Виявляється, що на відміну від цілих функцій додатного скінченного порядку, для яких теореми 1.7–1.10 є критеріями, твердження обернені до

теорем 2.2–2.4 неправильні. В підрозділі 2.5 побудовано загальний приклад функції з класу $H_0(\upsilon)$, нулі якої не мають кутової υ-щільності.

Теорема 2.6. *Для довільної функції $\upsilon \in L$ існують функція $f \in H_0(\upsilon)$ і множина $E \in C_0^2$ такі, що*

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(1), \quad z = re^{i\varphi} \to \infty, \quad z \notin E;$$

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0, \quad k \neq 0;$$

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{\upsilon(r)} \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty,\ r \notin G,\ G \in \mathcal{E}_1,$$

і нулі f не мають кутової υ-щільності.

Виникає питання, за яких умов, накладених на розподіл нулів цілої функції f, будуть правильні й обернені твердження до теорем 2.2–2.4. Відповідь на це питання отримано в третьому розділі дисертаційної роботи. Виявляється, що у випадку цілої функції повільного зростання для того, щоб отримати результати, які дадуть нам не лише необхідні, а й достатні умови для існування кутової υ-щільності нулів f, потрібно розглянути випадок розташування нулів на скінченній системі променів і дещо точніші асимптотики характеристик логарифмічної похідної F. Розділ 3 складається з п'яти підрозділів і висновків.

Нехай $\Gamma_m = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \{z\colon \arg z = \theta_j\} = \bigcup\limits_{j=1}^{m} l_{\theta_j}$, $-\pi \le \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < \pi$, — скінченна система променів. Розглянемо підклас цілих функцій з класу $H_0(\upsilon)$, нулі яких лежать на скінченній системі променів Γ_m, і позначимо його $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$. Для $\widetilde{\upsilon} \in L$ приймемо

$$\upsilon(r) = \int\limits_0^r \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t} dt,$$

$\upsilon(0) = 0$.

Покладемо $n(r, \theta_j; f) = n(r, \theta_j)$ – кількість нулів функції $f \in H_0(\upsilon)$, що лежать на промені $l_{\theta_j} = \{z\colon \arg z = \theta_j\}$, модулі яких не перевищують r,

$h_j(\theta) = (\theta - \pi - \theta_j)$, $\theta_j < \theta < \theta_j + 2\pi$, а $\widehat{h}_j(\theta)$ – її періодичне продовження з $(\theta_j, \theta_j + 2\pi)$ на $\mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$.

В підрозділі 3.1 для цілої функції з підкласу $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ доведено наступний аналог теореми 2.2

Теорема 3.1. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$, *для кожного* $j = \overline{1, m}$

$$n(r, \theta_j) = \Delta_j \upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad r \to +\infty, \tag{3.1}$$

$\Delta = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j$, $H_f(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j \widehat{h}_j(\theta)$, $\Delta_j \geq 0$. *Тоді для* $\theta \neq \theta_j$,

$$F(re^{i\theta}) = \Delta \upsilon(r) + iH_f(\theta)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad r \to +\infty,$$

причому для довільного $\delta > 0$ *останнє співвідношення виконується рівномірно щодо* θ *на множині* $[-\pi, \pi) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} (\theta_j - \delta, \theta_j + \delta)$.

На основі цього твердження знайдено достатню умову існування кутової υ-щільності нулів функції $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ в термінах асимптотики її логарифмічної похідної.

Теорема 3.2. *Нехай* $G \in L^1[0, 2\pi]$, $\Delta > 0$, $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і для* $\theta \neq \theta_j$

$$F(re^{i\theta}) = \Delta \upsilon(r) + iG(\theta)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad r \to +\infty, \tag{3.6}$$

причому для довільного $\delta > 0$ *співвідношення (3.6) виконується рівномірно щодо* θ *на множині* $[-\pi, \pi) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} (\theta_j - \delta, \theta_j + \delta)$. *Тоді нулі* f *мають кутову* υ*-щільність, причому для всіх* $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} \theta_j$ *виконується*

$$\Delta(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \left(G(\alpha) - G(\beta) + \Delta(\beta - \alpha) \right). \tag{3.7}$$

Зв'язок між кутовою υ-щільністю нулів цілої функції з класу $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ і коефіцієнтами Фур'є її логарифмічної похідної вивчається в підрозділі 3.2. Основною теоремою цього підрозділу є теорема 3.4, поштовхом до сформулювання якої стала теорема 3.3. Нехай $\Omega = \{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$, де (a_n) –

послідовність нулів цілої функції f, розташованих в порядку неспадання їх модулів.

Теорема 3.3. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і виконуються співвідношення* (3.1). *Тоді*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = 0, \qquad \lim_{r\to+\infty, r\notin\Omega} \frac{c_k(r,F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

де $\delta_k = -\dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j e^{-ik\theta_j}$.

Теорема 3.4. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і для* m *послідовних цілих чисел* $k = \overline{k_0, k_0+m-1}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, *існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \qquad \lim_{r\to+\infty, r\notin\Omega} \frac{c_k(r,F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = \delta_k, \quad k \neq 0. \tag{3.12}$$

Тоді нулі f *мають кутову* υ*-щільність.*

В підрозділі 3.3 знайдено необхідні та достатні умови для існування кутової υ-щільності нулів функції $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ в термінах збіжності її логарифмічної похідної за p-нормою в просторі $L^p[0, 2\pi]$.

Теорема 3.5. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і виконуються співвідношення* (3.1). *Тоді*

$$\left\| \frac{F(re^{i\theta}) - n(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - iH_f(\theta) \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty, \tag{3.17}$$

де $H_f(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j \widehat{h}_j(\theta)$, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j$.

Теорема 3.6. *Нехай* $G \in L^1[0, 2\pi]$, $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і*

$$\left\| \frac{F(re^{i\theta}) - n(r)}{\tilde{\upsilon}(r)} - iG(\theta) \right\|_p \to 0, \ r \to +\infty. \tag{3.20}$$

Тоді нулі f *мають кутову* υ*-щільність, причому* $\int\limits_0^{2\pi} G(\theta)d\theta = 0$.

Обернені твердження до теорем 2.3 і 2.4 розділу 2 без умови розташування нулів на скінченній системі променів, як у теоремах 3.3, 3.5 розділу 3, можливі лише за умови розгляду деяких уточнених співвідношень для

k-тих коефіцієнтів Фур'є $c_k(r,F)$ та збіжності F в $L^p[0,2\pi]$-метриці. Ці твердження доведено в підрозділі 3.4.

Теорема 3.7. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, $\Delta > 0$ *та існує функція* $G \in L^1[0,2\pi]$ *така, що*

$$\lim_{r\to+\infty} \left\| \frac{F(re^{i\theta}) - \Delta\upsilon(r)}{\tilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_p = 0.$$

Тоді існують границі

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \qquad \lim_{r\to+\infty, r\notin\Omega} \frac{c_k(r,F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = c_k, \quad k \neq 0. \tag{3.21}$$

Теорема 3.8. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ *та існують границі* (3.21). *Тоді нулі* f *мають кутову* υ*-щільність.*

З теорем 3.7 і 3.8 випливає наступне твердження.

Наслідок 3.2. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, $\Delta > 0$ *та існує функція* $G \in L^1[0,2\pi]$ *така, що*

$$\lim_{r\to+\infty} \left\| \frac{F(re^{i\theta}) - \Delta\upsilon(r)}{\tilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_p = 0.$$

Тоді нулі f *мають кутову* υ*-щільність.*

Наукові результати, отримані в дисертаційній роботі, мають форму критеріїв. Усі вони є новими і можуть бути використані для подальшого розвитку теорії цілих функцій.

Розділ 2

Асимптотика, коефіцієнти Фур'є, збіжність в $L^p[0, 2\pi]$-метриці логарифмічної похідної та кутова щільність нулів цілих функцій нульового порядку

В розділі 2 ми вивчаємо зв'язки між існуванням кутової щільності нулів цілої функції нульового порядку і такими характеристиками її логарифмічної похідної, як асимптотичне поводження, коефіцієнти Фур'є, збіжність в $L^p[0, 2\pi]$-метриці. Також в цьому розділі отримано апроксимаційну теорему для функції F, яка відіграє важливу роль у наших дослідженнях, і побудовано приклад цілої функції нульового порядку, який ілюструє отримані результати.

2.1 Апроксимаційна теорема для логарифмічної похідної цілих функцій нульового порядку

В даному підрозділі ми доведемо апроксимаційну теорему для логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку, яка відіграє важливу роль в наших дослідженнях. Зокрема, при знаходженні асимптотики логарифмічної похідної цілої функції f за умови існування кутової щільності її нулів, спочатку розглядаємо f з нулями на скінченній системі променів.

Перехід до загального випадку розташування нулів цілої функції здійснюємо за допомогою цієї апроксимаційної теореми.

Нехай L – клас додатних, неспадних, необмежених, неперервно диференційовних на $\mathbb{R}_+$ функцій υ таких, що $r\upsilon'(r)/\upsilon(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Не зменшуючи загальності вважаємо, що $\upsilon(r) = 0$ при $0 \le r \le 1$. Функції $\upsilon_1, \upsilon_2 \in L$ будемо вважати еквівалентними і ототожнювати, якщо $\upsilon_1(r) \sim \upsilon_2(r)$, $r \to +\infty$. Клас L співпадає з класом повільно зростаючих до $+\infty$ функцій l таких, що

$$l(2x) \sim l(x), \quad x \to +\infty.$$

Позначимо через $H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$, клас цілих функцій f нульового порядку, для яких

$$0 < \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{\upsilon(r)} < +\infty.$$

Нехай $n(r, \alpha, \beta)$ – кількість нулів цілої функції в секторі $\{z\colon |z| \le r, \alpha \le \arg z < \beta\}$, $0 \le \alpha < \beta < 2\pi$.

Будемо говорити, що нулі функції $f \in H_0(\upsilon)$ мають υ-щільність (кутову υ-щільність), якщо існує границя

$$\Delta\colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{\upsilon(r)} \quad \left(\Delta(\alpha,\beta)\colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r,\alpha,\beta)}{\upsilon(r)}\right.$$

для всіх α і β, що не належать деякій не більш ніж зліченній множині з $[0, 2\pi]$), $0 < \Delta < +\infty$.

Вважаємо, що множина $E \subset \mathbb{C}$ має верхню μ-щільність, $1 < \mu \le 2$, якщо її можна покрити послідовністю кругів $\{z\colon |z - z_j| < r_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, $z_j \to \infty$, таких, що

$$D_\mu(E)\colon = \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\mu} \sum_{|z_j|\le r} r_j^\mu = \eta, \ 0 \le \eta < +\infty.$$

Сім'ю таких множин позначимо C_η^μ.

Ми отримали такий аналог леми 1 з [31] для логарифмічної похідної $F(z) = z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ цілої функції нульового порядку f, який сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2.1. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f_1, f_2 \in H_0(\upsilon)$, *послідовності нулів* $(a_{1,k})$, $(a_{2,k})$ *відповідно функцій* f_1, f_2 *мають* υ*-щільність,* $|a_{1,k}| = |a_{2,k}|$, $|\arg a_{1,k} - \arg a_{2,k}| < \delta$. *Тоді для будь-яких* $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $1 < \mu \leq 2$ *існують* $\delta > 0$ *і множина* E, $D_\mu(E) < \eta$, *така, що*

$$|F_1(z) - F_2(z)| < \varepsilon\upsilon(r), \quad z \notin E. \tag{2.1}$$

При доведенні цієї теореми будемо використовувати такий аналог леми Картана.

Лема 2.1. ([63]). *Якщо* $b_j \in \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$, $1 < \mu \leq 2$, $H > 0$, *то зовні деякої системи не більше ніж* n *кругів з радіусами* r_k *таких, що* $\sum\limits_k r_k^\mu \leq (2H)^\mu$ *і кожний круг містить хоча б одну точку* b_j, *виконується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z - b_j|} \leq \frac{\mu}{\mu - 1}\frac{n}{H}.$$

Доведення теореми 2.1. Нехай $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $1 < \mu \leq 2$ задані довільні числа, $n(r) = n(r, 0, f_1) = n(r, 0, f_2) = \Delta\upsilon(r) + o(\upsilon(r))$, $r \to +\infty$,

$$\xi(r) = \sup_{t \geq r} \frac{n(2t) - n(t/2)}{\upsilon(t)}, \quad \upsilon \in L.$$

Очевидно, що $\xi(r) \searrow 0$ при $r \to +\infty$. Виберемо $\delta > 0$, $r_0 > 0$ такі, що

$$6\delta\Delta < \varepsilon/3,$$

$$8\mu/(\mu - 1)\left(\xi(r_0)\right)^{1-1/(2\mu)} < \varepsilon/6,$$

$$64^\mu\sqrt{\xi(r_0)} < \eta.$$

Приймемо для $j = 1, 2$

$$f_j(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{j,k}}\right),$$

де $0 < |a_{j,1}| \le |a_{j,2}| \le \ldots \le |a_{j,n}| \to +\infty,\ n \to +\infty$, і ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|a_{j,k}|^{\varepsilon}}$ — збіжний для довільного $\varepsilon > 0$. Тоді $(|z| = r,\ j = 1, 2)$

$$F_j(z) = z\frac{f_j'(z)}{f(z)} = z\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z - a_{j,k}} = z \sum_{|a_{j,k}|<r/2} \frac{1}{z - a_{j,k}} + z \sum_{|a_{j,k}|>2r} \frac{1}{z - a_{j,k}} +$$
$$+ z \sum_{r/2 \le |a_{j,k}| \le 2r} \frac{1}{z - a_{j,k}}. \tag{2.2}$$

Покладемо

$$F_j^{(1)}\left(z, \frac{r}{2}\right) = z \sum_{|a_{j,k}|<r/2} \frac{1}{z - a_{j,k}},$$
$$F_j^{(2)}(z, 2r) = z \sum_{|a_{j,k}|>2r} \frac{1}{z - a_{j,k}},$$
$$F_j^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right) = z \sum_{r/2 \le |a_{j,k}| \le 2r} \frac{1}{z - a_{j,k}}.$$

Оцінимо спершу $|F_j^{(1)}(z, r/2)|$ і $|F_j^{(2)}(z, 2r)|$. Нехай $|\arg a_{1,k} - \arg a_{2,k}| = |\varphi_{1,k} - \varphi_{2,k}| < \delta,\ |a_{1,k}| = |a_{2,k}|,\ a_{j,k} = |a_{j,k}|e^{i\varphi_{j,k}},\ j = 1, 2$. При $|a_{j,k}| < r/2$, маємо

$$|a_{1,k} - a_{2,k}| = |a_{1,k}| \cdot |\cos\varphi_{1,k} - \cos\varphi_{2,k} + i(\sin\varphi_{1,k} - \sin\varphi_{2,k})| =$$
$$= 2|a_{1,k}| \cdot |\sin\frac{\varphi_{1,k} - \varphi_{2,k}}{2}| \cdot |-\sin\frac{\varphi_{1,k} + \varphi_{2,k}}{2} + i\cos\frac{\varphi_{1,k} + \varphi_{2,k}}{2}| =$$
$$= 2|a_{1,k}| \cdot |\sin\frac{\varphi_{1,k} - \varphi_{2,k}}{2}| < 2|a_{1,k}| \cdot \left|\frac{\varphi_{1,k} - \varphi_{2,k}}{2}\right| = |a_{1,k}| \cdot |\varphi_{1,k} - \varphi_{2,k}| < \delta r/2,$$

$\arg a_{j,k} = \varphi_{j,k},\ j = 1, 2$. Тому

$$\left|F_1^{(1)}\left(z, \frac{r}{2}\right) - F_2^{(1)}\left(z, \frac{r}{2}\right)\right| \le r \sum_{|a_{j,k}|<r/2} \frac{|a_{1,k} - a_{2,k}|}{(r - |a_{1,k}|)(r - |a_{2,k}|)} <$$
$$< r \sum_{|a_{j,k}|<r/2} \frac{\delta r}{2(r - |a_{1,k}|)^2} < 2\delta n\left(\frac{r}{2}\right) < 4\delta\Delta\upsilon(r) < \frac{\varepsilon}{3}\upsilon(r),\ r \ge r_0. \tag{2.3}$$

При $|a_{j,k}| > 2r$ аналогічно отримуємо $|a_{1,k} - a_{2,k}| \le |a_{1,k}| \cdot |\varphi_{1,k} - \varphi_{2,k}| < |a_{1,k}|\delta$ і

$$\left|F_1^{(2)}(z,2r) - F_2^{(2)}(z,2r)\right| \le r \sum_{|a_{j,k}|>2r} \frac{|a_{1,k} - a_{2,k}|}{(|a_{1,k}| - r)(|a_{2,k}| - r)} \le$$

$$\le r \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{t\delta}{(t-r)^2} dn(t) = \delta r \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t)}{t(1-r/t)^2} \le 4\delta r \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t)}{t} =$$

$$= -2\delta n(2r) + 4\delta r \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{n(t)}{t^2} dt < 5\delta\Delta r \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^2} dt \le$$

$$\le 5\delta\Delta r \frac{\upsilon(2r)}{\sqrt{2r}} \int\limits_{2r}^{+\infty} t^{-3/2} dt = 5\delta\Delta\upsilon(2r) \le 6\delta\Delta\upsilon(r) < \frac{\varepsilon}{3}\upsilon(r),\ r \ge r_0, \qquad (2.4)$$

оскільки $\upsilon(r)/\sqrt{r} \searrow 0$ при $r \to +\infty$.

Позначимо через (a_k) послідовність, яка містить всі члени послідовностей $(a_{1,k})$ і $(a_{2,k})$, а, отже, її лічильною функцією буде $2n(r)$. Маємо

$$\left|F_1^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right) - F_2^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right)\right| \le$$

$$\le \left|F_1^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right)\right| + \left|F_2^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right)\right| \le r \sum_{r/2 \le |a_k| \le 2r} \frac{1}{|z - a_k|}. \qquad (2.5)$$

Покладемо $\psi(z,r) = \sum\limits_{r/2 \le |a_k| \le 2r} \dfrac{1}{|z - a_k|}$. Для оцінки $\psi(z,r)$ скористаємося лемою 2.1. Нехай $R_j = 2^{2j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $K_j = \{z\colon R_j/2 < |z| < 2R_j\}$, $n_j = 2n(2R_j) - 2n(R_j/2)$, $H_j = R_j \xi^{1/(2\mu)}(r_0)$. Очевидно, що $\{z\colon 1 < |z| < +\infty\} = \{z\colon |z| < r_0\} \cup \bigcup\limits_{j=j_0}^{+\infty} K_j$, де $j_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $2^{2j_0-1} < r_0 \le 2^{2j_0} = R_{j_0}$. Оскільки

$$n_j \le 2\xi(R_j)\upsilon(R_j),$$

то зовні деякої системи кругів $C_{j\nu} = \{z\colon |z - z_{j\nu}| < r_{j\nu}\}$, $1 \le \nu \le s_j$,

$$\sum_{\nu=1}^{s_j} r_{j\nu}^{\mu} \le (4H_j)^{\mu} = (4R_j)^{\mu} \xi^{1/2}(r_0)$$

для $j \geq j_0$ правильна оцінка

$$\psi(z, R_j) \leq \frac{\mu}{\mu-1}\frac{n_j}{H_j} \leq \frac{\mu}{\mu-1}\frac{2\xi(R_j)\upsilon(R_j)}{\xi^{1/2\mu}(r_0)R_j} \leq \frac{\mu}{\mu-1}\frac{2\upsilon(R_j)}{R_j}\xi^{1-1/(2\mu)}(R_j).$$

Позначимо $E = \left(\bigcup_{j=j_0}^{+\infty}\bigcup_{\nu=1}^{s_j} C_{j\nu}\right)\bigcup\{z\colon |z| < r_0\}$. Нехай $r_0 \leq R_m \leq r < R_{m+1}$. Тоді $R_{m+1}/4 \leq r \leq 4R_m$ і

$$r_0^\mu + \sum_{j=j_0}^{m+1}\sum_{\nu=1}^{s_j} r_{j\nu}^\mu \leq r_0^\mu + \sum_{j=j_0}^{m+1}\left(4\xi^{1/(2\mu)}(r_0)R_j\right)^\mu \leq r_0^\mu + 4^\mu\xi^{1/2}(r_0)\frac{2^{2\mu(m+2)}-1}{2^{2\mu}-1} =$$

$$= r_0^\mu + 4^\mu\xi^{1/2}(r_0)\frac{R_{m+1}^\mu 2^{2\mu}-1}{2^{2\mu}-1} < r_0^\mu + 4^\mu\xi^{1/2}(r_0)\frac{R_{m+1}^\mu 2^{2\mu}}{3} <$$

$$< r_0^\mu + 4^\mu\xi^{1/2}(r_0)\frac{2^{4\mu}r^\mu}{3} = r_0^\mu + \frac{64^\mu}{3}\xi^{1/2}(r_0)r^\mu < r_0^\mu + \frac{\eta}{3}r^\mu,$$

а, отже, $D_\mu(E) < \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\mu}\left(\frac{\eta}{3}r^\mu + r_0^\mu\right) = \frac{\eta}{3} < \eta$.

