НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

На правах рукопису

Тимків Іван Романович

УДК 517.95+511.2

Багатоточкові задачі для лінійних параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Пташник Богдан Йосипович,
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Львів — 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$\mathbb{R}_+$ — множина невід'ємних дійсних чисел;

$\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$\mathbb{R}^p$ ($\mathbb{C}^p$) — p-вимірний дійсний (комплексний) простір;

$\mathbb{Z}^p\,(\mathbb{Z}^p_+)$ — множина точок з $\mathbb{R}^p$, які мають цілі (невід'ємні цілі) координати;

$\{y \in Y : P(y)\}$ — підмножина елементів з Y, що мають властивість $P(y)$;

$x = (x_1, \ldots, x_p)$ — довільна точка з простору $\mathbb{R}^p$;

$(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_p)$, де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^p$; $dx = dx_1 \cdots dx_p$;

$k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$; $\quad |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$; $(k, x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$;

Ω^p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $p \in \mathbb{N}$;

$G \subset \mathbb{R}^p$ — обмежена однозв'язна область, ∂G — межа області G;

$\overline{G}$ — замикання області G; $\Sigma := [0, T] \times \partial G$;

$\Pi^p = \{x \in \mathbb{R}^p_+ : x_r \in [0, \pi],\ r \in \{1, \ldots, p\}\}$;

$U^p(\rho) = \{(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p : \max\limits_{j \in \{1,\ldots,p\}} |z_j| \leqslant \rho\},\ \rho > 0$;

$B^p_T = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in \mathbb{R}^p\}$; $Q^p_T = (0, T) \times G$; $D^p_T = (0, T) \times \Pi^p$;

$\operatorname{mes}_{\mathbf{P}} M$ — міра Лебега в просторі $\mathbf{P}$ множини $M \subset \mathbf{P}$;

C^m_n — кількість комбінацій з n елементів по m;

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} 1, & z > 0; \\ 0, & z = 0; \qquad z \in \mathbb{R}; \\ -1, & z < 0; \end{cases}$$

δ_{jr} — символ Кронекера: $\delta_{jr} = \begin{cases} 1, & j = r; \\ 0, & j \neq r; \end{cases}$

$C(mn;m)$ — множина всіх наборів $\omega = (i_1, \dots, i_m)$, складених з m цілих чисел $i_1,\dots,i_m$ таких, що $1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant mn$; на множині $C(mn;m)$ введемо бінарне відношення $\prec$ за правилом $(i_1,\dots,i_m) \prec (j_1,\dots,j_m)$, якщо перша відмінна від нуля серед різниць $j_1 - i_1, \dots, j_m - i_m$ є додатною;

C_j, $j = 1, 2, \dots,$ — додатні сталі, які не залежать від k;

$\mathbf{X} = \{X_k(x) : k \in K^p\}$ — повна ортонормована система функцій від p змінних $x_1, \dots, x_p$, де K^p співпадає з $\mathbb{Z}^p$ або з $\mathbb{N}^p$;

$\eta_k = (\eta_{k_1}, \dots, \eta_{k_p})$ — вектор із дійсними компонентами, $|\eta_k| = |\eta_{k_1}| + \dots + |\eta_{k_p}|$, $k \in K^p$; $w(\alpha, \beta) := w(\alpha, \beta, k) = |\eta_k|^\alpha \exp(\beta|\eta_k|)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

$\mathcal{T}^n_{\mathbf{X}} = \left\{ \varphi(x) = \sum\limits_{k \in K^p, |k| \leqslant n} \varphi_k X_k(x) : \varphi_k \in \mathbb{C}, |k| \leqslant n \right\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$;

$\mathcal{T}_{\mathbf{X}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}^n_{\mathbf{X}}$ — простір функцій збіжність у якому визначається таким чином [25]: послідовність

$$\left\{ \varphi^m(x) = \sum_k \varphi^m_k X_k(x) : \ m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathcal{T}_{\mathbf{X}}$$

збігається до $\varphi(x) = \sum\limits_k \varphi_k X_k(x) \in \mathcal{T}_{\mathbf{X}}$, якщо:

1) існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $\varphi^m(x) \in \mathcal{T}^N_{\mathbf{X}}$ для всіх $m \in \mathbb{N}$,

2) для кожного $k \in K^p$ $\exists \lim\limits_{m \to \infty} \varphi^m_k = \varphi_k$;

$\mathcal{T}'_{\mathbf{X}}$ — простір функцій $f(x) = \sum_{k \in K^p} f_k X_k(x)$, який співпадає з простором усіх антилінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{T}_{\mathbf{X}}$;

$C^n([0,T]; \mathcal{T}_{\mathbf{X}})$ $(C^n([0,T]; \mathcal{T}'_{\mathbf{X}}))$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $T > 0$, — простір таких функцій $u(t,x) = \sum\limits_{k \in K^p} u_k(t) X_k(x)$, $u_k \in C^n([0,T])$, $k \in K^p$, що при кожному фіксованому $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u / \partial t^j := \sum\limits_{k \in K^p} u^{(j)}_k(t) X_k(x)$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, належать простору $\mathcal{T}_{\mathbf{X}}$ $(\mathcal{T}'_{\mathbf{X}})$;

$E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, — простір, одержаний поповненням простору $\mathcal{T}_{\mathbf{X}}$ за нормою

$$\left\|\varphi; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right\| = \sqrt{\sum_{k\in K^p} |\varphi_k|^2 w^2(\alpha,\beta)}, \quad \varphi_k \in \mathbb{C};$$

$C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right)$,$n \in \mathbb{Z}_+$, — простір функцій $u(t,x) = \sum\limits_{k\in K^p} u_k(t)X_k(x)$, $u_k(t) \in C^n[0,T]$, таких, що для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u/\partial t^j = \sum\limits_{k\in K^p} u_k^{(j)}(t)X_k(x)$, $j \in \{0,1,\dots,n\}$, належать до простору $E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}$ і є неперервними за t в нормі цього простору

$$\left\|u; C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right)\right\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\|\frac{\partial^j u(t,\cdot)}{\partial t^j}; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right\|;$$

$\overline{E}^{\mathbf{X},m}_{w(\alpha,\beta)}$, $\alpha,\beta \in\mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, — простір вектор-функцій $\vec{\varphi}(x) =\mathrm{col}(\varphi^1(x),\dots, \varphi^m(x))$ таких, що $\varphi^q \in E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}$, $q \in \{1,\dots,m\}$, із нормою

$$\left\|\vec{\varphi}; \overline{E}^{\mathbf{X},m}_{w(\alpha,\beta)}\right\| = \max_{1\leqslant q\leqslant m} \left\|\varphi^q; \overline{E}^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right\|;$$

$C^n\left([0,T]; \overline{E}^{\mathbf{X},m}_{w(\alpha,\beta)}\right)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x),\dots,u^m(t,x))$ таких, що $u^q \in C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right)$, $q \in \{1,\dots,m\}$, із нормою

$$\left\|\vec{u}; C^n\left([0,T]; \overline{E}^{\mathbf{X},m}_{w(\alpha,\beta)}\right)\right\| = \max_{1\leqslant q\leqslant m} \left\|u^q; C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right)\right\|;$$

$C^{(q,m)}(\overline{Q^p_T})$, $q < m$, — банахів простір функцій $u(t,x)$, $(t,x) \in \overline{Q^p_T}$, які в області $\overline{Q^p_T}$ є q раз неперервно диференційовними за t та m раз неперервно диференційовними за сукупністю змінних t та x,

$$\left\|u; C^{(q,m)}(\overline{Q^p_T})\right\| = \sum_{0\leqslant s_0\leqslant q}\ \sum_{0\leqslant s_0+|s|\leqslant m}\ \max_{(t,x)\in\overline{Q^p_T}} \left|\frac{\partial^{s_0+|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}\right|;$$

$C^{n,\varrho}(\overline{G})$ — клас визначених в $\overline{G}$ функцій, похідні n-го порядку яких задовольняють в $\overline{G}$ умову Ґельдера з показником ϱ, $0 < \varrho < 1$; $A^{n,\varrho}$ — клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать до класу $C^{n,\varrho}(\overline{G})$.

ВСТУП

Актуальність теми. Задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною для еволюційних рівнянь активно досліджуються з другої половини XX-го століття. Інтерес до цих задач зумовлений потребами загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними та їхніми застосуваннями до потреб практики. У роботах А. Т. Асанової, Ю. М. Березанського, В. М. Борок, П. М. Вабіщевича, Ю. М. Валіцького, М. Л. Горбачука, В. В. Городецького, О. О. Дезіна, Я. М. Дріня, П. І. Каленюка, Е. Кенне, Т. І. Кігурадзе, І. Я. Кміть, В. П. Лавренчука, О. А. Макарова, В. А. Маловічка, М. І. Матійчука, А. Х. Мамяна, Ю. О. Митропольського, З. М. Нитребича, І. Д. Пукальського, В. К. Романка, О. Л. Скубачевського, Л. В. Фардиголи, Дж. Шабровскі (J. Chabrovski), М. Й. Юрчука та інших авторів було розроблено методи дослідження двоточкових та багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними з багатьох класів. Цими авторами розглянуто випадки коректно поставлених задач. Проте багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними є, назагал, некоректними за Адамаром, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

У роботах Б. Й. Пташника та його учнів В. С. Ільківа, П. Б. Василишина, І. С. Клюс, Л. І. Комарницької, Б. О. Салиги, Л. П. Силюги, М. М. Симотюка, П. І. Штабалюка використано метричний підхід для дослідження умовно коректних задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для лінійних гіперболічних та безтипних рівнянь, а також для деяких класів параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Доведено метричні твердження про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків розглядуваних ними задач, з яких випливає розв'язність задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задачі.

В той же час задачі з локальними багатоточковими умовами для параболічних рівнянь і систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами є слабо дослідженими. Встановлення умов коректної розв'язності таких задач є предметом досліджень даної дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертації отримані в рамках виконання держбюджетної теми „Дослідження коректності, побудова та вивчення властивостей розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач для некласичних еволюційних рівнянь" (номер держреєстрації № 0110U004817) відділу математичної фізики Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України та проекту № 41.1/004 „Розподіли нулів поліномів і гладких функцій та їх застосування при дослідженні умовно коректних крайових задач математичної фізики" (номер держреєстрації № 0111U006625) Державного фонду фундаментальних досліджень України.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження коректності задач із локальними багатоточковими умовами за часовою змінною та певними умовами (періодичності, умовами типу умов Діріхле, та ін.) за просторовими змінними для лінійних параболічних рівнянь та їх систем зі змінними коефіцієнтами в обмежених циліндричних областях. Задачами дослідження є:

1) встановити умови існування, єдиності та неперервної залежності від вихідних даних розв'язків двоточкових задач для параболічних за Петровським рівнянь та систем рівнянь другого порядку за часовою змінною зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами;

2) знайти умови коректності багатоточкової задачі з простими вузлами інтерполяції для параболічних за Петровським рівнянь вищих порядків за часовою змінною та $2\vec{b}$-параболічних рівнянь з оператором Бесселя за однією з просторових змінних;

3) встановити умови коректної розв'язності багатоточкової задачі з кратними вузлами інтерполяції для параболічних рівнянь із факторизованим оператором з коефіцієнтами, залежними як від часової, так і від просторових змінних;

4) знайти умови коректності задач з багатоточковими умовами, які містять дію диференціальних виразів за просторовими змінними на значення невідомої функції та її похідних у вузлах інтерполяції, для параболічних рівнянь і систем рівнянь вищих порядків за часовою змінною;

5) довести метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків розглядуваних задач.

Об'єкт дослідження: задачі з локальними багатоточковими умовами за часовою змінною для лінійних параболічних рівнянь і систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Предмет дослідження: умови однозначної розв'язності багатоточкових задач для лінійних параболічних рівнянь і систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами та побудова їх розв'язків.

Методи дослідження: методи функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь, алгебри та метричної теорії чисел.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

1) встановлено умови коректності двоточкової задачі для параболічних за Петровським рівнянь другого порядку за часовою змінною з операторами Штурма-Ліувілля за просторовими змінними; доведено, що такі умови виконуються для довільних фіксованих вузлів інтерполяції та

для майже всіх (стосовно міри Гаусдорфа) векторів, складених із коефіцієнтів рівнянь;

2) встановлено однозначну розв'язність багатоточкової задачі з простими вузлами для параболічних за Петровським рівнянь вищих порядків за часовою змінною з операторами Штурма-Ліувілля за просторовими змінними та для $2\vec{b}$-параболічних рівнянь з оператором Бесселя за однією із просторових змінних; доведено, що умови розв'язності виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компоненти яких є вузлами інтерполяції;

3) знайдено умови коректності багатоточкової задачі для параболічних за Петровським рівнянь коефіцієнти яких залежать від просторових змінних, а також для параболічних рівнянь із факторизованим оператором з коефіцієнтами залежними як від часової, так і від просторових змінних; доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків цих задач;

4) встановлено умови коректності двоточкової задачі для параболічних за Петровським систем другого порядку за часовою змінною та багатоточкової задачі для систем вищих порядків за часовою змінною і доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів систем, коефіцієнтів багатоточкових умов та значень вузлів інтерполяції;

5) для всіх розглянутих задач побудовано зображення розв'язків у вигляді рядів Фур'є за системами відповідних функцій.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна застосовувати при подальшому вивчені задач з багатоточковими умовами для лінійних та нелінійних параболічних рівнянь і їх систем, а також при дослідженні конкретних задач практики, що моделюються розглянутими задачами.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. У спільних із науковим керівником роботах [78–81] Б. Й. Пташнику належить постановка задач, обговорення та аналіз отриманих результатів. У спільних роботах [96, 133] із М. М. Симотюком співавтору належить ідея доведення метричних теорем.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень доповідались та обговорювалися на:

— Дванадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2008 р.);

— Третій міжнародній конференції молодих математиків з диференціальних рівнянь та їхніх застосувань, присвяченій Ярославові Лопатинському (Львів, 2010 р.);

— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 2015 р.);

— Міжнародній науковій конференції „Сучасні проблеми механіки та математики“ (Львів, 2013 р.);

— Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 2015 р.);

— Четвертій Всеукраїнській науковій конференції „Нелінійні проблеми аналізу“ (Івано-Франківськ, 2008 р.);

— Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача (Львів, 2009 р.);

— Одинадцятій відкритій науковій конференції професорсько-викладацького складу ІПМФН Національного університету „Львівська політехніка“ (Львів, 2013 р.);

— Науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге (Чернівці, 2015 р.)

— Всеукраїнській науковій конференції „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“ (Ворохта, 2013 р.);

— засіданнях наукового семінару ім. В. Я. Скоробогатька Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (керівники: член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Б. Й. Пташник, д.ф.-м.н. В. О. Пелих; Львів, 2008–2012, 2014, 2016 рр.);

— засіданнях Львівського міського семінару з диференціальних рівнянь (керівники: д.ф.-м.н., проф. М. І. Іванчов, д.ф.-м.н., проф. П. І. Каленюк, член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Б. Й. Пташник; Львів, 2010, 2016 рр.);

— засіданні наукового семінару кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (керівники — д.ф.-м.н., проф. М. І. Матійчук, д.ф.-м.н., проф. І. Д. Пукальський; Чернівці, 2016 р.);

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 8 статтях [78–81, 96, 104, 105, 133] (яких 2 — без співавторів) у фахових наукових журналах; з них 3 статті [79–81] — у виданнях України, які включені до міжнародних наукометричних баз, а також додатково висвітлено у 10 тезах [82, 97–100, 106–109, 134] наукових конференцій.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і має обсяг 153 сторінки. Список використаних джерел налічує 137 найменувань та займає 17 сторінок.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною для диференціальних рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь займають важливе місце серед некласичних задач і активно досліджуються впродовж останніх десятиріч. Постановка таких задач аналогічна до постановки багатоточкової задачі для звичайних диференціальних рівнянь, яка у найпростішому випадку полягає у знаходженні розв'язку $y(t)$ рівняння

$$W_n(y) := y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t), \tag{1.1}$$

який проходить через n заданих точок (t_j, A_j), $j \in \{1, \ldots, n\}$, $n \geqslant 2$, тобто задовольняє умови

$$y(t_j) = A_j, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad a \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant b, \tag{1.2}$$

де $a_1(t), \ldots, a_n(t), f(t)$ — неперервні на $[a, b]$ функції. Приклад задачі (1.1), (1.2) відомий ще із робіт Коші (задача про визначення траєкторії комети за трьома спостереженнями).

Задачі з багатоточковими умовами (1.2), а також їх узагальненнями для диференціальних рівнянь вивчались у роботах Ш. Валле Пуссена [137], І. Т. Кігурадзе [41], А. Ю. Лучки [52,53], М. А. Наймарка [60], О. Ніколетті [127], М. Піконе [128], Г. Пойя [129], Ю. В. Покорного [65, 66], А. М. Самойленка, М. Й. Ронто [90], В. Я. Скоробогатька [101], Я. Д. Тамаркіна [103], Ф. Хартмана [124] та інших авторів (див. бібліографію в [10, 70]). У цих роботах встановлені умови існування єдиного розв'язку таких задач, побудовані функції Ґріна, вивчені їх властивості, встановлено зв'язок розв'язності багатоточкової задачі для диференціального оператора із можливістю його розкладу у композицію диференціальних операторів першого порядку з дійсними коефіцієнтами, описані методи наближеного розв'язування багатоточкових задач.

Вперше аналог задачі (1.1), (1.2) для рівнянь із частинними похідними був поставлений у 1963 році професором В. Я. Скоробогатьком в такому формулюванні: в області B_T^p для лінійного нестаціонарного рівняння порядку n за часом

$$W_n\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = f(t,x) \tag{1.3}$$

знайти розв'язок, який задовольняє умови

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T. \tag{1.4}$$

Задача (1.3), (1.4) полягає у знаходженні процесу, що описується рівнянням (1.3) для проміжку часу $0 \leqslant t \leqslant T$, коли відомі стани (фотографії) для n фіксованих моментів часу $t = t_j \in [0, T]$.

Перші дослідження задачі (1.3), (1.4) проведені професором Пташником Б. Й. показали [68, 69] (див. також [10, 70]), що ця задача, взагалі, не є коректною за Адамаром (порушується умова єдиності розв'язку), якщо на розв'язок не накладати додаткові умови; при цьому (навіть за умов єдиності) існування розв'язку в багатьох випадках пов'язане з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої природним виявився метричний підхід.

У роботах В. М. Борок та її учнів [3, 12, 13, 112, 125] в області B_T^p досліджено задачі з локальними та нелокальними багатоточковими умовами за часовою змінною для лінійних еволюційних рівнянь та систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Встановлено класи єдиності та класи коректної розв'язності розглядуваних задач. Зокрема, у праці

В. М. Борок [12] досліджено двоточкову задачу

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in B_T^p, \tag{1.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,T) = u_T(x), \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{1.6}$$

де $P(s)$, $Q(s)$ – поліноми від $s_1, \ldots, s_p$ з комплексними коефіцієнтами. В залежності від властивостей поліномів $P(s)$ та $Q(s)$ встановлено умови коректної розв'язності задачі (1.5), (1.6). В. М. Борок та М. А. Перельман [13] для системи рівнянь першого порядку за часом

$$\frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t} - P(D_x)\vec{u}(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [T_0, T] \times \mathbb{R}^p, \tag{1.7}$$

вивчали задачу з локальними багатоточковими умовами

$$u_{i_q}(T_1,x) = 0,\, q \in \{1,\ldots,n_1\}; u_{j_q}(T_2,x) = 0,\, q \in \{1,\ldots,n_2\}; \ldots; \tag{1.8}$$

$u_{l_q}(T_l,x) = 0$, $q \in \{1,\ldots,n_l\}$, $n_1+n_2+\ldots+n_l = n$, $0 \leqslant T_0 < T_1 < \ldots < T_l \leqslant T$,

де $\vec{u}(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_n(t,x))$, $P(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ – матриця розміру $n \times n$, елементи якої є многочленами зі сталими комплексними коефіцієнтами. Встановлено такі умови на поведінку при $\|x\| \to \infty$ розв'язку $\vec{u}(t,x)$ при яких задача (1.7), (1.8) має лише тривіальний розв'язок. Задачі з нелокальними багатоточковими умовами

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{l} a_{i,k+(q-1)n} u_k(T_q,x) = 0, \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \tag{1.9}$$

де ранг матриці $A = \|a_{ij}\|_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\};\\ j\in\{1,\ldots,nl\}}}$ дорівнює n, для системи (1.7) досліджено у роботі [3]. Питання про існування коректної нелокальної двоточкової задачі для системи (1.7) досліджувалось у роботах [55, 56]. Для рівнянь вигляду (1.7) у праці [112] вивчалась задача з нелокальними двоточковими умовами, які містять диференціальні оператори в умовах, а в праці – [125] задача з інтегральними багатоточковими умовами вигляду

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x)dt = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

де $P_k(s)$ – многочлени з комплексними коефіцієнтами, такі що, $P_0(s)P_{N-1}(s)\prod\limits_{k=1}^{N-1}(P_{k-1}(s) - P_k(s)) \neq 0$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$.