Далі,

$$\psi(z, R_m) \leq \frac{\mu}{\mu-1}\frac{2\upsilon(R_m)}{R_m}\xi^{1-1/(2\mu)}(R_m) <$$
$$< \frac{\mu}{\mu-1}\frac{8\upsilon(r)}{r}\xi^{1-1/(2\mu)}(r_0) < \frac{\varepsilon}{6}\frac{\upsilon(r)}{r} \tag{2.6}$$

і, аналогічно,

$$\psi(z, R_{m+1}) \leq \frac{\mu}{\mu-1}\frac{2\upsilon(R_{m+1})}{R_{m+1}}\xi^{1-1/(2\mu)}(R_{m+1}) <$$
$$< \frac{\mu}{\mu-1}\frac{8\upsilon(r)}{r}\xi^{1-1/(2\mu)}(r_0) < \frac{\varepsilon}{6}\frac{\upsilon(r)}{r}. \tag{2.7}$$

Враховуючи, що $\psi(z, r) \leq \psi(z, R_m) + \psi(z, R_{m+1})$, з (2.5) та (2.6), (2.7) маємо

$$\left|F_1^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right) - F_2^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\upsilon(r),\ z \notin E. \tag{2.8}$$

Взявши до уваги (2.2)-(2.4), (2.8) отримуємо (2.1), а саме

$$|F_1(z) - F_2(z)| \leq \left|F_1^{(1)}\left(z, \frac{r}{2}\right) - F_2^{(1)}\left(z, \frac{r}{2}\right)\right| + \left|F_1^{(2)}(z, 2r) - F_2^{(2)}(z, 2r)\right| +$$
$$+ \left|F_1^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right) - F_2^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\upsilon(r) + \frac{\varepsilon}{3}\upsilon(r) + \frac{\varepsilon}{3}\upsilon(r) = \varepsilon\upsilon(r)$$

для всіх $z \notin E$, що доводить теорему 2.1.

2.2 Асимптотика логарифмічної похідної та кутова υ-щільність нулів цілих функцій повільного зростання

В цьому підрозділі ми знайдемо асимптотику логарифмічної похідної $F(z) = zf'(z)/f(z)$ функцій класу $H_0(\upsilon)$ за умови, що нулі цілої функції f мають кутову υ-щільність.

Теорема 2.2. *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ і нулі функції f мають кутову υ-щільність. Тоді існує множина $E \in C_0^\mu$, $1 < \mu \leq 2$, така, що*

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty, \quad re^{i\varphi} \notin E. \tag{2.9}$$

Для доведення цієї теореми нам будуть потрібні такі леми.

Лема 2.2. *Нехай α – довільна зростаюча на $[0, +\infty)$ функція така, що $\dfrac{\alpha(r)}{\sqrt{r}}$ спадає до нуля при $r \to +\infty$. Тоді для довільної локально інтегровної на $[0, +\infty)$ функції β такої, що $\beta(r) \to 0$ при $r \to +\infty$, і для $z = re^{i\theta}, -\pi < \theta < \pi$,*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha(t)\beta(t)}{(t+z)^2} dt = o\left(\frac{\alpha(r)}{r}\right), \quad r \to +\infty,$$

причому ця оцінка рівномірна відносно $\theta \in [-\pi + \delta, \pi - \delta]$, $0 < \delta < 1$.

Доведення. Нехай $0 < \delta < 1$, $0 < \varepsilon < 1$ — довільні числа. Тоді існує $r_0 > 1$ таке, що для всіх $r \geq r_0$

$$|\beta(r)| < \frac{\varepsilon}{4} \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

Для $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi + \delta, \pi - \delta]$, маємо (див., наприклад, [2, с. 92])

$$|t + z| \geq (t + r) \sin \frac{\delta}{2}.$$

Враховуючи, що $\dfrac{\alpha(r)}{\sqrt{r}}$ монотонно спадає до нуля при $r \to +\infty$ для $r \geq r_0$ отримуємо

$$\left| \int\limits_r^{+\infty} \frac{\alpha(t)\beta(t)}{(t+z)^2} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \int\limits_r^{+\infty} \frac{\alpha(t)}{(t+r)^2} dt \leq \frac{\varepsilon}{4} \int\limits_r^{+\infty} \frac{\alpha(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{\varepsilon}{4} \frac{\alpha(r)}{\sqrt{r}} \int\limits_r^{+\infty} t^{-3/2} dt < \frac{\varepsilon}{2} \frac{\alpha(r)}{r}.$$

Далі

$$\left| \int\limits_0^{r} \frac{\alpha(t)\beta(t)}{(t+z)^2} dt \right| \leq \int\limits_0^{r_0} \frac{|\alpha(t)\beta(t)|}{|t+z|^2} dt + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{|\alpha(t)\beta(t)|}{|t+z|^2} dt = I_1 + I_2.$$

Покладемо $r_1 = 4Cr_0/\varepsilon \sin^2 \dfrac{\delta}{2}$, де C – стала така, що $|\beta(r)| \leq C$ для всіх $r \geq 0$. Тоді для $r > r_1$ маємо

$$I_1 \leq \frac{C}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \int\limits_0^{r_0} \frac{\alpha(t)}{(t+r)^2} dt \leq \frac{C\alpha(r_0)}{r^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} r_0 < \frac{\varepsilon \alpha(r_0)}{4r},$$

і

$$I_2 \leq \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\varepsilon \sin^2 \frac{\delta}{2} \alpha(t)}{4 \sin^2 \frac{\delta}{2} (t+r)^2} dt \leq \frac{\varepsilon \alpha(r)}{4r^2} (r - r_0) < \frac{\varepsilon \alpha(r)}{4r},$$

тобто

$$\left| \int\limits_0^{r} \frac{\alpha(t)\beta(t)}{(t+z)^2} dt \right| < I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} \frac{\alpha(r)}{r}.$$

Отже,

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha(t)\beta(t)}{(t+z)^2} dt \right| < \varepsilon \frac{\alpha(r)}{r},$$

що доводить лему 2.2.

Зауваження 2.1. *Лема 2.2 використовується в роботі [71], але наведена там без доведення.*

Покладемо $a_k(r) = \int\limits_0^r \upsilon'(t)t^{k+1}dt,\ b_k(r) = \int\limits_r^{+\infty} t^{-k-1}\upsilon'(t)dt,\ \upsilon \in L.$

Лема 2.3. *Нехай* $\upsilon \in L,\ 0 < \varepsilon < 1,$

$$a_k(r,\varepsilon) = \int\limits_0^{(1-\varepsilon)r} \upsilon'(t)t^{k+1}dt,$$

$$b_k(r,\varepsilon) = \int\limits_{(1+\varepsilon)r}^{+\infty} t^{-k-1}\upsilon'(t)dt.$$

Тоді для довільного $-\pi < \theta < \pi$ *виконується*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-i\theta(k+1)}\frac{a_k(r,\varepsilon)}{r^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-i\theta(k+1)}\frac{a_k(r)}{r^{k+1}}, \tag{2.10}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{i\theta(k+1)}\frac{b_k(r,\varepsilon)}{r^{-(k+1)}} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{i\theta(k+1)}\frac{b_k(r)}{r^{-(k+1)}}. \tag{2.11}$$

Доведення. Доведення цієї леми подібне до доведення леми 2 з [18]. Покажемо, що в (2.10), (2.11) можливі граничні переходи під знаком суми. Для цього достатньо показати, що відповідні ряди в (2.10) і (2.11) збігаються рівномірно відносно $0 < \varepsilon < 1$.

Завдяки тому, що $\upsilon \in L$, маємо $r\upsilon'(r) = \varepsilon(r)\upsilon(r),\ r \to +\infty$, де $\varepsilon(r) \geq 0,\ \varepsilon(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Приймемо $\nu_k(\theta) = (-1)^k e^{-i\theta(k+1)}$ і для довільного $n \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\nu_k(\theta)\right| = \left|e^{-i\theta}\frac{1-(-1)^{n+1}e^{-i\theta(n+1)}}{1+e^{-i\theta}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\delta}} = \frac{1}{\sin\delta/2},$$

де $-\pi+\delta \leq \theta \leq \pi-\delta,\ \delta > 0$.

Далі, прийнявши $\overline{\upsilon}'(r) = \max\{\upsilon'(t) : 0 \leq t \leq r\}$, маємо

$$\sup_{0<\varepsilon<1}\frac{a_k(r,\varepsilon)}{r^{k+1}} = \frac{a_k(r)}{r^{k+1}} = \frac{1}{r^{k+1}}\int\limits_0^r \upsilon'(t)t^{k+1}dt \leq \frac{\overline{\upsilon}'(r)}{r^{k+1}}\int\limits_0^r t^{k+1}dt =$$

$$= \frac{r\overline{\upsilon}'(r)}{k+2} \to 0, \ k \to +\infty,$$

тобто $a_k(r,\varepsilon)$ рівномірно відносно $\varepsilon \in (0,1)$ прямує до 0 при $k \to +\infty$.

Оскільки $\upsilon'(t) \geq 0$ на $[0,+\infty)$, то

$$\frac{a_{k+1}(r,\varepsilon)}{r^{k+2}} - \frac{a_k(r,\varepsilon)}{r^{k+1}} = \frac{1}{r^{k+1}} \int\limits_0^{(1-\varepsilon)r} \upsilon'(t)t^{k+1}\left(\frac{t}{r}-1\right)dt < 0,$$

тобто, $\dfrac{a_k(r,\varepsilon)}{r^{k+1}}$ монотонно спадає при $k \to +\infty$. За ознакою Діріхле ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \nu_k(\theta)\dfrac{a_k(r,\varepsilon)}{r^{k+1}}$ рівномірно збігається відносно $0 < \varepsilon < 1$.

Аналогічно показуємо рівномірну збіжність відносно $\varepsilon \in (0,1)$ ряду $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \nu_k(\theta)\dfrac{b_k(r,\varepsilon)}{r^{-(k+1)}}$, що доводить лему 2.3.

Покладемо

$$\Sigma_1 := \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-i\theta(k+1)}\frac{a_k(r)}{r^{k+1}},$$

$$\Sigma_2 := \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{i\theta(k+1)}b_k(r)r^{k+1}.$$

Лема 2.4. *Нехай $\upsilon \in L$. Тоді для довільного $-\pi < \theta < \pi$*

$$\Sigma_1 = o(\upsilon(r)), \quad \Sigma_2 = o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty, \tag{2.12}$$

причому (2.12) *виконується рівномірно відносно $\theta \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$, $0 < \delta < 1$.*

Доведення. Оскільки $\upsilon \in L$, то $\upsilon'(r) = \varepsilon(r)\upsilon(r)/r$, де $\varepsilon(r) \geq 0$, і $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Маємо

$$|\Sigma_1| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-i\theta(k+1)}r^{-k-1}\left(\int\limits_0^{r/2}\upsilon'(t)t^{k+1}dt + \int\limits_{r/2}^{r}\upsilon'(t)t^{k+1}dt\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-i\theta(k+1)}r^{-k-1}\int\limits_0^{r/2}\upsilon(t)\varepsilon(t)t^k dt\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{-i\theta(k+1)} r^{-k-1}\int\limits_{r/2}^{r}\upsilon(t)\varepsilon(t)t^k dt\right| = \Sigma_1' + \Sigma_1''.$$

Далі,

$$\Sigma_1' \le \sum_{k=0}^{+\infty} r^{-k-1}\int\limits_{0}^{r/2}\upsilon(t)|\varepsilon(t)|t^k dt \le$$

$$\le \frac{\upsilon(r)}{r}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\right)\int\limits_{0}^{r/2}|\varepsilon(t)|dt = o(\upsilon(r)), \quad r\to+\infty,$$

оскільки

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\int\limits_{0}^{r/2}|\varepsilon(t)|dt}{r} = 0.$$

Переходимо до оцінки Σ_1''. Покладемо $\overline{\varepsilon}(r) = \sup\{\varepsilon(t) : \frac{r}{2} \le t \le r\}$, $u_k(r) = \frac{1}{r^{k+1}}\int\limits_{r/2}^{r}\upsilon(t)\varepsilon(t)t^k dt$, $\nu_k(\theta) = (-1)^k e^{-i\theta(k+1)}$. Тоді, як і при доведенні леми 2.3, показуємо, що послідовність $(u_k(r))_{k=0}^{+\infty}$ спадна і $u_k(r)\to 0$, $k\to+\infty$, а

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\nu_k(\theta)\right| \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

для всіх $n \ge 0$ і $\theta \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$. Отже, за ознакою Діріхле ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(r)\nu_k(\theta)$ рівномірно збігається відносно $\theta \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$. За нерівністю Абеля маємо для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$|S_n(r,\theta)| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k(r)\nu_k(\theta)\right| \le \left|\sum_{k=0}^{n}\nu_k(\theta)\right|(u_0(r)+2u_n(r)) \le$$

$$\le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\left(\frac{\upsilon(r)\overline{\varepsilon}(r)}{2} + 2\frac{\upsilon(r)\overline{\varepsilon}(r)}{r^{n+1}(n+1)}\left(r^{n+1} - \frac{r^{n+1}}{2^{n+1}}\right)\right) \le \frac{\upsilon(r)\overline{\varepsilon}(r)}{\sin\frac{\delta}{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n+1}\right).$$

Звідси рівномірно відносно $\theta \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$

$$\Sigma_1'' = \lim_{n\to+\infty} S_n(r,\theta) = o(\upsilon(r)), \quad r\to+\infty,$$

а отже, $\Sigma_1 = o(\upsilon(r))$, $r\to+\infty$.

Аналогічно доводимо, що $\Sigma_2 = o(\upsilon(r)),\ r \to +\infty$. Маємо

$$|\Sigma_2| \le \left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{i\theta(k+1)} r^{k+1} \int\limits_r^{2r} \frac{\upsilon(t)\varepsilon(t)}{t^{k+2}}dt\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k e^{i\theta(k+1)} r^{k+1} \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{\upsilon(t)\varepsilon(t)}{t^{k+2}}dt\right| = \Sigma_2' + \Sigma_2''.$$

Оскільки $\upsilon(r)/\sqrt{r} \searrow 0$ при $r \to +\infty$, то

$$\Sigma_2'' \le \frac{\upsilon(2r)}{\sqrt{2r}} \sum_{k=0}^{+\infty} r^{k+1} \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{|\varepsilon(t)|}{t^{k+3/2}}dt \le \frac{\upsilon(2r)}{r}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+2}}\right)\int\limits_{2r}^{+\infty}|\varepsilon(t)|dt = o(\upsilon(r)),$$

бо $\frac{1}{r}\int\limits_{2r}^{+\infty}|\varepsilon(t)|dt = o(1),\ r \to +\infty$.

Покладемо $\widetilde{\varepsilon}(r) = \sup\{\varepsilon(t) : r \le t \le 2r\}$, $w_k(r) = r^{k+1}\int\limits_r^{2r}\frac{\upsilon(t)\varepsilon(t)}{t^{k+2}}dt$, $\nu_k(\theta) = (-1)^k e^{i\theta(k+1)}$. Тоді послідовність $(w_k(r))_{k=0}^{+\infty}$ спадна і $w_k(r) \to 0$, $k \to +\infty$. Тому, за ознакою Діріхле ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} w_k(r)\nu_k(\theta)$ рівномірно збігається відносно $\theta \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$. За нерівністю Абеля маємо

$$|S_n(r,\theta)| \le \frac{\upsilon(2r)\widetilde{\varepsilon}(r)}{\sin\frac{\delta}{2}}\left(1+2\frac{r^{n+1}}{(n+1)}\left(\frac{1}{r^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}r^{n+1}}\right)\right) \le$$

$$\le \frac{\upsilon(2r)\widetilde{\varepsilon}(r)}{\sin\frac{\delta}{2}}\left(1+\frac{2}{n+1}\right).$$

Звідси рівномірно відносно $\theta \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$

$$\Sigma_2' = \lim_{n\to+\infty} S_n(r,\theta) = o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty,$$

і, отже, $\Sigma_2 = o(\upsilon(r)),\ r \to +\infty$. Лему 2.4 доведено повністю.

Доведення теореми 2.2. Припустимо спочатку, що нулі функції $f \in H_0(\upsilon),\ \upsilon \in L$, від'ємні. Нехай $(-a_k)$ — послідовність нулів f, де $0 < a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k \le \ldots \to +\infty$. Оскільки f – ціла функція нульового порядку, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{a_k}$ збіжний і f можна зобразити у вигляді

$$f(z) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{a_k}\right).$$

Тому

$$\ln f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{z}{a_k}\right),$$

$z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -a_1]$, і

$$F(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = z\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{z + a_k} = z\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{z+t} dn(t) = z\int\limits_0^{+\infty} \frac{n(t)dt}{(z+t)^2}.$$

Враховуючи, що за умовою теореми $(\Delta > 0)$

$$n(r) = \Delta\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty,$$

отримуємо

$$F(z) = z\int\limits_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta\upsilon(t)}{(z+t)^2} dt + z\Delta\int\limits_0^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{(z+t)^2} dt = I_1(z) + I_2(z). \qquad (2.13)$$

Маємо $n(t) - \Delta\upsilon(t) = \beta(t)\upsilon(t)$, де $\beta(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Тоді за лемою 2.2 для $z = re^{i\theta}$ рівномірно відносно θ, $-\pi + \delta \le \theta \le \pi - \delta$, $0 < \delta < 1$, отримуємо $(\alpha(t) = \upsilon(t))$

$$I_1(z) = z\int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha(t)\beta(t)}{(z+t)^2} dt = o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty. \qquad (2.14)$$

Далі,

$$I_2(z) = \Delta z\int\limits_0^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{(z+t)^2} dt = \Delta z\int\limits_0^{r} \frac{\upsilon(t)}{(z+t)^2} dt + \Delta z\int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{(z+t)^2} dt =$$

$$= \frac{\Delta}{z}\int\limits_0^{r} \frac{\upsilon(t)}{(1+t/z)^2} dt + \Delta z\int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^2(1+z/t)^2} dt = I_2'(z) + I_2''(z).$$

Використовуючи розвинення

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1) x^k, \quad -1 < x < 1,$$

отримуємо $(0 < \varepsilon < 1)$

$$I_2'(z) = \frac{\Delta}{z} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_0^{(1-\varepsilon)r} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1) \left(\frac{t}{z}\right)^k \upsilon(t) dt =$$

$$= \Delta \lim_{\varepsilon \to 0+} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{z^{k+1}} \int\limits_0^{(1-\varepsilon)r} \upsilon(t) t^k dt,$$

і, аналогічно,

$$I_2''(z) = \Delta \lim_{\varepsilon \to 0+} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1) z^{k+1} \int\limits_{(1+\varepsilon)r}^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{k+2}} dt.$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{(1-\varepsilon)r} \upsilon(t) t^k dt = \frac{\upsilon((1-\varepsilon)r)((1-\varepsilon)r)^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{k+1} \int\limits_0^{(1-\varepsilon)r} \upsilon'(t) t^{k+1} dt =$$

$$= \frac{\upsilon((1-\varepsilon)r)((1-\varepsilon)r)^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{k+1} a_k(r, \varepsilon),$$

$$\int\limits_{(1+\varepsilon)r}^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{k+2}} dt = \frac{\upsilon((1+\varepsilon)r)}{(k+1)((1+\varepsilon)r)^{k+1}} + \frac{1}{k+1} \int\limits_{(1+\varepsilon)r}^{+\infty} \frac{\upsilon'(t)}{t^{k+1}} dt =$$

$$= \frac{\upsilon((1+\varepsilon)r)}{(k+1)((1+\varepsilon)r)^{k+1}} + \frac{1}{k+1} b_k(r, \varepsilon),$$

то за лемою 2.3 маємо

$$I_2'(z) = \Delta \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{e^{(k+1)i\theta}} \upsilon((1-\varepsilon)r)(1-\varepsilon)^{k+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}} a_k(r, \varepsilon) \right) =$$

$$= \Delta \upsilon(r) \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{1-\varepsilon}{e^{i\theta}} \cdot \frac{1}{1 + (1-\varepsilon) e^{-i\theta}} \right) - \Delta \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}} a_k(r) =$$

$$= \Delta \upsilon(r) \frac{1}{1 + e^{i\theta}} - \Delta \Sigma_1,$$

$$I_2''(z) = \Delta \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \upsilon((1+\varepsilon)r) e^{(k+1)i\theta}}{(1+\varepsilon)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{k+1} b_k(r, \varepsilon) \right) =$$

$$= \Delta\upsilon(r) \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\frac{e^{i\theta}}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{1+(1+\varepsilon)^{-1}e^{i\theta}} \right) + \Delta \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{k+1} b_k(r) =$$

$$= \Delta\upsilon(r) \frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} + \Delta\Sigma_2.$$

За лемою 2.4 $\Sigma_1 = o(\upsilon(r)),\ \Sigma_2 = o(\upsilon(r)),\ r \to +\infty,$ рівномірно відносно $\theta,\ \theta \in [-\pi+\delta, \pi-\delta],$ тому

$$I_2(z) = \Delta\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty.$$

З (2.13), (2.14) та останньої рівності маємо

$$F(z) = \Delta\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad z \to \infty.$$

У випадку, коли всі нулі f розташовані на скінченній системі променів $\Gamma_k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \{z\colon arg\ z = \theta_j\},\ 0 \le \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < 2\pi,$ ми отримуємо

$$F(re^{i\theta}) = n(r) + o(\upsilon(r)),\ r \to +\infty,\ \theta \ne \theta_j,\ j = \overline{1,k}, \tag{2.15}$$

причому (2.15) виконується рівномірно відносно $\theta \in [-\pi,\pi) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} \{\theta\colon |\theta - \theta_j| \le \gamma\}$, де $\gamma > 0$ деяке мале число. Перехід до загального випадку здійснюємо використовуючи теорему 2.1.