С. В. Гадецька у праці [23] встановила, що коректна розв'язність задачі з багатоточковими умовами для одного класу навантажених еволюційних рівнянь в смузі B_T^1 залежить від арифметичної природи чисел $t_1, \ldots, t_N$, і не залежить від алгебричних властивостей коефіцієнтів рівняння.

П. І. Каленюк разом із учнями [38] розробили операційний метод (названий диференціально-символьним), що грунтується на узагальненій схемі відокремлення змінних, і застосували його, зокрема, до розв'язання в області B_T^p задач із локальними багатоточковими умовами для еволюційних рівнянь та систем рівнянь [37, 39, 43]. Метод дає можливість виділити класи функцій, в яких задача має єдиний розв'язок, а також конструктивно побудувати розв'язок у вигляді збіжних рядів. У праці [43] диференціально-символьний метод застосовано при дослідженні в області B_T^p задачі

$$\prod_{q=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{p}\lambda_{j,q}\frac{\partial}{\partial x_j} - b_q\right)u(t,x) = 0,$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T, \tag{1.10}$$

де $\lambda_{j,q}, b_q \in \mathbb{R}$. Встановлення умов існування тривіального та нетривіального розв'язку задачі з однорідними двоточковими умовами для однорідної системи другого порядку за часом і нескінченного порядку за просторовими змінними здійснено у роботі [39].

У роботах [62, 63] З. М. Нитребич описав і обгрунтував процедуру граничного переходу від розв'язку багатоточкової задачі для рівнянь із частинними похідними до розв'язку задачі Коші для цього ж рівняння.

Нелокальні двоточкові та багатоточкові крайові задачі для параболічних рівнянь та систем рівнянь в необмежених областях досліджувались Матійчуком М. І. та його учнями [48,54,57]. Зокрема, у роботах [48,57] в безмежному шарі $(0,T)\times\mathbb{R}^n$ розглянуто задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{|k|\leqslant 2b}A_kD_x^ku=f(t,x), \tag{1.11}$$

$$\mu u(0,x)-u(T,x)=\varphi(x), \tag{1.12}$$

$A_k\in\mathbb{C}$, $\mu\in\mathbb{R}$. Для задачі (1.11), (1.12) побудовано розв'язок у вигляді суми інтеграла Пуассона та об'ємного потенціалу, встановлено умови коректності цієї задачі, якщо рівняння справджує умову параболічності. У роботі [54] Лучко В. М. для параболічного рівняння високого порядку

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n}-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{2bj+|k|\leqslant 2bn}A_{j,k}(t)D_t^jD_x^ku=f(t,x),\ t\in(0,T),x\in\mathbb{R}^p,$$

розглянув задачу з умовами

$$\left.\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0}-\mu\left.\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=T}=\varphi_j(x),\ \ j\in\{1,\dots,n\},\ \ x\in\mathbb{R}^p,$$

де – f та φ_j, $j\in\{1,\dots,n\}$, — функції, які допускають перетворення Фур'є. Для цієї задачі доведено теорему існування класичного розв'язку і досліджено його властивості.

У роботі [123] Ж. Шабровскі (Chabrovski J.) в циліндричній області $(0,T)\times G$, де G — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, з межею ∂G, для параболічного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}-c(t,x)u=f(t,x), \tag{1.13}$$

вивчав задачу з умовами

$$u(0,x)+\sum_{r=1}^{m}\beta_r(x)u(t_r,x)=\varphi(x),\quad 0<t_1<\ldots<t_m\leqslant T, \tag{1.14}$$

$$u(t,x)\big|_{\Sigma}=\psi(x),\quad \Sigma=\partial G\times[0,T], \tag{1.15}$$

$a_{i,j}$, b_i, c, β – неперервно диференційовні функції, $a_{i,j}>a_0>0$, $i,j\in\{1,\ldots,n\}$. За допомогою принципу максимуму доведено теореми існування та єдиності класичного розв'язку задачі (1.13) — (1.15). Якщо у рівнянні (1.13) коефіцієнти мають довільний степеневий порядок виродження за часовою та просторовими змінними, то таку задачу (1.13) — (1.15) досліджував І. Д. Пукальський [85, 86]. Ним встановлено необхідні та достатні умови існування оптимального розв'язку системи, що описується задачею (1.13) — (1.15). Відзначимо, що задача (1.13) — (1.15) для одновимірного та багатовимірного рівняння в паралелепіпеді $[0,1]^{n+1}$ досліджувалась у роботі [119].

Задачу з нелокальними багатоточковими умовами за просторовою змінною для параболічної системи другого порядку в прямокутнику досліджено у роботі [126]. При встановленні умов коректної розв'язності цієї задачі здійснено перехід до системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

У праці [130] розглянуто задачу з умовами Діріхле та нелокальними умовами для двовимірного виродженого параболічного рівняння з параметром

$$x^n y^m\frac{\partial u}{\partial t}=y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^n\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\lambda x^n y^m u=0,\quad (t,x,y)\in[0,1]^3 \tag{1.16}$$

$$u(0,x,y)-\alpha u(1,x,y)=0,\quad (x,y)\in[0,1]^2, \tag{1.17}$$

де $m,n>0$, $\lambda,\alpha\in\mathbb{C}$. Розв'язок цієї задачі побудовано у вигляді ряду Фур'є за системою функцій Бесселя та встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі.

У прямокутнику $\Pi = (0, T) \times (0, \omega)$ А. Т. Асанова [4, 118] досліджувала двоточкову та багатоточкову задачу для системи квазілінійних гіперболічних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + f\left(t, x, \vec{u}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right), \tag{1.18}$$

$$\sum_{j=0}^{m} P_j(x)\vec{u}(t_j, x) = \varphi(x), \quad \vec{u}(t, 0) = \psi(t), \tag{1.19}$$

де $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u_1(t,x), \ldots, u_n(t,x))$, $A(t,x)$, $P_j(x)$ – матриці розмірності $n \times n$ з неперервними в $\overline{\Pi}$ та $[0, \omega]$ елементами, φ та ψ гладкі вектор-функції. Для задачі (1.18) — (1.19) встановлено достатні умови однозначної розв'язності. Ю. О. Митропольський та Л. Б. Урманчева [58] для системи (1.18) вивчали задачу з нелокальними двоточковими умовами.

Для диференціально-операторних рівнянь задачі з двоточковими та багатоточковими умовами вивчалися в роботах С. А. Абдо, М. Е. Бенуара, М. Й. Юрчука [1, 2, 5], Ю. М. Валіцького [15–17], [136], М. Л. Горбачука [25], В. В. Городецького, Я. М. Дріня, О. В. Мартинюк [26, 27], О. О. Дезіна [29, 30], В. К. Романка [87, 88]. Зокрема, в гільбертовому просторі H для рівняння

$$\frac{d^n U}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} U}{dt^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}\frac{dU}{dt} + A_n U = 0,$$

Ю. М. Валіцький у працях [15, 16] досліджував коректну розв'язність задачі з умовами

$$U(t_i) = \Phi_i, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} = T,$$

де A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, — лінійні (взагалі, необмежені) оператори в H, які мають спільне спектральне зображення, Φ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, — задані елементи простору H, $U(t)$ — шукана функція, яка набуває значень в просторі H. Узагальнення цих результатів на випадок багатоточкових умов з кратними вузлами

$$U(t_1)=\Phi_0^{(1)},\ldots,U^{(k_1)}(t_1)=\Phi_{k_1}^{(1)},\ldots,U(t_l)=\Phi_0^{(l)},\ldots,U^{(k_l)}(t_l)=\Phi_{k_l}^{(l)},$$

де $t_1<\ldots<t_l$, $k_1+1+k_2+1+\ldots+k_l+1=n$, здійснено у роботі [17].

О. О. Дезін досліджував [30] розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він показав, що для постановки коректної (у визначеному сенсі) крайової задачі необхідно використовувати поряд з локальними і нелокальні умови. Подальший розвиток досліджень О. О. Дезіна продовжено у працях В. К. Романка [87, 88], в яких, зокрема, встановлено умови існування та єдиності узагальненого розв'язку нелокальної задачі для диференціально-операторних рівнянь другого та високого порядку.

Для еволюційних рівнянь першого порядку за змінною t В. В. Городецький та Я. М. Дрінь [27] у просторах узагальнених функцій вивчали задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Au=0,\quad (0,T]\times\mathbb{R}, \tag{1.20}$$

$$\alpha u(0,\cdot)-\sum_{q=1}^{m}\alpha_q u(t_q,\cdot)=f, \tag{1.21}$$

де A– псевдодиренціальний оператор, який діє у просторах періодичних функцій, $\{\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subset(0,\infty)$, $\alpha>\sum\limits_{q=1}^{m}\alpha_q$, $0<t_1<\ldots<t_n\leqslant T$. Для задачі (1.20), (1.21) побудовано фундаментальний розв'язок, досліджено його властивості та встановлено коректну розв'язність, коли функція f є періодичним ультрарозподілом, який ототожнюється з певним формальним тригонометричним рядом. У праці [26] вивчалась задача (1.20), (1.21), в якій $A=\sum\limits_{r=1}^{n}A_r$, де A_r– псевдобесселеві оператори зі змінними символами.

Двоточкові та триточкові задачі з інтегральною умовою за просторовою змінною для параболічних рівнянь з оператором Бесселя досліджувались методом енергетичних нерівностей у роботах М. Е. Бенуара, М. Й. Юрчука [5], А. В. Картинника [40], А. Бузіані (A. Bouziani) [122].

У роботах М. І. Іванчова [33, 34] встановлено умови існування та єдиності розв'язку обернених задач знаходження залежних від часу коефіцієнта і вільного члена у параболічному рівнянні другого порядку у випадку, коли крайові умови і умови перевизначення є нелокальними.

Зазначимо, що в більшості із згаданих робіт у різних аспектах досліджувались задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною для диференціальних та диференціально-операторних рівнянь, переважно виділено випадки коректно поставлених задач шляхом накладання додаткових обмежень, що забезпечують відокремленість від нуля спектра задачі.

Однак багаточкові задачі для рівнянь із частинними похідними, взагалі, є некоректними, а їх розв'язність у випадку обмеженої області пов'язана з проблемою малих знаменників і є нестійкою стосовно малих змін коефіцієнтів задачі та параметрів області. З математичної точки зору ця проблема проявляється в тому, що в розв'язки задач, які зображуються рядами Фур'є за системою ортогональних функцій, входить нескінченна кількість членів із коефіцієнтами, знаменники яких можуть як завгодно швидко прямувати до нуля, що зумовлює розбіжність цих рядів [10, 28, 70].

Для розв'язання проблеми малих знаменників природним виявився метричний підхід, який вперше був використаний Д. Боржином і Р. Даффіном [121] при дослідженні задачі Діріхле для рівняння коливання струни в прямокутнику. Пізніше А. М. Колмогоров [45] запропонував метричну концепцію і в усій повноті застосував її до задачі про рухи на торі та в теорії динамічних систем. Ідея метричного підходу полягала в наступному:

1) враховується той факт, що малі знаменники (які у вказаних зада-

чах мали вигляд $(\omega, k) = \omega_1 k_1 + \cdots + \omega_p k_p$, $\omega \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{Z}^p$) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів ω задовольняють оцінки

$$|(\omega, k)| \geqslant C(\omega)|k|^{-\delta}, \quad C(\omega) > 0, \quad \delta > p; \tag{1.22}$$

2) аналіз збіжності рядів з малими знаменниками проводиться не для всіх векторів ω, а лише для тих, що задовольняють оцінки (1.22).

У роботах Б. Й. Пташника та його учнів П. Б. Василишина, В. С. Ільківа, І. С. Клюс, Л. І. Комарницької, Б. О. Салиги, Л. П. Силюги, М. М. Симотюка, П. І. Штабалюка [7,9–11,18–20,36,42,44,46,47,49,68–71,73–77,83,84,91–95,117] за допомогою метричного підходу встановлено коректну розв'язність задач з багатоточковими умовами за часовою змінною та умовами (періодичності, типу Діріхле) за просторовими змінними для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компоненти яких виражаються через параметри задач. Значне місце у вказаних роботах займає аналіз оцінок знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків задач.

Зупинимось детальніше на роботах, які близько примикають до даного дослідження.

Задачі з умовами (1.4) та загальнішими умовами

$$\sum_{r=0}^{n-1} a_r \frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}\bigg|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \;\; j \in \{1, \ldots, n\}, \;\; 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T, \tag{1.23}$$

де $a_r \in \mathbb{C}$, $r \in \{1, \ldots, n-1\}$, $a_0 \neq 0$, для гіперболічного за Петровським рівняння

$$\sum_{|\widehat{s}|=n} A_{\widehat{s}} \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega^p, \tag{1.24}$$

в якому $A_{\widehat{s}} \in \mathbb{R}$, $A_{n,(0)} = 1$, вивчались у працях [7, 83], [70, гл. 5]. За умов єдиносні, розв'язок задачі (1.23), (1.24) існує для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів рівняння (1.24), коефіцієнтів умов

(1.23) і для майже всіх $(t_1, \ldots, t_n) \in [0, T]^n$, якщо f є неперервною за t та разом з функціями φ_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, достатньо гладкими за x. Аналогічні результати отримано при дослідженні задачі (1.4), (1.24) в області B_T^p, коли розв'язок шукається у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними [70, 84].

У роботах [70, 74] у паралелепіпеді D_T^p досліджено коректну розв'язність задачі з умовами (1.23) та умовами типу Діріхле за просторовими змінннними для рівняння

$$\sum_{|\widehat{s}| \leqslant 2n} A_{\widehat{s}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} L_1^{s_1} \cdots L_p^{s_p} u(t, x) = 0,$$

$A_{\widehat{s}} \in \mathbb{C}$, $A_{n,(0)} \neq 0$, $L_j := -\frac{d}{dx_j}\left(p_j(x_j)\frac{d}{dx_j}\right) + q_j(x_j)$, $j \in \{1, \ldots, p\}$, — диференціальні вирази з досить гладкими коефіцєнтами. Ці результати поширено [18] в області Q_T^p на задачу з умовами (1.23) та умовами типу Діріхле за просторовими координатами для сторого гіперболічного рівняння

$$\sum_{s=0}^{n} A_s \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} L^{n-s} u(t, x) = 0, \qquad (1.25)$$

де $L := -\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q(x)$, — диференціальний вираз із досить гладкими коефіцієнтами, $A_s \in \mathbb{R}$, $A_n \neq 0$, а також для загальнішого, ніж (1.25), безтипного рівняння, збуреного нелінійним інтегродиференціальним доданком [19]. У працях [20,77] досліджено двоточкові задачі для одного класу гіперболічних систем рівнянь друго порядку зі сталими та змінними коефіцієнтами та задачі з рівновіддаленими вузлами для факторизованих систем рівнянь четвертого та шостого порядків. Багатоточкові задачі для систем високого порядку розглядались, однак питання про оцінки знизу малих знаменників, які виникають у цих задачах не вивчалось.

У працях [91,92] задачі з умовами (1.4) в області $(0, T) \times \Omega^p$ вивчались для параболічного за Шиловим рівняння

$$\sum_{s_0=0}^{n}\sum_{|s|\leqslant q} A_{\widehat{s}}\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} = f(t,x), \tag{1.26}$$

$A_{\widehat{s}} \in \mathbb{C}$, а також для рівномірно параболічного за Петровським рівняння

$$\prod_{q=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{p} a_{i,j}^{q}(t)\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{p} b_i^q(t)\frac{\partial}{\partial x_i} + c^q(t)\right)u(t,x) = 0, \tag{1.27}$$

коефіцієнти якого є достатньо гладкими комплексними функціями аргумента t. На відміну від багатоточкових задач для гіперболічних рівнянь, де малі знаменники оцінювались знизу для майже всіх параметрів задачі виразами $|k|^{-\omega}$, $\omega > 0$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, а класичний розв'язок задачі існує, якщо вихідні дані належать відповідним просторам Соболєва, при дослідженні багатоточкових задач для параболічних та безтипних рівнянь і систем рівнянь виникають малі знаменники складнішої структури, які оцінюються знизу виразами $|k|^{-\omega}\exp(-\delta|k|^{\gamma})$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{(0)\}$, ω, δ, γ – додатні числа; це вимагає для існування класичного розв'язку задачі, щоб праві частини рівнянь і умов належали до вужчих класів функцій, зокрема до просторів $C\left([0,T]; E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right)$ та $E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}$.

У праці [75] досліджено задачу з умовами (1.4) для безтипних, неізотропних стосовно дифенціювання за змінними t та x, рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega^p, \tag{1.28}$$

де $A_q(\xi) := A_q(\xi_1,\dots,\xi_p)$ — многочлен із комплексними коефіцієнтами, степінь якого за сукупністю змінних $\xi_1,\dots,\xi_p$ не перевищує N_q, $q \in \{1,\dots,n\}$. У цій роботі, запропоновано новий метод (порівняно з методом П. І. Штабалюка див. [117]) доведення теорем про оцінки знизу малих знаменників. Для побудови розв'язку задачі використано нормальні фундаментальні системи розв'язків відповідних звичайних диференціальних рівнянь, що дозволило уникнути тих малих знаменників, що є різницями коренів характеристичних рівнянь. Ці результати поширено [94] на системи рівнянь вигляду (1.28), а також на багатоточкову задачу з кратними вузлами [76] для рівняння (1.28).

У працях [44, 46, 47] досліджено задачі з умовами (1.4) та (1.23) для рівнянь високих порядків зі сталими та змінними коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом (рівнянь типу Соболєва). Розглянуто лінійні рівняння, а також аналогічні рівняння, збурені нелінійним інтегро-диференціальним виразом. При дослідженні цих задач виникли нові малі знаменники складної нелінійної структури, а також різноманітні аспекти стосовно їх розв'язності, пов'язані з розглядом різних співвідношень між порядками диференціальних виразів (за просторовими змінними) при старшій та молодших похідних за часом розглядуваних рівнянь.

Ряд праць присвячено дослідженню задач з умовами (1.4) та (1.23) для лінійних рівнянь із псевдодиференціальними (за змінними $x_1, \ldots, x_p$) операторами зі сталими та змінними за t символами в областях $(0,T)\times\Omega^p$ [95] та B_T^p [36, 72]. Нелокальні багатоточкові задачі для рівнянь з псевдодиференціальними операторами вивчались у роботах [89, 135]. Наведений огляд вказує на різноманітність напрямків дослідження задач з багатоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними.

Дана дисертація продовжує вказаний напрямок досліджень і присвячена вивченню в обмежених циліндричних областях задач з локальними багатоточковими умовами за часовою змінною для лінійних параболічних рівнянь та систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Результати дисертації є новими, їх можна кваліфікувати як доповнення і розвиток згаданих вище досліджень.

Висновки до розділу 1

У першому розділі дисертації наведено короткий огляд результатів досліджень задач з багатоточковими умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь, з якого видно актуальність вивчення таких задач та важливість їх дослідження. Детальніше висвітлено роботи, які є близькими до тематики дисертації.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

У даному розділі описано допоміжні твердження з теорії диференціальних рівнянь, теорії чисел, міри та розмірності Гаусдорфа, теорії функцій, використаних при вивченні задач з багатоточковими умовами для параболічних рівнянь та систем рівнянь розглянутих у дисертації.

2.1. Відомості з метричної теорії чисел

Наведемо означення міри та розмірності Гаусдорфа [8], які використовуються у роботі.

Означення 2.1. *ρ-мірою Гаусдорфа множини $M \subset \mathbb{R}^p$ (позначається через $\dim_\rho M$) називається границя (скінченна або нескінченна)*

$$\dim_\rho M = \lim_{\delta\to 0} \inf \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} S_j)^\rho,$$

де точна нижня грань береться за всіма покриттями множини M кулями S_j, $j = 1, 2, \ldots$, такими, що $M \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} S_j$ і діаметр кожної кулі S_j не перевищує δ: $\operatorname{diam} S_j \leqslant \delta$.

Означення 2.2. *Дійсне число β таке, що*

1) $\forall \rho : \beta < \rho \leqslant p \ \ \dim_\rho M = 0$,

2) $\forall \rho : 0 < \rho < \beta \ \dim_\rho M = \infty$, *називається розмірністю Гаусдорфа множини $M \subset \mathbb{R}^p$.*

Надалі нам знадобляться такі твердження про наближення дійсних чисел раціональними дробами.

Теорема 2.1 (Ліувіль, [102]). *Якщо* ξ *— дійсне алгебричне число степеня* d*,* $d \geqslant 2$*, то існує стала* $c(\xi) > 0$ *така, що для всіх раціональних чисел* m/k *виконується нерівність*

$$\left|\xi - \frac{m}{k}\right| \geqslant \frac{c(\xi)}{|k|^d}.$$

Теорема 2.2 (Рот, [132]). *Нехай* ξ *— дійсне алгебричне число степеня* d*,* $d \geqslant 2$*. Тоді для довільного* $\delta > 0$ *нерівність*

$$\left|\xi - \frac{m}{k}\right| < \frac{1}{|k|^{2+\delta}}.$$

має тільки скінченну кількість розв'язків у раціональних чиселах m/k*.*

Теорема 2.3 (Хінчин, [114]). *Для довільної додатної функції* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *існує таке ірраціональне число* ξ_0*, що нерівність*

$$\left|\xi_0 - \frac{m}{k}\right| < g(k)$$

виконується для нескінченної кількості пар $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$*.*

Теорема 2.4 (Борель, [120]). *Для кожного* $\delta > 0$ *множина тих дійсних чисел* ξ*, для яких нерівність*

$$\left|\xi - \frac{m}{k}\right| \leqslant \frac{1}{|k|^{2+\delta}}$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) раціональних чисел m/k*, є множиною повної міри Лебега на прямій.*

Теорема 2.5 (Ярнік – Безікович, [116]). *Для кожного* $\delta > 0$ *розмірність Гаусдорфа множини тих дійсних чисел* ξ*, для яких нерівність*

$$\left|\xi - \frac{m}{k}\right| \leqslant \frac{1}{|k|^{2+\delta}}$$

виконується для нескінченної кількості раціональних чисел m/k*, дорівнює* $\frac{2}{2+\delta}$*.*

Лема 2.1 (Борель-Кантеллі, [102]). *Нехай* $\{\mathcal{A}_m\}_{m=1}^{\infty}$ *– послідовність вимірних (за мірою Лебега) множин з* $\mathbb{R}^p$ *таких, що*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^p} \mathcal{A}_m < \infty.$$

Тоді міра Лебега в $\mathbb{R}^p$ *множини тих точок, які потрапляють до нескінченної кількості множин даної послідовності, дорівнює нулю.*

Теорема 2.6 ([8]). *Множина* $M \subset \mathbb{R}^p$ *має нульову* ρ*-міру Гаусдорфа тоді і тільки тоді, коли існує покриття кулями* $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ *множини* M *таке, що*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} S_j)^{\rho} < \infty,$$

і таке, що кожна точка множини M *належить до нескінченної кількості куль* S_j.

Лема 2.2 ([93]). *Нехай для квазімногочлена* $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i(t) \exp(z_i t)$, *в якому всі* $z_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, *— є різними,* $p_i(t)$ *— многочлен з комплексними коефіцієнтами степеня* $n_i - 1$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, *справджується умова*

$$\forall t \in [a, b] \quad |y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t)| \geqslant \delta_1 > 0,$$

де a_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, *— деякі комплексні числа. Тоді для довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 = \delta_1 / ((2n+2)A^n)$, $A = 1 + \max\limits_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_i|^{1/i}$,

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} \{t \in [a, b] : |y(t)| < \varepsilon\} \leqslant C_1 N (\varepsilon / \delta_1)^{1/n}, \tag{2.1}$$

де $N = 1 + \max\limits_{i \in \{1, \dots, m\}} |z_i|$, $C_1 = C_1(n, b-a, n_1, \dots, n_m)$.

Якщо ж квазімногочлен $y(t)$ *є дійсним квазімногочленом, то для довільного* $\varepsilon \in (0, 2\varepsilon_1)$ *справджується оцінка*

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} \{t \in [a, b] : |y(t)| < \varepsilon\} \leqslant C_2 (\varepsilon / \delta_1)^{1/n}.$$

Лема 2.3 ([94]). *Нехай* $F(y_1, \ldots, y_n)$ *— відміннний від тотожного нуля многочлен змінних* $y_1, \ldots, y_n$ *і нехай* $\alpha_s y_1^{s_1} \ldots y_n^{s_n}$, $\alpha_s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, *— старший член (тобто одночлен, який стоїть на першому місці при лексикографічному [111, с. 284] впорядкуванні доданків многочлена* $F(y_1, \ldots, y_n)$*). Тоді для довільного* $\varepsilon, \rho > 0$ *та* $s \neq (0)$

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^n}\{\vec{y} \in U^n(\rho) : |F(y_1, \ldots, y_n)| < \varepsilon\} \leqslant C_3(s, \rho)\varepsilon^{2/(s_1 + \ldots, s_n)}, \tag{2.2}$$

а для довільних $\varepsilon \in (0, 1)$, $\rho > 0$, *та* $s = (0)$

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^n}\{\vec{y} \in U^n(\rho) : |F(y_1, \ldots, y_n)| < \varepsilon\} = 0.$$

2.2. Поділені різниці аналітичних функцій

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в області $\mathbf{Q}$, яка містить найменшу опуклу оболонку точок $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

Запровадимо рекурентно поняття поділеної різниці $(n-1)$-го порядку за набором простих точок $z_1, \ldots, z_n$ для функції f.

Означення 2.3 ([24]). *Поділеною різницею* $R_{(z_j, z_q)}[f]$ *першого порядку для функції* f *за набором з двох точок* (z_j, z_q), $j \neq q$, $j, q \in \{1, \ldots, n\}$, *називаємо вираз*

$$R_{(z_j, z_q)}[f] = \frac{f(z_q) - f(z_j)}{z_q - z_j}. \tag{2.3}$$

Поділеною різницею порядку $(n-1)$, $n \geqslant 3$, *за набором простих точок* $z_1, \ldots, z_n$ *для функції* $f(z)$ *називаємо вираз*

$$R_{(z_1, \ldots, z_n)}[f] = \frac{R_{(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_n)}[f] - R_{(z_1, \ldots, z_{n-1})}[f]}{z_n - z_{n-1}}. \tag{2.4}$$

Із формул (2.3) та (2.4) отримуємо таке зображення поділеної різниці порядку $(n-1)$ за набором простих точок $z_1, \ldots, z_n$ від функції $f(z)$

через поділені різниці порядків $(n-2),(n-3),\ldots,1$:

$$R_{(z_1,\ldots,z_n)}[f]=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{R_{(z_1,\ldots,z_{n-j})}[f]}{\prod_{i=1}^{j}(z_n-z_{n-i})}+\frac{f(z_n)}{\prod_{i=1}^{j}(z_n-z_{n-i})}. \tag{2.5}$$

Означимо поняття поділеної різниці за набором кратних точок $z_1,\ldots,z_l$ з кратностями $n_1,\ldots,n_l$, відповідно, де $n_1+\ldots+n_l=n$, від функції $f(z)$.

Означення 2.4 ([24]). *Поділеною різницею порядку (n_j-1) в точці z_j, $j\in\{1,\ldots,l\}$, із кратністю n_j від функції $f(z)$ називаємо вираз*

$$R_{(z_j)}^{(n_j)}[f]=\frac{1}{(n_j-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n_j-1}f(z)\bigg|_{z=z_j}.$$

Поділеною різницею порядку $(q+r-1)$ за набором $(q-1)$ простих точок $z_1,\ldots,z_{j-1},z_{j+1},\ldots,z_q$, $j\in\{1,\ldots,q\}$, та однієї кратної точки z_j з кратністю r, $r\in\{1,\ldots,n_j\}$, від функції $f(z)$ називаємо вираз

$$R_{(z_1,\ldots,z_{j-1},z_j,z_{j+1},\ldots,z_q)}^{(1,\ldots,1,r,1,\ldots,1)}[f]=\frac{1}{(r-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^{r-1}R_{(z_1,\ldots,z_q)}[f].$$

Поділеною різницею порядку $(n-1)$ за набором точок $z_1,\ldots,z_l$, $l\leqslant n$, з кратностями $n_1,\ldots,n_l$ від функції $f(z)$ називаємо вираз

$$R_{(z_1,\ldots,z_l)}^{(n_1,\ldots,n_l)}[f]=\frac{R_{(z_1,\ldots,z_{l-1},z_l)}^{(n_1,\ldots,n_{l-1}-1,n_l)}[f]-R_{(z_1,\ldots,z_{l-1},z_l)}^{(n_1,\ldots,n_{l-1},n_l-1)}[f]}{z_l-z_{l-1}}. \tag{2.6}$$

Надалі використаємо твердження, яке випливає з формул (2.4), (2.6).

Твердження 2.1. *Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в області* **Q**, *то справедливими [72, с. 196] є формули*

$$R_{(z_1,\ldots,z_l)}^{(n_1,\ldots,n_l)}[f]=\sum_{j=1}^{l}\sum_{q=0}^{n_j-1}\frac{\left(\partial_z^q f(z)\partial_z^{n_j-q-1}\prod\limits_{i=1,i\neq j}^{l}(z-z_i)^{-n_i}\right)\bigg|_{z=z_j}}{q!(n_j-q-1)!}, \tag{2.7}$$

або

$$R_{(z_1,\ldots,z_l)}^{(n_1,\ldots,n_l)}[f]=$$

$$=\int\limits_0^1\int\limits_0^{\zeta_1}\dots\int\limits_0^{\zeta_{l-2}}\phi(\zeta_1,\dots,\zeta_{l-1})\partial_z^{n-1}f(z)\Big|_{z=z_1+\sum\limits_{j=2}^{l}(z_j-z_{j-1})\zeta_{j-1}}d\zeta_{l-1}\dots d\zeta_1, \qquad (2.8)$$

де $\phi(\zeta_1,\dots,\zeta_{l-1})=\frac{(1-\zeta_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\prod\limits_{i=1}^{l-1}\frac{(\zeta_{j-1}-\zeta_j)^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\frac{\zeta_{l-1}^{n_l-1}}{(n_l-1)!}$.

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$W(d/dt)y(t):=y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_ny(t)=f(t), \qquad (2.9)$$

де $a_j\in\mathbb{C}$, $j\in\{1,\dots,n\}$, $f\in C([0,T])$, і для цього рівняння побудуємо фундаментальну систему розв'язків, побудовану за поділеними різницями експонент. Нехай $\mu_1,\dots,\mu_l$ – корені рівняння

$$\mu^n+a_1\mu^{n-1}+\ldots+a_n\mu=0 \qquad (2.10)$$

з кратностями $n_1,\dots,n_l$, відповідно. Тоді функції $t^{r_q-1}\exp(\mu_qt)$, $r_q\in\{1,\dots,n_q\}$, $q\in\{1,\dots,l\}$, — утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.9).

Побудуємо систему функцій

$$\left\{y_{q,r_q}(t):=R^{(n_1,\dots,n_{q-1},r_q)}_{(\mu_1,\dots,\mu_{q-1},\mu_q)}[\exp(\mu t)],\, r_q\in\{1,\dots,n_q\},q\in\{1,\dots,l\}\right\}, \qquad (2.11)$$

$t\in\mathbb{R}$, де кожна функція з яких є поділеною різницею порядку $\chi_{q,r_q}=n_1+\ldots+n_{q-1}+r_q-1$ за набором коренів $\mu_1,\dots,\mu_{q-1},\mu_q$ з кратностями $n_1,\dots,n_{q-1},r_q$ від функції $\exp(\mu t)$.

Надалі нам знадобляться оцінки зверху функцій $y_{q,r_q}(t)$, $r_q\in\{1,\dots,n_q\}$, $q\in\{1,\dots,l\}$, та їх похідних.

Лема 2.4. *Для кожного* $t\geqslant 0$, *виконуються оцінки*

$$\left|\frac{d^{s_0}y_{q,r_q}(t)}{dt^{s_0}}\right|\leqslant C_4\widetilde{\mu}^{s_0}\exp\left(\max_{q=\overline{1,l}}\{Re\mu_q\}t\right), \qquad (2.12)$$

де $\widetilde{\mu}=\max\limits_{q=\overline{1,l}}\{1,|\mu_q|\}$, $r_q\in\{1,\dots,n_q\}$, $q\in\{1,\dots,l\}$, $s_0\in\{0,1,\dots,n\}$.

Доведення. Для того, щоб встановити нерівності (2.12), використаємо формули (2.11) та інтегральні зображення (2.8), поділених різниць, одержуємо

$$
\begin{gathered}
y_{1,r_1}(t)=t^{r_1-1}\exp(\mu_1 t)/(r_1-1)!,\ r_1\in\{1,\ldots,n_1\},\\
y_{q,r_q}(t)=\int\limits_0^1\int\limits_0^{\zeta_1}\ldots\int\limits_0^{\zeta_{q-2}}\phi(\zeta_1,\ldots,\zeta_{q-1})t^{\chi_{q,r_q}-1}\times\\
\times\exp\left(\left(\mu_1+\sum_{j=2}^{q}(\mu_j-\mu_{j-1})\zeta_{j-1}\right)t\right)d\zeta_{l-1}\ldots d\zeta_1,
\end{gathered}
\tag{2.13}
$$

де $r_q\in\{1,\ldots,n_q\}$, $q\in\{2,\ldots,l\}$, $t\in[0,T]$. На підставі формули Лейбніца для обчислення похідної добутку, із (2.13) отримуємо

$$
\begin{gathered}
\frac{d^{s_0}y_{1,r_1}(t)}{dt^{s_0}}=\sum_{j=0}^{s_0}C_{s_0}^j(t^{r_1-1})^{(j)}\mu_1^{s_0-j}\frac{\exp(\mu_1 t)}{(r_1-1)!},\ \ r_1\in\{1,\ldots,n_1\},\\
\frac{d^{s_0}y_{q,r_q}(t)}{dt^{s_0}}=\int\limits_0^1\int\limits_0^{\zeta_1}\ldots\int\limits_0^{\zeta_{q-2}}\phi(\zeta_1,\ldots,\zeta_{q-1})\sum_{j=0}^{s_0}C_{s_0}^j(t^{\chi_{q,r_q}-1})^{(j)}\times\\
\times\mu^{s_0-j}\exp(\mu t)\Big|_{\mu=\mu_1+\sum\limits_{j=2}^{q}(\mu_j-\mu_{j-1})\zeta_{j-1}}d\zeta_{q-1}\ldots d\zeta_1,
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

де $s_0\in\{0,1,\ldots,n\}$, $r_q\in\{1,\ldots,n_q\}$, $q\in\{2,\ldots,l\}$, $t\in[0,T]$. Відзначимо, що для довільних точок симплекса, $0\leqslant\zeta_{q-1}\leqslant\zeta_{q-2}\leqslant\ldots\leqslant\zeta_1\leqslant 1$, $q\in\{2,\ldots,l\}$, виконуються нерівності

$$
\begin{gathered}
\left|\mu_1+\sum_{j=2}^{q}(\mu_j-\mu_{j-1})\zeta_{j-1}\right|\leqslant|\mu_1|(1-\zeta_1)+|\mu_2|(\zeta_1-\zeta_2)+\ldots+\\
+|\mu_{q-1}|(\zeta_{q-2}-\zeta_{q-1})+|\mu_q|\zeta_{q-1}\leqslant\widetilde{\mu},\ q\in\{2,\ldots,l\},
\end{gathered}
\tag{2.15}
$$

$$
\mathrm{Re}\mu_1+\sum_{j=2}^{q}(\mathrm{Re}\mu_j-\mathrm{Re}\mu_{j-1})\zeta_{j-1}\leqslant\max_{j=\overline{1,l}}\{\mathrm{Re}\mu_j\},\ q\in\{2,\ldots,l\}.
\tag{2.16}
$$

Із формул (2.14) на підставі оцінок (2.15), (2.16) для довільного $t\geqslant 0$

встановлюємо

$$\left|\frac{d^{s_0}y_{1,r_1}(t)}{dt^{s_0}}\right|\leqslant C_5\widetilde{\mu}^{s_0}\exp(\mathrm{Re}\mu_1 t),$$

$$\left|\frac{d^{s_0}y_{q,r_q}(t)}{dt^{s_0}}\right|\leqslant C_6\widetilde{\mu}^{s_0}\exp\left(\max_{q=\overline{1,l}}\{\mathrm{Re}\mu_q\}t\right),$$

де $r_q\in\{1,\ldots,n_q\}$, $q\in\{2,\ldots,l\}$, $s_0\in\{0,1,\ldots,n\}$.

Із одержаних оцінок випливає твердження леми. $\Diamond$

Твердження 2.2. *Функції* $y_{q,r_q}(t)$*,* $r_q\in\{1,\ldots,n_q\}$*,* $q\in\{1,\ldots,l\}$*, утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння* (2.9)*. Вронскіан від цих функцій визначається формулою*

$$V(y_{1,1}(t),\ldots,y_{l,n_l}(t))=\exp((n_1\mu_1+\ldots+n_l\mu_l)t). \qquad (2.17)$$

Доведення. Доведемо спочатку, що функції $y_{q,r_q}(t)$, $r_q\in\{1,\ldots,n_q\}$, $q\in\{1,\ldots,l\}$, є розв'язками рівняння (2.9). Із формул (2.7), (2.11) отримуємо

$$y_{q,r_q}(t)=\sum_{j=1}^{q-1}\sum_{s=0}^{n_j-1}\frac{t^s\exp(\mu_j t)\partial_{\mu_j}^{n_j-s-1}\left(\prod\limits_{i=1,i\neq j}^{q-1}(\mu_j-\mu_i)^{-n_i}(\mu_j-\mu_q)^{-r_q}\right)}{s!(n_j-s-1)!}+$$

$$+\sum_{s=0}^{r_q-1}\frac{t^s\exp(\mu_q t)\partial_{\mu_q}^{r_q-s-1}\left(\prod\limits_{i=1,i\neq j}^{q-1}(\mu_q-\mu_i)^{-r_q}\right)}{s!(r_q-s-1)!}, \qquad (2.18)$$

$r_q\in\{1,\ldots,n_q\}$, $q\in\{1,\ldots,l\}$, $t\in[0,T]$. Оскільки функції $t^s\exp(\mu_q t)$, $s\in\{1,\ldots,n_q\}$, $q\in\{1,\ldots,l\}$, є розв'язками рівняння (2.9) то лінійні комбінації цих функцій, які містяться у формулах (2.18), також справджують це рівняння. Визначник Вронського від функцій $y_{1,1}(t),\ldots,y_{l,n_l}(t)$ обчислимо у випадку $l=n$, а помім здійснимо граничний перехід. На підставі формул (2.5), (2.11) отримуємо

$$y_q(t)=-\sum_{j=1}^{q-1}\frac{y_{q-1}(t)}{\prod_{i=1}^{j}(\mu_q-\mu_{q-i})}+\frac{\exp(\mu_q t)}{\prod_{i=1}^{j}(\mu_q-\mu_{q-i})},\quad q\in\{2,\ldots,n\}. \qquad (2.19)$$

Виконуючи елементарні перетворення над стовпцями у визначнику $V(y_1(t),\ldots,y_n(t))$, отримуємо

$$V(y_1(t),\ldots,y_n(t)) = \frac{V(\exp(\mu_1 t),\ldots,\exp(\mu_n t))}{\prod\limits_{1\leqslant j<q\leqslant n}(\mu_q-\mu_j)} = \exp((\mu_1+\ldots+\mu_n)t).$$

Із отриманої формули випливає рівність (2.17). $\Diamond$

2.3. Загальна постановка задач дисертації та схема їх дослідження

Більшість розглянутих у дисертаційній роботі задач об'єднані такою спільною постановкою: в області Q_T^p знайти розв'язок рівняння (системи)

$$W(\partial/\partial t,\mathcal{L})u := \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{br+|s|\leqslant bn} A_{r,s}\mathcal{L}^s\frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r} = f(t,x), \quad (2.20)$$

який за змінною t задовольняє багатоточкові умови

$$V_j[u] := \sum_{q=0}^{N_j} a_q(\mathcal{L})\frac{\partial^q u(t,x)}{\partial t^q}\bigg|_{t=t_j} = \varphi_j(x),\ 0\leqslant N_j\leqslant n-1,\ j\in\{1,\ldots,n\}, \quad (2.21)$$

та деякі умови за змінними x (умови типу умов Діріхле, умови періодичності), де $\mathcal{L}$ — диференціальний вираз зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами, $0\leqslant t_1<\ldots<t_n\leqslant T$.

Нехай η_k, $k\in K^p$,— послідовність власних значень, а $\mathbf{X}=\{X_k(x), k\in K^p\}$ — сукупність власних функцій задачі на власні значення для оператора $\mathcal{L}$.

Означення 2.5. *Розв'язком задачі* (2.20)*,* (2.21) *з простору* $C^n([0,T];\mathcal{T}'_{\mathbf{X}})$ *називатимемо ряд*

$$u(t,x) = \sum_{k\in K^p} u_k(t)X_k(x),$$

де, кожен коефіцієнт $u_k(t) \in C^n([0,T])$*, задовольняє задачу*

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{br+|s|\leqslant bn} A_{r,s} \eta_k^s \frac{d^r u_k(t)}{dt^r} = f_k(t), \tag{2.22}$$

$$V_j[u_k] := \sum_{q=0}^{N_j} a_q(\eta_k) \frac{d^q u_k(t)}{dt^q}\bigg|_{t=t_j} = \varphi_{j,k},\ \ j \in \{1,\dots,n\}, \tag{2.23}$$

в якій $f_k(t)$*,* $\varphi_{j,k}$*,* $k \in K^p$*, — коефіцієнти Фур'є функцій* f *та* φ_j*,* $j \in \{1,\dots,n\}$*, за системою* $\mathbf{X}$.