Приймемо $\varepsilon = \varepsilon_n = 1/n,\ \eta = \eta_n = 2^{-(n+1)},\ (a_k)$ – послідовність нулів $f \in H_0(\upsilon),\ 1 < \mu \le 2.$ За теоремою 2.1 існують $\delta = \delta_n > 0$, що для системи променів $(\psi_j)_{j=0}^{m},\ 0 = \psi_0 < \psi_1 < \ldots < \psi_m < 2\pi$ таких, що $|\psi_{j+1} - \psi_j| < \delta_n,\ j = \overline{0, m-1},$ і мероморфної функції

$$F_{1,n}(z) = z \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(z - a'_k)}$$

з полюсами a'_k, $|a'_k| = |a_k|,\ \arg a'_k = \psi_j,\ j = 0, 1, \ldots, m,$ для $\psi_j \le \arg a_k < \psi_{j+1},$ існує така система кругів $C'_n,\ D_\mu(C'_n) < \eta_n/4,$ зовні якої

$$|F(z) - F_{1,n}(z)| < \frac{\varepsilon_n}{4} \upsilon(r).$$

Для $z = re^{i\varphi}$, $r \geq r'_n$ рівномірно відносно $\varphi \in [0, 2\pi]$, $|\varphi - \psi_j| \geq \gamma$, де $\gamma > 0$ достатньо мале число, з асимптотичної формули (2.15) отримуємо, що

$$|F_{1,n}(z) - n(r)| < \frac{\varepsilon_n}{4} \upsilon(r).$$

Тому

$$|F(z) - n(r)| \leq |F(z) - F_{1,n}(z)| + |F_{1,n}(z) - n(r)| < \frac{\varepsilon_n}{2} \upsilon(r), \qquad (2.16)$$

для $r \geq r_n = r'_n$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $|\varphi - \psi_j| \geq \gamma$, $0 \leq j \leq m-1$, $z \notin C'_n$.

Будуємо $F_{2,n}$ з полюсами a''_k, $|a''_k| = |a_k|$, $\arg a''_k = \psi'_j$ для $\psi'_j \leq \arg a_k < \psi'_{j+1}$, що лежать на системі променів $\left(\psi'_j\right)$, $0 = \psi'_0 < \psi'_1 < \ldots \psi'_s < 2\pi$, таких, що $|\psi'_{j+1} - \psi'_j| < \delta_n$, $j = \overline{0, s-1}$,

$$\left(\bigcup_{j=1}^{s-1} \{\varphi \colon |\varphi - \psi'_j| < \gamma\}\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \{\varphi \colon |\varphi - \psi_j| < \gamma\}\right) = \varnothing.$$

Тоді, як і в попередньому випадку, існує система кругів C''_n, $D_\mu(C''_n) < \eta_n/4$, зовні якої виконується (2.16) для $r \geq r''_n$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $|\varphi - \psi'_j| \geq \gamma$, $0 \leq j \leq s-1$. А, отже, (2.16) виконується рівномірно відносно $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \geq r_n = \max\{r'_n, r''_n\}$, $z \notin C_n = C'_n \bigcup C''_n$, $D_\mu(C_n) < \eta_n/2$.

Нехай

$$C_n = \bigcup_{j=1}^{+\infty} C_{nj}, \; C_{nj} = \{z \colon |z - z_{nj}| < r_{nj}\}.$$

При всіх достатньо великих r

$$\sum_{|z_{nj}| \leq r} r_{nj}^\mu < r^\mu \eta_n/2 \leq r^\mu/8.$$

Тоді, для достатньо великих j маємо $r_{nj}^\mu < |z_{nj}|^\mu/4$ і $r_{nj} < |z_{nj}|/2$. Виберемо послідовність $(R_k)_{k=1}^{+\infty}$ таку, що $R_{k+1} > (k+1)R_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Для $r \geq R_n$, $z \notin C_n$ виконується (2.16), позначимо

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{R_n \leq |z_{nj}| < R_{n+3}} \{z \colon |z - z_{nj}| < r_{nj}\} = \bigcup_{s=1}^{+\infty} \{z \colon |z - z_s| < r_s\}.$$

Далі, аналогічно як в [31], показуємо, що $D_\mu(E) = 0$ і виконується (2.9) рівномірно відносно $\varphi \in [0, 2\pi)$. Дійсно, оскільки $R_{n+3} > 2R_{n+2}$, $R_{n+1} > 2R_n$, то $C_{nj} \cap \{z : R_{n+1} \le |z| < R_{n+2}\} = \varnothing$, якщо $|z_{nj}| \ge R_{n+3}$ або $|z_{nj}| < R_n$. Тому при $R_{n+1} \le r < R_{n+2}$ для $z \notin E$ виконується нерівність (2.16) рівномірно відносно $\varphi \in [0, 2\pi)$. Оскільки $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to +\infty$, то при $r \to +\infty$ співвідношення (2.9) виконується рівномірно відносно $\varphi \in [0, 2\pi)$. Залишилося показати, що $D_\mu(E) = 0$.

Якщо $R_n \le r < R_{n+1}$, то

$$\sum_{|z_s|<r} r_s^\mu = \sum_{k=1}^{n-3} \sum_{R_k<|z_{kj}|<R_{k+3}} r_{kj}^\mu + \sum_{k=n-2}^{n} \sum_{R_k<|z_{kj}|<r} r_{kj}^\mu \le \sum_{k=1}^{n-3} \frac{\eta_k}{2} R_{k+3}^\mu +$$

$$+\frac{1}{2}(\eta_{n-2} + \eta_{n-1} + \eta_n) r^\mu < \sum_{k=1}^{n-4} \frac{\eta_k}{2} R_{k+3}^\mu + \frac{\eta_{n-3}}{2} R_n^\mu + 3\frac{\eta_{n-2}}{2} r^\mu < \frac{1}{2}\left(\frac{R_n}{n}\right)^\mu \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{n-4} 2^{-k-1} + 2^{-n+2} R_n^\mu + 3 \cdot 2^{-n+1} r^\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{R_n}{n}\right)^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-3}}\right) + 2^{-n+2} R_n^\mu +$$

$$+3 \cdot 2^{-n+1} r^\mu < r^\mu \left(\frac{1}{4n^\mu} + 2^{-n+2} + 3 \cdot 2^{-n+1}\right) = r^\mu \left(\frac{1}{4n^\mu} + \frac{10}{2^n}\right).$$

Отже,

$$r^{-\mu} \sum_{|z_s|<r} r_s^\mu < \frac{1}{4n^\mu} + \frac{10}{2^n}.$$

Спрямувавши в останній нерівності r, n до $+\infty$ отримуємо $D_\mu(E) = 0$, що й доводить теорему 2.2.

2.3 Асимптотика логарифмічної похідної цілої функції та її коефіцієнти Фур'є

В цьому підрозділі встановлено зв'язок між асимптотикою логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку та регулярним поводженням її коефіцієнтів Фур'є, який описує така теорема.

Теорема 2.3. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ *та існує така множина* $E \in C_0^{\mu}$, $1 < \mu \leq 2$, *що* $(0 < \Delta < +\infty)$

$$F(re^{i\varphi}) = \Delta\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty, \quad re^{i\varphi} \notin E. \tag{2.17}$$

Тоді для $k \in \mathbb{Z}$ *існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \quad \lim_{r\to+\infty}^{*} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0, \quad k \neq 0. \tag{2.18}$$

Зауваження 2.2. *Нагадаємо, що* $\lim\limits_{r\to+\infty}^{*}$ *означає, що* $r \to +\infty$, $r \notin D$, D *–* E_0*-множина.*

Для доведення цієї теореми нам будуть потрібні такі твердження.

Лема 2.5. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$. *Тоді*

$$\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| \leq C\frac{\upsilon(r)}{r} + \sum_{\frac{r}{2}\leq|a_n|\leq 2r} \frac{1}{|z-a_n|},$$

де (a_n)*-нулі* f, $0 < C < +\infty$ *– стала.*

Доведення. Нехай $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq \cdots \to +\infty$ нулі f, $\Delta = \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\, n(r)/\upsilon(r)$, $0 < \Delta < +\infty$. Тоді $f(z) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{z}{a_n}\right)$ і

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z-a_n}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|z-a_n|} =$$

$$= \sum_{\frac{r}{2}\leq|a_n|\leq 2r} \frac{1}{|z-a_n|} + \sum_{|a_n|\leq\frac{r}{2}} \frac{1}{|z-a_n|} + \sum_{|a_n|\geq 2r} \frac{1}{|z-a_n|} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

Для Σ_2 маємо

$$\Sigma_2 \leq \sum_{|a_n|\leq\frac{r}{2}} \frac{1}{r-|a_n|} = \int_0^{r/2} \frac{dn(t)}{r-t} \leq \frac{2}{r}\int_0^{r/2} dn(t) \leq \frac{2}{r} n\left(\frac{r}{2}\right) < \frac{3\Delta\upsilon(r)}{r}.$$

Далі оцінимо Σ_3. Оскільки $\upsilon(r)/\sqrt{r} \searrow 0$, $r \to +\infty$, то

$$\Sigma_3 \leq \sum_{|a_n|\geq 2r} \frac{1}{|a_n|-r} = \int_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t)}{t-r} = \left.\frac{n(t)}{t-r}\right|_{2r}^{+\infty} + \int_{2r}^{+\infty} \frac{n(t)}{(t-r)^2}dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{n(t)}{t^2} \frac{1}{(1-r/t)^2} dt \leq 4 \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{n(t)}{t^2} dt \leq 5\Delta \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^2} dt \leq$$

$$\leq 5\Delta \frac{\upsilon(2r)}{\sqrt{2r}} \int\limits_{2r}^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}} dt \leq 10\Delta \frac{\upsilon(2r)}{r} \leq 11\Delta \frac{\upsilon(r)}{r}.$$

З оцінок Σ_2 і Σ_3 отримуємо

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \Sigma_1 + 14\Delta \frac{\upsilon(r)}{r},$$

що доводить лему 2.5.

Лема 2.6. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, $E(t)$ *— підмножина* $[0, 2\pi]$, *міра якої не перевищує* θ, $0 < \theta \leq 2\pi$. *Тоді*

$$\int\limits_{r/2}^{r} dt \int\limits_{E(t)} \left| \frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})} \right| d\varphi \leq C\upsilon(r) \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \ln(1 + \frac{2}{\theta}) \right).$$

Доведення. Доведення леми 2.6 подібне до доведення леми 4 з [19]. При $r/2 \leq |a_n|$ для $\varphi \in [0, \pi]$ маємо

$$|z - |a_n|| = \left| re^{i\varphi} - |a_n| \right| = \sqrt{r^2 + |a_n|^2 - 2r|a_n| \cos\varphi} =$$

$$= \sqrt{(r - |a_n|)^2 + 4r|a_n| \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|r - |a_n|| + 2\sqrt{r|a_n|} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|r - |a_n|| + \sqrt{2} r \sin \frac{\varphi}{2} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|r - |a_n|| + \frac{\sqrt{2} r\varphi}{\pi} \right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi} \left(|r - |a_n|| + r\varphi \right).$$

Звідси (див., наприклад, [2, с. 56])

$$\int\limits_{E(t)} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - a_n|} \leq \int\limits_{-\theta/2}^{\theta/2} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - |a_n||} \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\theta/2} \frac{d\varphi}{|r - |a_n|| + r\varphi} =$$

$$= \frac{2}{\pi r} \ln \left(1 + \frac{r\theta}{2\,|r - |a_n||} \right).$$

З цієї нерівності і твердження леми 2.5 отримуємо

$$\int\limits_{E(t)} \left|\frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}\right| d\varphi \le C\frac{\upsilon(r)}{r}\theta + \sum_{\frac{r}{2}\le|a_n|\le 2r} \frac{2}{\pi r}\ln\left(1+\frac{r\theta}{2\,|r-|a_n||}\right).$$

Далі,

$$\int\limits_{r/2}^{r} dt \int\limits_{E(t)} \left|\frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}\right| d\varphi \le C\upsilon(r)\theta\ln 2 + \frac{2}{\pi}I, \tag{2.19}$$

де

$$I = \int\limits_{r/2}^{r} \frac{1}{t} \sum_{\frac{t}{2}\le|a_n|\le 2t} \ln\left(1+\frac{t\theta}{2\,|t-|a_n||}\right) dt = \int\limits_{r/2}^{r} \frac{dt}{t} \int\limits_{t/2}^{2t} \ln\left(1+\frac{t\theta}{2\,|t-\tau|}\right) dn(\tau) =$$

$$= \int\limits_{r/4}^{r/2} dn(\tau) \int\limits_{\tau/2}^{2\tau} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{t\theta}{2\,|t-\tau|}\right) dt + \int\limits_{r/2}^{2r} dn(\tau) \int\limits_{\tau/2}^{r} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{t\theta}{2\,|t-\tau|}\right) dt =$$

$$= I_1 + I_2.$$

Спершу обчислимо I_1. При $r/4 \le \tau \le r/2$

$$\int\limits_{\tau/2}^{2\tau} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{t\theta}{2\,|t-\tau|}\right) dt =$$

$$= \int\limits_{\tau/2}^{\tau} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{t\theta}{2(\tau-t)}\right) dt + \int\limits_{\tau}^{2\tau} \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{t\theta}{2(t-\tau)}\right) dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \ln\left(1+\frac{\theta}{2u}\right)\frac{du}{u+1} + \int\limits_{0}^{1/2} \ln\left(1+\frac{\theta}{2u}\right)\frac{du}{1-u} \le$$

$$\le \int\limits_{0}^{1} \ln\left(1+\frac{\theta}{2u}\right) du + 2\int\limits_{0}^{1/2} \ln\left(1+\frac{\theta}{2u}\right) du \le$$

$$\le 3\int\limits_{0}^{1} \ln\left(1+\frac{\theta}{2u}\right) du \le 6\frac{\theta}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\theta}\right).$$

Отже,

$$I_1 \le 6\frac{\theta}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\theta}\right)\left(n\left(r/2\right)-n\left(r/4\right)\right).$$

Якщо $r/2 \le \tau \le 2r$, маємо

$$\int\limits_{\tau/2}^{r}\frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{t\theta}{2\left|t-\tau\right|}\right)dt \le \int\limits_{r/4}^{r}\frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{t\theta}{2\left|t-r/2\right|}\right)dt \le$$

$$\le \frac{4}{r}\int\limits_{r/4}^{r/2}\ln\left(1+\frac{t\theta}{2\left(r/2-t\right)}\right)dt + \frac{4}{r}\int\limits_{r/2}^{r}\ln\left(1+\frac{t\theta}{2\left(t-r/2\right)}\right)dt \le$$

$$\le \frac{4}{r}\int\limits_{0}^{r/2}\ln\left(1+\frac{t\theta}{2\left(r/2-t\right)}\right)dt + \frac{4}{r}\int\limits_{0}^{r/2}\ln\left(1+\frac{\theta(r-t)}{2\left(r/2-t\right)}\right)dt \le$$

$$\le \frac{8}{r}\int\limits_{0}^{r/2}\ln\left(1+\frac{\theta r}{2\left(r/2-t\right)}\right)dt \le 8\theta\ln\left(1+\frac{1}{\theta}\right) \le 16\frac{\theta}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\theta}\right).$$

Отже,

$$I_2 \le 16\frac{\theta}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\theta}\right)\left(n(2r)-n\left(\frac{r}{2}\right)\right).$$

Звідси

$$I = I_1 + I_2 \le 16n(2r)\frac{\theta}{2}\cdot\ln\left(1+\frac{2}{\theta}\right).$$

Враховуючи, що $n(r) \le C\upsilon(r)$, $\upsilon(2r) \sim \upsilon(r)$, $r \to +\infty$, і (2.19) отримуємо твердження леми.

Доведення теореми 2.3. Нехай $E \in C_0^{\alpha}$, $1 < \alpha \le 2$, — множина, зовні якої виконується (2.17), $\theta_r = \{\varphi \in [0,2\pi]\colon re^{i\varphi} \in E\}$, $\theta(r)$ — міра θ_r. Тоді $E \in C_0^2$ і $\int\limits_{2^{n-1}}^{2^n}\theta(t)t\,dt = \eta_n^4 2^{2n}$, де $\eta_n \to 0$, $n \to +\infty$. Нехай

$$M_n = \{t\colon 2^{n-1} \le t \le 2^n,\ \theta(t) > \eta_n^2\},$$

$$L_n = \left\{t\colon 2^{n-1} \le t \le 2^n,\ \int\limits_{\theta_t}\left|F(te^{i\varphi})\right|d\varphi \ge \eta_n^{-1}\upsilon(2^n)\left(\frac{\eta_n^2}{2}+\frac{\eta_n^2}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\eta_n^2}\right)\right)\right\},$$

де $\eta_n \to 0,\ n \to +\infty$. Аналогічно, як в [32], отримуємо $\eta_n^4 2^{2n} \geq \int\limits_{M_n} \theta(t)tdt \geq \eta_n^2 2^{n-1}\text{mes } M_n$, звідки $\text{mes } M_n \leq 2^{n+1}\eta_n^2$. За лемою 2.6

$$C\upsilon(2^{n+1})\left(\frac{\eta_n^2}{2}+\frac{\eta_n^2}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\eta_n^2}\right)\right) \geq \int\limits_{L_n\setminus M_n}\frac{dt}{t}\int\limits_{\theta_t}|F(te^{i\varphi})|d\varphi \geq$$

$$\geq \eta_n^{-1}\upsilon(2^n)\left(\frac{\eta_n^2}{2}+\frac{\eta_n^2}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\eta_n^2}\right)\right)2^{-n}\text{mes }(L_n\setminus M_n),$$

звідки $\text{mes }(L_n\setminus M_n) \leq C2^n\eta_n$. Отже, $\text{mes }(L_n\cup M_n) = o(2^n),\ n\to+\infty$. Покладемо $D = \{|a_n|\colon n\in\mathbb{N}\}\cup\{\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}(L_n\cup M_n)\}$. Очевидно, що D — E_0-множина. При $r\notin D$ маємо

$$c_k(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[0,2\pi]\setminus\theta_r}(\Delta\upsilon(r)+o(\upsilon(r)))e^{-ik\varphi}d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_r}F(re^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi =$$

$$= \Delta\upsilon(r)s_k + o(\upsilon(r)) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_r}\left(F(re^{i\varphi})-\Delta\upsilon(r)\right)e^{-ik\varphi}d\varphi,\ r\to+\infty, \quad (2.20)$$

де $s_k = 0$ для $k\neq 0$, $s_0 = 1$. Оскільки для $r\in[2^{n-1},2^n]\setminus D$ виконується $\theta(r)\leq\eta_n^2$, то $\theta(r)\to 0$ при $r\to+\infty,\ r\notin D$. Тому

$$\frac{\Delta}{2\pi}\upsilon(r)\left|\int\limits_{\theta_r}e^{-ik\varphi}d\varphi\right| \leq \frac{\Delta}{2\pi}\upsilon(r)\theta(r) = o(\upsilon(r)), \quad r\to+\infty, \quad r\notin D. \quad (2.21)$$

При $r\in[2^{n-1},2^n]\setminus D$ маємо також

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_r}F(re^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_r}|F(re^{i\varphi})|d\varphi \leq$$

$$\leq \eta_n^{-1}\upsilon(2^n)\left(\frac{\eta_n^2}{2}+\frac{\eta_n^2}{2}\ln(1+\frac{2}{\eta_n^2})\right) = \upsilon(2^n)\left(\frac{\eta_n}{2}+\frac{\eta_n}{2}\ln(1+\frac{2}{\eta_n^2})\right) =$$

$$= o(\upsilon(r)),\ r\to+\infty. \quad (2.22)$$

З (2.20)-(2.22) отримуємо

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = \lim_{r\to+\infty}\frac{n(r)}{\upsilon(r)} = \Delta, \quad \lim_{r\to+\infty}{}^{*}\frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0, \quad k\neq 0,$$

що доводить теорему 2.3.