Нехай функції $u_{k,q}(t)$, $q \in \{1,\dots,n\}$, утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння, яке відповідає рівнянню (2.22), а

$$\Delta(k,\vec{t}) = \det \|V_j[u_{k,q}]\|_{j,q\in\{1,\dots,n\}}\,, \quad \vec{t} = (t_1,\dots,t_n), \tag{2.24}$$

є характеристичним визначником задачі (2.22), (2.23).

Твердження 2.3. *Для єдиності розв'язку задачі* (2.20)*,* (2.21) *у просторі* $C^n\left([0,T];\mathcal{T}'_{\mathbf{X}}\right)$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in K^p \quad \Delta(k,\vec{t}) \neq 0. \tag{2.25}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 3.1 у [70, с. 39]. $\Diamond$

Якщо виконується умова (2.25) то розв'язок задачі (2.20), (2.21) зображується формальним рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in K^p} \left(\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau + \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})} \varphi_{j,k} u_{k,q}(t) \right) X_k(x), \tag{2.26}$$

де $G_k(t,\tau)$ — функція Гріна задачі (2.22), (2.23), $\Delta_{j,q}(k,\vec{t})$ — алгебричне доповнення елемента j-го рядка та q-го стовбця у визначнику $\Delta(k,\vec{t})$.

Із твердження 2.3 та теореми 6.2 з [25, с. 111] (згідно з якою довільний ряд вигляду (2.26) у просторі $\mathcal{T}'_{\mathbf{X}}$ є збіжним) отримуємо таке твердження.

Твердження 2.4. *Нехай виконується умова* (2.25). *Якщо* $f \in C([0,T];\mathcal{T}_{\mathbf{X}})$ $(C([0,T];\mathcal{T}'_{\mathbf{X}}))$ *та* $\varphi_j \in \mathcal{T}_{\mathbf{X}}$, $(\mathcal{T}'_{\mathbf{X}})$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (2.20), (2.21) *з простору* $C^n([0,T];\mathcal{T}_{\mathbf{X}})$ $(C^n([0,T];\mathcal{T}'_{\mathbf{X}}))$. *Цей розв'язок зображується формулою* (2.26).

Відзначимо, що твердження 2.3 та 2.4 справедливі для всіх задач, які розглядаються в дисертації.

Збіжність ряду (2.26) в шкалі просторів $C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки вирази $|\Delta(k,\vec{t})|$, $k \in K^p$, будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості векторів $k \in K^p$; це й спричиняє розбіжність ряду (2.26).

Для забезпечення збіжності ряду (2.26) в просторі $C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X}}_{w(\alpha,\beta)}\right)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, у теоремі існування розв'язку задачі, крім певних умов на функції f та φ_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, аксіоматично накладається оцінка

$$|\Delta(k,\vec{t})| > |\eta_k|^{-\omega}\exp(-\nu|\eta_k|^b), \quad \omega,\nu \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

Важливим завданням дисертації є дослідження питання про можливість виконання нерівності (2.27). Для встановлення оцінки (2.27) використовується метричний підхід [70, 102] та методи метричної теорії діофантових наближень. Із доведених тверджень метричного характеру та теореми існування випливає однозначна розв'язність багатоточкової задачі для майже всіх (стосовно міри Лебега, Гаусдорфа) векторів, складених із коефіцієнтів рівняння (системи), коефіцієнтів умов та значень вузлів інтерполяції.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертації за допомогою апарату поділених різниць побудовано фундаментальну систему розв'язків звичайного диференціального рівняння та встановлено ряд властивостей цієї системи. Наведено деякі допоміжні твердження з метричної теорії чисел, міри та розмірності Гаусдорфа. Викладено загальну методику дослідження задач дисертації та проаналізовано структуру розв'язків цих задач.

РОЗДІЛ 3
ЗАДАЧІ З ЛОКАЛЬНИМИ БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Третій розділ дисертації присвячено встановленню умов однозначної розв'язності задач із багатоточковими умовами за часовою змінною та певними умовами (періодичності, типу Діріхле, та ін.) за просторовими змінними для лінійних параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

3.1. Задача з двоточковими умовами для рівнянь другого порядку

У цьому підрозділі встановлено коректну розв'язність двоточкової задачі для факторизованого параболічного за Петровським оператора зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами і доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно ρ-міри Гаусдорфа) векторів, складених із коефіцієнтів рівняння.

В області D_T^p розглянемо задачу

$$\prod_{q=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{p} a_j^q L_j^b + A_q(L_1,\ldots,L_p)\right)u(t,x)=0,\ (t,x)\in D_T^p, \tag{3.1}$$

$$u(t_1,x)=\varphi_1(x),\ u(t_2,x)=\varphi_2(x),\quad 0\leqslant t_1<t_2\leqslant T,\ x\in\Pi^p, \tag{3.2}$$

$$L_j^m u(t,x)\Big|_{x_j=0}=L_j^m u(t,x)\Big|_{x_j=\pi}=0,\ m\in\{0,1,\ldots,2b-1\},\ j\in\{1,\ldots,p\}, \tag{3.3}$$

де $a_j^q>0$, $j\in\{1,\ldots,p\}$, $q\in\{1,2\}$,

$$A_q(L_1,\ldots,L_p)=\sum_{|s|<b} A_s^q L_1^{s_1}\ldots L_p^{s_p},\quad A_s^q\in\mathbb{C},\quad q\in\{1,2\},$$

$$L_j := -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_j(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q_j(x_j), \quad j \in \{1,\ldots,p\}, \tag{3.4}$$

у яких $p_j \in C^{4b-1}([0,\pi])$, $q_j \in C^{4b-2}([0,\pi])$, $p_j \geqslant p_{0,j} > 0$, $q_j > 0$, $j \in \{1,\ldots,p\}$.

Нехай λ_{k_j}, та $X_{k_j}(x_j), k_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1,\ldots,p\}$, власні значення та власні функції такої задачі:

$$L_j X(x_j) = \lambda X(x_j), \quad X(0) = X(\pi) = 0. \tag{3.5}$$

Відомо [64], що для кожного j, $j \in \{1,\ldots,p\}$, власні функції задачі (3.5) утворюють повну ортонормовану в $L_2(0,\pi)$ систему (нормовані умовою $\int_0^\pi |X_{k_j}(x_j)|^2 dx_j = 1$) і, за накладених на $p_j(x_j)$ і $q_j(x_j)$ умов, для всіх $k_j \in \mathbb{N}$ виконуються оцінки

$$c_0 k_j^2 \leqslant \lambda_{k_j} \leqslant c_1 k_j^2, \tag{3.6}$$

$$\max_{0\leqslant x_j\leqslant\pi}\left|X_{k_j}^{(r)}(x_j)\right| \leqslant c_2\lambda_{k_j}^{r/2},\ r \in \{0,1,\ldots,2b\},\ k_j \in \mathbb{N},\ j \in \{1,\ldots,p\}, \tag{3.7}$$

де c_0, c_1, $c_2 = c_2(r)$ — додатні сталі.

Позначимо: $\lambda_k = (\lambda_{k_1},\ldots,\lambda_{k_p})$, $k \in \mathbb{N}^p$; $\mathbf{X_1} = \{X_{k_1}(x_1)\cdots X_{k_p}(x_p), k \in \mathbb{N}^p\}$; $w_1(\alpha,\vec{\beta}) := w_1(\alpha,\vec{\beta};\lambda_k) = (\lambda_{k_1}^b + \ldots + \lambda_{k_p}^b)^\alpha \exp(\beta_1\lambda_{k_1}^b + \ldots + \beta_p\lambda_{k_p}^b)$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_p) \in \mathbb{R}^p$; $|\lambda_k^b| = \lambda_{k_1}^b + \ldots + \lambda_{k_p}^b$.

Розв'язок задачі (3.1) — (3.3) з простору $C^2\left([0,T];E_{w_1(\alpha,\vec{\beta})}^{\mathbf{X_1}}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^p$, шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^p} u_k(t) X_{k_1}(x_1)\cdots X_{k_p}(x_p). \tag{3.8}$$

Кожна функція $u_k(t), k \in \mathbb{N}^p$, є розв'язком двоточкової задачі

$$\prod_{q=1}^{2}\left(\frac{d}{dt} + \sum_{j=1}^{p} a_j^q \lambda_{k_j}^b + A_q(\lambda_{k_1},\ldots,\lambda_{k_p})\right) u_k(t) = 0, \tag{3.9}$$

$$u_k(t_1) = \varphi_{1k}, \quad u_k(t_2) = \varphi_{2k}, \tag{3.10}$$

де φ_{1k}, φ_{2k}, $k \in \mathbb{N}^p$, — коефіцієнти Фур'є функцій φ_1 та φ_2 за системою $\mathbf{X_1}$. Нехай $\mathcal{M} = \{k \in \mathbb{N}^p : \mu_1(k) = \mu_2(k)\}$, де

$$\mu_q(k) = -\sum_{j=1}^{p} a_j^q \lambda_{k_j}^b - A_q(\lambda_{k_1},\ldots,\lambda_{k_p}), \quad q \in \{1,2\}, \quad k \in \mathbb{N}^p. \tag{3.11}$$

Розв'язок задачі (3.9), (3.10) визначається рівностями

$$u_k(t) = D_1(k)\exp(\mu_1(k)t) + D_2(k)\exp(\mu_2(k)t), \text{ якщо } k \in \mathbb{N}^p \setminus \mathcal{M}, \quad (3.12)$$

$$u_k(t) = D_3(k)\exp(\mu_1(k)t) + D_4(k)t\exp(\mu_1(k)t), \text{ якщо } k \in \mathcal{M},$$

де сталі $D_j(k)$, $j \in \{1,\ldots,4\}$, справджують такі системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} D_1(k)\exp(\mu_1(k)t_1) + D_2(k)\exp(\mu_2(k)t_1) = \varphi_{1k}, \\ D_1(k)\exp(\mu_1(k)t_2) + C_2(k)\exp(\mu_2(k)t_2) = \varphi_{2k}, \end{cases} \text{ якщо } k \in \mathbb{N}^p \setminus \mathcal{M},$$

$$(3.13)$$

$$\begin{cases} D_3(k)\exp(\mu_1(k)t_1) + D_4(k)t_1\exp(\mu_1(k)t_1) = \varphi_{1k}, \\ D_3(k)\exp(\mu_1(k)t_2) + D_4(k)t_2\exp(\mu_1(k)t_2) = \varphi_{2k}, \end{cases} \text{ якщо } k \in \mathcal{M}.$$

Позначимо:

$$\Delta(k,\vec{t}) = \exp(\mu_1(k)t_2 + \mu_2(k)t_1)\times$$

$$\times\left[\exp((\mu_2(k) - \mu_1(k))(t_2 - t_1)) - 1\right], \text{ якщо } k \in \mathbb{N}^p \setminus \mathcal{M}, \quad (3.14)$$

$$\Delta(k,\vec{t}) = (t_2 - t_1)\exp(\mu_1(k)(t_1 + t_2)), \text{ якщо } k \in \mathcal{M}.$$

При дослідженні питання про єдиність розв'язку задачі (3.1) — (3.3) розглянемо також однорідні двоточкові умови

$$u(t_1,x) = 0, \; u(t_2,x) = 0. \quad (3.15)$$

Теорема 3.1. *Для єдиності розв'язку задачі* (3.1) — (3.3) *у просторі* $C^2\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec{\beta})}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^p$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{N}^p \setminus \mathcal{M} \quad \forall \ell \in \mathbb{Z} \quad (\mu_2(k) - \mu_1(k))(t_2 - t_1) \neq 2\pi i\ell. \quad (3.16)$$

Доведення. Необхідність. Якщо для деякого вектора $\widehat{k} \in \mathbb{N}^p \setminus \mathcal{M}$ умова (3.16) не виконується, то $\Delta(\widehat{k},\vec{t}) = 0$. При цьому існують нетривіальні розв'язки $u_{\widehat{k}}(t) = D_1(\widehat{k})\exp(\mu_1(\widehat{k})t) + D_2(\widehat{k})\exp(\mu_2(\widehat{k})t)$ рівняння

(3.9), які задовольняють умови $u_{\widehat{k}}(t_1) = 0$, $u_{\widehat{k}}(t_2) = 0$. Коефіцієнти $D_1(\widehat{k})$ та $D_2(\widehat{k})$ визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} D_1(\widehat{k}) \exp(\mu_1(\widehat{k})t_1) + D_2(\widehat{k}) \exp(\mu_2(\widehat{k})t_1) = 0, \\ D_1(\widehat{k}) \exp(\mu_1(\widehat{k})t_2) + D_2(\widehat{k}) \exp(\mu_2(\widehat{k})t_2) = 0. \end{cases}$$

Тоді однорідна задача (3.1), (3.3), (3.15) має нетривіальні розв'язки вигляду $u(t,x) = u_{\widehat{k}}(t) X_{\widehat{k_1}}(x_1) \cdots X_{\widehat{k_p}}(x_p)$, а розв'язок неоднорідної задачі (3.1) — (3.3) якщо він існує не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що задача (3.1) — (3.3) має два різні розв'язки u_1, $u_2 \in C^2\Big([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec{\beta})}\Big)$. Розглянемо функцію $\widetilde{u}(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$. Дана функція належить до простору $C^2\Big([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec{\beta})}\Big)$ і є нетривіальним розв'язком задачі (3.1), (3.3), (3.15). Для кожного коефіцієнта Фур'є $\widetilde{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{N}^p$, функції $\widetilde{u}(t,x)$ справедливі зображення вигляду (3.12) в яких сталі $D_1(k)$ та $D_2(k)$ є розв'язками однорідної системи рівнянь, яка відповідає системі (3.13). Згідно з умовою теореми, визначник $\Delta(k, \vec{t}\,)$, $k \in \mathbb{N}^p$, цієї системи є відмінним від нуля. Тому $D_1(k) = 0$, $D_2(k) = 0$, $k \in \mathbb{N}^p$, а отже $\widetilde{u}_k(t) \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}^p$. Звідси отримуємо, що $\widetilde{u}(t,x) \equiv 0$, всупереч припущенню. $\Diamond$

Із теореми 3.1 та формул (3.11) випливає наслідок.

Наслідок 3.1. *Для єдиності розв'язку задачі* (3.1) — (3.3) *у просторі* $C^2\Big([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec{\beta})}\Big)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^p$, *необхідно і досить, щоб для кожного* $(k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}^p \setminus \mathcal{M}$ *та кожного* $\ell \in \mathbb{Z}$ *не виконувалася хоча б одна з рівностей*

$$\sum_{j=1}^{p} (a_j^1 - a_j^2) \lambda_{k_j}^b + \sum_{|s|<b} \mathrm{Re}(A_s^1 - A_s^2) \lambda_{k_1}^{s_1} \ldots \lambda_{k_p}^{s_p} = 0,$$

$$\sum_{|s|<b} \mathrm{Im}(A_s^1 - A_s^2) \lambda_{k_1}^{s_1} \ldots \lambda_{k_p}^{s_p} = 2\pi\ell/(t_2 - t_1).$$

Наведемо приклад задачі для якої виконується або порушується умова єдиності (3.16).

Приклад 3.1. Для задачі

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial^4}{\partial x^4}+ia_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial^4}{\partial x^4}+ia_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=0,\,(t,x)\in D_T^1, \quad (3.17)$$

$$u(0,x)=0, \quad u(T,x)=0, \quad x\in(0,\pi), \qquad (3.18)$$

$$\left.\frac{\partial^{2m}u(t,x)}{\partial x^{2m}}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^{2m}u(t,x)}{\partial x^{2m}}\right|_{x=\pi}=0, \quad m\in\{0,1\}, \qquad (3.19)$$

де $a>0$, $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, $a_1\neq a_2$, $L=-\partial^2/\partial x^2$, $b=2$, визначник $\Delta(k,\vec{t})$, $k\in\mathbb{N}$, обчислюється за формулою

$$\Delta(k,\vec{t})=\begin{cases}\exp((-ak^4+ia_1k^2)T)(\exp(i(a_2-a_1)k^2T)-1), & \text{якщо } k\neq 0,\\ T, & \text{якщо } k=0.\end{cases}$$

Оскільки $|\Delta(k,\vec{t})|=2\exp(-ak^4T)|\sin(a_2-a_1)k^2T/2|$, $k\neq 0$, то задача (3.17) — (3.19) може мати в просторі $C^2\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\beta)}\right)$, $\mathbf{X_1}=\{\sin(kx),\ k\in\mathbb{N}\}$, $w_1(\alpha,\beta)=w_1(\alpha,\beta;k)=k^{2\alpha}\exp(\beta k^2)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, тільки нульовий розв'язок, якщо число $(a_2-a_1)T/\pi$ є ірраціональним.

Надалі вважатимемо, що справджується умова (3.16). Тоді для кожного $k\in\mathbb{N}^p$ існує розв'язок задачі (3.9), (3.10), який зображується формулою

$$u_k(t)=\frac{1}{\Delta(k,\vec{t})}[(\exp(\mu_2(k)t_2+\mu_1(k)t)-\exp(\mu_1(k)t_2+\mu_2(k)t))\varphi_{1k}+$$

$$+(\exp(\mu_1(k)t_1+\mu_2(k)t)-\exp(\mu_2(k)t_1+\mu_2(k)t))\varphi_{2k}],\text{якщо } k\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{M}, \qquad (3.20)$$

$$u_k(t)=\frac{1}{\Delta(k,\vec{t})}\left[(t_2-t)e^{\mu_1(k)(t_2+t)}\varphi_{1k}+(t-t_1)e^{\mu_1(k)(t_1+t)}\varphi_{2k}\right], \text{якщо } k\in\mathcal{M}.$$

Із рівностей (3.8), (3.20) випливає формальне зображення розв'язку задачі (3.1) — (3.3) у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathcal{M}}u_k(t)X_{k_1}(x_1)\cdots X_{k_p}(x_p)+\sum_{k\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{M}}u_k(t)X_{k_1}(x_1)\cdots X_{k_p}(x_p). \quad (3.21)$$

Відповідь на питання про збіжність ряду (3.21) у просторах $C^2\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec{\beta})}\right)$, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки величина $|\Delta(k,\vec{t})|$ будучи відмінною від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $k\in\mathbb{N}^p$. Покажемо це на прикладі двоточкової задачі для параболічного рівняння.

Приклад 3.2. В області $(0,T)\times\Omega^1$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}-a_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+d_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-d_2\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0, \\ u(0,x)=0, \quad u(t_1,x)=\varphi(x), \quad 0<t_1<T, \end{cases} \tag{3.22}$$

де $a_j>0$, $d_j\in\mathbb{R}$, $j\in\{1,2\}$. Легко перевірити, що при $\theta=\frac{(d_1+d_2)t_1}{\pi}\notin\mathbb{Q}$, розв'язок цієї задачі зображується рядом

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{(e^{(-a_1k^2-id_1k)t}-e^{(-a_2k^2+id_2k)t})\varphi_k}{e^{(-a_2k^2+id_2k)t_1}\left(e^{((a_2-a_1)k^2-i(d_2+d_1)k)t_1}-1\right)}e^{ikx}. \tag{3.23}$$

Розглянемо два випадки задачі (3.22), коли $a_1=a_2$, і $a_1<a_2$. Тоді у першому випадку задачі (3.22) із теореми 2.3 випливає, що існує таке число $t_1>0$, $t_1\notin\frac{\pi}{d_1+d_2}\mathbb{Q}$, і нескінченна множина K ненульових цілих чисел k, що нерівність $\sin((d_1+d_2)t_1k/2)<\exp(-|k|^{2|k|})$ виконується для всіх чисел $k\in K$. Оскільки $|e^{-i(d_2+d_1)kt_1}-1|=2|\sin((d_2+d_1)kt_1/2)|$, то для довільних $\alpha,\alpha_0,\beta,\beta_0\in\mathbb{R}$ і функції $\varphi\in E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\beta_0)}$, де $w_1(\alpha_0,\beta_0)=(1+|k|)^{-\alpha_0}\exp(-\beta_0|k|^2)$, вигляду

$$\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\varphi_ke^{ikx},\quad \varphi_k=(1+|k|)^{-\alpha_0-1-\varepsilon}\exp(-\beta_0|k|^2),$$

отримуємо, що

$$\left\|u(t,x);C^2\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\beta)}\right)\right\|\geqslant\left\|\partial_tu(t,x)|_{t=0};E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\beta)}\right\|\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{(|d_1|-|d_2|)^2k^2|\varphi_k|^2e^{2a_2t_1k^2}}{\sin^2((d_1+d_2)t_1k/2)}(1+|k|)^{2\alpha}e^{2\beta k^2}}\geqslant$$

$$\geqslant C_1\sqrt{\sum_{k\in K}(1+|k|)^{2\alpha-2\alpha_0-2\varepsilon}e^{2(\beta-\beta_0+a_2t_1)k^2}e^{2|k|^{2|k|}}}=+\infty,$$

якими б небули числа $\alpha,\alpha_0,\beta,\beta_0\in\mathbb{R}$. Отже існує таке число $t_1>0$ і така функція $\varphi\in E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\beta_0)}$, для яких розв'язок відповідної задачі – ряд (3.23) не належить до простору $C^2\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\beta)}\right)$. Для того, щоб ряд (3.23) при деяких $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ належав до простору $C^2\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\beta)}\right)$ (при умові, що функція φ належить до простору $E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\beta_0)}$ при деяких α_0,β_0), якщо число t_1 є таким, для якого існували б сталі $C_2>0$, $\omega,\nu\in\mathbb{R}$, для яких нерівність

$$|\sin((d_1+d_2)t_1k/2)|\geqslant C_2(1+|k|)^{-\omega}\exp(-\nu k^2) \tag{3.24}$$

виконувалась б для всіх чисел $k\in\mathbb{Z}$. Справді, в цьому випадку для довільних $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ таких, що $\alpha\leqslant\alpha_0-\omega-4$, $\beta=\beta_0-\nu-a_2t_1$, для функції u, зображеної рядом (3.23), виконується нерівність

$$\left\|u;C^2\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\beta)}\right)\right\|\leqslant C_3\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{|k|^8|\varphi_k|^2e^{2a_2t_1k^2}}{\sin^2((d_1+d_2)t_1k/2)}(1+|k|)^{2\alpha}e^{2\beta k^2}}\leqslant$$

$$\leqslant C_4\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|\varphi_k|^2(1+|k|)^{2(\alpha+\omega+4)}e^{2(\beta+\nu+a_2t_1)k^2}}=C_4\left\|\varphi;E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\beta_0)}\right\|\cdot \tag{3.25}$$

Відзначимо, що відповідь на питання про виконання нерівності (3.24) можна пов'язати з арифметичними властивостями числа t_1. Оскільки для всіх $z\in[-\pi/2;\pi/2]$ виконується нерівність $|\sin z|\geqslant\frac{2}{\pi}|z|$, то

$$|\sin((d_1+d_2)t_1k/2)|=|\sin((d_1+d_2)t_1k/2-\pi m(k))|\geqslant 2|k|\left|\frac{(d_1+d_2)t_1}{2\pi}-\frac{m(k)}{k}\right|,$$

де $m(k)\in\mathbb{Z}$, $-\frac{\pi}{2}<(d_1+d_2)t_1k/2-\pi m(k)\leqslant\frac{\pi}{2}$. Таким, чином нерівність (3.24) випливає з нерівності $\left|\frac{(d_1+d_2)t_1}{2\pi}-\frac{m(k)}{k}\right|\geqslant\frac{2C_2}{(1+|k|)^{\omega-1}\exp(\nu k^2)}$, а ця нерівність характеризує наскільки добре число $\frac{(d_1+d_2)t_1}{2\pi}$ наближається раціональним дробом $\frac{m(k)}{k}$.

Із нерівності (3.25) та теореми Ярніка-Безіковича про наближення дійсних чисел раціональними дробами (теореми 2.5) випливає таке твердження про розв'язність задачі (3.22).

Твердження 3.1. *Якщо* $\varphi \in E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\beta_0)}$, *то при* $\omega > 3$ *для всіх чисел* t_1 *(крім, можливо, множини, розмірність Гаусдорфа якої не перевищує* $\frac{2}{\omega-1}$*) існує єдиний розв'язок задачі* (3.22) *з простору* $C^2\Big([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0-\omega-2,\beta_0-a_2T)}\Big)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (3.23) *і неперервно залежить від функції* φ.

Розглянемо другий випадок задачі (3.22), коли $a_1 < a_2$. Тоді очевидно, що нерівність $|e^{(a_2-a_1)k^2-i(d_2+d_1)k)t_1} - 1| \geqslant |1 - e^{(a_2-a_1)t_1k^2}| \geqslant \frac{1}{2}$ виконується для всіх цілих чисел k, $|k| > \sqrt{\frac{\ln 2}{(a_2-a_1)t_1}} + 1$, бо для таких чисел k, $e^{(a_2-a_1)t_1k^2} \leqslant \frac{1}{2}$. У цьому випадку, коли $a_1 \neq a_2$, в задачі (3.22) відсутня проблема малих знаменників і справедливе таке твердження.

Твердження 3.2. *Нехай в задачі* (3.22) $a_1 < a_2$ *і* $\varphi \in E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\beta_0)}$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (3.22) *з простору* $C^2\Big([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0-4,\beta_0-a_2t_1)}\Big)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (3.23) *і неперервно залежить від функції* φ.

Перейдемо до встановлення достатніх умов існування єдиного розв'язку задачі (3.1) — (3.3).

Теорема 3.2. *Нехай справджується умова* (3.16) *та існують* $\omega \in \mathbb{R}$ *і* $\vec{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_p) \in \mathbb{R}^p$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{N}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k,\vec{t})| > (\lambda^b_{k_1} + \ldots + \lambda^b_{k_p})^{-\omega} \exp(-\nu_1\lambda^b_{k_1} - \ldots - \nu_p\lambda^b_{k_p}). \tag{3.26}$$

Якщо $\varphi_1, \varphi_2 \in E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\vec{\beta}_0)}$, *де* $\alpha_0 = \alpha+\omega+2$, $\vec{\beta}_0 = \vec{\beta}+\vec{\nu}-\vec{\delta}t_1$, $\vec{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$, $0 < \delta_j < \min\{a^1_j, a^2_j\}$, $j \in \{1, \ldots, p\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3.1) — (3.3) *з простору* $C^2\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec{\beta})}\right)$. *Цей розв'язок зображує-*

ться формулою (3.21), *причому виконується нерівність*

$$\left\|u; C^2\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec{\beta})}\right)\right\| \leqslant C_5\left(\left\|\varphi_1; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\vec{\beta}_0)}\right\| + \left\|\varphi_2; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\vec{\beta}_0)}\right\|\right).$$

Доведення. Для доведення теореми встановимо оцінки для коренів $\mu_q(k)$, $q \in \{1,2\}$, та їх дійсних частин. Із рівностей (3.11) випливає, що

$$-(\vec{\xi}, \lambda_k^b) \leqslant \operatorname{Re}\mu_q(k) \leqslant -(\vec{\delta}, \lambda_k^b), \quad q \in \{1,2\}, \quad k \in \mathbb{N}^p, \tag{3.27}$$

$$|\mu_q(k)| \leqslant C_6|\lambda_k^b|, \quad q \in \{1,2\}, \quad k \in \mathbb{N}^p, \tag{3.28}$$

де $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$, $\xi_j > \max\{a_j^1, a_j^2\}$, $j \in \{1,\ldots,p\}$, $C_6 > \max\limits_{j\in\{1,\ldots,p\}}\{\xi_j\}$. Тоді із оцінок (3.27), (3.28) отримуємо, що для кожного $t \geqslant 0$ справджуються нерівності

$$|(t^j e^{\mu_q(k)t})^{(r)}| \leqslant C_7|\lambda_k^b|^r \exp(-\vec{\delta}t, \lambda_k^b),\ j\in\{0,1\},\ q\in\{1,2\},\ r\in\{0,1,2\}. \tag{3.29}$$

На підставі оцінок (3.26), (3.29) із формули (3.20) отримуємо, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_k^{(r)}(t)\right| \leqslant C_8\sum_{q=1}^{2}|\varphi_{qk}||\lambda_k^b|^{r+\omega}\exp(\vec{\nu} - \vec{\delta}t_1, \lambda_k^b),\ \ r\in\{0,1,2\},\ \ k \in \mathbb{N}^p.$$

Отже,

$$\left\|u; C^2\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec{\beta})}\right)\right\| \leqslant \sum_{r=0}^{2}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\max_{t\in[0,T]}|u_k^{(r)}(t)|^2|\lambda_k^b|^{2\alpha}\exp(2\vec{\beta}, \lambda_k^b)\Bigg)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_9\sum_{q=1}^{2}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}^p}|\varphi_{qk}|^2|\lambda_k^b|^{2(\alpha+\omega+2)}\exp\left(2(\vec{\beta} + \vec{\nu} - \vec{\delta}t_1), \lambda_k^b\right)\Bigg)^{1/2} =$$

$$= C_9\sum_{q=1}^{2}\left\|\varphi_q; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\vec{\beta}_0)}\right\|. \tag{3.30}$$

Із оцінки (3.30) випливає доведення теореми. $\Diamond$

Теорема 3.3. *Якщо виконуються умови теореми 3.2, то для кожного фіксованого* $t_* \in [0,T]$ *функція* $u(t_*, x)$ *за змінними* $x_1, \ldots, x_p$ *належить до простору* $E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec{\beta}+\vec{\delta}t_*)}$.

Доведення. Із формули (3.20) на підставі оцінок (3.26), (3.29) отримуємо, що для кожного фіксованого $t_* \in [0, T]$

$$|u_k(t_*)| \leqslant C_{10} \sum_{q=1}^{2} |\varphi_{qk}||\lambda_k^b|^{\omega} \exp(\vec{\nu} - \vec{\delta}(t_1 + t_*), \lambda_k^b), \quad k \in \mathbb{N}^p. \tag{3.31}$$

На підставі нерівності (3.31) та умов теореми 3.2 знаходимо, що для кожного фіксованого $t_* \in [0, T]$

$$\left\| u(t_*, \cdot); E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha, \vec{\beta} + \vec{\delta} t_*)} \right\| \leqslant C_{11} \sqrt{\sum_{q=1}^{2} \sum_{k \in \mathbb{N}^p} |\varphi_{qk}|^2 |\lambda_k^b|^{2(\alpha+\omega)} \exp\left(2(\vec{\beta} + \vec{\nu} - \vec{\delta} t_1), \lambda_k^b\right)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{12} \left(\left\| \varphi_1; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0, \vec{\beta}_0)} \right\| + \left\| \varphi_2; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0, \vec{\beta}_0)} \right\| \right).$$

Зауваження 3.1. На відміну від безтипних та гіперболічних рівнянь для параболічного рівняння (3.1) зі зростанням часу t підвищується гладкість розв'язку двоточкової задачі $u(t, x)$ порівняно з гладкістю функцій φ_1, φ_2 за просторовими змінними $(x_1, \ldots, x_p)$.

Наступне твердження описує рівняння (3.1), для яких виконується оцінка (3.26) з належно вибраними показниками $\omega \in \mathbb{R}$ і $\vec{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_p) \in \mathbb{R}^p$.

Теорема 3.4. *Нехай для кожного* $j \in \{1, \ldots, p\}$ *справджується нерівність*

$$a_j^1 > a_j^2. \tag{3.32}$$

Якщо $\omega = 0$, $\vec{\nu} = \vec{\xi}(t_1 + t_2) + \vec{\eta}(t_1 - t_2)$, *де* $\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_p)$, $0 < \eta_j < a_j^1 - a_j^2$, $j \in \{1, \ldots, p\}$, *то оцінка* (3.26) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{N}^p$.

Доведення. З нерівностей (3.32) отримуємо, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{N}^p$ виконується нерівність

$$\mathrm{Re}\,(\mu_2(k) - \mu_1(k)) \geqslant (\vec{\eta}, \lambda_k^b). \tag{3.33}$$

Із оцінки (3.33) випливає, що множина $\mathcal{M}$ є не більш ніж скінченною. Нехай

$$N = \begin{cases} \max\limits_{k\in\mathcal{M}} |\lambda_k|, & \mathcal{M} \neq \varnothing, \\ 0, & \mathcal{M} = \varnothing. \end{cases}$$

Тоді для всіх $k \in \mathbb{N}^p$ таких, що $|\lambda_k| > N$, визначник $\Delta(k, \vec{t})$ обчислюється за формулою (3.14). Оскільки для довільного $z \in \mathbb{C}$ такого, що $\operatorname{Re} z \geqslant \zeta > 0$, виконується нерівність

$$|\exp(z) - 1| \geqslant \exp(\zeta) - 1,$$

то з формули (3.14) на підставі оцінки (3.33) дістаємо, що

$$|\Delta(k,\vec{t})| \geqslant \exp(\operatorname{Re}(\mu_1(k)t_2 + \mu_2(k)t_1)) \left|\exp((\vec{\eta}, \lambda_k^b)(t_2 - t_1)) - 1\right|, \quad (3.34)$$

якщо $|\lambda_k| > N$. Враховуючи, що $\exp(\zeta) - 1 \geqslant \frac{1}{2}\exp(\zeta)$ для всіх $\zeta \geqslant 1$, та оцінки (3.27), отримуємо, що нерівність

$$|\Delta(k,\vec{t})| \geqslant \exp(-\vec{\xi}(t_1 + t_2) - \vec{\eta}(t_1 - t_2), \lambda_k^b)$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{N}^p$. Теорему доведено. $\Diamond$

Дослідимо питання про можливість виконання оцінки (3.26).

Позначимо: $s_j = (\underbrace{0, \ldots, 0, b-1}_{j}, 0, \ldots, 0)$, $j \in \{1, \ldots, p\}$, — мультиіндекс довжини p, на j-ому місці якого знаходиться $b-1$, а на решті місць — нулі;

$y_j = \operatorname{Im}(A^1_{s_j} - A^2_{s_j})$, $j \in \{1, \ldots, p\}$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_p)$;

$\Pi = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_p, d_p]$, $c_j, d_j \in \mathbb{R}$, $c_j < d_j$, $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Теорема 3.5. *Нехай $\rho \in (p-1; p]$. Для майже всіх (стосовно ρ-міри Гаусдорфа) векторів $\vec{y} \in \Pi$ нерівність* (3.26) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{N}^p$ при $\omega > \omega_1$, $\vec{\nu} = \vec{\xi}(t_1 + t_2)$, де $\vec{\xi}$ – вектор з оцінок* (3.27)*,*

$$\omega_1 = \frac{p/(2b) + 1 - 1/b}{\rho - p + 1} - \frac{b-1}{b}.$$

Доведення. Нехай

$$F(\lambda_k) = \sum_{|s|<b} \mathrm{Im}(A_s^1 - A_s^2)\lambda_{k_1}^{s_1} \ldots \lambda_{k_p}^{s_p} - \sum_{j=1}^{p} y_j \lambda_{k_j}^{b-1}.$$

Позначимо через $V^\omega(\lambda_k, m)$ множину тих векторів $\vec{y} \in \Pi$, для яких нерівність

$$\left| \sum_{j=1}^{p} y_j \lambda_{k_j}^{b-1} \tau + F(\lambda_k)\tau - m \right| < |\lambda_k^b|^{-\omega}, \quad \tau = (t_2 - t_1)/\pi, \tag{3.35}$$

виконується для фіксованих $k \in \mathbb{N}^p$ і $m \in \mathbb{Z}$, а через V^ω — множину тих векторів $\vec{y} \in \Pi$, які належать до нескінченної кількості множин $V_q^\omega(\lambda_k, m)$, $k \in \mathbb{N}^p$, $m \in \mathbb{Z}$. Очевидно, що існує стала $C_{13} = C_{13}(p, b, c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_p) > 0$ така, що для всіх $m \in \mathbb{Z}$, $|m| > C_{13}|\lambda_k^{b-1}|$, множина $V^\omega(\lambda_k, m)$ є порожньою.

Розглянемо тепер випадок, коли $|m| \leqslant C_{13}|\lambda_k^{b-1}| = M(\lambda_k)$. Нехай $\lambda_{k_{j_0}} = \max\limits_{j \in \{1,\ldots,p\}} \{\lambda_{k_j}\}$, і нехай $V^\omega(\lambda_k, m, y_1, \ldots, y_{j_0-1}, y_{j_0+1}, \ldots, y_p) = \{y_{j_0} \in \mathbb{R} : (y_1, \ldots, y_p) \in V^\omega(\lambda_k, m)\}$. Якщо $V^\omega(\lambda_k, m) \neq \varnothing$, то існують $y_1, \ldots, y_{j_0-1}$, $y_{j_0+1}, \ldots, y_p$ такі, що $V^\omega(\lambda_k, m, y_1, \ldots, y_{j_0-1}, y_{j_0+1}, \ldots, y_p)$ є не порожнім інтервалом радіуса $\left(\tau|\lambda_k^b|^\omega \lambda_{k_{j_0}}^{b-1}\right)^{-1}$. Тоді множину $V^\omega(\lambda_k, m)$ можна покрити кулями $S_r(\lambda_k, m)$, $r \in \{1, \ldots, J(\lambda_k)\}$, радіуса $\left(\tau|\lambda_k^b|^\omega \lambda_{k_{j_0}}^{b-1}\right)^{-1}$, кількість $J(\lambda_k)$ яких не перевищує $C_{14}\left(|\lambda_k^b|^\omega \lambda_{k_{j_0}}^{b-1}\right)^{p-1}$. Зауважимо, що при $\omega > \omega_1$ правильними є включення

$$V^\omega = \bigcap_{K=0}^{\infty} \bigcup_{|\lambda_k| \geqslant K} \bigcup_{0 \leqslant |m| \leqslant M(\lambda_k)} V^\omega(\lambda_k, m) \subset$$

$$\subset \bigcap_{K=0}^{\infty} \bigcup_{|\lambda_k| \geqslant K} \bigcup_{0 \leqslant |m| \leqslant M(\lambda_k)} \bigcup_{r=1}^{J(\lambda_k)} S_r(\lambda_k, m). \tag{3.36}$$

Тому кожна точка з множини V^ω належить до нескінченної кількості куль $S_r(\lambda_k, m)$, $r \in \{1, \ldots, J(\lambda_k)\}$, $0 \leqslant |m| \leqslant M(\lambda_k)$, $k \in \mathbb{N}^p$. Із (3.36) на підставі оцінок (3.6) отримуємо

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\sum_{0\leqslant|m|\leqslant M(\lambda_k)}\sum_{r=1}^{J(\lambda_k)}(\operatorname{diam}S_r(\lambda_k,m))^\rho=\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\sum_{0\leqslant|m|\leqslant M(\lambda_k)}\sum_{r=1}^{J(\lambda_k)}\left(\frac{1}{\tau|\lambda_k^b|^\omega\lambda_{k_{j_0}}^{b-1}}\right)^\rho\leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\frac{1}{|\lambda_k|^{(\omega b+b-1)(\rho-p+1)-b+1}}\leqslant C_{16}\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\frac{1}{|k|^{2((\omega b+b-1)(\rho-p+1)-b+1)}}. \quad (3.37)$$

При $\omega>\frac{p/(2b)+1-1/b}{\rho-p+1}-\frac{b-1}{b}$ ряд (3.37) збігається, тоді за теоремою 2.6 ρ-міра Гаусдорфа множини V^ω дорівнює нулеві. Для завершення доведення теореми залишається врахувати, що

$$|\Delta(k,\vec{t})|\geqslant\exp(\operatorname{Re}\mu_1(k)t_2+\operatorname{Re}\mu_2(k)t_1)\times$$

$$\times\left|\sin\left(\operatorname{Im}(\mu_2(k)-\mu_1(k))(t_2-t_1)\right)\right|,\quad k\in\mathbb{N}^p\setminus\mathcal{M}, \quad (3.38)$$

а також те, що

$$|\sin\left(\operatorname{Im}(\mu_2(k)-\mu_1(k))(t_2-t_1)\right)|\geqslant\frac{2}{\pi}|\operatorname{Im}(\mu_2(k)-\mu_1(k))(t_2-t_1)-m\pi|=$$

$$=2\left|\sum_{|s|<b}\operatorname{Im}(A_s^1-A_s^2)\tau\lambda_{k_1}^{s_1}\ldots\lambda_{k_p}^{s_p}-m\right|, \quad (3.39)$$

де ціле число m є таким, що

$$-1/2\leqslant\sum_{|s|<b}\operatorname{Im}(A_s^1-A_s^2)\tau\lambda_{k_1}^{s_1}\ldots\lambda_{k_p}^{s_p}-m<1/2.$$

На підставі оцінок (3.27), (3.38) та (3.39) отримуємо, що для майже всіх (стосовно ρ-міри Гаусдорфа) векторів $\vec{y}\in\Pi$ нерівність

$$|\Delta(k,\vec{t})|\geqslant|\lambda_k^b|^{-(p/(2b)+1-1/b)/(\rho-p+1)+(b-1)/b}\exp(-\vec{\xi}(t_1+t_2),\lambda_k^b)$$

виконується (для всіх крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{N}^p$. Теорему доведено. $\Diamond$

Нехай $H_\omega^{\vec{\nu}}$, $\omega\in\mathbb{R}$, $\vec{\nu}\in\mathbb{R}^p$, — множина тих векторів $\vec{y}\in\Pi$, для яких виконується оцінка (3.26). Із теореми 3.5 випливає наслідок про розмірність Гаусдорфа множини $\Pi\backslash H_\omega^{\vec{\nu}}$.