З теорем 2.2, 2.3 отримуємо таке твердження.

Наслідок 2.1. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ *і нулі функції* f *мають кутову* υ*-щільність. Тоді для* $k \in \mathbb{Z}$ *існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \quad \lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0, \quad k \neq 0.$$

2.4 Коефіцієнти Фур'є та збіжність в $L^p[0,2\pi]$-метриці логарифмічної похідної цілих функцій

В цьому підрозділі буде встановлено зв'язок між коефіцієнтами Фур'є та регулярним зростанням в $L^p[0,2\pi]$-метриці логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку. Отримані результати сформулюємо у вигляді теорем 2.4 та 2.5.

Теорема 2.4. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ *і для* $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ *існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0.$$

Тоді існує множина $G \in \mathcal{E}_\delta$, $0 < \delta < 1$, *така, що для довільного* $p \in [1,+\infty)$

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{\upsilon(r)} \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty, \quad r \notin G. \tag{2.23}$$

Теорема 2.5. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ *і виконуються співвідношення* (2.18). *Тоді існує множина* $G \in \mathcal{E}_\delta$, $0 < \delta < 1$, *така, що для* $p \in [1,+\infty)$

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi})}{\upsilon(r)} - \Delta \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty, \quad r \notin G.$$

Для доведення теореми 2.4 нам потрібно кілька допоміжних тверджень.

Спершу знайдемо зображення коефіцієнтів Фур'є функції F через лічильну функцію нулів $n(r)$. Нехай $a_k = r_k e^{i\alpha_k}$ — нулі функції $f \in H_0(\upsilon)$. Покладемо

$$n_k(r) = \sum_{|a_j|\le r} e^{-ik\alpha_j}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Лема 2.7. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$. *Тоді*

$$c_k(r,F) = n_k(r) - kr^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.24}$$

$$c_k(r,F) = n_k(r) + kr^k \int\limits_0^{r} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt, \quad k = -1, -2, \ldots, \tag{2.25}$$

$$c_0(r,F) = n_0(r) = n(r), \tag{2.26}$$

$$|c_k(r,F)| \le K\upsilon(r), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.27}$$

де $K > 0$ — *деяка стала.*

Доведення. Нехай $\ln f(z) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \gamma_k z^k$ — розвинення в деякому околі точки $z = 0$. Враховуючи, [6, с. 60], що для цілої функції порядку $\rho \ge 0$ маємо ($\gamma_k = 0$ для $k \le 0$)

$$\gamma_k = -\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{a_j^k}, \quad k \ge [\rho] + 1,$$

з формул (див., наприклад, [17])

$$c_k(r,F) = k\gamma_k r^k + \sum_{|a_j| \le r} \left(\frac{r}{a_j}\right)^k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

інтегруванням частинами отримуємо співвідношення (2.24)-(2.26), а саме:

$$c_k(r,F) = -kr^k \int\limits_0^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt + r^k \int\limits_0^{r} \frac{dn_k(t)}{t^k} =$$

$$= -kr^k \int\limits_0^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt + r^k \left(\frac{n_k(r)}{r^k} + k \int\limits_0^{r} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt \right) =$$

$$= n_k(r) - kr^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt \quad \text{для} \quad k \ge 1;$$

і, аналогічно, для $k \le -1$

$$c_k(r,F) = kr^k \int\limits_0^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt - r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{dn_k(t)}{t^k}dt =$$

$$= kr^k \int\limits_0^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt - r^k \left(-\frac{n_k(r)}{r^k} + k \int\limits_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt \right) =$$

$$= n_k(r) + kr^k \int\limits_0^r \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt.$$

Оскільки $|n_k(r)| \le n(r) \le K\upsilon(r)$,

$$|k|r^k \int\limits_0^r \frac{\upsilon(t)}{t^{k+1}}dt \le |k|r^k\upsilon(r) \int\limits_0^r t^{-k-1}dt \le K\upsilon(r) \quad \text{для} \quad k \le -1,$$

$$kr^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{k+1}}dt \le kr^k \frac{\upsilon(r)}{\sqrt{r}} \int\limits_r^{+\infty} t^{-k-\frac{1}{2}}dt \le K\upsilon(r) \quad \text{для} \quad k \ge 1,$$

то з (2.24)-(2.26) отримуємо (2.27).

Зауваження 2.3. *За умов леми 2.7 та з формул ([17])*

$$c_k(r, Re\ F) = \frac{1}{2}k\gamma_k r^k + \frac{1}{2}\sum_{|a_j|\le r} \left(\left(\frac{r}{a_j}\right)^k + \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k \right),$$

$$c_k(r, Im\ F) = \frac{1}{2i}k\gamma_k r^k + \frac{1}{2i}\sum_{|a_j|\le r} \left(\left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k \right), \quad k \ge 1$$

подібним чином можна отримати наступні зображення:

$$c_k(r, Re\ F) = n_k(r) - \frac{1}{2}kr^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt - \frac{1}{2}kr^{-k} \int\limits_0^r t^{k-1}n_k(t)\ dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$c_k(r, Re\ F) = n_k(r) + \frac{1}{2}kr^k \int\limits_0^r \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt + \frac{1}{2}kr^{-k} \int\limits_r^{+\infty} t^{k-1}n_k(t)\ dt,\ k = -1, -2, \ldots,$$

$$c_k(r, Im\ F) = -\frac{1}{2i}kr^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt + \frac{1}{2i}kr^{-k} \int\limits_0^r t^{k-1}n_k(t)\ dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$c_k(r, Im\ F) = \frac{1}{2i}kr^k \int\limits_0^r \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt - \frac{1}{2i}kr^{-k} \int\limits_r^{+\infty} t^{k-1}n_k(t)\ dt, \quad k = -1, -2, \ldots.$$

Лема 2.8. *Нехай* $1 < \gamma \leq 2$, $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$. *Тоді існує множина* $G \in \mathcal{E}_{\gamma-1}$ *така, що для* $|k| \geq 2$

$$|c_k(r, F)| \leq K\upsilon(r)\left(\frac{1}{\gamma^{|k|}} + \frac{1}{|k|(\gamma-1)}\right), \quad r \notin G.$$

Зауваження 2.4. *При доведенні леми 2.8 використовуємо методику Я. В. Васильківа, яку він застосував в [17] при доведенні теореми 1.*

Доведення. Нехай $k \in \mathbb{N}$, $1 < \gamma \leq 2$, $0 < r < +\infty$. Відомо, що (див. доведення леми 2.7)

$$c_k(r, F) = k\gamma_k r^k + \sum_{|a_j| \leq r} \left(\frac{r}{a_j}\right)^k, \quad k \neq 0, \quad \gamma_k = -\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{a_j^k}.$$

Звідси

$$c_k(r, F) = kr^k\left(-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{a_j^k}\right) + \sum_{|a_j| \leq r} \left(\frac{r}{a_j}\right)^k = -r^k \sum_{|a_j| > r} \frac{1}{a_j^k}.$$

Розглянемо різницю

$$c_k(r, F) - \gamma^{-k}c_k(\gamma r, F) = -r^k \sum_{|a_j| > r} \frac{1}{a_j^k} + \gamma^{-k}(\gamma r)^k \sum_{|a_j| > \gamma r} \frac{1}{a_j^k} = -r^k \sum_{r < |a_j| \leq \gamma r} \frac{1}{a_j^k}.$$

Звідси і з (2.27)

$$|c_k(r, F)| \leq \frac{|c_k(\gamma r, F)|}{\gamma^k} + r^k \left|\sum_{r < |a_j| \leq \gamma r} \frac{1}{a_j^k}\right| \leq \frac{K\upsilon(\gamma r)}{\gamma^k} + r^k \left|\sum_{r < |a_j| \leq \gamma r} \frac{1}{a_j^k}\right|.$$

Позначимо $d\mu(t) = \left(\sum\limits_{|a_j| \leq \gamma r} \delta(t - |a_j|)\right) dt$ дискретну міру, а через $M(d\mu)(t) = \sup\limits_{t \in I} \mu(I)/\mathrm{mes}\{I\}$ — максимальну функцію Гарді-Літтвуда, де

$\delta(x)$ — міра Дірака, I — довільний інтервал з $\mathbb{R}_+$. Нехай

$$E_1 = \{t \in [0, \gamma r] \colon M(d\mu)(t) > \eta\}, \text{ де } \eta = \frac{4n(\gamma r, f)}{(\gamma - 1)\gamma r}.$$

З [72, с. 37] відомо, що

$$\operatorname{mes}\{E_1\} = \operatorname{mes}\{t \in [0, \gamma r] \colon M(d\mu)(t) > \eta\} \le \frac{2}{\eta} \int\limits_{\mathbb{R}_+} d\mu(t) = \frac{2}{\eta} n(\gamma r, f) =$$

$$= \frac{1}{2}(\gamma - 1)\gamma r.$$

Верхня лінійна щільність

$$\overline{d}(E_1) = \lim_{r \to +\infty} \operatorname{mes}(E_1 \cap [0, r])/r \le \frac{1}{2}(\gamma - 1), \quad 1 < \gamma \le 2.$$

Позначимо $\mu_r(x) = \int\limits_{|r-t| \le x} d\mu(t)$. Тоді

$$\Sigma_1 = r^k \left| \sum_{r < |a_j| \le \gamma r} \frac{1}{a_j^k} \right| \le r^k \int\limits_r^{\gamma r} \frac{d\mu(t)}{t^k} = r^k \int\limits_r^{\gamma r} \frac{d\mu(t)}{(t - r + r)^k} \le$$

$$\le r^k \int\limits_0^{(\gamma-1)r} \frac{d\mu_r(x)}{(x + r)^k} = \int\limits_0^{(\gamma-1)r} \frac{d\mu_r(x)}{(1 + x/r)^k}.$$

Оскільки для $r \notin E_1$ $\mu_r(x) \le \eta x$, то для довільного $k \ge 2$

$$\int\limits_0^{(\gamma-1)r} \frac{d\mu_r(x)}{(1 + x/r)^k} \le \int\limits_0^{(\gamma-1)r} \frac{d\mu_r(x)}{(1 + \mu_r(x)/(\eta r))^k} = \int\limits_0^{n(\gamma r, f)} \frac{dy}{(1 + y/(\eta r))^k} =$$

$$= \frac{\eta r}{1 - k} \left(\left(1 + \frac{n(\gamma r, f)}{\eta r} \right)^{1-k} - 1 \right) =$$

$$= \frac{4n(\gamma r, f)}{(1 - k)\gamma(\gamma - 1)} \left(\left(1 + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{4} \right)^{1-k} - 1 \right).$$

Тоді, для $r \notin E_1$, $\overline{d}(E_1) \le 1/2\,(\gamma - 1)$, $1 < \gamma \le 2$, $k \ge 2$ маємо

$$|c_k(r, F)| \le \frac{K\upsilon(\gamma r)}{\gamma^k} + \frac{4n(\gamma r, f)}{(1 - k)\gamma(\gamma - 1)} \left(\left(1 + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{4} \right)^{1-k} - 1 \right). \quad (2.28)$$

Для $k \le -2,\ 1 < \gamma \le 2$ розглянемо

$$c_k(r,F) - \gamma^{-|k|} c_k\left(\frac{r}{\gamma}, F\right) = r^{-|k|} \sum_{\frac{r}{\gamma} < |a_j| \le r} a_j^{|k|}.$$

Звідси

$$|c_k(r,F)| \le \frac{\left|c_k\left(\frac{r}{\gamma}, F\right)\right|}{\gamma^{|k|}} + r^{-|k|} \left| \sum_{\frac{r}{\gamma} < |a_j| \le r} a_j^{|k|} \right| \le \frac{K\upsilon\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\gamma^{|k|}} + r^{-|k|} \left| \sum_{\frac{r}{\gamma} < |a_j| \le r} a_j^{|k|} \right|.$$

Аналогічно, як і в попередньому випадку позначимо

$$d\mu^*(t) = \left(\sum_{|a_j| \le r} \delta(t - |a_j|) \right) dt, \quad \mu_r^*(x) = \int\limits_{|r-t| \le x} d\mu^*(t),$$

$$E_2 = \{t \in [0,r] \colon M(d\mu^*)(t) > \theta\}, \quad \text{де } \theta = \frac{4n(\gamma r, f)}{(\gamma - 1)r}.$$

Тоді

$$\operatorname{mes}\{E_2\} = \operatorname{mes}\{t \in [0,r] \colon M(d\mu^*)(t) > \theta\} \le \frac{2}{\theta} \int\limits_{\mathbb{R}_+} d\mu^*(t) \le \frac{1}{2}(\gamma - 1) r,$$

тобто $\overline{d}(E_2) \le (\gamma - 1)/2,\ 1 < \gamma \le 2$. Для $r \notin E_2$

$$\Sigma_2 = r^{-|k|} \left| \sum_{\frac{r}{\gamma} < |a_j| \le r} a_j^{|k|} \right| \le r^{-|k|} \int\limits_0^{r(1-1/\gamma)} (r - x)^{|k|} d\mu_r^*(x) \le$$

$$\le \int\limits_0^{r(1-1/\gamma)} \left(1 - \frac{\mu_r^*(x)}{\theta r}\right)^{|k|} d\mu_r^*(x) \le \int\limits_0^{n(\gamma r, f)} \left(1 - \frac{y}{\theta r}\right)^{|k|} dy =$$

$$= \frac{4n(\gamma r, f)}{(\gamma - 1)(|k| + 1)} \left(1 - \left(1 - \frac{\gamma - 1}{4}\right)^{|k|+1}\right).$$

Отже, маємо

$$|c_k(r,F)| \le \frac{K\upsilon(r/\gamma)}{\gamma^{|k|}} + \frac{4n(\gamma r, f)}{(\gamma - 1)(|k| + 1)} \left(1 - \left(1 - \frac{\gamma - 1}{4}\right)^{|k|+1}\right). \quad (2.29)$$

Позначимо $E = E_1 \cup E_2$. Тоді з (2.28) і (2.29) отримуємо

$$|c_k(r,F)| \le \frac{K\upsilon(\gamma r)}{\gamma^k} + \frac{4n(\gamma r, f)}{(1-k)\gamma(\gamma-1)}\left(\left(1+\frac{\gamma(\gamma-1)}{4}\right)^{1-k} - 1\right) \le$$

$$\le K\upsilon(r)\left(\frac{1}{\gamma^{|k|}} + \frac{1}{|k|(\gamma-1)}\right).$$

Лема 2.9. (Теорема Хаусдорф-Юнг)[73, с. 76]. *Нехай* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1<p\le 2$. *Якщо* $f \in L^p[0,2\pi]$, *то*

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^q\right)^{1/q} \le \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Якщо

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^p\right)^{1/p} < \infty,$$

то існує функція $f \in L^q[0,2\pi]$, *для якої* $c_k = c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}$, *і*

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^q dt\right)^{1/q} \le \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^p\right)^{1/p} = \|c_k\|_{l_p}.$$

Доведення теореми 2.4. За лемою 2.8 для $1<\gamma<2$, $\delta=\gamma-1$ маємо

$$|c_k(r,F)| \le K\upsilon(r)\left(\frac{1}{\gamma^{|k|}} + \frac{1}{|k|(\gamma-1)}\right), \quad |k|\ge 2, \quad r \notin G', \quad G' \in \mathcal{E}_\delta.$$

Отже, послідовність $\left(\frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)}\right)_{k=-\infty}^{k=+\infty}$ належить простору l_q при $q>1$, $r \notin G'$. Далі $c_k(r,F-n(r)) = c_k(r,F)$ для $k \ne 0$, $c_0(r,F-n(r))=0$ і за лемою 2.9 при $p \ge 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$\left\|\frac{F(re^{i\varphi})-n(r)}{\upsilon(r)}\right\|_p \le \left\{\sum_{k\ne 0}\left|\frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)}\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Оскільки ряд в правій частині попередньої нерівності рівномірно збіжний на $[0,+\infty)\setminus G'$ та існує E_0-множина D така, що для $k\neq 0$ виконується $c_k(r,F)/\upsilon(r)\to 0,\ r\to+\infty,\ r\notin D,$ то

$$\left\|\frac{F(re^{i\varphi})-n(r)}{\upsilon(r)}\right\|_p\to 0,\ r\to+\infty,\ r\notin G,\ G=(G'\cup D)\in\mathcal{E}_\delta.$$

За нерівністю Гельдера $\|\cdot\|_p\le\|\cdot\|_2$ для $1\le p<2$ і тому останнє співідношення виконується для $p\in[1,+\infty)$, що доводить теорему 2.4.

Доведення теореми 2.5. Завдяки нерівності трикутника для p-норм маємо

$$\left\|\frac{F(re^{i\varphi})}{\upsilon(r)}-\Delta\right\|_p\le\left\|\frac{F(re^{i\varphi})-n(r)}{\upsilon(r)}\right\|_p+\left\|\frac{n(r)}{\upsilon(r)}-\Delta\right\|_p.$$

Оскільки за теоремою 2.4

$$\left\|\frac{F(re^{i\varphi})-n(r)}{\upsilon(r)}\right\|_p\to 0,\ \text{при } r\to+\infty,\ r\notin G,\ G\in\mathcal{E}_\delta,\ 0<\delta<1,$$

і $n(r)=c_0(r,F)\sim\Delta\upsilon(r),\ r\to+\infty,$ з останньої нерівності отримуємо твердження теореми.

Зауваження 2.5. *В [52] наведено приклад цілої функції $f\in H_0(\upsilon),\ \upsilon\in L,$ такої, що $n_k(r)=o(1),\ r\to+\infty,$ для довільних $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ і не існує границя $\lim\limits_{r\to+\infty}n_0(r)/\upsilon(r)$. З формул (2.24)–(2.26) леми 2.7 отримуємо, що $c_k(r,F)=o(1),\ r\to+\infty,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Звідси бачимо, що існує функція $f\in H_0(\upsilon),$ яка задовольняє умову теореми 2.4.*

2.5 Один приклад цілої функції з класу $H_0(\upsilon)$

Виявляється, що на відміну від функцій класу $H_+^*(\rho(r))$ в загальному випадку для $f\in H_0(\upsilon)$ обернені твердження до теорем 2.2–2.4 не правильні. В цьому підрозділі побудовано приклад функції з класу $H_0(\upsilon)$, для якої виконуються умови (2.9), (2.18), (2.23) теорем 2.2–2.4 відповідно і нулі не мають кутової υ-щільності.

Теорема 2.6. *Для довільної функції* $\upsilon \in L$ *існують функція* $f \in H_0(\upsilon)$ *і множина* $E \in C_0^2$ *такі, що*

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(1), \quad z = re^{i\varphi} \to \infty, \quad z \notin E; \tag{2.30}$$

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0, \quad k \neq 0; \tag{2.31}$$

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{\upsilon(r)} \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty,\ r \notin G,\ G \in \mathcal{E}_\delta,\ 0 < \delta < 1, \tag{2.32}$$

і нулі f *не мають кутової* υ*-щільності.*

Для доведення цієї теореми нам потрібний наступний наслідок з теореми Тепліца [74, с. 326], який сформулюємо у вигляді леми.

Лема 2.10. *Нехай задані дві послідовності* x_l *і* y_l, $l = 1, 2, \ldots n$, *такі, що* $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ *при* $n \to +\infty$ *та існує* K *таке, що для довільного* $n \in \mathbb{N}$

$$|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n| \leq K \ (K = const).$$

Тоді

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_n y_1 \to 0, n \to +\infty.$$

Доведення теореми 2.6. Нехай υ — довільна функція з класу L. Виберемо послідовність дійсних чисел r_k таку, що $r_k \nearrow +\infty$ при $k \to +\infty$ і

$$\upsilon(r_1) = 1, \quad r_{k+1} > 2r_k, \quad \upsilon(r_k) \in \mathbb{N}.$$

Приймемо $m_1 = \upsilon(r_1) = 1$, $m_k = \upsilon(r_k) - \upsilon(r_{k-1})$, $k \geq 2$,

$$\upsilon(r_k) > (k+1)\upsilon(r_{k-1}). \tag{2.33}$$

Нехай

$$f(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{r_k}\right)^{m_k}\right).$$

Оскільки

$$m_k = \upsilon(r_k) - \upsilon(r_{k-1}) > k\upsilon(r_{k-1}) > k$$

і для довільного $R > 0$

$$(R/r_k)^{m_k} < (1/2)^k, \quad k \geq k_0,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{z}{r_k}\right)^{m_k}$ — абсолютно і рівномірно збіжний в крузі $\{z\colon |z| \leq R\}$, а отже, і ряд $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\dfrac{z}{r_k}\right)^{m_k}\right)$ — рівномірно збіжний, тому $f(z)$ — ціла функція.

Нехай $r_n \leq r < r_{n+1}$. Тоді

$$n(r) = \sum_{k=1}^{n} m_k = \upsilon(r_1) + \sum_{k=2}^{n} (\upsilon(r_k) - \upsilon(r_{k-1})) = \upsilon(r_n) \leq \upsilon(r)$$

і для всіх α і β, $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$, маємо

$$n(r, \alpha, \beta) = (1 + o(1))\frac{\beta - \alpha}{2\pi} \sum_{r_k \leq r} m_k = (1 + o(1))\frac{\beta - \alpha}{2\pi}\upsilon(r_n), \ r \to +\infty.$$

Звідси, завдяки (2.33), отримуємо, що

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{\upsilon(r)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(r_n, \alpha, \beta)}{\upsilon(r_n)} = \frac{\beta - \alpha}{2\pi},$$

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{\upsilon(r)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(r_{n+1} - 0, \alpha, \beta)}{\upsilon(r_{n+1})} = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \lim_{n \to +\infty} \frac{\upsilon(r_n)}{\upsilon(r_{n+1})} = 0.$$

Отже, нулі f не мають кутової υ-щільності.

Легко бачити, що

$$F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-m_k)(z/r_k)^{m_k}}{1 - (z/r_k)^{m_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{1 - (r_k/z)^{m_k}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{m_k(z/r_k)^{m_k}}{(z/r_k)^{m_k} - 1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k(r_k/z)^{m_k}}{1 - (r_k/z)^{m_k}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{m_k(z/r_k)^{m_k}}{(z/r_k)^{m_k} - 1}.$$

Звідси для $r_n \leq |z| = r < r_{n+1}$

$$|F(z) - n(r)| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k(r_k/z)^{m_k}}{1 - (r_k/z)^{m_k}} \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{m_k(z/r_k)^{m_k}}{(z/r_k)^{m_k} - 1} \right| =$$

$$= |\Sigma_1| + |\Sigma_2|. \tag{2.34}$$

Далі, для $r_n\left(1+1/\sqrt{m_n}\right)\le|z|\le r_{n+1}\left(1-1/\sqrt{m_{n+1}}\right)$, маємо

$$\left(\frac{r_n}{|z|}\right)^{m_n}\le\left(1+\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)^{-m_n}\le 2^{-\sqrt{m_n}},$$

$$\left(\frac{|z|}{r_{n+1}}\right)^{m_{n+1}}\le\left(1-\frac{1}{\sqrt{m_{n+1}}}\right)^{m_{n+1}}\le 2^{-\sqrt{m_{n+1}}}.$$

Тоді

$$\left|\frac{1}{1-\left(r^n/|z|\right)^{m_n}}\right|<\frac{1}{1-2^{-\sqrt{m_n}}}<2,$$

$$\left|\frac{1}{\left(|z|/r_{n+1}\right)^{m_{n+1}}-1}\right|\le\frac{1}{1-1/2^{-\sqrt{m_{n+1}}}}<2.$$

Для $k\le n-1$ правильні наступні оцінки:

$$\left(\frac{r_k}{|z|}\right)^{m_k}\le\left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{m_k}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{m_k}\le\frac{1}{2},$$

$$\frac{r_k}{r_n}=\frac{r_k}{r_{k+1}}\cdot\frac{r_{k+1}}{r_{k+2}}\cdot\ldots\cdot\frac{r_{n-1}}{r_n}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Отже,

$$|\Sigma_1|\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{m_k(r_k/r)^{m_k}}{|1-(r_k/z)^{m_k}|}+m_n\left(\frac{r_n}{r}\right)^{m_n}\left|1-\left(\frac{r_n}{z}\right)^{m_n}\right|^{-1}\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{m_k(r_k/r_n)^{m_k}}{1-(r_k/r_n)^{m_k}}+$$

$$+2m_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)^{-m_n}\le 2\sum_{k=1}^{n-1}m_k(r_k/r_n)^{m_k}+2\frac{m_n}{e^{\sqrt{m_n}}}$$

$$\le 2\sum_{k=1}^{n-1}m_k2^{(k-n)m_k}+o(1),\quad n\to+\infty.$$

Розглянемо суму з правої частини отриманої рівності. Маємо

$$\sum_{k=1}^{n-1}m_k2^{(k-n)m_k}=\frac{m_1}{2^{(n-1)m_1}}+\frac{m_2}{2^{(n-2)m_2}}+\cdots+\frac{m_{n-2}}{2^{2m_{n-2}}}+\frac{m_{n-1}}{2^{m_{n-1}}}=$$

$$=\frac{m_1}{2^{m_1}}\frac{1}{2^{(n-2)m_1}}+\frac{m_2}{2^{m_2}}\frac{1}{2^{(n-3)m_2}}+\cdots+\frac{m_{n-2}}{2^{m_{n-2}}}\frac{1}{2^{m_{n-2}}}+\frac{m_{n-1}}{2^{m_{n-1}}}.$$

Покладемо $x_l=m_l/2^{m_l}$, $y_l=1/2^{(l-1)m_{n-l}}$. Оскільки $x_l\to 0$, $y_l\to 0$ при $l\to+\infty$ і для довільного $l\in\mathbb{N}$

$$|y_1|+|y_2|+\ldots+|y_l|\le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^l}\le 2,$$

то з леми 2.10 маємо

$$\sum_{k=1}^{n-1} m_k 2^{(k-n)m_k} = \sum_{k=1}^{n-1} x_k y_{n-k} = o(1), \quad n \to +\infty.$$

Отже,

$$|\Sigma_1| = o(1),\ n \to +\infty. \tag{2.35}$$

Далі, аналогічно до оцінки $|\Sigma_1|$, отримуємо

$$|\Sigma_2| \le \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{m_k (r/r_k)^{m_k}}{|(z/r_k)^{m_k} - 1|} + m_{n+1} \left(\frac{r}{r_{n+1}}\right)^{m_{n+1}} \left| \left(\frac{z}{r_{n+1}}\right)^{m_{n+1}} - 1 \right|^{-1} <$$

$$< \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{m_k (r_{n+1}/r_k)^{m_k}}{1 - (r_{n+1}/r_k)^{m_k}} + 2m_{n+1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m_{n+1}}}\right)^{m_{n+1}} \le$$

$$\le 2 \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{m_k}{2^{(k-n)m_k}} + 2\frac{m_{n+1}}{e^{\sqrt{m_{n+1}}}} = o(1),\ n \to +\infty. \tag{2.36}$$

Отже, з (2.34)-(2.36) для $z \notin E = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \left(r_k - r_k/\sqrt{m_k},\ r_k + r_k/\sqrt{m_k}\right)$

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(1), \quad z = re^{i\varphi} \to \infty.$$

Покажемо далі, що $E \in C_0^2$. Дійсно, для $r_n \le r \le r_{n+1}/2$ маємо

$$mes_2\,(E \cap C(r)) \le \sum_{k=1}^{n} \left(r_k^2 (1 + \frac{1}{\sqrt{m_k}})^2 - r_k^2 \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(2\frac{r_k^2}{\sqrt{m_k}} + \frac{r_k^2}{m_k} \right) \le$$

$$\le 3r_n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(r_k/r_n)^2}{\sqrt{m_k}} \le 3r^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{(k-n)2}}{\sqrt{m_k}}.$$

Поклавши $x_l = 1/\sqrt{m_l}$, $y_l = 1/4^l$, за лемою 2.10 отримуємо

$$mes_2\,(E \cap C(r)) = o(r^2),\ r \to +\infty.$$

Аналогічно, для $r_{n+1}/2 \le r \le r_{n+1}$

$$mes_2\,(E \cap C(r)) \le \sum_{k=1}^{n+1} \left(r_k^2 (1 + \frac{1}{\sqrt{m_k}})^2 - r_k^2 \right) \le 3r_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(r_k/r_{n+1})^2}{\sqrt{m_k}} \le$$

$$\leq 12r^2 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{(k-n-1)2}}{\sqrt{m_k}} = o(r^2),\ r \to +\infty.$$

Отже, з останніх двох співвідношень

$$mes_2\ (E \cap C(r)) = o(r^2),\ r \to +\infty.$$

Нехай

$$a_j = r_1 e^{\frac{2\pi i}{m_1} j}, \quad j = \overline{1, m_1},$$

$$a_{m_1+j} = r_2 e^{\frac{2\pi i}{m_2} j}, \quad j = \overline{1, m_2}, \ldots,$$

$$a_{m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+j} = r_n e^{\frac{2\pi i}{m_n} j}, \quad j = \overline{1, m_n},$$

послідовності нулів f. Відомо, що $e^{\frac{2\pi i}{n} s} + e^{\frac{2\pi i}{n} 2s} + \cdots + e^{\frac{2\pi i}{n} ns} = 0,\ |s| < n$, для довільного $s \in \mathbb{Z}_+$. Для $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ вибираємо таке найменше натуральне число j_0, що $m_{j_0} > |k|$. Тоді для $r > r_{j_0}$

$$|n_k(r)| = \left| \sum_{|a_j| \leq r} e^{-ik\alpha_j} \right| = \left| \sum_{r_j \leq r_{j_0}} e^{-ik\alpha_j} \right| \leq \sum_{r_j \leq r_{j_0}} 1 \leq n(r_{j_0}) = \upsilon(r_{j_0}).$$

Отже, $n_k(r)/\upsilon(r) \to 0,\ r \to +\infty$. Для $k > 0$ завдяки (2.24) маємо

$$|c_k(r, F)| = \left| n_k(r) - kr^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt \right| \leq \upsilon(r_{j_0}) \left| 1 - kr^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{dt}{t^{k+1}} \right| =$$

$$= \upsilon(r_{j_0}) |1 + r^k t^{-k} \big|_r^{+\infty}| = O(\upsilon(r_{j_0})), \quad r \to +\infty,$$

і, аналогічно, для $k < 0$ з (2.25) отримуємо

$$|c_k(r, F)| = \left| n_k(r) + kr^k \int\limits_0^r \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt \right| \leq$$

$$\leq \upsilon(r_{j_0}) \left| 1 - r^k t^{-k} \big|_0^r \right| = O(\upsilon(r_{j_0})), \quad r \to +\infty,$$

тобто виконується (2.31). Співвідношення (2.32) випливає з теореми 2.4.

2.6 Висновки до розділу 2

В розділі 2 знайдено необхідні умови існування кутової υ-щільності нулів цілої функції нульового порядку в термінах поводження її логарифмічної похідної та показано, що ці умови не є достатніми.

В підрозділі 2.1 доведено апроксимаційну теорему для логарифмічних похідних функцій $f \in H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$, яка відіграє важливу роль у знаходженні асимптотики $F = zf'/f$ зовні деякої C_0^α-множини, $1 < \alpha \leq 2$.

В підрозділі 2.2. за умови існування кутової υ-щільності нулів функції $f \in H_0(\upsilon)$ встановлена асимптотика її логарифмічної похідної.

В підрозділі 2.3 показано, що з асимптотики логарифмічної похідної функції f з класу $H_0(\upsilon)$ випливає регулярне поводження коефіцієнтів Фур'є $c_k(r, F)$. Як наслідок з результатів підрозділів 2.2 і 2.3 отримано, що існування кутової υ-щільності нулів цілої функції $f \in H_0(\upsilon)$ є достатньою умовою регулярного зростання $c_k(r, F)$.

Зв'язки між коефіцієнтами Фур'є логарифмічної похідної цілої функції та збіжністю F за p-нормою в просторі $L^p[0, 2\pi]$; між кутовою υ-щільністю нулів f та p-нормою її логарифмічної похідної в просторі $L^p[0, 2\pi]$ знайдено в підрозділі 2.4.

В підрозділі 2.5 побудовано приклад цілої функції $f \in H_0(\upsilon)$, для якої виконуються знайдені в попередніх підрозділах необхідні умови існування кутової υ-щільності її нулів, а саме:

1) $F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(1)$, $z = re^{i\varphi} \to \infty$, $z \notin E$, $E \in C_0^2$;

2) існують границі $\lim\limits_{r\to+\infty}^{*} \dfrac{c_k(r, F)}{\upsilon(r)} = 0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

3) $\left\| \dfrac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{\upsilon(r)} \right\|_p \to 0$, $r \to +\infty$, $r \notin G$, $G \in \mathcal{E}_\delta$, $0 < \delta < 1$,

і нулі f не мають кутової υ-щільності.

Розділ 3

Критерії існування кутової υ-щільності нулів цілих функцій, близьких до поліномів, з нулями на скінченній системі променів

В теоремах 2.2-2.4 розділу 2 співвідношення (2.9), (2.18), (2.23) є необхідними умовами для існування кутової υ-щільності, але не достатніми. Виникає питання, за яких умов на функцію $f \in H_0(\upsilon)$ із асимптотики, регулярного зростання коефіцієнтів Фур'є і збіжності в $L^p[0, 2\pi]$-метриці логарифмічної похідної F випливатиме існування кутової υ-щільності нулів функції f. Зазначимо, що у випадку цілої функції нецілого порядку існування кутової щільності її нулів еквівалентне одному із співвідношеннь 1)([31, 32]) ($g \in L^1[0, 2\pi]$, $E \in C_0^\alpha$, $1 < \alpha \leq 2$,)

$$F(z) = g(\varphi) r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad z = re^{i\varphi} \to \infty, \quad z \notin E;$$

2)([32])

$$\lim_{r \to +\infty, r \notin D} \frac{c_k(r, F)}{r^{\rho(r)}} = d_k, \text{ для всіх } k \in \mathbb{Z};$$

3) ([17])

$$\left\| \frac{F(re^{i\theta})}{r^{\rho(r)}} - g(\theta) \right\|_p \to 0, \ r \to +\infty, \ r \notin G, \ G \in \mathcal{E}_\eta, \ 0 < \eta < 1,$$

де $p \in [1, +\infty)$, $g \in L^1[0, 2\pi]$.

В цьому розділі буде виділено підклас цілих функцій f класу $H_0(\upsilon)$, для яких з асимптотики, регулярного зростання коефіцієнтів Фур'є і збіжності в $L^p[0,2\pi]$-метриці логарифмічної похідної F випливає існування кутової υ-щільності нулів f.

3.1 Асимптотика логарифмічної похідної цілих функцій з нулями на скінченній системі променів і кутова υ-щільність їхніх нулів

Позначимо через $\Gamma_m = \bigcup\limits_{j=1}^{m}\{z\colon \arg z = \theta_j\} = \bigcup\limits_{j=1}^{m} l_{\theta_j}$, $-\pi \le \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < \pi$, скінченну систему променів, $H_0(\upsilon,\Gamma_m)$ – підклас цілих функцій з класу $H_0(\upsilon)$, нулі яких лежать на скінченній системі променів Γ_m, $n(r,\theta_j;f) = n(r,\theta_j)$ – кількість нулів функції $f \in H_0(\upsilon)$, що лежать на промені $l_{\theta_j} = \{z\colon \arg z = \theta_j\}$, модулі яких не перевищують r. Нехай $h_j(\theta) = (\theta - \pi - \theta_j)$, $\theta_j < \theta < \theta_j + 2\pi$, а $\widehat{h}_j(\theta)$ – її періодичне продовження з $(\theta_j, \theta_j + 2\pi)$ на $\mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$. Для $\widetilde{\upsilon} \in L$ приймемо

$$\upsilon(r) = \int\limits_0^r \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t}dt,$$

$\upsilon(0) = 0$. Легко бачити, що $\upsilon \in L$ і $\widetilde{\upsilon}(r) = o(\upsilon(r))$, $r \to +\infty$. Справді, застосовуючи правило Лопіталя, отримуємо

$$\frac{\upsilon(2r)}{\upsilon(r)} \sim \frac{\widetilde{\upsilon}(2r)/2r \cdot 2}{\widetilde{\upsilon}(r)/r} = \frac{\widetilde{\upsilon}(2r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} \to 1,\ r \to +\infty$$

$$\frac{\widetilde{\upsilon}(r)}{\upsilon(r)} = \frac{\widetilde{\upsilon}(r)}{\int\limits_0^r \widetilde{\upsilon}(t)/tdt} \sim \frac{r\widetilde{\upsilon}'(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} \to 0,\ r \to +\infty.$$

Нехай $\widetilde{l}_{\theta_j} = \{z\colon \arg z = \theta_j, |z| \ge r_j > 0\}$, де r_j – найменший модуль нуля, що лежить на промені l_{θ_j}, $j = \overline{1,m}$, $D = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} \widetilde{l}_{\theta_j}\right)$ – однозв'язна область. Через $\ln f$ позначимо однозначну вітку багатозначної функції

$\mathrm{Ln}\ f = \ln|f(z)| + i\mathrm{Arg}\ f(z)$, в області D таку, що $\ln f(0) = 0$. Легко бачити, що

$$\ln f(z) = \int\limits_0^z \frac{f'(w)}{f(w)} dw, \quad z \in D,$$

де інтеграл береться вздовж відрізка $[0, z]$.

Для того, щоб знайти достатні умови для існування кутової υ-щільності нулів цілої функції з класу $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ спершу сформулюємо і доведемо теорему, аналогічну до теореми 2.2.

Теорема 3.1. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і для кожного* $j = \overline{1, m}$

$$n(r, \theta_j) = \Delta_j \upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad r \to +\infty, \tag{3.1}$$

$\Delta = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j$, $H_f(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j \widehat{h}_j(\theta)$, $\Delta_j \geq 0$. *Тоді для* $\theta \neq \theta_j$,

$$F(re^{i\theta}) = \Delta\upsilon(r) + iH_f(\theta)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad r \to +\infty,$$

причому для довільного $\delta > 0$ *останнє співвідношення виконується рівномірно щодо* θ *на множині* $[-\pi, \pi) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} (\theta_j - \delta, \theta_j + \delta)$.

Для доведення цієї теореми використаємо наступну лему. Покладемо

$$a_k(r) = \int\limits_0^r t^k \widetilde{\upsilon}(t) dt, \quad b_k(r) = \int\limits_r^{+\infty} t^{-k-2} \widetilde{\upsilon}(t) dt, \quad \widetilde{\upsilon} \in L.$$

Лема 3.1. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$,

$$\Sigma_1 = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k a_k(r)}{z^{k+1}},$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{k+1} b_k(r).$$

Тоді для $z = re^{i\theta}, -\pi < \theta < \pi$

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = i\theta\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad r \to +\infty,$$

причому останнє співвідношення виконується рівномірно відносно θ *на* $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$, $0<\delta<1$.

Доведення. Оскільки $\widetilde{\upsilon} \in L$, то $(\widetilde{\upsilon}(t))' = \varepsilon(t)\widetilde{\upsilon}(t)/t$, де $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Тому

$$a_k(r) = \int\limits_0^r t^k \widetilde{\upsilon}(t)dt = \frac{r^{k+1}}{k+1}\widetilde{\upsilon}(r) - \frac{1}{k+1}\int\limits_0^r \varepsilon(t)\widetilde{\upsilon}(t)t^k dt,$$

$$b_k(r) = \int\limits_r^{+\infty} t^{-k-2}\widetilde{\upsilon}(t)dt = \frac{\widetilde{\upsilon}(r)}{(k+1)r^{k+1}} + \frac{1}{k+1}\int\limits_r^{+\infty} \varepsilon(t)\widetilde{\upsilon}(t)t^{-k-2}dt$$

і, завдяки лемі 2.4, рівномірно відносно θ на $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$, $0<\delta<1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)z^{k+1}} \int\limits_0^r \varepsilon(t)\widetilde{\upsilon}(t)t^k dt = o(\widetilde{\upsilon}(r)),$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{k+1}}{k+1} \int\limits_r^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)\widetilde{\upsilon}(t)}{t^{k+2}} dt = o(\widetilde{\upsilon}(r)),\ r \to +\infty,$$

Звідси отримуємо

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\left(e^{i\theta(k+1)} - e^{-i\theta(k+1)}\right)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) = (\ln(1+e^{i\theta}) -$$

$$-\ln(1+e^{-i\theta}))\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) = i\theta\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)),\ r \to +\infty.$$

Доведення теореми 3.1. Нехай $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, нулі f розташовані на від'ємному промені $l_{-\pi}$, тобто

$$f(z) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{z}{a_k}\right),$$

де $0 < a_k \nearrow +\infty$ і для довільного $\varepsilon > 0$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|a_k|^\varepsilon}$ збіжний. Як і в доведенні теореми 2.2, якщо $n(r,-\pi) = n(r) = \upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r))$, $r \to +\infty$,

то для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$,

$$F(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = z\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{z+a_k} = z\int\limits_0^{+\infty}\frac{n(t)-\upsilon(t)}{(z+t)^2}dt + z\int\limits_0^{+\infty}\frac{\upsilon(t)}{(z+t)^2}dt =$$
$$= I_1 + I_2. \tag{3.2}$$

Завдяки умові (3.1) та лемі 2.2 для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, маємо

$$I_1 = z\int\limits_0^{+\infty}\frac{\beta(t)\widetilde{\upsilon}(t)}{(z+t)^2}dt = o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad r \to +\infty, \tag{3.3}$$

де $\beta(r) = (n(r) - \upsilon(r))/\widetilde{\upsilon}(r) \to 0$, $r \to +\infty$.