Наслідок 3.2. *Для довільного* $\omega > \frac{p}{2b}$ *розмірність Гаусдорфа множин* $\Pi \setminus H_\omega^{\vec{\nu}}$, *не перевищує* $p - 1 + \frac{p/(2b)+1-1/b}{\omega+1-1/b}$, *якщо* $\vec{\nu} = \vec{\xi}(t_1 + t_2)$.

З теорем 3.2 — 3.5 випливають такі твердження про коректну розв'язність задачі (3.1) — (3.3).

Наслідок 3.3. *Нехай виконуються нерівності* (3.32). *Якщо* $\varphi_1, \varphi_2 \in E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_1,\vec{\beta}_1)}$, *де* $\alpha_1 = \alpha + 2$, $\vec{\beta}_1 = \vec{\beta} + \vec{\xi}(t_1 + t_2) + \vec{\eta}(t_1 - t_2) - \vec{\delta} t_1$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3.1) — (3.3) *з простору* $C^2\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec{\beta})}\right)$. *Цей розв'язок зображується рядом* (3.21) *і неперервно залежить від функцій* φ_1, φ_2.

Наслідок 3.4. *Нехай* $\rho \in (p-1; p]$. *Якщо* $\varphi_1, \varphi_2 \in E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\vec{\beta}_0)}$, *де*

$$\alpha_0 = \alpha + \frac{p/(2b) + 1 - 1/b}{\rho - p + 1} + \frac{1}{b} + 1 + \varepsilon, \quad \vec{\beta}_0 = \vec{\beta} - \vec{\delta} t_1 + \vec{\xi}(t_1 + t_2), \quad \varepsilon > 0,$$

то для майже всіх (стосовно ρ*-міри Гаусдорфа) векторів* $\vec{y} \in \Pi$ *у просторі* $C^2\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec{\beta})}\right)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (3.1) — (3.3). *Цей розв'язок справджує нерівність*

$$\left\| u; C^2\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha,\vec{\beta})}\right)\right\| \leqslant C_{17} \sum_{j=1}^{2} \left\| \varphi_j; E^{\mathbf{X_1}}_{w_1(\alpha_0,\vec{\beta}_0)}\right\|.$$

Зауваження 3.2. У попередніх дослідженнях багатоточкових задач для гіперболічних та безтипних рівнянь встановлено, що оцінки типу (3.26) виконуються:

1) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із *коефіцієнтів рівнянь* та *вузлів інтерполяції* $t_1, \ldots, t_n$ (див. [19, 92, 117]);

2) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із *вузлів інтерполяції* $t_1, \ldots, t_n$ для довільних фіксованих коефіцієнтів рівнянь (див. [75]). У теоремі 3.5 доведено, що оцінка (3.26) виконується для майже всіх (стосовно ρ-міри Гаусдорфа) векторів, складених із *коефіцієнтів рівняння* (3.1).

3.2. Задача з багатоточковими умовами для рівнянь вищих порядків (випадок простих вузлів)

У підпунктах 3.2.1 та 3.2.2 досліджено багатоточкові задачі для параболічних за Петровським рівнянь високого порядку з операторами Штурма-Ліувілля та $2\vec{b}$-параболічних рівнянь з оператором Бесселя за однією з просторових змінних. Побудовано розв'язки задач за системами ортогональних функцій. Встановлено умови коректної розв'язності цих задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із вузлів інтерполяції.

3.2.1. Рівняння з операторами Штурма-Ліувілля за просторовими змінними. В паралелепіпеді D_T^p розглянемо задачу

$$W\left(\frac{\partial}{\partial t},\vec{L}\right)u := \sum_{s_0=0}^{n}\sum_{bs_0+|s|=bn} A_{s_0,s}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} L_1^{s_1}\ldots L_p^{s_p}u(t,x) = f(t,x), \quad (3.40)$$

$$u(t_j,x)=\varphi_j(x), \quad j\in\{1,\ldots,n\}, \quad 0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_n\leqslant T, \quad (3.41)$$

$$L_j^m u(t,x)\Big|_{x_j=0} = L_j^m u(t,x)\Big|_{x_j=\pi} = 0, m\in\{0,1,\ldots,bn-1\}, j\in\{1,\ldots,p\}, \quad (3.42)$$

де $A_{s_0,s}\in\mathbb{C}$, $A_{n,(0)}=1$, L_j, $j\in\{1,\ldots,p\}$, — диференціальні вирази означені формулами (3.4), коефіцієнти яких справджують такі умови гладкості: $p_j\in C^{2bn-1}([0,\pi])$, $q_j\in C^{2bn-2}([0,\pi])$, $j\in\{1,\ldots,p\}$.

Припустимо, що рівняння (3.40) є рівномірно параболічним за Петровським в області D_T^p.

У цьому підрозділі система функцій $\mathbf{X}_1$ та послідовність $\{\lambda_k,\, k\in\mathbb{N}^p\}$, є такими, як в підрозділі 3.1, а $w_2(\alpha,\beta):=w_2(\alpha,\beta;\lambda_k)=|\lambda_k|^{\alpha}\exp(\beta|\lambda_k|^b)$, де $|\lambda_k|=\lambda_{k_1}+\ldots+\lambda_{k_p}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Розв'язок задачі (3.40) — (3.42) з простору $C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$, шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{N}^p} u_k(t)X_{k_1}(x_1)\cdots X_{k_p}(x_p). \quad (3.43)$$

Кожен коефіцієнт $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}^p$, ряду (3.43) визначаємо рівністю

$$u_k(t) = v_k(t) + h_k(t),$$

де функція $v_k(t)$, $k \in \mathbb{N}^p$, є розв'язком задачі

$$\frac{d^n v_k(t)}{dt^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0+|s|=bn} A_{s_0,s}\lambda_{k_1}^{s_1}\ldots\lambda_{k_p}^{s_p}\frac{d^{s_0}v_k(t)}{dt^{s_0}} = f_k(t), \tag{3.44}$$

$$v_k(t_j) = 0, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \quad k \in \mathbb{N}^p, \tag{3.45}$$

де $f_k(t) = \int\limits_{\Pi^p} f(t,x)X_{k_1}(x_1)\cdots X_{k_p}(x_p)dx$, а функція $h_k(t)$, $k \in \mathbb{N}^p$, є розв'язком задачі

$$\frac{d^n h_k(t)}{dt^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0+|s|=bn} A_{s_0,s}\lambda_{k_1}^{s_1}\ldots\lambda_{k_p}^{s_p}\frac{d^{s_0}h_k(t)}{dt^{s_0}} = 0, \tag{3.46}$$

$$h_k(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \quad k \in \mathbb{N}^p, \tag{3.47}$$

де $\varphi_{jk} = \int\limits_{\Pi^p} \varphi_j(x)X_{k_1}(x_1)\cdots X_{k_p}(x_p)dx$, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Нехай $\mu_1(k),\ldots,\mu_{l(k)}(k)$ — різні корені рівняння

$$\mu^n + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{bs_0+|s|=bn} A_{s_0,s}\lambda_{k_1}^{s_1}\ldots\lambda_{k_p}^{s_p}\mu^{s_0} = 0 \tag{3.48}$$

з кратностями $n_1(k),\ldots,n_{l(k)}(k)$ відповідно, $n_1(k)+\ldots+n_{l(k)}(k) = n$. Зі структури рівняння (3.48), згідно з [110, с.102], випливають оцінки

$$|\mu_j(k)| \leqslant C_1|\lambda_k|^b, \; j \in \{1,\ldots,l(k)\}, \; k \in \mathbb{N}^p. \tag{3.49}$$

Із параболічності рівняння (3.40) випливає, що μ-корені рівняння (3.48) справджують оцінки

$$\operatorname{Re}\mu_j(k) \leqslant -\delta_1|\lambda_k|^b, \quad \delta_1 > 0, \quad j \in \{1,\ldots,l(k)\}. \tag{3.50}$$

Користуючись означенням 2.4 побудуємо сукупність функцій

$$u_{k,q,r_q}(t) := R_{(\mu_1(k),\ldots,\mu_{q-1}(k),\mu_q(k))}^{(n_1(k),\ldots,n_{q-1}(k),r_q)}[\exp(\mu t)], \quad k \in \mathbb{N}^p, \tag{3.51}$$

$r_q \in \{1,\dots,n_q(k)\}$, $q \in \{1,\dots,l(k)\}$, $t \in \mathbb{R}$, кожна з яких є поділеною різницею порядку $n_1(k)+\ldots+n_{q-1}(k)+r_q-1$ за набором коренів $\mu_1(k),\ldots$, $\mu_{q-1}(k), \mu_q(k)$, з кратностями $n_1(k),\dots,n_{q-1}(k), r_q$, від функції $\exp(\mu t)$. Ці функції, утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.46). Вибір так побудованих функцій $u_{k,q,r_q}(t)$, $r_q \in \{1,\dots,n_q(k)\}, q \in \{1,\dots,l(k)\}$, спрощує обгрунтування розв'язності задачі (3.40) — (3.42).

Тоді розв'язок задачі (3.46), (3.47) зображується формулою

$$h_k(t) = \sum_{q=1}^{l(k)} \sum_{r_q=1}^{n_q(k)} C_{qr_q}(k) u_{k,q,r_q}(t),$$

де сталі $C_{qr_q}(k)$, $\quad r_q \in \{1,\dots,n_q(k)\}$, $\quad q \in \{1,\dots,l(k)\}$, визначаються зі системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{l(k)} \sum_{r_q=1}^{n_q(k)} C_{qr_q}(k) u_{k,q,r_q}(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j \in \{1,\dots,n\},$$

визначник якої

$$\Delta(k,\vec{t}\,) = \det \left\| u_{k,q,r_q}(t_j) \right\|_{j\in\{1,\dots,n\},\, r_q\in\{1,\dots,n_q(k)\}}^{q\in\{1,\dots,l(k)\}}. \tag{3.52}$$

Зауважимо, що визначник (3.52) збігається з характеристичним визначником задачі (3.45), (3.46). Враховуючи формули (2.7), (3.51), (3.52) отримуємо

$$\begin{aligned}\Delta(k,\vec{t}\,) = &\prod_{1\leqslant i<j\leqslant l(k)} (\mu_j(k)-\mu_i(k))^{-n_i(k)n_j(k)} \times \\ &\times \det \left\| \frac{t_j^{r_q-1}}{(r_q-1)!} \exp(\mu_q(k)t_j) \right\|_{j\in\{1,\dots,n\},\, r_q\in\{1,\dots,n_q(k)\}}^{q\in\{1,\dots,l(k)\}}.\end{aligned} \tag{3.53}$$

Відомо [103], що задача (3.40) — (3.42) не може мати двох різних розв'язків тоді і тільки тоді, коли відповідна їй однорідна задача має лише тривіальний розв'язок.

Теорема 3.6. *Для єдиності розв'язку задачі* (3.40) — (3.42) *у просторі* $C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k\in\mathbb{N}^p \quad \det\left\|\frac{t_j^{r_q-1}}{(r_q-1)!}\exp(\mu_q(k)t_j)\right\|_{j\in\{1,\dots,n\},\, r_q\in\{1,\dots,n_q(k)\}}^{q\in\{1,\dots,l(k)\}}\neq 0. \tag{3.54}$$

Доведення. Проводиться за схемою доведення теореми 3.1 із урахуванням формули (3.53). $\Diamond$

Зауваження 3.3. Якщо для кожного вектора $k\in\mathbb{N}^p$ всі $\mu_q(k)\in\mathbb{R}$, то за теоремою Пойя [129] (див. також вправу 8.3 у [113, с. 87]) про єдиність розв'язку багатоточкової задачі для звичайного диференціального оператора, який розкладається у композицію диференціальних операторів першого порядку з дійсними коефіцієнтами, випливає, що умова (3.54) виконується для довільних $t_1,\dots,t_n$, таких, що $0\leqslant t_1<\dots<t_n\leqslant T$.

Наведемо приклади багатоточкових задач для параболічних рівнянь для яких виконується, або порушується умова єдиності (3.54).

Нехай вираз $W\left(\partial/\partial t,\vec{L}\right)$ у рівнянні (3.40) має вигляд

$$W\left(\partial/\partial t,\vec{L}\right)u=\prod_{q=1}^{n}(\partial/\partial t+R_q(\vec{L}))u(t,x)=0,\quad (t,x)\in D_T^p, \tag{3.55}$$

де $R_q(\vec{L})=\sum\limits_{r=1}^{p}a_{q,r}L_r^b+\sum\limits_{|s|<b}A_{q,s}L_1^{s_1}\dots L_p^{s_p}$, $\mathrm{Re}a_{q,r}>0$, $r\in\{1,\dots,p\}$, $A_{q,s}\in\mathbb{C}$.

Приклад 3.3. Для рівняння (3.55) розглянемо задачу з умовами (3.41), (3.42), у яких

$$t_j=(j-1)t_0,\quad j\in\{1,\dots,n\},\quad 0<t_0\leqslant T/(n-1). \tag{3.56}$$

Для цієї задачі визначник (3.53) обчислюється за формулою

$$\begin{gathered}\Delta(k,t_0)=t_0^{\sigma(k)}\exp(\rho(k)t_0)\times\\ \times\prod_{1\leqslant q<j\leqslant l(k)}\left[\frac{\exp(-R_q(\lambda_k)t_0)-\exp(-R_j(\lambda_k)t_0)}{R_q(\lambda_k)-R_j(\lambda_k)}\right]^{n_j(k)n_q(k)},\end{gathered} \tag{3.57}$$

де $\sigma(k) = \sum\limits_{q=1}^{l(k)} \frac{n_q(k)(n_q(k)-1)}{2}$, $\rho(k) = \sum\limits_{q=1}^{l(k)} \frac{n_q(k)(n_q(k)-1)R_q(\lambda_k)}{2}$. З теореми 3.6 та формули (3.57) випливає, що для єдиності розв'язку задачі (3.41), (3.42), (3.55), (3.56) необхідно і досить, щоб для кожного $k \in \mathbb{N}^p$ та кожного $\ell \in \mathbb{Z}$ виконувались умови:

$$\sum_{r=1}^{p} \mathrm{Re}(a_{q,r}-a_{j,r})\lambda_{k_r}^b + \sum_{|s|<b} \mathrm{Re}(A_{q,s} - A_{j,s})\lambda_{k_1}^{s_1}\dots\lambda_{k_p}^{s_p} \neq 0,\ 1 \leqslant q < j \leqslant l(k),$$

або

$$\sum_{r=1}^{p} \mathrm{Im}(a_{q,r}-a_{j,r})\lambda_{k_r}^b + \sum_{|s|<b} \mathrm{Im}(A_{q,s} - A_{j,s})\lambda_{k_1}^{s_1}\dots\lambda_{k_p}^{s_p} \neq \frac{2\pi\ell}{t_0},\ 1 \leqslant q < j \leqslant l(k).$$

Зокрема, якщо в цій задачі $p = 1$, $R_q(\vec{L}) = -(a + ic_q)\partial^2/\partial x^2$, $q \in \{1, \dots, n\}$, $a > 0$, $c_q \in \mathbb{R}$, то у цьому випадку умова (3.54) виконується, якщо всі числа $(c_q - c_j)t_0/\pi$, $1 \leqslant q < j \leqslant l(k)$, є ірраціональними.

Приклад 3.4. Нехай у рівнянні (3.55) $R_q(\vec{L}) = qR(\vec{L})$, $q \in \{1, \dots, n\}$, де $R(\vec{L}) = \sum\limits_{r=1}^{p} a_r L_r^b + \sum\limits_{|s|<b} A_s L_1^{s_1} \dots L_p^{s_p}$, $\mathrm{Re} a_r > 0$, $A_s \in \mathbb{C}$. Тоді визначник (3.53) обчислюється за формулою

$$\Delta(k,\vec{t}) = \exp(-(t_1 + \dots + t_n)R(\lambda_k)) \prod_{1\leqslant q<j\leqslant n} \frac{\exp(-R(\lambda_k)t_j) - \exp(-R(\lambda_k)t_q)}{(j-q)R(\lambda_k)}.$$

Для єдиності розв'язку задачі (3.41), (3.42), (3.55) у просторі $C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)$ необхідно і досить, щоб виконувались умови

$$R(\lambda_k)(t_q - t_j) \neq 2\pi i\ell, \quad 1 \leqslant q < j \leqslant n, \quad k \in \mathbb{N}^p,\ \ell \in \mathbb{Z}.$$

Нехай виконується умова (3.54). Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}^p$ існує єдиний розв'язок задачі (3.44), (3.47), який зображується формулою

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau + \sum_{q=1}^{l(k)} \sum_{r_q=1}^{n_q(k)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q,r_q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}\varphi_{jk}u_{k,q,r_q}(t), \qquad (3.58)$$

де $\Delta_{j,q,r_q}(k,\vec{t})$ — алгебричне доповнення елемента $u_{k,q,r_q}(t_j)$ у визначнику (3.52), а $G_k(t,\tau)$ — функція Ґріна [60, 70, 103] задачі (3.45), (3.46).

У кожній із областей $K_j = \{(t,\tau) : 0 \leqslant t \leqslant T,\ t_j < \tau < t_{j+1}\}$, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = T$, функція $G_k(t,\tau)$, збігається, відповідно, з функцією

$$\begin{gathered} G_{k,j}(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2} u_{k,l(k),n_l(k)}(t-\tau) + \sum_{m=1}^{j} (-1)^{m+1} F_{km}(t,\tau) - \\ - \sum_{m=j+1}^{n} (-1)^{m+1} F_{km}(t,\tau), \quad j \in \{0,1,\ldots,n\}, \end{gathered} \tag{3.59}$$

де

$$F_{km}(t,\tau) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{l(k)} \sum_{r_q=1}^{n_q(k)} \frac{\Delta_{m,q,r_q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})} u_{k,q,r_q}(t) u_{k,l(k),n_l(k)}(t_m - \tau). \tag{3.60}$$

На відрізках прямих $\tau = t_j$, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, доозначуємо функцію $G_k(t,\tau)$ за неперервністю по τ справа, а при $\tau = T$ — за неперервністю зліва.

На основі формул (3.43), (3.58) одержуємо формальне зображення розв'язку задачі (3.40) — (3.42) у вигляді ряду

$$\begin{gathered} u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^p} \Bigg(\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau + \\ + \sum_{q=1}^{l(k)} \sum_{r_q=1}^{n_q(k)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q,r_q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})} \varphi_{jk} u_{k,q,r_q}(t) \Bigg) X_{k_1}(x_1) \cdots X_{k_p}(x_p). \end{gathered} \tag{3.61}$$

Збіжність ряду (3.61) у просторах $C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)$, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, на що вказує такий приклад.

Приклад 3.5. В області D_T^2 розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) u + \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right) u + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u = 0, \\ u(0,x) = 0, \quad u(T,x) = \varphi(x), \quad x = (x_1,x_2) \in (0,\pi)^2, \\ \left.\frac{\partial^{2m} u(t,x)}{\partial x_q^{2m}}\right|_{x_q=0} = \left.\frac{\partial^{2m} u(t,x)}{\partial x_q^{2m}}\right|_{x_q=\pi} = 0, \quad m \in \{0,1\}, q \in \{1,2\}. \end{cases} \tag{3.62}$$

Якщо число $T/\pi \notin \mathbb{Q}$, то розв'язок цієї задачі можна зобразити у вигляді формального ряду

$$u(t,x)=\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2}\frac{(e^{-(k_1^2+k_2^2+ik_2)t}-e^{-(k_1^2+k_2^2-ik_2)t})\varphi_k}{e^{-(k_1^2+k_2^2+ik_2)T}(e^{2ik_2T}-1)}\sin(k_1x_1)\sin(k_2x_2). \quad (3.63)$$

Оскільки $|e^{2ik_2T}-1| = 2|\sin(k_2T)| = 2|\sin(k_2T-\pi m(k_2))| \leqslant 2\pi k_2\left|\frac{T}{\pi}-\frac{m(k_2)}{k_2}\right|$, де $m(k_2)\in\mathbb{Z}$, $-\pi/2 < k_2T-\pi m(k_2) \leqslant \pi/2$, то за теоремою Хінчина (теорема 2.3) випливає, що існує таке число $T>0$, $T/\pi\notin\mathbb{Q}$, що нерівність $\left|\frac{T}{\pi}-\frac{m}{k_2}\right| < \frac{\exp(-k_2^{2k_2})}{2\pi k_2}$ має нескінченну кількість розв'язків у натуральних числах k_2 і цілих m. Для вибраного у такий спосіб числа T/π нерівність

$$|e^{2ik_2T}-1| \leqslant \exp(-k_2^{k_2})$$

виконується для нескінченної множини K натуральних чисел k_2. Нехай функція $\varphi \in E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_0)}$, де $\mathbf{X_1} = \{\sin(k_1x_1)\sin(k_2x_2)/(2\pi), (k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2\}$, $w_2(\alpha_0,\beta_0) = (k_1^2+k_2^2)^{\alpha_0}\exp(\beta_0(k_1^2+k_2^2))$, $\alpha_0,\beta_0\in\mathbb{R}$, в задачі (3.62) і має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2}\varphi_k\sin(k_1x_1)\sin(k_2x_2), \varphi_k = (k_1^2+k_2^2)^{-\alpha_0-1}\exp(-\beta_0(k_1^2+k_2^2)).$$

Тоді для функції $u(t,x)$ зображеної рядом (3.63) дістанемо, що

$$\left\|u(t,x); C^2\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)\right\| \geqslant \left\|\partial_t u(t,x)|_{t=0}; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right\| =$$

$$=\sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{|ik_2\varphi_k|^2e^{2T(k_1^2+k_2^2)}}{|e^{2ik_2T}-1|^2}(k_1^2+k_2^2)^{2\alpha}\exp(2\beta(k_1^2+k_2^2))} \geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2\in K}(k_1^2+k_2^2)^{2\alpha-2\alpha_0}e^{2|k_2|^{|k_2|}+2(\beta+T-\beta_0)(k_1^2+k_2^2)}} = +\infty,$$

якими б небули числа $\alpha,\alpha_0,\beta,\beta_0\in\mathbb{R}$. Таким чином, існує таке число $T>0$ і функція φ, що $\varphi\in E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_0)}$, а розв'язок задачі (3.62) не належить до шкали просторів $C^2\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)$.