Подібно, як у доведенні теореми 2.2, отримуємо

$$I_2 = z\int\limits_0^{r}\frac{\upsilon(t)}{(z+t)^2}dt + z\int\limits_r^{+\infty}\frac{\upsilon(t)}{(z+t)^2}dt =$$
$$= \frac{1}{1+e^{i\theta}}\upsilon(r) + \frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\upsilon(r) + \Sigma_1 + \Sigma_2 = \upsilon(r) + \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{3.4}$$

де $\Sigma_1 = -\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k a_k(r)}{z^{k+1}}$, $\Sigma_2 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{k+1} b_k(r)$.

Завдяки лемі 3.1 і співвідношенням (3.2)-(3.4) маємо

$$F(z) = \upsilon(r) + i\theta\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad z \to \infty, \ -\pi < \theta < \pi, \tag{3.5}$$

причому для довільного $\delta > 0$ останнє співвідношення виконується рівномірно щодо $\theta \in [-\pi + \delta, \pi - \delta]$.

У випадку, коли нулі f лежать на промені $l_{\theta_j} = \{z\colon \arg z = \theta_j\}$, $-\pi < \theta_j < \pi$, для $\theta_j < \theta < 2\pi + \theta_j$

$$n(r, \theta_j) = \Delta_j \upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad \Delta_j > 0, \quad r \to +\infty.$$

Розглянемо функцію

$$F(re^{i\theta}) = re^{i\theta}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{re^{i\theta} - |a_k|e^{i\theta_j}} = re^{i\theta}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{re^{i\theta} + |a_k|e^{i\theta_j}e^{i\pi}} =$$

$$= re^{i(\theta-\theta_j-\pi)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{re^{i(\theta-\theta_j-\pi)}+|a_k|}.$$

З (3.5) отримуємо

$$F(re^{i\theta}) = \Delta_j\upsilon(r) + i\Delta_j(\theta-\theta_j-\pi)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) =$$

$$= \Delta_j\upsilon(r) + i\Delta_j h_j(\theta)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)),\ z\to\infty,$$

рівномірно відносно $\theta\in[\theta_j+\delta,\theta_j+2\pi-\delta],\ 0<\delta<1$.

Нехай f задовольняє умови теореми 3.1, тобто нулі f розташовані на скінченній системі променів Γ_m і виконується (3.1). Зобразимо f у вигляді добутку $f=f_1\cdot\ldots\cdot f_m$, де f_j – ціла функція з нулями на промені $l_{\theta_j},\ j=\overline{1,m}$. Тоді для $z\in D$ маємо $\ln f(z)=\ln f_1(z)+\ldots+\ln f_m(z)$ і використавши останнє співвідношення для $\theta\in[-\pi,\pi)\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{m}\theta_j$ отримуємо

$$F(re^{i\theta}) = re^{i\theta}\sum_{j=1}^{m}\frac{f_j'(re^{i\theta})}{f_j(re^{i\theta})} = \Delta\upsilon(r) + i\sum_{j=1}^{m}\Delta_j\widehat{h}_j(\theta)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) =$$

$$= \Delta\upsilon(r) + iH_f(\theta)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)),\quad r\to+\infty,$$

причому для довільного $\delta>0$ останнє співвідношення виконується рівномірно відносно θ на множині $[-\pi,\pi)\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{m}(\theta_j-\delta,\theta_j+\delta)$. Теорему 3.1 доведено повністю.

Теорема 3.2. *Нехай* $G\in L^1[0,2\pi],\ \Delta>0,\ \widetilde{\upsilon}\in L,\ f\in H_0(\upsilon,\Gamma_m)$ *і*

$$F(re^{i\theta}) = \Delta\upsilon(r) + iG(\theta)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)),\quad r\to+\infty, \tag{3.6}$$

причому для довільного $\delta>0$ *співвідношення* (3.6) *виконується рівномірно щодо* θ *на множині* $[-\pi,\pi)\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{m}(\theta_j-\delta,\theta_j+\delta)$. *Тоді нулі* f *мають кутову* υ*-щільність, причому для всіх* $\alpha,\beta\in[-\pi,\pi)\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{m}\theta_j$ *виконується*

$$\Delta(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi}\left(G(\alpha)-G(\beta)+\Delta(\beta-\alpha)\right). \tag{3.7}$$

Щоб довести цю теорему, нам потрібна наступна лема, яка випливає з результатів роботи [19].

Лема 3.2. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, $0 < \delta < 1$. *Тоді існує* E_0*-множина* E *така, що*

$$r \int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right| d\varphi = O(\upsilon(r)) \left(\delta + \delta \ln(1 + \frac{1}{\delta}) \right), \quad r \to +\infty, \quad r \notin E.$$

Доведення теореми 3.2. Нехай $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$. Покладемо $S_r(\alpha, \beta) = \{z \colon |z| \leq r, \ \alpha \leq \arg z \leq \beta\}$, $-\pi \leq \theta_1 < \ldots < \theta_{k_0-1} < \alpha < \theta_{k_0} < \ldots < \theta_{l_0} < \beta < \theta_{l_0+1} < \ldots < \theta_m < \pi$, $r \notin \Omega$, $\partial S_r^+(\alpha, \beta) = I_r(\alpha) \bigcup C_r(\alpha, \beta) \bigcup I_r^-(\beta)$ — додатна орієнтація межі сектора $S_r(\alpha, \beta)$, де

$$I_r(\alpha) = \{z_1(t) = te^{i\alpha}, 0 \leq t \leq r\}, \quad I_r(\beta) = \{z_2(t) = te^{i\beta}, 0 \leq t \leq r\},$$

$$C_r(\alpha, \beta) = \{z_3(t) = re^{it}, \alpha \leq t \leq \beta\}.$$

Тоді

$$n(r, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_r^+(\alpha,\beta)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{I_r(\alpha)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int\limits_{I_r^-(\beta)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r(\alpha,\beta)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \tag{3.8}$$

За умови (3.6) теореми 3.2 отримуємо $(\widetilde{\upsilon}(t) = t\upsilon'(t))$

$$\int\limits_{I_r(\alpha)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int\limits_0^r \frac{f'(te^{i\alpha})}{f(te^{i\alpha})} e^{i\alpha} dt = \int\limits_0^r \frac{1}{t} F(te^{i\alpha}) dt =$$
$$= \Delta \int\limits_0^r \frac{\upsilon(t)}{t} dt + i \int\limits_0^r \left(G(\alpha)\upsilon'(t) + o(\upsilon'(t)) \right) dt =$$
$$= \Delta \int\limits_0^r \frac{\upsilon(t)}{t} dt + iG(\alpha)\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty, \tag{3.9}$$

і, аналогічно,

$$\int\limits_{I_r^-(\beta)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -\int\limits_0^r \frac{f'(te^{i\beta})}{f(te^{i\beta})}e^{i\beta}dt =$$

$$= -\Delta \int\limits_0^r \frac{\upsilon(t)}{t}dt - iG(\beta)\upsilon(r) + o(\upsilon(r)),\ r \to +\infty. \qquad (3.10)$$

Нехай $0 < \delta < \min\left\{\frac{\theta_{k_0} - \alpha}{2}, \frac{\beta - \theta_{l_0}}{2}, \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{2}\right\}$, де $j = \overline{k_0, l_0 - 1}$. Тоді

$$\int\limits_{C_r(\alpha,\beta)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int\limits_{\alpha}^{\theta_{k_0}-\delta} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}ire^{it}dt + \sum_{j=k_0}^{l_0-1} \int\limits_{\theta_j+\delta}^{\theta_{j+1}-\delta} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}ire^{it}dt +$$

$$+ \sum_{j=k_0}^{l_0} \int\limits_{\theta_j-\delta}^{\theta_j+\delta} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}ire^{it}dt + \int\limits_{\theta_{l_0}+\delta}^{\beta} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}ire^{it}dt.$$

Покладемо

$$\Sigma_1 = \int\limits_{\alpha}^{\theta_{k_0}-\delta} F(re^{it})dt + \sum_{j=k_0}^{l_0-1} \int\limits_{\theta_j+\delta}^{\theta_{j+1}-\delta} F(re^{it})dt + \int\limits_{\theta_{l_0}+\delta}^{\beta} F(re^{it})dt,$$

$$\Sigma_2 = \sum_{j=k_0}^{l_0} \int\limits_{\theta_j-\delta}^{\theta_j+\delta} F(re^{it})dt.$$

Далі, з (3.6)

$$\Sigma_1 = \left(\int\limits_{\alpha}^{\theta_{k_0}-\delta} + \sum_{j=k_0}^{l_0-1} \int\limits_{\theta_j+\delta}^{\theta_{j+1}-\delta} + \int\limits_{\theta_{l_0}+\delta}^{\beta} \right) (\Delta\upsilon(r) + iG(t)\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)))dt =$$

$$= (\Delta\upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) \left(\int\limits_{\alpha}^{\theta_{k_0}-\delta} dt + \sum_{j=k_0}^{l_0-1} \int\limits_{\theta_j+\delta}^{\theta_{j+1}-\delta} dt + \int\limits_{\theta_{l_0}+\delta}^{\beta} dt \right) +$$

$$+ i\widetilde{\upsilon}(r) \left(\int\limits_{\alpha}^{\theta_{k_0}-\delta} G(t)dt + \sum_{j=k_0}^{l_0-1} \int\limits_{\theta_j+\delta}^{\theta_{j+1}-\delta} G(t)dt + \int\limits_{\theta_{l_0}+\delta}^{\beta} G(t)dt \right) =$$

$$= (\Delta\upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) \left(\theta_{k_0} - \delta - \alpha + \sum_{j=k_0}^{l_0-1} (\theta_{j+1} - \theta_j - 2\delta) + \beta - \theta_{l_0} - \delta \right) + o(\upsilon(r)) =$$

$$= \Delta(\beta - \alpha - 2\delta(l_0 - k_0 + 1))\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty.$$

За лемою 3.2 існує така E_0-множина E_j, що для $0 < \delta < 1$

$$\left| \int\limits_{\theta_j-\delta}^{\theta_j+\delta} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})} re^{it} dt \right| \le r \int\limits_{\theta_j-\delta}^{\theta_j+\delta} \left| \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})} \right| dt = O\left(\upsilon(r)\right) \left(\delta + \delta \ln(1 + \frac{1}{\delta}) \right),$$

$r \to +\infty,\ r \notin E_j,\ j = \overline{k_0, l_0},$ а отже,

$$\Sigma_2 = O\left(\upsilon(r)\right) \left(\delta + \delta \ln(1 + \frac{1}{\delta}) \right),\ r \to +\infty,\ r \notin E = \bigcup_{j=k_0}^{l_0} E_j.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{C_r(\alpha,\beta)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i\Sigma_1 + i\Sigma_2 = i\Delta(\beta - \alpha - 2\delta(l_0 - k_0 + 1))\upsilon(r) +$$

$$+O\left(\upsilon(r)\right) \left(\delta + \delta \ln(1 + \frac{1}{\delta}) \right) + o(\upsilon(r)),\ r \to +\infty,\ r \notin E, \tag{3.11}$$

де E – деяка E_0-множина.

З (3.8)-(3.11), спрямувавши δ до нуля, отримуємо

$$n(r, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \left(G(\alpha) - G(\beta) + \Delta(\beta - \alpha) \right) \upsilon(r) + o(\upsilon(r)),\ r \to +\infty,\ r \notin E.$$

Залишилося показати, що нулі f мають кутову υ-щільність для довільного $r \to +\infty$. Справді, нехай $r \in E$. Тоді існують r', r'' такі, що $r/2 < r' < r < r'' < 2r$, $r' \notin E$, $r'' \notin E$. Оскільки

$$\frac{n(r', \alpha, \beta)}{\upsilon(r')} \frac{\upsilon(r')}{\upsilon(r)} \le \frac{n(r, \alpha, \beta)}{\upsilon(r)} \le \frac{n(r'', \alpha, \beta)}{\upsilon(r'')} \frac{\upsilon(r'')}{\upsilon(r)},$$

$\upsilon(r') \sim \upsilon(r'') \sim \upsilon(r),\ r \to +\infty,$ то

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{\upsilon(r)} = \frac{1}{2\pi} \left(G(\alpha) - G(\beta) + \Delta(\beta - \alpha) \right) = \Delta(\alpha, \beta),$$

що доводить теорему 3.2.

Для $G(\theta) = H_f(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j \widehat{h}_j(\theta)$, $\Delta_j \geq 0$ з теореми 3.2 отримуємо наслідок.

Наслідок 3.1. *За умов теореми 3.2 з* $G(\theta) = H_f(\theta)$, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j$ *нулі* f *мають кутову* υ*-щільність і*

$$\Delta(\alpha, \beta) = \sum_{j=k_0}^{l_0} \Delta_j,$$

де $-\pi \leq \theta_1 < \ldots < \theta_{k_0-1} < \alpha < \theta_{k_0} < \ldots < \theta_{l_0} < \beta < \theta_{l_0+1} < \ldots < \theta_m < \pi.$

Доведення. Оскільки за умовою наслідку 3.2 виконуються всі умови теореми 3.2, то нулі $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ мають кутову υ-щільність і справедливе співвідношення (3.7).

Для $\theta \in [-\pi, \pi)$ маємо

$$\widehat{h}_j(\alpha) = \begin{cases} \alpha - \theta_j - \pi, & 1 \leq j \leq k_0 - 1, \\ \alpha - \theta_j + \pi, & k_0 \leq j \leq m, \end{cases}$$

$$\widehat{h}_j(\beta) = \begin{cases} \beta - \theta_j - \pi, & 1 \leq j \leq l_0, \\ \beta - \theta_j + \pi, & l_0 + 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

Звідси, завдяки (3.7)

$$\Delta(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m} \Delta_j (\widehat{h}_j(\alpha) - \widehat{h}_j(\beta) + (\beta - \alpha)) = \frac{1}{2\pi} (\sum_{j=1}^{k_0-1} \Delta_j (\alpha - \theta_j - \pi) +$$

$$+ \sum_{j=k_0}^{m} \Delta_j (\alpha - \theta_j + \pi) - \sum_{j=1}^{l_0} \Delta_j (\beta - \theta_j - \pi) - \sum_{j=l_0+1}^{m} \Delta_j (\beta - \theta_j + \pi) + \Delta(\beta - \alpha)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{k_0-1} \Delta_j (\alpha - \beta) + \sum_{j=k_0}^{l_0} \Delta_j (\alpha - \beta + 2\pi) + \sum_{j=l_0+1}^{m} \Delta_j (\alpha - \beta) - \Delta(\alpha - \beta) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\Delta(\alpha - \beta) + 2\pi \sum_{j=k_0}^{l_0} \Delta_j - \Delta(\alpha - \beta) \right) = \sum_{j=k_0}^{l_0} \Delta_j.$$

3.2 Коефіцієнти Фур'є логарифмічної похідної та існування кутової υ-щільності нулів функцій з класу $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$

В цьому підрозділі буде розглянуто зв'язок між кутовою υ-щільністю нулів цілої функції з класу $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ і коефіцієнтами Фур'є її логарифмічної похідної. Нехай $a_n = |a_n|e^{i\theta_n}$ нулі $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$, $\Omega = \{|a_n| \colon n \in \mathbb{N}\}$, $c_k(r, \Phi)$, $k \in \mathbb{Z}$ коефіцієнти Фур'є функції $\Phi(re^{i\theta})$, як функції, що залежить від θ, тобто $c_k(r, \Phi) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(re^{i\theta})e^{-ik\theta}$, $r > 0$. Приймемо $n_k(r) = \sum\limits_{|a_n| \le r} e^{-ik\theta_n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 3.3. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і виконуються співвідношення* (3.1). *Тоді*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{c_0(r, F) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = 0, \qquad \lim_{r \to +\infty, r \notin \Omega} \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

де $\delta_k = -\dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j e^{-ik\theta_j}$.

Для доведення цієї теореми ми використаємо наступні твердження, які сформулюємо у вигляді лем.

Лема 3.3. *Нехай* $\upsilon \in L$. *Тоді для* $k \in \mathbb{N}$

$$r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{k+1}} dt = \frac{1}{k}\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty,$$

$$r^{-k} \int\limits_0^{r} \frac{\upsilon(t)}{t^{-k+1}} dt = \frac{1}{k}\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty.$$

Доведення. Завдяки [8, с. 63-64] для $k \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{k+1}} dt = r^k \upsilon(r) \int\limits_r^{+\infty} \frac{dt}{t^{k+1}} + o(\upsilon(r)) = r^k \upsilon(r) \frac{1}{kr^k} + o(\upsilon(r)) =$$

$$= \frac{1}{k}\upsilon(r) + o(\upsilon(r)) \quad r \to +\infty,$$

і, аналогічно, з [8, с. 65-66] маємо

$$r^{-k}\int\limits_0^r \frac{\upsilon(t)}{t^{-k+1}}dt = r^{-k}\upsilon(r)\int\limits_0^r \frac{dt}{t^{-k+1}} + o(\upsilon(r)) = r^{-k}\upsilon(r)\frac{r^k}{k} + o(\upsilon(r)) =$$

$$= \frac{1}{k}\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty.$$

Лема 3.4. *Нехай* $\upsilon \in L$, $\varepsilon(t)$ *– локально інтегровна на* $[1, +\infty)$, $\varepsilon(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$. *Тоді для* $k \in \mathbb{N}$

$$r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)\upsilon(t)}{t^{k+1}}dt = o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty,$$

$$r^{-k} \int\limits_0^r \frac{\varepsilon(t)\upsilon(t)}{t^{-k+1}}dt = o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty.$$

Доведення. За правилом Лопіталя

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\int\limits_r^{+\infty} \varepsilon(t)\upsilon(t)/t^{k+1}dt}{r^{-k}\upsilon(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{-\varepsilon(r)\upsilon(r)/r^{k+1}}{-kr^{-k-1}\upsilon(r) + r^{-k}\upsilon'(r)} =$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \frac{-\varepsilon(r)\upsilon(r)}{-k\upsilon(r) + r\upsilon'(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{-\varepsilon(r)}{-k + r\upsilon'(r)/\upsilon(r)} = 0.$$

Аналогічно,

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\int\limits_0^r \varepsilon(t)\upsilon(t)/t^{-k+1}dt}{r^k\upsilon(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{\varepsilon(r)\upsilon(r)/r^{-k+1}}{kr^{k-1}\upsilon(r) + r^k\upsilon'(r)} =$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \frac{\varepsilon(r)}{k + r\upsilon'(r)/\upsilon(r)} = 0.$$

Доведення теореми 3.3. Нехай виконується (3.1). Тоді

$$n_k(r) = \sum_{j=1}^m e^{-ik\theta_j} n(r, \theta_j) = \left(\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-ik\theta_j}\right) \upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) = -k\delta_k\upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)),$$

$$n_0(r) = n(r) = \Delta\upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad r \to +\infty.$$

Далі, для $k > 0$ і $r \notin \Omega$ завдяки співвідношенню (2.24) та лемі 3.4 маємо

$$c_k(r, F) = n_k(r) - kr^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt = -k\delta_k\upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) + k^2\delta_k r^k \cdot$$

$$\cdot \int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t) + o(\widetilde{\upsilon}(t))}{t^{k+1}} dt = -k\delta_k\upsilon(r) + k^2\delta_k r^k \left(\frac{\upsilon(r)}{kr^k} + \int\limits_r^{+\infty} \frac{t\upsilon'(t)}{kt^{k+1}} dt \right) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) =$$

$$= k\delta_k r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t^{k+1}} dt + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \ r \to +\infty.$$

З останнього співвідношення і леми 3.3 отримуємо для $k > 0$

$$c_k(r, F) = \delta_k\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \ r \to +\infty, \ r \notin \Omega.$$

Завдяки співвідношенню (2.26)

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r, F) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = 0.$$

Аналогічно, для $k < 0$

$$c_k(r, F) = n_k(r) + kr^k \int\limits_0^r \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt = -k\delta_k\upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) - k^2\delta_k r^k \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^r \frac{\upsilon(t) + o(\widetilde{\upsilon}(t))}{t^{k+1}} dt = -k\delta_k\upsilon(r) - k^2\delta_k r^k \left(-\frac{\upsilon(r)}{kr^k} + \int\limits_0^r \frac{t\upsilon'(t)}{kt^{k+1}} dt \right) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) =$$

$$= -k\delta_k r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t^{k+1}} dt + o(\widetilde{\upsilon}(r)) = \delta_k\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \ r \to +\infty.$$

Теорему 3.3 доведено.

Теорема 3.4. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і для* m *послідовних цілих чисел* $k = \overline{k_0, k_0 + m - 1}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, *існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r, F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \qquad \lim_{r\to+\infty, r\notin\Omega} \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = \delta_k, \quad k \neq 0. \tag{3.12}$$

Тоді нулі f *мають кутову* υ*-щільність.*

Для доведення теореми 3.4 будемо використовувати такі твердження

Лема 3.5. [51]. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$. *Тоді*

$$c_k(r, \ln f) = -r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$c_k(r, \ln f) = r^k \int\limits_1^r \frac{n_k(t)}{t^{k+1}} dt, \quad k \in \mathbb{Z}_-.$$

Для невід'ємної локально інтегровної на $[1, +\infty)$ функції γ приймемо

$$I_k(r; \gamma) = \begin{cases} -r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\gamma(t)}{t^{k+1}} dt, & k \in \mathbb{N}, \\ r^k \int\limits_1^r \frac{\gamma(t)}{t^{k+1}} dt, & k = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

$$J_k(r; \gamma_1, \ldots, \gamma_m) = \sum_{p=1}^{m} a_{kp} I_k(r; \gamma_p), \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

$$J_0(r; \gamma_1, \ldots, \gamma_m) = \sum_{p=1}^{m} \gamma_p(r),$$

де $a_{kp} \in \mathbb{C}$, $a_{0p} = 1$, $p = \overline{1, m}$.

Лема 3.6. *Нехай* $\mathcal{I} = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\} \subset \mathbb{Z}$, $J_k(r; \gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ *такі як вище, і матриця* $A = (a_{kp})$, $k \in \mathcal{I}$, $1 \le p \le m$, *є невиродженою. Тоді існують* $b_{kp} \in \mathbb{C}$ *такі, що в точках неперервності* γ_p *виконується*

$$\gamma_p(r) = \sum_{k \in \mathcal{I}} b_{kp} \widetilde{J}_k(r; \gamma_1, \ldots, \gamma_m), \quad p = \overline{1, m},$$

де $\widetilde{J}_k(r; \gamma_1, \ldots, \gamma_m) = r J'_k(r; \gamma_1, \ldots, \gamma_m) - k J_k(r; \gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $k \in \mathcal{I}$.

Доведення. Оскільки для $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$I'_k(r; \gamma) = \begin{cases} -kr^{k-1} \int\limits_r^{+\infty} \frac{\gamma(t)}{t^{k+1}} dt + \frac{\gamma(r)}{r}, & k \in \mathbb{N}, \\ kr^{k-1} \int\limits_1^r \frac{\gamma(t)}{t^{k+1}} dt + \frac{\gamma(r)}{r}, & k = -1, -2, \ldots, \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{r}(kI_k(r;\gamma) + \gamma(r)),$$

то

$$rJ_k'(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) = \sum_{p=1}^{m} a_{kp}(kI_k(r;\gamma_p) + \gamma_p(r)) = kJ_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) + \sum_{p=1}^{m} a_{kp}\gamma_p(r).$$

Звідси і означення $J_0(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$

$$\sum_{p=1}^{m} a_{kp}\gamma_p(r) = rJ_k'(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) - kJ_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) =$$

$$= \widetilde{J}_k(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m), \quad k \in \mathcal{I},$$

де $a_{0p} = 1$, $p = \overline{1,m}$, $\widetilde{J}_0(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m) = J_0(r;\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$.

Оскільки $\det A \neq 0$, то, обчисливши b_{kp} за правилом Крамера, отримуємо твердження леми 3.6.

Легко бачити, що правильне таке твердження.

Лема 3.7. *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$. Для того, щоб нулі f мали кутову υ-щільність необхідно і досить, щоб існували границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n(r,\theta_j)}{\upsilon(r)} = \Delta_j, \quad j = \overline{1,m}.$$

Доведення теореми 3.4. Не зменшуючи загальності вважаємо, що умови теореми виконуються для $k_0 = 0$.

За лемою 3.5 у випадку розташування нулів на скінченній системі променів Γ_m маємо

$$c_0(r,F) = \sum_{j=1}^{m} n(r,\theta_j) = J_0(r; n(r,\theta_1),\ldots,n(r,\theta_m)),$$

$$c_k(r,\ln f) = -r^k \int_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt = -r^k \sum_{j=1}^{m} e^{-ik\theta_j} \int_r^{+\infty} \frac{n(t,\theta_j)}{t^{k+1}}dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} e^{-ik\theta_j} I_k(r; n(r,\theta_j)) = J_k(r; n(r,\theta_1),\ldots,n(r,\theta_m)), \ k = \overline{1,m-1}. \quad (3.13)$$

Оскільки

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-i\theta_1} & e^{-i\theta_2} & \dots & e^{-i\theta_m} \\ . & . & . & . \\ e^{-i(m-1)\theta_1} & e^{-i(m-1)\theta_2} & \dots & e^{-i(m-1)\theta_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то за лемою 3.6 ($\gamma_j(r) = n(r, \theta_j),\ \ j = \overline{1, m}$) отримуємо

$$n(r, \theta_j) = \sum_{k=0}^{m-1} b_{kj} \widetilde{J}_k(r; n(r, \theta_1), \dots, n(r, \theta_m)), \quad b_{kj} \in \mathbb{C}, \quad r \notin \Omega. \tag{3.14}$$

Оскільки для коефіцієнтів Фур'є $c_k(r, \ln f)$ функції $\ln f$ правильні рівності (див., наприклад, [15, с. 43])

$$c_k(r, \ln f) = \int\limits_0^r \frac{c_k(t, F)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

то

$$c_k(r, F) = r c_k'(r, \ln f), \quad r \notin \Omega \tag{3.15}$$

і з умов (3.12) отримуємо ($k = \overline{1, m-1}$)

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{c_k(r, \ln f)}{\upsilon(r)} = \lim_{r \to +\infty} \frac{\int\limits_0^r c_k(t, F)/t dt}{\int\limits_0^r \widetilde{\upsilon}(t)/t dt} = \lim_{r \to +\infty, r \notin \Omega} \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = \delta_k. \tag{3.16}$$

Завдяки умовам (3.13), (3.15) маємо $(k = \overline{1, m-1})$

$$\widetilde{J}_k(r; n(r, \theta_1), \dots, n(r, \theta_m)) = r J_k'(r; n(r, \theta_1), \dots, n(r, \theta_m)) -$$

$$- k J_k(r; n(r, \theta_1), \dots, n(r, \theta_m)) = c_k(r, F) - k c_k(r, \ln f).$$

З (3.16) та співвідношення $\widetilde{\upsilon}(r) = o(\upsilon(r)),\ r \to +\infty,$ отримуємо

$$\widetilde{J}_k(r; n(r, \theta_1), \dots, n(r, \theta_m)) = -(1 + o(1)) k \delta_k \upsilon(r) + (1 + o(1)) \delta_k \widetilde{\upsilon}(r) =$$

$$= -k \delta_k \upsilon(r) + o(\upsilon(r)),\ r \to +\infty,\ r \notin \Omega.$$

З означення $\widetilde{J}_0(r; n(r,\theta_1),\ldots,n(r,\theta_m))$ та (3.12) маємо

$$\widetilde{J}_0(r; n(r,\theta_1),\ldots,n(r,\theta_m)) = J_0(r; n(r,\theta_1),\ldots,n(r,\theta_m)) = c_0(r,F) =$$

$$= \Delta\upsilon(r) + o(\upsilon(r)),\ r \to +\infty,\ r \notin \Omega.$$

Звідси і з (3.14) отримуємо, що для $j = \overline{1,m}$ існують границі

$$\lim_{r\to+\infty, r\notin\Omega} \frac{n(r,\theta_j)}{\upsilon(r)} = \Delta_j.$$

З неперервності функцій $n(r,\theta_j)/\upsilon(r)$ на $[0,+\infty)\setminus\Omega$ отримуємо, що для всіх $j = \overline{1,m}$ існують границі

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n(r,\theta_j)}{\upsilon(r)} = \Delta_j.$$

З леми 3.7 випливає, що нулі f мають кутову υ-щільність. Теорему 3.4 доведено.

3.3 Зв'язок між збіжністю в $L^p[0,2\pi]$-метриці логарифмічної похідної та існуванням кутової υ-щільності нулів цілих функцій нульового порядку

В цьому підрозділі для цілих функцій f з класу $H_0(\upsilon,\Gamma_m)$ буде знайдено зв'язок між існуванням кутової υ-щільності нулів f та збіжністю в $L^p[0,2\pi]$-метриці її логарифмічної похідної.

Теорема 3.5. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon,\Gamma_m)$ *і виконуються співвідношення* (3.1). *Тоді*

$$\left\| \frac{F(re^{i\theta}) - n(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - iH_f(\theta) \right\|_p = \left\| \frac{F(re^{i\theta}) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - iH_f(\theta) \right\|_p \to 0,\ r \to +\infty, \tag{3.17}$$

де $H_f(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j \widehat{h}_j(\theta)$, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j$.

Для доведення цієї теореми ми використаємо такі твердження.

Лема 3.8. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і виконується співвідношення* (3.1). *Тоді існує* $r_0 > 0$ *таке, що для* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *виконується*

$$|c_k(r, F)| \leq \frac{8\Delta}{|k|}\widetilde{\upsilon}(r), \quad r \geq r_0,$$

де $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j$.

Доведення. Оскільки $n_k(r) = \sum\limits_{j=1}^{m} e^{-ik\theta_j} n(r, \theta_j)$, то завдяки співвідношенням $(j = \overline{1, m})$

$$n(r, \theta_j) = \Delta_j \upsilon(r) + \varepsilon_j(r)\widetilde{\upsilon}(r), \quad \varepsilon_j(r) \to 0 \text{ при } r \to +\infty,$$

маємо

$$n_k(r) = \widetilde{\Delta}_k \upsilon(r) + \varepsilon(r; k)\widetilde{\upsilon}(r), \quad r \to +\infty,$$

де $\widetilde{\Delta}_k = \sum\limits_{j=1}^{m} \Delta_j e^{-ik\theta_j}$, $\varepsilon(r; k) = \sum\limits_{j=1}^{m} \varepsilon_j(r) e^{-ik\theta_j}$.

З цього співвідношення і з (2.24) отримуємо для $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$|c_k(r, F)| \leq \left| \widetilde{\Delta}_k \upsilon(r) - kr^k \widetilde{\Delta}_k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{k+1}} dt \right| + |\varepsilon(r; k)|\widetilde{\upsilon}(r) +$$

$$+ kr^k |\widetilde{\Delta}_k| \int\limits_r^{+\infty} \frac{|\varepsilon(t; k)|\upsilon(t)}{t^{k+1}} dt. \tag{3.18}$$

Оскільки

$$kr^k \widetilde{\Delta}_k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{k+1}} dt = \widetilde{\Delta}_k kr^k \left(\left. \frac{\upsilon(t)}{-kt^k} \right|_r^{+\infty} + \frac{1}{k} \int\limits_r^{+\infty} \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t^{k+1}} dt \right) =$$

$$= \widetilde{\Delta}_k \upsilon(r) + \widetilde{\Delta}_k r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t^{k+1}} dt,$$

то з (3.18) маємо

$$|c_k(r, F)| \leq \Delta r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t^{k+1}} dt + \varepsilon(r)\widetilde{\upsilon}(r) + \varepsilon^*(r) kr^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t^{k+1}} dt,$$

де $\varepsilon(r) = \sum\limits_{j=1}^{m} |\varepsilon_j(r)| \to 0$, $\varepsilon^*(r) = \sup\{\varepsilon(t) : t \geq r\} \searrow 0$ при $r \to +\infty$.

Враховуючи, що

$$r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t^{k+1}} dt \leq \frac{6\upsilon(r)}{k},$$

з останнього співвідношення отримуємо

$$|c_k(r, F)| \leq \frac{6\Delta}{k}\widetilde{\upsilon}(r) + \varepsilon(r)\widetilde{\upsilon}(r) + 6\varepsilon^*(r)\widetilde{\upsilon}(r), \quad r \geq r_0.$$

Звідси випливає твердження леми 3.8.

Доведення теореми 3.5. Маємо

$$b_0 := c_0(H_f) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m} \Delta_j \int\limits_0^{2\pi} \widehat{h}_j(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m} \Delta_j \int\limits_{\theta_j}^{\theta_j+2\pi} (\theta - \theta_j - \pi) d\theta = 0,$$

$$b_k := c_k(H_f) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m} \Delta_j \int\limits_0^{2\pi} \widehat{h}_j(\theta) e^{-ik\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m} \Delta_j \int\limits_{\theta_j}^{\theta_j+2\pi} (\theta - \theta_j - \pi) e^{-ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m} \Delta_j \left. \frac{\theta - \theta_j - \pi}{-ik} e^{-ik\theta} \right|_{\theta_j}^{\theta_j+2\pi} =$$

$$= \frac{i}{k}\sum_{j=1}^{m} \Delta_j e^{-ik\theta_j} = \frac{i\widetilde{\Delta}_k}{k}, \ k \neq 0. \tag{3.19}$$

Звідси одержуємо, що $|b_k| \leq \dfrac{\Delta}{|k|}$, $k \neq 0$. Оскільки за лемою 3.8 $|c_k(r, F)| \leq \dfrac{8\Delta}{|k|}\widetilde{\upsilon}(r)$, то послідовність $\left(\dfrac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - ib_k\right)_{k\neq 0}$ належить до простору l_q при $q > 1$, $r \geq r_0$. Далі, $c_k(r, F - n(r)) = c_k(r, F)$ для $k \neq 0$ і тому за лемою 2.9 для $p \geq 2$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ маємо

$$\left\| \frac{F(re^{i\theta}) - n(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - iH_f(\theta) \right\|_p \leq \left\{ \sum_{k\neq 0} \left| \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - ib_k \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Оскільки отриманий ряд рівномірно збіжний для всіх $r \geq r_0$, то здійснивши граничний перехід при $r \to +\infty$ в останньому співвідношенні, завдяки лемі 3.8 та (3.19) отримуємо

$$\left\| \frac{F(re^{i\theta}) - n(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - iH_f(\theta) \right\|_p \to 0, \ r \to +\infty,$$

для $p \geq 2$. За нерівністю Гельдера $\| \cdot \|_p \leq \| \cdot \|_2$ для $1 \leq p < 2$ і тому твердження теореми 3.5 правильне і для $1 \leq p < 2$. Отже, теорему 3.5 доведено повністю.

Теорема 3.6. *Нехай* $G \in L^1[0, 2\pi]$, $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ *і*

$$\left\| \frac{F(re^{i\theta}) - n(r)}{\tilde{\upsilon}(r)} - iG(\theta) \right\|_p \to 0, \ r \to +\infty. \tag{3.20}$$

Тоді нулі f *мають кутову* υ*-щільність, причому* $\int\limits_0^{2\pi} G(\theta) d\theta = 0$.

Доведення. Позначимо через g_k коефіцієнти Фур'є функції G, тобто $g_k = c_k(G)$. Для $k \neq 0$ справедлива рівність $c_k(r, F - n(r)) = c_k(r, F)$, а отже,

$$\left| \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - ig_k \right| = \left| \frac{c_k(r, F - n(r))}{\widetilde{\upsilon}(r)} - ig_k \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{F(re^{i\theta}) - n(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - iG(\theta) \right) e^{-ik\theta} d\theta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{F(re^{i\theta}) - n(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - iG(\theta) \right| d\theta \leq$$

$$\leq \left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - iG(\theta) \right\|_p .$$

Завдяки (3.20) з останнього співвідношення отримуємо

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = ig_k.$$

Для $k = 0$ виконується $c_0(r, F - n(r)) = c_0(r, F) - n(r) = 0$. Звідси отримуємо, що $g_0 = 0$, тобто

$$\int_0^{2\pi} G(\theta)d\theta = 0.$$

Отже, завдяки теоремі 3.4 нулі функції f мають кутову υ-щільність.

3.4 Достатні умови існування кутової υ-щільності нулів цілих функцій в термінах регулярного поводження в $L^p[0, 2\pi]$-метриці їх логарифмічної похідної та коефіцієнтів Фур'є

В розділі 2 для функцій f з класу $H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$, нулі яких мають кутову υ-щільність, отримано асимптотику логарифмічної похідної (див. теорема 2.2), доведено існування регулярного зростання коефіцієнтів Фур'є логарифмічної похідної (див. теорема 2.3), показано збіжність F за нормою простору $L^p[0, 2\pi]$, $p \geq 1$ (див. теорема 2.4) зовні виняткових множин. В підрозділах 3.1–3.3 для цілих функцій нульового порядку з нулями на скінченній системі променів, тобто функцій з класу $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$, одержано уточнені співвідношення асимптотики логарифмічної похідної (див. теорема 3.1), регулярного зростання $c_k(r, F)$ (див. теорема 3.3), збіжності логарифмічної похідної за нормою простору $L^p[0, 2\pi]$, $p \geq 1$ (див. теорема 3.5), які виконуються для всіх $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_m$. З цих уточнених співвідношень для характеристик F випливає існування кутової υ-щільності нулів функцій $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ (див. теореми 3.2, 3.4, 3.6).

В цьому підрозділі показано, що уточнені співвідношення для $c_k(r, F)$ та збіжності в $L^p[0, 2\pi]$-метриці F є достатніми умовами для існування кутової υ-щільності нулів f для всього класу $H_0(\upsilon)$.

Теорема 3.7. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, $\Delta > 0$ *та існує функція* $G \in L^1[0, 2\pi]$ *така, що*

$$\lim_{r\to+\infty} \left\| \frac{F(re^{i\theta}) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_p = 0.$$

Тоді існують границі

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r, F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \qquad \lim_{r\to+\infty, r\notin\Omega} \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = c_k, \quad k \neq 0. \tag{3.21}$$

Доведення. Нехай g_k коефіцієнти Фур'є функції G. Тоді, як і при доведенні теореми 3.6, отримуємо

$$\left| \frac{c_k(r, F - \Delta\upsilon(r))}{\widetilde{\upsilon}(r)} - g_k \right| \leq \left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_1 \leq$$

$$\leq \left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_p.$$

Для $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ маємо $c_k(r, F(z) - \Delta\upsilon(r)) = c_k(r, F)$ і тому з умов теореми 3.7 та останньої нерівності отримуємо

$$\left| \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - g_k \right| \leq \left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_p \to 0, \ r \to +\infty,$$

що рівносильне існуванню границь

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = g_k.$$

Для $k = 0$ маємо $c_0(r, F(z) - \Delta\upsilon(r)) = c_0(r, F) - \Delta\upsilon(r)$ і тому отримуємо

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r, F) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = g_0.$$

Враховуючи, що $\widetilde{\upsilon}(r) = o(\upsilon(r))$, $r \to +\infty$, з останнього співвідношення отримуємо

$$c_0(r, F) = \Delta\upsilon(r) + g_0\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) = \Delta\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty,$$

що доводить теорему 3.7.

Теорема 3.8. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ *та існують границі* (3.21). *Тоді нулі* f *мають кутову* υ*-щільність.*

Для доведення цієї теореми використаємо таку лему.

Лема 3.9. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$. *Для того, щоб нулі* f *мали кутову* υ*-щільність необхідно і досить, щоб існували границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n_k(r)}{\upsilon(r)} = \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Твердження цієї леми неважко отримати з теореми Каратеодорі-Леві (див., наприклад, [6, с. 98]).

Доведення теореми 3.8. Нехай $c_k(r, \ln f)$ коефіцієнти Фур'є функції $\ln f$. Оскільки $\widetilde{\upsilon}(r) = r\upsilon'(r)$, (див., наприклад, [15, с. 43])

$$c_k(r, \ln f) = \int\limits_0^r \frac{c_k(t, F)}{t} dt,$$

то завдяки (3.21)

$$c_k(r, \ln f) = c_k \int\limits_0^r \upsilon'(t)dt + \int\limits_0^r \varepsilon(t)\upsilon'(t)dt = c_k\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty,$$

де $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to +\infty$.

Далі, враховуючи співвідношення $\dfrac{c_k(r, F)}{\upsilon(r)} \to 0$ при $r \to +\infty$, $k \neq 0$ і співвідношення $c_k(r, F) = n_k(r) + kc_k(r, \ln f)$ (див., наприклад, [15]) отримуємо

$$\frac{n_k(r)}{\upsilon(r)} = \frac{c_k(r, F)}{\upsilon(r)} - k\frac{c_k(r, \ln f)}{\upsilon(r)} \to -kc_k, \quad r \to +\infty, \quad k \neq 0.$$

Оскільки $c_0(r, F) = n_0(r)$, то $\dfrac{n_0(r)}{\upsilon(r)} \to \Delta$ при $r \to +\infty$. За лемою 3.9 нулі $f \in H_0(\upsilon)$ мають кутову υ-щільність.

З теорем 3.7 і 3.8 випливає наступне твердження.

Наслідок 3.2. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, $\Delta > 0$ *та існує функція* $G \in L^1[0, 2\pi]$ *така, що*

$$\lim_{r \to +\infty} \left\| \frac{F(re^{i\theta}) - \Delta\upsilon(r)}{\tilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_p = 0.$$

Тоді нулі f *мають кутову* υ*-щільність.*

3.5 Висновки до розділу 3

В розділі 3 розглянуто клас цілих функцій з нулями на скінченній системі променів $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$, який є підкласом класу $H_0(\upsilon)$. Для $f \in H_0(\upsilon, \Gamma_m)$ за умови існування "покращеної" кутової υ-щільності нулів функції f, а саме

$$n(r, \theta_j) = \Delta_j \upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)), \quad r \to +\infty \quad j = \overline{1, m},$$

отримані співвідношення для асимптотики F, коефіцієнтів $c_k(r, F)$, збіжності F в $L^p[0, 2\pi]$-метриці, які уточнюють аналогічні твердження для функцій f класу $H_0(\upsilon)$.