Ряд (3.63) при деяких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ належить до простору $C^2\Big([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\Big)$ (при умові, що функція φ належить до простору $E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_0)}$ при деяких α_0, β_0), якщо число T є таким, для якого існували б сталі $C_2 > 0$, $\omega, \nu \in \mathbb{R}$, для яких нерівність

$$|e^{2ik_2T} - 1| \geqslant C_2 k_2^{-\omega} \exp(-\nu k_2^2) \tag{3.64}$$

виконувалась б для всіх натуральних чисел k_2. Справді, в цьому випадку для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, що $\alpha \leqslant \alpha_0 - \omega - 4$, $\beta = \beta_0 - \nu - T$, для функції $u(t,x)$, зображеної рядом (3.63), виконується нерівність

$$\left\|u; C^2\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)\right\| \leqslant C_3 \sqrt{\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2} \frac{(1+|k|)^8 |\varphi_k|^2 e^{2T(k_1^2+k_2^2)}}{|e^{2ik_2T}-1|^2} w_2^2(\alpha,\beta)} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sqrt{\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2} |\varphi_k|^2 (k_1^2+k_1^2)^{2(\alpha+\omega+4)} \exp(2(\beta+T)(k_1^2+k_1^2))} = \tag{3.65}$$

$$= C_3 \|\varphi; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_0)}\|.$$

Із нерівності (3.65) та теорем Рота, Бореля про наближення дійсних чисел раціональними дробами (теореми 2.2, 2.4) випливають такі твердження про розв'язність задачі (3.62).

Твердження 3.3. *Нехай в задачі* (3.62) $\varphi \in E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_0)}$*, а число T має вигляд $T = \pi\xi$, де ξ — дійсне алгебричне число степеня не нижчого від 2 (наприклад $\xi = \sqrt[3]{5}$). Тоді існує єдиний розв'язок цієї задачі з простору $C^2\Big([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\Big)$, де $\alpha = \alpha_0 - 5 - \varepsilon$, $\beta = \beta_0 - T$, $\varepsilon > 0$. Цей розв'язок зображується рядом* (3.63) *і неперервно залежить від функції φ (наслідок з теореми Рота).*

Твердження 3.4. *Якщо $\varphi \in E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_0)}$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега на прямій) чисел T в просторі $C^2\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)$, де $\alpha = \alpha_0 - 5 - \varepsilon$, $\beta = \beta_0 - T$, $\varepsilon > 0$, існує єдиний зображуваний рядом* (3.63) *розв'язок задачі* (3.62)*, який неперервно залежить від функції $\varphi \in E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_0)}$ (наслідок з теореми Бореля).*

Встановимо достатні умови існування розв'язку задачі (3.40) — (3.42).

Теорема 3.7. *Нехай справджується умова* (3.54)*, та існують сталі* $\omega, \nu \in \mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{N}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k, \vec{t})| > |\lambda_k|^{-\omega} \exp(-\nu|\lambda_k|^b). \tag{3.66}$$

Якщо $f \in C\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_1)}\right)$*,* $\varphi_j \in E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_2)}$*,* $j \in \{1,\ldots,n\}$*, де* $\alpha_0 = \alpha + \omega + bn$*,* $\beta_1 = \beta + \nu + (T - nt_1)\delta_1$*,* $\beta_2 = \beta + \nu - (n-1)\delta_1 t_1$*, то існує єдиний розв'язок задачі* (3.40) — (3.42) *із простору* $C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)$*. Цей розв'язок зображується формулою* (3.61)*, причому*

$$\left\|u; C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)\right\| \leqslant C_4\left(\left\|f; C\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_1)}\right)\right\| + \sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_j; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_2)}\right\|\right).$$

Доведення. Із твердження леми 2.4 на підставі оцінок (3.49), (3.50) знаходимо, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u^{(s_0)}_{k,q,r_q}(t)\right| \leqslant C_5|\lambda_k|^{bs_0},\ s_0 \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{3.67}$$

де $q \in \{1, \ldots, l(k)\}$, $r_q \in \{1,\ldots, n_q(k)\}$. Оскільки $\Delta_{j,q,r_q}(k, \vec{t})$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $q \in \{1, \ldots, l(k)\}$, $r_q \in \{1,\ldots, n_q(k)\}$, є алгебричним доповненням елемента $u_{k,q,r_q}(t_j)$ у визначнику $\Delta(k, \vec{t})$, то, враховуючи оцінки (3.67), встановлюємо

$$|\Delta_{j,q,r_q}(k, \vec{t})| \leqslant (n-1)!(C_5)^{n-1} \exp\{-(n-1)\delta_1 t_1|\lambda_k|^b\}, \tag{3.68}$$

де $j \in \{1, \ldots, n\}$, $q \in \{1, \ldots, l(k)\}$, $r_q \in \{1,\ldots, n_q(k)\}$. Згідно властивостей функції Гріна, отримуємо

$$\frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau = \sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial^{s_0}G_{k,j}(t,\tau)}{\partial t^{s_0}} f_k(\tau)d\tau + \delta_{s_0,n}f_k(t), \tag{3.69}$$

де $s_0 \in \{0, 1, \ldots, n\}$, а $\delta_{s_0,n}$ – символ Кронекера.

Із формул (3.59), (3.60), (3.69) на підставі оцінок (3.66) — (3.68) отримуємо

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}}\int\limits_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau\right|\leqslant C_6\overline{f}_k|\lambda_k|^{bs_0}\exp\{(\nu+(T-nt_1)\delta_1)|\lambda_k|^b\}, \quad (3.70)$$

де $s_0\in\{0,1,\dots,n\}$, $\overline{f}_k=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|f_k(t)|$. Враховуючи нерівності (3.66) — (3.68), та (3.70) із формули (3.58) встановлюємо, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_k^{(s_0)}(t)\right|\leqslant C_7\overline{f}_k|\lambda_k|^{bs_0}\exp\{(\nu+(T-nt_1)\delta_1)|\lambda_k|^b\}+$$

$$+C_8\sum_{j=1}^n|\varphi_{jk}||\lambda_k|^{bs_0}\exp\{(\nu-(n-1)\delta_1t_1)|\lambda_k|^b\},$$

де $s_0\in\{0,1,\dots,n\}$. Отже

$$\left\|u;C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)\right\|\leqslant\sum_{s_0=0}^n\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\max_{t\in[0,T]}|u_k^{(s_0)}(t)|^2|\lambda_k|^{2\alpha}\exp(2\beta|\lambda_k|^b)}\leqslant$$

$$\leqslant C_9\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}^p}\overline{f}_k^2|\lambda_k|^{2\alpha+2bn}\exp\{2(\beta+\nu+(T-nt_1)\delta_1)|\lambda_k|^b\}}+$$

$$+C_{10}\sum_{j=1}^n\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}^p}|\varphi_{jk}|^2|\lambda_k|^{2\alpha+2bn}\exp\{2(\beta+\nu-(n-1)\delta_1t_1)|\lambda_k|^b\}}\leqslant$$

$$\leqslant C_{11}\left(\left\|f;C\left([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_1)}\right)\right\|+\sum_{j=1}^n\left\|\varphi_j;E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_2)}\right\|\right).$$

З отриманої нерівності випливає твердження теореми. $\Diamond$

Зауваження 3.4. Якщо в теоремі 3.7 $\alpha>n+p/2$, то справедливе вкладення просторів $C^n([0,T];E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)})\subset C^{(n,2bn)}(\overline{D^p_T})$, а розв'язок задачі (3.40) — (3.42) є класичним.

Наведемо приклади задач для яких виконується нерівність (3.66).

Приклад 3.6. Розглянемо задачу з умовами (3.41), (3.42) для рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a_1L_1^b+\ldots+a_pL_p^b\right)^n u(t,x)=0,\ a_j>0, j\in\{1,\dots,p\},\ (t,x)\in D^p_T.$$

Для цієї задачі визначник (3.53) обчислюється за формулою

$$\Delta(k,\vec{t}) = C_{12}\exp(-(a_1\lambda_{k_1}^b + \ldots + a_p\lambda_{k_p}^b)(t_1 + \ldots + t_n)), \tag{3.71}$$

де $C_{12} = \prod\limits_{r=1}^{n-1}(r!)^{-1}\prod\limits_{1\leqslant q<j\leqslant n}(t_j - t_q)$. Легко бачити, що для визначника (3.71) нерівність (3.66) виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{N}$, при $\omega = 0$, $\nu = a(t_1 + \ldots + t_n)$, де $a = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant p}\{a_j\}$.

Встановимо твердження про виконання нерівності (3.66) для більш загальних параболічних рівнянь.

Теорема 3.8. *Нехай рівняння* (3.40) *має вигляд* (3.55)*, де*

$$-\operatorname{Re} R_1(\lambda_k) < \ldots < -\operatorname{Re} R_n(\lambda_k) \leqslant -\widetilde{\delta}|\lambda_k|^b,\ k \in \mathbb{N}^p,\ \widetilde{\delta} < \min_{1\leqslant q\leqslant n}\min_{1\leqslant r\leqslant p}\{a_{q,r}\}.$$

Тоді нерівність (3.66) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{N}^p$, якщо $\omega > n(n-1)b/2$, $\nu = \widetilde{a}(t_1 + \ldots + t_n)$, $\widetilde{a} = \max\limits_{1\leqslant q\leqslant n}\max\limits_{1\leqslant r\leqslant p}\{a_{q,r}\}$.*

Доведення. Для задачі (3.41), (3.42), (3.55) визначник $\Delta(k,\vec{t})$, $k \in \mathbb{N}$, зображується формулою

$$\Delta(k,\vec{t}) = \prod_{1\leqslant q<j\leqslant n}\frac{\Delta_1(k,\vec{t})}{(R_q(\lambda_k) - R_j(\lambda_k))}, \tag{3.72}$$

де $\Delta_1(k,\vec{t}) = \det\|\exp(-R_q(\lambda_k)t_j)\|_{j,q\in\{1,\ldots,n\}}$. Використаємо таку властивість дійсних чисел, доведення якої можна знайти в [22]: якщо дійсні числа $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{R}$ є такими, що $x_1 < \ldots < x_n$, $y_1 < \ldots < y_n$, то для довільної перестановки $(i_1,\ldots,i_n) \in \mathcal{J}_n$, $(i_1,\ldots,i_n) \neq (1,\ldots,n)$ (тут $\mathcal{J}_n$– симетрична група всіх перестановок елементів множини $\{1,\ldots,n\}$) виконується нерівність

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n > x_{i_1}y_1 + \ldots + x_{i_n}y_n.$$

Згідно з наведеною властивістю та умовою теореми, для всіх $(i_1,\ldots,i_n) \in$

$\mathcal{J}_n$, $(i_1,\ldots,i_n)\neq(1,\ldots,n)$, нерівність

$$\begin{aligned}\exp(-(\mathrm{Re}R_1(\lambda_k)t_1+\ldots+\mathrm{Re}R_n(\lambda_k)t_n))>\\ >2(n!-1)\exp(-(\mathrm{Re}R_{i_1}(\lambda_k)t_1+\ldots+\mathrm{Re}R_{i_n}(\lambda_k)t_n))\end{aligned}\tag{3.73}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{N}^p$. Очевидно, що

$$\begin{aligned}|\Delta_1(k,\vec{t})|\geqslant\Bigg|\exp(-(\mathrm{Re}R_1(\lambda_k)t_1+\ldots+\mathrm{Re}R_n(\lambda_k)t_n))-\\ -\Bigg|\sum_{\substack{\varpi=(i_1,\ldots,i_n)\in\mathcal{J}_n,\\(i_1,\ldots,i_n)\neq(1,\ldots,n)}}(-1)^{inv\varpi}\exp(-(R_{i_1}(\lambda_k)t_1+\ldots+R_{i_n}(\lambda_k)t_n))\Bigg|\Bigg|.\end{aligned}\tag{3.74}$$

Із оцінок (3.73) випливає, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{N}^p$ виконується нерівність

$$\begin{aligned}\Bigg|\sum_{\substack{\varpi(i_1,\ldots,i_n)\in\mathcal{J}_n,\\(i_1,\ldots,i_n)\neq(1,\ldots,n)}}(-1)^{inv\varpi}\exp(-(R_{i_1}(\lambda_k)t_1+\ldots+R_{i_n}(\lambda_k)t_n))\Bigg|\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{2}\exp(-(\mathrm{Re}R_1(\lambda_k)t_1+\ldots+\mathrm{Re}R_n(\lambda_k)t_n)).\end{aligned}$$

Враховуючи нерівність (3.74) отримуємо

$$\begin{aligned}|\Delta_1(k,\vec{t})|\geqslant\frac{1}{2}\exp(-(\mathrm{Re}R_1(\lambda_k)t_1+\ldots+\mathrm{Re}R_n(\lambda_k)t_n))\geqslant\\ \geqslant\frac{1}{2}\exp(-\widetilde{a}(t_1+\ldots+t_n)|\lambda_k|^b).\end{aligned}\tag{3.75}$$

Із формули (3.72) на підставі оцінок (3.75), та того, що $|R_q(\lambda_k)-R_j(\lambda_k)|\leqslant C_{13}|\lambda_k|^b$, $1\leqslant q<j\leqslant n$, отримуємо твердження теореми. $\Diamond$

Вияснимо можливість виконання нерівності (3.66). Позначимо: $m_0=0$, $m_r(k)=n_1(k)+\ldots+n_r(k)$, $r\in\{1,\ldots,l(k)\}$;

$$g_q(t,k)=t^{q-m_{j-1}(k)-1}/((q-m_{j-1}(k)-1)!)\exp(\mu_j(k)t),\quad q\in\{1,\ldots,n\};$$

$$P_q(\mu,k)=(\mu-\mu_1(k))^{n_1(k)}\cdots(\mu-\mu_{j-1}(k))^{n_{j-1}(k)}(\mu-\mu_j(k))^{q-m_{j-1}(k)},q\in\{1,\ldots,n\};$$

$$Z_q(k) = 1, \quad q \in \{1, \dots, n_1(k)\};$$

$$Z_q(k) = (\mu_j(k) - \mu_1(k))^{n_1(k)} \cdots (\mu_j(k) - \mu_{j-1}(k))^{n_{j-1}(k)}, \quad q \in \{n_1(k)+1, \dots, n\};$$

де індекс $j = j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}(k) < q \leqslant m_j(k)$; $\delta_2 = \sup_{k \in \mathbb{N}^p} \max_{q \in \{1,\dots,l(k)\}} \{|\mathrm{Re}\mu_q(k)|/|\lambda_k|^b\}$;

$$\Upsilon(k; \vec{t}) = \det \|g_q(t_j, k)\|_{j,q \in \{1,\dots,n\}};$$

$$\Upsilon_q(k; t_1, \dots, t_q) = \det \|g_r(t_j, k)\|_{j,r \in \{1,\dots,q\}}, \quad q \in \{1, \dots, n\}.$$

Теорема 3.9. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0, T]^n$ *і для довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння* (3.40) *нерівність* (3.66) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{N}^p$ *при* $\omega > n(n-1)(p/2+b)/2$, $\nu = n\delta_2 T$.

Доведення. Згідно з лемою Бореля-Кантеллі (див. лему 2.1) для доведення теореми досить встановити, що при $\omega > n(n-1)(p/2+b)/2$, $\nu = n\delta_2 T$ ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^p} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} \{\vec{t} \in [0, T]^n : |\Delta(k, \vec{t})| < |\lambda_k|^{-\omega} \exp(-\nu |\lambda_k|^b)\} \tag{3.76}$$

є збіжним. Для цього відзначимо, що з формули (3.53) випливає $\Delta(k, \vec{t}) = \Upsilon(k; \vec{t}) \prod_{q=1}^{n} Z_q^{-1}(k)$. Тому ряд (3.76) збігається тоді, коли збіжним є ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^p} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A(k), \tag{3.77}$$

де $A(k) = \{\vec{t} \in [0, T]^n : |\Upsilon(k; \vec{t})| < |\lambda_k|^{-\omega} \exp(-\nu |\lambda_k|^b) \prod_{q=1}^n Z_q(k)\}$. Встановимо збіжність ряду (3.77). Зауважимо, що виконується включення

$$A(k) \subset \bigcup_{q=2}^{n} A_q(k), \quad k \in \mathbb{N}^p, \tag{3.78}$$

де $A_q(k) = \{\vec{t} \in [0, T]^n : |\Upsilon_q(k; t_1, \dots, t_q)| < \nu_q(k), |\Upsilon_{q-1}(k; t_1, \dots, t_{q-1})| \geqslant \nu_{q-1}(k)\}$, а числа $\nu_q(k), \quad q \in \{1, \dots, n\}$, визначаються рівностями

$$\nu_q(k) = |\lambda_k|^{-q(q-1)(p/2+b)/2 - \varepsilon_q} \exp(-q\delta_2 T |\lambda_k|^b) \prod_{j=1}^{q} |Z_j(k)|,$$

де $0 < \varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_n = \omega - n(n-1)(p/2+b)/2$. На підставі (3.78) та адитивності міри Лебега випливає, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{N}^p$

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} A(k) \leqslant \sum_{q=2}^{n} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} A_q(k). \tag{3.79}$$

Згідно з теоремою Фубіні [31, с. 119], для кожного q, $q \in \{2, \ldots, n\}$,

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} A_q(k) = \int\limits_{[0,T]^{n-1}} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} A_q(k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_{q-1} dt_{q+1} \ldots dt_n, \tag{3.80}$$

де $A_q(k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) = \{t_q \in [0,T] : \vec{t} \in A_q(k)\}$. Застосуємо лему 2.2 для оцінки зверху мір Лебега множин $A_q(k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n)$, $q \in \{2, \ldots, n\}$. Для цього зауважимо, що функція $\Upsilon_q(k; t_1, \ldots, t_q)$ як функція змінної t_q (при фіксованих $t_1, \ldots, t_{q-1}$) є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $C_1 T |\lambda_k|^b$. Крім того, з розвинення визначника $\Upsilon_q(k; t_1, \ldots, t_q)$, за елементами останнього рядка випливають рівності

$$P_{q-1}\left(\frac{\partial}{\partial t_q}, k\right) \Upsilon_q(k; t_1, \ldots, t_q) = \exp(\mu_j(k) t_q) Z_q(k) \Upsilon_{q-1}(k; t_1, \ldots, t_{q-1}), \tag{3.81}$$

де $q \in \{2, \ldots, n\}$, а індекс $j = j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}(k) < q \leqslant m_j(k)$.

Якщо $\vec{t} \in A_q(k)$, $q \in \{2, \ldots, n\}$, то з формул (3.81) та означення множин $A_q(k)$, випливає, що

$$\forall t_q \in [0,T] \quad \left| P_{q-1}\left(\frac{\partial}{\partial t_q}, k\right) \Upsilon_q(k; t_1, \ldots, t_q) \right| \geqslant \frac{\nu_{q-1}(k) |Z_q(k)|}{\exp(\delta_2 T |\lambda_k|^b)}. \tag{3.82}$$

Очевидно, що для кожного q, $q \in \{2, \ldots, n\}$, степінь многочлена $P_{q-1}(\beta, k)$ за змінною β дорівнює $q-1$, а модуль коефіцієнта при β^{q-j-1}, $j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, в цьому многочлені, не перевищує $C_{14} |\lambda_k|^{bj}$, де $C_{14} = C_{14}(n, C_1)$. Тому з оцінок (3.82) та леми 2.2 отримуємо, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} A_q(k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) \leqslant C_{15} |\lambda_k|^b \sqrt[q-1]{\frac{\nu_q(k) \exp(\delta_2 T |\lambda_k|^b)}{\nu_{q-1}(k) |Z_q(k)|}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{16}|\lambda_k|^{-p/2-\varepsilon}, \quad q \in \{2, \ldots, n\}, \tag{3.83}$$

де $\varepsilon = \min\limits_{q=\overline{2,n}}\{(\varepsilon_q - \varepsilon_{q-1})/(q-1)\}$. На підставі (3.6), (3.80), (3.83) маємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A_q(k) \leqslant C_{16}T^{n-1}|\lambda_k|^{-p/2-\varepsilon} \leqslant C_{17}|k|^{-p-2\varepsilon}, \quad q \in \{2, \ldots, n\}. \tag{3.84}$$

З нерівностей (3.79), (3.84) випливає збіжність ряду (3.77). $\diamondsuit$

З теорем 3.7, 3.9 випливає таке твердження про розв'язність задачі (3.40) — (3.42) для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$.