Показано, що ці отримані співвідношення, які задають регулярність зростання F, $c_k(r, F)$ і збіжність F в $L^p[0, 2\pi]$-метриці є достатніми умовами для існування кутової υ-щільності нулів функції f з $H_0(\upsilon, \Gamma_m)$.

В підрозділі 3.4 вказані достатні умови існування кутової υ-щільності нулів для функцій f з класу $H_0(\upsilon)$ в термінах регулярного поводження коефіцієнтів Фур'є їх логарифмічних похідних та збіжності F за p-нормою в просторі $L^p[0, 2\pi]$.

Висновки

Дисертаційна робота присвячена розв'язанню ряду актуальних задач теорії цілих функцій, а саме: дослідженню взаємозв'язків між розподілом нулів цілої функції нульового порядку і регулярним зростанням її логарифмічної похідної F та її основних характеристик, серед яких коефіцієнти Фур'є F і збіжність F в $L^p[0,2\pi]$-метриці.

У роботі знайдено необхідні умови існування кутової υ-щільності нулів цілої функції нульового порядку в термінах поводження її логарифмічної похідної та показано, що ці умови не є достатніми.

В дисертації досліджено взаємозв'язки між регулярними поводженнями логарифмічної похідної F, її коефіцієнтів Фур'є та p-норми F в просторі $L^p[0,2\pi]$, $1 \leq p < +\infty$, цілої функції повільного зростання. Зокрема, показано, що з асимптотики логарифмічної похідної F зовні деякої виняткової множини випливає регулярне поводження її коефіцієнтів Фур'є. Встановлено, що регулярне поводження коефіцієнтів Фур'є $c_k(r,F)$, $k \neq 0$, є достатньою умовою збіжності логарифмічної похідної F функції $f \in H_0(\upsilon)$ за нормою простору $L^p[0,2\pi]$, $p \geq 1$.

У роботі виділено підклас цілих функцій f нульового порядку, в якому отримано критерії існування кутової υ-щільності нулів в термінах асимптотичного поводження їх логарифмічної похідної F; регулярного зростання коефіцієнтів Фур'є F; збіжності F за p-нормою в просторі $L^p[0,2\pi]$. Для цілої функції цього підкласу встановлено уточнені асимптотичні співвідно-

шення для логарифмічної похідної та її коефіцієнтів Фур'є. Показано, що деякі з цих співвідношень також є достатніми умовами існування кутової v-щільності нулів для всього класу цілих функцій нульового порядку.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані для подальшого розвитку теорії цілих функцій в різних напрямках.

Основні результати дисертації є новими і носять завершений характер. При їх отриманні використовувались методи комплексного та математичного аналізу, сучасні методи теорії цілих функцій.

Достовірність результатів дисертації підтверджується повними та строгими доведеннями, а також тим, що вони опубліковані у фахових журналах і були оприлюднені на багатьох міжнародних наукових конференціях і спеціалізованих наукових семінарах.

Список використаних джерел

[1] *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды експонент / *А. Ф. Леонтьев.* — М. : Наука, 1983. — 176 с.

[2] *Гольдберг А. А.* Распределение значений мероморфных функций / *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* — М. : Наука, 1970. — 592 с.

[3] *Shah S. M.* On proximate orders of integral functions / *S. M. Shah* // Bull. Amer. Math. Soc. — 1946. — V. 52. — P. 326–328.

[4] *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций / *Б. Я. Левин.* — М. : Гос.-тех. изд.-во, 1956. — 632 с.

[5] *Jensen J. L. W. V.* Sur un nouvel et important theoreme de la theorie des fonctions / *J. L. W. V. Jensen* // Acta Math. — 1899. — V. 22. — P. 359–364.

[6] *Кондратюк А. А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / *А. А. Кондратюк.* — Львов: Выща школа, 1988. — 196 с.

[7] *Townsend D.* Comparisons between $T(r, f)$ and total variations of $\arg f(re^{i\theta})$ and $\log|f(re^{i\theta})|$ / *D. Townsend* // J. Math. Anal. Appl. — 1987. — V. 128. — P. 347–361.

[8] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции / *Е. Сенета.* — М. : Наука, 1985. — 142 с.

[9] *Rubel L. A.* Entire and meromorphic functions / *L. A. Rubel.* — New York: Springer, 1996. — 200 p.

[10] *Rubel L. A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions / *L. A. Rubel, B. A. Taylor* // Bull. Soc. Math. France. — 1989. — V. 96. — P. 53–96.

[11] *Miles J. B.* Quotient representations of meromorphic function / *J. B. Miles* // J. Anal. Math. — 1972. — V. 25. — P. 371–388.

[12] *Miles J. B.* On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value / *J. B. Miles, D. F. Shea* // Duke Math. J. — 1976. — V. 43, № 1. — P. 171–186.

[13] *Ахієзер Н. І.* Новий вивід необхідних умов приналежності цілої функції цілого порядку до певного типу / *Н. І. Ахієзер* // Запис. фіз.-мат. відділення АН УРСР. — 1927. — Т. 2, № 3. — С. 29–33.

[14] *Калинець Р. З.* Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p[0, 2\pi]$-метриці / *Р. З. Калинець, А. А. Кондратюк* // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, № 7. — С. 889–896.

[15] *Васильків Я. В.* Асимптотична поведінка логарифмічної похідної та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці. Ч. 1 / *Я. В. Васильків* // Матем. студії. — 1999. — Т. 12, № 1. — С. 37–58.

[16] *Васильків Я. В.* Асимптотична поведінка логарифмічної похідної та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці. Ч. 2 / *Я. В. Васильків* // Матем. студії. — 1999. — Т. 12, № 2. — С. 135–144.

[17] *Васильків Я. В.* Дослідження асимптотичних властивостей мероморфних та субгармонійних функцій методами гармонійного аналізу : автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук. / *Я. В. Васильків.* — Львів, 2008.

[18] *Заболоцький М. В.* Теореми типу Валірона та Валірона-Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку / *М. В. Заболоцький* // Укр. мат. журн. — 1996. — Т. 48, № 3. — С. 315–325.

[19] *Заболоцкий Н. В.* Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка / *Н. В. Заболоцкий* // Матем. заметки. — 1998. — Т. 63, № 2. — С. 196–208.

[20] *Valiron G.* Sur les valeurs déficientes des fonctions algébroides méromorphes d'ordre nul / *G. Valiron* // J. Anal. Math. — 1951. — V. 1. — P. 28–42.

[21] *Hayman W. K.* Slowly growing integral and subharmonic function / *W. K. Hayman* // Comment. Math. Helv. — 1960. — V. 34, № 1. — P. 75–84.

[22] *Anderson J. M.* Asymptotic values of meromorphic functions of smooth growth / *J. M. Anderson* // Glasgow Math. J. — 1979. — V. 20, № 2. — P. 155–162.

[23] *Hayman W. K.* On Iversen's theorem for meromorphic functions with few poles / *W. K. Hayman* // Acta Math. — 1978. — V. 141. — P. 115–145.

[24] *Заболоцкий Н. В.* О медленном возростании основных характеристик целых функций / *Н. В. Заболоцкий, М. Н. Шеремета* // Матем. заметки. — 1999. — Т. 65, № 2. — С. 206–214.

[25] *Valiron G.* Sur les fonctions entieres d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière / *G. Valiron* // Ann.

fac. sci. univ. Toulouse. — 1914. — V. 5. — P. 117–257.

[26] *Titchmarsh E. G.* On integral functions with real negative zeros / *E. G. Titchmarsh* // Proc. London Math. Soc. — 1927. — V. 26, № 2. — P. 185–200.

[27] *Логвиненко В. Н.* О целых функциях с нулями на полупрямой. I / *В. Н. Логвиненко* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). — 1972. — Вып. 16. — С. 154–158.

[28] *Логвиненко В. Н.* О целых функциях с нулями на полупрямой. II / *В. Н. Логвиненко* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). — 1973. — Вып. 17. — С. 84–99.

[29] *Азарин В. С.* О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции / *В. С. Азарин* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. — 1977. — Вып. 27. — С. 9–22.

[30] *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведение субгармонических функции конечного порядка / *В. С. Азарин* // Матем. сб. — 1979. — Т. 108, № 2. — С. 147–169.

[31] *Гольдберг А. А.* Асимптотика логарифмической производной целой функций вполне регулярного роста / *А. А. Гольдберг, Н. Е. Коренков* // Сиб. мат. журн. — 1980. — Т. 21, № 3. — С. 63–79.

[32] *Гольдберг А. А.* Асимптотичиское поведение мероморфных функций вполне регулярного роста и их логарифмических производных / *А. А. Гольдберг, Н. Н. Строчик* // Сиб. мат. журн. — 1985. — Т. 26, № 6. — С. 29–38.

[33] *Гришин А. Ф.* О регулярности роста субгармонических функций. I / *А. Ф. Гришин* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). — 1968. — Вып. 6. — С. 3–29.

[34] *Гришин А. Ф.* О регулярности роста субгармонических функций. II / *А. Ф. Гришин* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). — 1968. — Вып. 7. — С. 59–84.

[35] *Гришин А. Ф.* Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций / *А. Ф. Гришин* // Матем. физика, анализ, геометрия. — 1994. — Т. 1, № 2. — С. 193–215.

[36] *Гришин А. Ф.* Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. Часть 2 / *А. Ф. Гришин* // Матем. физика, анализ, геометрия. — 1995. — Т. 2, № 2. — С. 177–193.

[37] *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом / *Н. В. Говоров.* — М. : Наука, 1986. – 240 с.

[38] *Хейфиц А. И.* Индикаторы аналитических в открытой полуплоскости функций порядка меньше единицы, имеющих во внутренних углах вполне регулярный рост / *А. И. Хейфиц* // Изв. АН СССР. Серия матем. — 1975. — Т. 39, № 4. — С. 899–910.

[39] *Хейфиц А. И.* О дефектах целых функций вполне регулярного роста по кривым правильного вращения / *С. К. Балашов, Г. Опитц, А. И. Хейфиц* // Матем. заметки. — 1982. — Т. 31, Вип. 1. — С. 13–23.

[40] *Гирнык М. А.* Об асимптотических свойствах некоторых канонических произведений / *М. А. Гирнык* // Сиб. мат. журн. — 1974. — Т. 15, № 5. — С. 1036–1048.

[41] *Гирнык М. А.* Об асимптотических свойствах некоторых канонических произведений. II / *М. А. Гирнык* // Сиб. мат. журн. — 1976. — Т. 17, № 5. — С. 967–985.

[42] *Галоян Р. С.* Об асимптотических свойствах функции $\Pi(z; z_k)$ / *Р. С. Галоян* // Доклад Академии наук Армянский ССР. — 1974. — Т. 59, № 2. — С. 65–71.

[43] *Лапенко Ю. П.* О целых и мероморфных функциях вполне регулярного роста и их дефектах : автореф. дис. ... канд. физ. -мат. наук. / *Ю. П. Лапенко.* — Ростов н./Д, 1981.

[44] *Василькив Я. В.* Исследование асимптотических свойств целых и субгармонических функций методом рядов Фурье : автореф. дис. ... канд. физ. - мат. наук. / *Я. В. Василькив.* — Донецк, 1986.

[45] *Малютин К. Г.* Дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста в полуплоскости / *К. Г. Малютин, Назим Садык* // Доклады РАН. — 2001. — Т. 380, № 3. — С. 1-3.

[46] *Гольдберг А. А.* О производных и первообразных целых функций вполне регулярного роста / *А. А. Гольдберг, И. В. Островский* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. — 1973. — Вып. 18. — С. 70–81.

[47] *Гольдберг А. А.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка / *А. А. Гольдберг, Н. В. Заболоцкий* // Матем. заметки. — 1983. — Т. 34, № 2. — С. 227–236.

[48] *Zabolotskii M. V.* An example of entire function of strongly regular growth / *M. V. Zabolotskii* // Mat. stud. — 2000. — V. 13, № 2. — P. 145–148.

[49] *Заболоцкий Н. В.* Существование угловой плотности корней целых функций нулевого порядка / *Н. В. Заболоцкий* // Матем. заметки. — 2003. — Т. 13, № 5. — С. 698–703.

[50] *Боднар О. В.* Регулярне зростання коефіцієнтів Фур'є логарифма цілої функції нульового порядку / *О. В. Боднар, М. В. Заболоцький* // Матем. вісник НТШ. — 2009. — Т. 6. — С. 100–109.

[51] *Боднар О. В.* Критерії регулярності логарифма модуля та аргумента цілої функції / *О. В. Боднар, М. В. Заболоцький* // Укр. мат. журн. — 2010. — Т. 62, № 7. — С. 885–893.

[52] *Боднар О.* Розподіл нулів за аргументами та коефіцієнти Фур'є логарифма цілої функції / *О. Боднар, М. Заболоцький* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2011. — Вип. 75. — С. 17–27.

[53] *Zabolotskii M. V.* Existence of an angular density of roots of entire functions of order zero / *M. V. Zabolotskii* // Mat. notes. — 2003. — V. 73, № 5. — P. 656–661.

[54] *Гольдберг А. А.* О логарифмической производной мероморфной функции / *А. А. Гольдберг, В. А. Гринштейн* // Матем. заметки. — 1976. — Т. 19, № 4. — С. 525–530.

[55] *Miles J.* A sharp form of the lemma on the logarithmic derivative / *J. Miles* // J. London Math. Soc. (2). — 1992. — V. 45. — P. 243-254.

[56] *Hayman W. K.* On the growth of a meromorphic function and its derivatives / *W. K. Hayman, J. Miles* // Complex Variables. — 1989. — V. 12. — P. 245–260.

[57] *Куземко Л. І.* Про логарифмічну похідну мероморфних функцій / *А. З. Мохонько, Л. І. Куземко* // Вісник НУ "Львівська політехніка"Фіз.-матем. науки. — 2006. — № 566. — С. 12–19.

[58] *Скасків О. Б.* Про логарифмічну похідну і центральний показник ряду Діріхле / *О. Б. Скасків* // Матем. вісник НТШ. — 2005. — Т. 2. — С. 213–230.

[59] *Гольдберг А. А.* Оцінка модуля логарифмічної похідної функції Міттаг-Леффлера та її застосування / *А. А. Гольдберг* // Матем. студії. — 1995. — Вип. 5. — С. 21–30.

[60] *Шеремета М. Н.* О логарифмической производной и нулях целой функции ограниченного l-распределения значений / *М. Н. Шеремета, А. Д. Кузык* // Сиб. мат. журн. — 1992. — Т. 33, № 2. — С. 142–150.

[61] *Rudin W.* The lemma of the logarithmic derivative for subharmonic functions / *W. Rudin* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1996. — V. 120. — P. 347–354.

[62] *Chyzhykov I. E.* Logarithmic derivative estimates for subharmonic functions / *I. E. Chyzhykov, L. I. Kolyasa* // Mat. Stud. — 2008. — V. 30, № 1. — P. 22–30.

[63] *Macintyre A. J.* Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial / *A. J. Macintyre, W. H. J. Fuchs* // J. London Math. Soc. — 1940. — V. 15. — P. 162–168.

[64] *Anderson J. M.* Cauchy transforms of point masses: the logarithmic derivative of polynomials / *J. M. Anderson, V. Ya. Eiderman* // Annals of Math. — 2006. — V.163, № 3. — P. 1057–1076.

[65] *Eiderman V. Ya.* Cartan-type estimates for the Cauchy potential / *V. Ya. Eiderman* // Doklady Mathematics. — 2006. — V.73, № 2. — P. 273-276.

[66] *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальних уравнений / *Ш. И. Стрелиц.* — Вильнюс: Минтис, 1972. — 468 с.

[67] *Laine I.* Nevanlinna theory and complex differential equations / *I. Laine.* — W. Gruyter, 1993.

[68] *Gundersen G.* Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates / *G. Gundersen* // J. London Math. Soc. (2). — 1988. — V. 37. — P. 88–104.

[69] *Chyzhykov I. E.* Linear differential equations and logarithmic derivative estimates / *I. E. Chyzhykov, G. G. Gundersen, J. Heittokangas* // Proc. London Math. Soc. (3). — 2003. — V. 86. — P. 735–754.

[70] *Chyzhykov I. E.* Sharp logarithmic derivative estimates for meromorphic functions / *I. E. Chyzhykov* // Mat.Studii. — 2007. — V. 27, № 2. — P. 120–138.

[71] *Заболоцький М. В.* Асимптотика логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку / *М. В. Заболоцький* // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, № 1. — С. 32–40.

[72] *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции / *Дж. Гарнетт.* — М. : Мир, 1984. — 470 с.

[73] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2 / *А. Зигмунд.* — М. : Мир, 1965. — 537 с.

[74] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2 / *Г. М. Фихтенгольц.* — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 810 с.

[75] *Заболоцький М. В.* Логарифмічна похідна і кутова щільність нулів цілої функції нульового порядку / *М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова* // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 4. — С. 473–481.

[76] *Заболоцький М. В.* Асимптотичне поводження логарифмічної похідної цілих функцій нульового порядку / М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова // Карпатські матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 237–241.

[77] *Мостова М.* Зв'язок між асимптотикою логарифмічної похідної і кутовою щільністю нулів цілих функцій повільного зростання / *М. Р. Мостова* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. — 2015. — Вип.80. — С. 112–116.

[78] *Mostova M. R.* Convergence in $L^p[0, 2\pi]$-metric of logarithmic derivative and angular υ-density for zeros of entire function of slowly growth / *M. R. Mostova, M. V. Zabolotskyj* // Carpathian Math. Publ. — 2015. — V. 7, № 2. — P. 209–214.

[79] *Заболоцький М. В.* Достатні умови існування кутової υ-щільності нулів цілої функції нульового порядку / *М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова* // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 4. — С. 506–516.

[80] *Заболоцький М. В.* Регулярне зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці логарифмічної похідної цілої функції та її коефіцієнтів Фур'є / *М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова* // Міжнародна конференція "Комплексний аналіз і суміжні питання " , Львів, 23-28 вересня, 2013 : тези доповідей. — Львів, 2013. — С. 103.

[81] *Mostova M. R.* Logarithmic derivative and angular density of zeros of entire functions of zero order / *M. R. Mostova, M. V. Zabolotskyi* // XVII-th International Conference "Analytic functions and Related Topics" , June 29 - July 2 2014, Chelm, Poland : abstracts of reports. — Chelm, 2014. — P. 37.

[82] *Mostova M.* Asymptotic behavior of logarithmic derivative and angular density of zeros for entire function / *M. Mostova, M. Zabolotskyi* // 10-th International V. Skorobohatko Mathematical Conference, Drohobych, Ukraine, August 25-28 2015 : abstracts of reports. — Lviv, 2015. — P. 109.

[83] *Mostova M.* The logarithmic derivative of entire functions that close to polynomials / *M. Mostova, M. Zabolotskyi* // International Conference "Complex analysis and related topics" , Lviv, May 30 - June 4, 2016: abstracts of reports. — Lviv, 2016. — P. 57.

[84] *Mostova M. R.* Logarithmic derivative of entire functions with zeros lying on a finite system of rays / *M. Mostova, M. Zabolotskyi* // XVIII-th International Conference on Analytic functions and Related Topics, June 26-29, 2016, Chelm, Poland: abstracts of reports. — Chelm, 2016. — P. 43.

[85] *Мостова М. Р.* Зв'язок між кутовою щільністю нулів цілої функції та регулярним зростанням її логарифмічної похідної / *М. Р. Мостова* // II всеукраїнська наукова конференція "Застосування математичних методів в науці і техніці" , Луцьк, 22-23 листопада 2013 року : тези доповідей. — Луцьк, 2013. — С. 77–78.

[86] *Заболоцький М. В.* Апроксимаційна теорема для логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку / *М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми

теорії ймовірностей та математичного аналізу" , Ворохта, 25 лютого - 1 березня 2015 : тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2015. — С. 22–23.

[87] *Заболоцький М. В.* Асимптотичне поводження коефіцієнтів Фур'є логарифмічної похідної і кутова щільність нулів цілої функції / *М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова* // Наукова конференція присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге, Чернівці, 1-4 липня, 2015 : тези доповідей. — Чернівці, 2015. — С. 39.

[88] *Заболоцький М. В.* Достатні умови існування кутової v-щільності нулів цілої функції нульового порядку / *М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова* // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , Ворохта, 24-27 лютого 2016 року : тези доповідей. — Івано-Франківськ, 2016. — С. 77–78.