Наслідок 3.5. *Нехай* $f \in C\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_1)}\right)$, $\varphi_j \in E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha_0,\beta_2)}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_0 = \alpha + n((n-1)p/4 + (n+1)b/2)$, $\beta_1 = \beta + \delta_1 T + n(\delta_2 T - \delta_1 t_1)$, $\beta_2 = \beta + n\delta_2 T - (n-1)\delta_1 t_1$. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0,T]^n$ *існує єдиний розв'язок задачі* (3.40) — (3.42) *із простору* $C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_1}}_{w_2(\alpha,\beta)}\right)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (3.61) *і неперервно залежить від функцій* f *та* φ_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

3.2.2. Рівняння з оператором Бесселя за однією з просторових змінних. Нехай $\vec{b} = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{N}^p$, $p \geqslant 2$, — заданий вектор, b — найменше спільне кратне чисел $b_1, \dots, b_p$, $q_j := b/b_j$, $j \in \{1, \dots, p\}$; $s = (s_1, \dots, s_p) := (s', s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s|^* = \sum\limits_{j=1}^{p-1} s_j q_j + 2 s_p q_p$, $|s'| = s_1 + \ldots + s_{p-1}$, $|s| = |s'| + s_p$; $k = (k_1, \dots, k_p) := (k', k_p)$, $k' \in \mathbb{Z}^{p-1}$, $k_p \in \mathbb{N}$, $|k'| = |k_1| + \ldots + |k_{p-1}|$; $\mathbf{X}' = \{\exp(ik', x'), k' \in \mathbb{Z}^{p-1}\}$; $w'(\alpha, \beta) := w'(\alpha, \beta; k') = \Big(k_1^{2b_1} + \ldots + k_{p-1}^{2b_{p-1}}\Big)^{\alpha} \exp\Big(\beta(k_1^{2b_1} + \ldots + k_{p-1}^{2b_{p-1}})\Big)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\mathcal{D}_T^p = \{(t, x) : t \in (0, T), x = (x', x_p) \in \mathcal{O}_\ell^p\}$, де $\mathcal{O}_\ell^p = \Omega^{p-1} \times (0, \ell)$.

В області $\mathcal{D}_T^p$ розглянемо задачу про знаходження розв'язку рівняння

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{2bs_0 + |s|^* = 2bn} A_{s_0,s} \frac{\partial^{s_0+|s'|} \mathcal{B}_\sigma^{s_p} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_{p-1}^{s_{p-1}}} = f(t,x), \tag{3.85}$$

який справджує багатоточкові умови (3.41), та умови 2π-періодичності за змінними $x_1, \dots, x_{p-1}$, а за змінною x_p умови

$$\begin{cases} \big\| u(t, x', 0); C([0,T]; E^{\mathbf{X}'}_{w'(\alpha,\beta)}) \big\| < \infty, \ \frac{\partial^{2m+1} u(t,x)}{\partial x_p^{2m+1}} \Big|_{x_p=0} = 0, \\ m \in \{0, 1, \dots, nb_p - 2\}, \ \mathcal{B}_\sigma^q u(t,x) \big|_{x_p=\ell} = 0, \ q \in \{0, 1, \dots, nb_p - 1\}, \end{cases} \tag{3.86}$$

де $A_{s_0,s} \in \mathbb{C}$;

$$\mathcal{B}_\sigma = -\frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{2\sigma + 1}{x_p} \frac{\partial}{\partial x_p}$$

— оператор Бесселя порядку σ, $\sigma \geqslant -1/2$, $\mathcal{B}_\sigma^q u = \mathcal{B}_\sigma(\mathcal{B}_\sigma^{q-1} u)$, $q \in \{1, \dots, nb_p\}$, $\mathcal{B}_\sigma^0 u = u$. Вважаємо, що рівняння (3.85) є $2\vec{b}$-параболічним в області $\mathcal{D}_T^p$.

Відомо [51], що задача

$$\mathcal{B}_\sigma J(x_p) + \lambda J(x_p) = 0, \quad |J(0)| < \infty, \quad J(\ell) = 0$$

має повну ортонормовану в ваговому просторі $L_2((0,\ell); x_p^{2\sigma+1})$ систему власних функцій $\{j_\nu(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p) / \|j_\sigma(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p)\|, \ k_p \in \mathbb{N}\}$ і множину власних значень $\{\lambda_{k_p} = (\theta_{k_p}/\ell)^2, \ k_p \in \mathbb{N}\}$, де $\|j_\sigma(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p)\|^2 = \int_0^\ell x_p^{2\sigma+1} j_\sigma^2(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p) dx_p$, а $\theta_{k_p}, k_p \in \mathbb{N}$,— корені рівняння $j_\sigma(\theta\ell) = 0$; при цьому справджуються оцінки

$$C_1 k_p^2 \leqslant \lambda_{k_p} \leqslant C_2 k_p^2, \quad 0 < C_1 < C_2, \quad k_p \in \mathbb{N}. \tag{3.87}$$

Враховуючи твердження леми з праці [64, с. 217] випливає, що система функцій $\mathbf{X_2} = \{\exp(ik', x')j_\nu\big(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\big)/((2\pi)^{p-1}\|j_\sigma(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p)\|),\ k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}\}$ є повною і ортонормованою у ваговому просторі $L_2(\mathcal{O}_\ell^p; x_p^{2\sigma+1})$. У цьому підрозділі $\lambda_k = (k', \lambda_{k_p}) = (k_1, \ldots, k_{p-1}, \lambda_{k_p})$, $k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}$; $\|\lambda_k^{2\vec{b}}\| = k_1^{2b_1} + \ldots + k_{p-1}^{2b_{p-1}} + \lambda_{k_p}^{b_p}$; $w_3(\alpha, \beta) := w_3(\alpha, \beta; \lambda_k) = \|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^\alpha \exp(\beta\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|)$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Нехай

$$f(t,x) = \sum_{|k'|\geqslant 0} \sum_{k_p=1}^{\infty} f_k(t) \exp(ik', x') j_\sigma\left(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\right),$$

$$\varphi_j(x) = \sum_{|k'|\geqslant 0} \sum_{k_p=1}^{\infty} \varphi_{jk} \exp(ik', x') j_\sigma\big(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\big), \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

де

$$f_k(t) = (2\pi)^{-p+1} \left\| j_\sigma\left(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\right)\right\|^{-2} \int\limits_{\mathcal{O}_\ell^p} f(t,x) \exp(-(ik', x')) j_\sigma\big(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\big) x_p^{2\sigma+1} dx,$$

$$\varphi_{jk} = (2\pi)^{-p+1} \left\| j_\sigma\left(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\right)\right\|^{-2} \int\limits_{\mathcal{O}_\ell^p} \varphi_j(x) \exp(-(ik', x')) j_\sigma\big(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\big) x_p^{2\sigma+1} dx.$$

Розв'язок задачі (3.41), (3.85), (3.86) з простору $C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha,\beta)}\right)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k'|\geqslant 0} \sum_{k_p=1}^{\infty} u_k(t) \exp(ik', x') j_\sigma\left(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\right). \tag{3.88}$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}$, є, відповідно, розв'язком багатоточкової задачі

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{2bs_0+|s|^*=2bn} A_{s_0,s} (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_{p-1})^{s_{p-1}} (\lambda_{k_p})^{s_p} \frac{d^{s_0} u_k(t)}{dt^{s_0}} = f_k(t), \tag{3.89}$$

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \tag{3.90}$$

Позначимо через $\mu_1(k), \dots, \mu_{l(k)}(k)$ різні корені рівняння (яке є характеристичним для (3.89))

$$\mu^n + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{2bs_0+|s|^*=2bn} A_{s_0,s}(ik_1)^{s_1} \dots (ik_{p-1})^{s_{p-1}}(\lambda_{k_p})^{s_p}\mu^{s_0} = 0 \tag{3.91}$$

з кратностями $n_1(k), \dots, n_{l(k)}(k)$ відповідно, $n_1(k)+\dots+n_{l(k)}(k) = n$. Для цих коренів справедливі оцінки

$$|\mu_q(k)| \leqslant C_3\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|, \quad k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}, \quad q \in \{1, \dots, l(k)\}, \tag{3.92}$$

де $C_3 = 2 \max\limits_{m\in\{1,\dots,n\}} \left(\max\limits_{|s|^*=2bm} |A_{n-m,s}| \right)^{1/m}$. Із означення $2\vec{b}$-параболічності [32] рівняння (3.85) випливає, що μ-корені рівняння (3.91) справджують оцінки

$$\mathrm{Re}\mu_q(k) \leqslant -\delta_1\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|, \quad \delta_1 > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N},\ q \in \{1, \dots, l(k)\}. \tag{3.93}$$

Враховуючи, що $|\mathrm{Re}\mu_q(k)| \leqslant |\mu_q(k)|$, $q \in \{1, \dots, l(k)\}$, на підставі оцінок (3.92) отримуємо, що величина $\delta_2 = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^{p-1}\times\mathbb{N}} \max\limits_{q\in\{1,\dots,l(k)\}} \{|\mathrm{Re}\mu_q(k)|/\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|\}$ є скінченною. Тому виконуються нерівності

$$|\exp(\mu_q(k)t)| = \exp\left(-\frac{|\mathrm{Re}\mu_q(k)|t}{\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|}\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|\right) \geqslant \exp(-\delta_2 T\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|), \tag{3.94}$$

де $t \in [0, T]$, $k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}$, $q \in \{1,\dots, l(k)\}$.

Фундаментальну систему $u_{k,q,r_q}(t)$, $r_q \in \{1, \dots, n_q(k)\}$, $q \in \{1, \dots, l(k)\}$, розв'язків рівняння (3.89) побудуємо за формулою (3.51). Характеристичний визначник задачі (3.89), (3.90) є таким:

$$\Delta(k, \vec{t}) = \det\left\|u_{k,q,r_q}(t_j)\right\|_{j\in\{1,\dots,n\},\, r_q\in\{1,\dots,n_q(k)\}}^{q\in\{1,\dots,l(k)\}}. \tag{3.95}$$

Теорема 3.10. *Для єдиності розв'язку задачі* (3.41), (3.85), (3.86) *у просторі* $C^n\left([0, T]; E_{w_3(\alpha,\beta)}^{\mathbf{X_2}}\right)$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N} \qquad \Delta(k, \vec{t}) \neq 0. \tag{3.96}$$

Запишемо умову єдиності (3.96) розв'язку задачі (3.41), (3.85), (3.86) коли виконуються співвіношення (3.56). У цьому випадку

$$\Delta(k,t_0)=t_0^{\sigma(k)}\exp(\rho(k)t_0)\prod_{1\leqslant q<j\leqslant l(k)}\left[\frac{\exp(\mu_j(k)t_0)-\exp(\mu_q(k)t_0)}{\mu_q(k)-\mu_j(k)}\right]^{n_j(k)n_q(k)}, \tag{3.97}$$

де $\sigma(k) = \sum\limits_{q=1}^{l(k)} \frac{n_q(k)(n_q(k)-1)}{2}$, $\rho(k) = \sum\limits_{q=1}^{l(k)} \frac{n_q(k)(n_q(k)-1)\mu_q(k)}{2}$, а умова єдиності (3.96) виконується, якщо кожне рівняння

$$\mu_j(k)-\mu_q(k)=2\pi i\ell/t_0, \quad 1\leqslant q<j\leqslant l(k),$$

немає розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_{p-1},\ell$, та $k_p\in\mathbb{N}$.

Надалі вважатимемо, що справджується умова (3.96). Тоді для кожного $k\in\mathbb{Z}^{p-1}\times\mathbb{N}$ існує розв'язок задачі (3.89), (3.90), який зображується формулою

$$u_k(t)=\int\limits_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau+\sum_{q=1}^{l(k)}\sum_{r_q=1}^{n_q(k)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q,r_q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}\varphi_{jk}u_{k,q,r_q}(t), \tag{3.98}$$

де $\Delta_{j,q,r_q}(k,\vec{t})$ — алгебричне доповнення елемента $u_{k,q,r_q}(t_j)$ у визначнику $\Delta(k,\vec{t})$, $G_k(t,\tau)$ — функція Ґріна задачі (3.89), (3.90), яка визначена в квадраті $\{(t,\tau):0\leqslant t\leqslant T, 0\leqslant\tau\leqslant T\}$ і в області $K_j=\{(t,\tau):0\leqslant t\leqslant T,\ t_j<\tau<t_{j+1}\}$, $j\in\{0,1,\ldots,n\}$, $t_0=0$, $t_{n+1}=T$, збігається, відповідно, з функцією

$$G_{k,j}(t,\tau)=\frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2}u_{k,l(k),n_l(k)}(t-\tau)+\sum_{m=1}^{j}(-1)^{m+1}F_{km}(t,\tau)-$$

$$-\sum_{m=j+1}^{n}(-1)^{m+1}F_{km}(t,\tau), \quad j\in\{0,1,\ldots,n\}, \tag{3.99}$$

$$F_{km}(t,\tau)=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{l(k)}\sum_{r_q=1}^{n_q(k)}\frac{\Delta_{m,q,r_q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}u_{k,q,r_q}(t)u_{k,l(k),n_l(k)}(t_m-\tau). \tag{3.100}$$

При $\tau = t_j$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, доозначуємо функцію $G_k(t, \tau)$ за неперервністю по τ справа, а при $\tau = T$ — за неперервністю зліва.

На основі формул (3.88), (3.98) формальний розв'язок задачі (3.41), (3.85), (3.86) зображується формулою

$$u(t,x) = \sum_{|k'|\geqslant 0} \sum_{k_p=1}^{\infty} \left(\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau + \right.$$
$$\left. + \sum_{q=1}^{l(k)} \sum_{r_q=1}^{n_q(k)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q,r_q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})} \varphi_{jk} u_{k,q,r_q}(t) \right) \exp(ik', x') j_\sigma\big(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p\big). \tag{3.101}$$

Збіжність ряду (3.101), взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k, \vec{t})|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}$.

Приклад 3.7. Для задачі

$$\begin{cases} \prod\limits_{q=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \mathcal{B}_\sigma + q \frac{\partial}{\partial x_1} \right) u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = 0, \quad u(t_1,x) = \varphi(x), \quad u(2t_1, x) = 0, \quad 0 < t_1 \leqslant T, \\ |u(t,x)\big|_{x_2=0}| < \infty, \ \frac{\partial^{2m+1} u(t,x)}{\partial x_2^{2m+1}}\Big|_{x_2=0} = \mathcal{B}_\sigma^q \Big|_{x_2=\ell} = 0, \ m \in \{0,1\}, \ q \in \{0,1,2\}, \end{cases}$$

де $(t,x) \in \mathcal{D}_T^2$, безпосереднім підрахунком отримуємо, що при $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0\}$

$$|\Delta(k,t_1)| = \frac{8e^{-3(k_1^4 + \lambda_{k_2})t_1}}{|k_1|^4} |\sin^3(k_1 t_1/2)| |\cos(k_1 t_1/2)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{8\pi e^{-3k_1^4 t_1}}{|k_1|^4} |\sin(k_1 t_1/2 - m\pi)| \leqslant \frac{e^{-3k_1^4 t_1}}{|k_1|^3} \left| \frac{t_1}{2\pi} - \frac{m}{k_1} \right|,$$

де m — таке ціле число, що $-1/2 < k_1 t_1/2 - m\pi \leqslant 1/2$. За теоремою про існування ірраціональних чисел, які як завгодно добре наближаються раціональними (теорема 2.3), для довільної додатньої функції $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ знайдеться таке ірраціональне число $\frac{t_1}{2\pi}$, для якого нерівність $\left| \frac{t_1}{2\pi} - \frac{m}{k_1} \right| < e^{3k_1^4 t_1} |k_1|^3 g(|k_1|)$, має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах k_1, m. Для вибраного у такий спосіб числа $\frac{t_1}{2\pi}$ нерівність $|\Delta(k,t_1)| < g(|k_1|)$ має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах k_1.

Теорема 3.11. *Нехай справджується умова* (3.96) *та існують сталі* $\omega, \nu \in \mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k,\vec{t})| > \|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^{-\omega} \exp(-\nu \|\lambda_k^{2\vec{b}}\|). \tag{3.102}$$

Якщо $f \in C\left([0,T]; E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha_0,\beta_1)}\right)$, $\varphi_j \in E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha_0,\beta_2)}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_0 = \alpha+\omega+n$, $\beta_1 = \beta + (T - nt_1)\delta_1$, $\beta_2 = \beta + \nu - (n-1)\delta_1 t_1$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3.41), (3.85), (3.86) *з простору* $C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha,\beta)}\right)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (3.101) *і неперервно залежить від функцій* f *та* φ_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Доведення. Із формули (3.98) отримуємо

$$\left\|u; C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha,\beta)}\right)\right\| = \sum_{s_0=0}^{n}\left(\sum_{|k'|\geqslant 0}\sum_{k_p=1}^{\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u_k^{(s_0)}(t)|^2 w_3^2(\alpha,\beta)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \sum_{s_0=0}^{n}\Bigg(\sum_{|k'|\geqslant 0}\sum_{k_p=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{q=1}^{l(k)}\sum_{r_q=1}^{n_q(k)}\sum_{j=1}^{n}\frac{|\Delta_{j,q,r_q}(k,\vec{t})|^2|\varphi_{jk}|^2}{|\Delta(k,\vec{t})|^2}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|u^{(s_0)}_{k,q,r_q}(t)|^2 +$$

$$+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}}\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)d\tau\right|^2\Bigg) w_3^2(\alpha,\beta)\Bigg)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.103}$$

Оцінемо тепер зверху модулі величин $\Delta_{j,q,r_q}(k,\vec{t})$, $u^{(s_0)}_{k,q,r_q}(t)$, $\frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}}\int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)d\tau$. Із твердження леми 2.4 на підставі оцінок (3.92), (3.93) одержуємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u^{(s_0)}_{k,q,r_q}(t)\right| \leqslant C_5\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^{s_0},\ s_0 \in \{0,1,\ldots,n\}, \tag{3.104}$$

де $q \in \{1,\ldots,l(k)\}$, $r_q \in \{1,\ldots,n_q(k)\}$. На підставі оцінок (3.93) та (3.104) отримуємо

$$|\Delta_{j,q,r_q}(k,\vec{t})| \leqslant C_6 \exp(-(n-1)\delta_1 t_1 \|\lambda_k^{2\vec{b}}\|), \tag{3.105}$$

де $j \in \{1,\ldots,n\}$, $q \in \{1,\ldots,l(k)\}$, $r_q \in \{1,\ldots,n_q(k)\}$, $C_6 = (n-1)!(C_5)^{n-1}$. Із формул (3.99), (3.100) на підставі оцінок (3.102), (3.104), (3.105) знаходимо

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}}\int\limits_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau\right|\leqslant \\ \leqslant C_7\overline{f}_k\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^{s_0+\omega}\exp((\nu+T\delta_1-(n-1)t_1\delta_1)\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|), \tag{3.106}$$

де $s_0 \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\overline{f}_k = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|f_k(t)|$. Враховуючи оцінки (3.102), (3.104) — (3.106) із (3.103) отримуємо

$$\left\|u; C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha,\beta)}\right)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant C_8\sqrt{\sum_{|k'|\geqslant 0}\sum_{k_p=1}^{\infty}\overline{f}_k^2\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^{2(\alpha+\omega+n)}\exp(2(\nu+T\delta_1-(n-1)t_1\delta_1)\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|)+}$$

$$+C_9\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{|k'|\geqslant 0}\sum_{k_p=1}^{\infty}|\varphi_{jk}|^2\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^{\alpha+\omega+n}\exp((\nu-(n-1)t_1\delta_1)\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|)}\leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\left(\left\|f; C\left([0,T]; E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha_0,\beta_1)}\right)\right\|+\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_j; E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha_0,\beta_2)}\right\|\right).$$

Із останньої нерівності випливає доведення теореми. $\Diamond$

Зауваження 3.5. Якщо виконуються умови теореми 3.11, то для кожного фіксованого $t_* \in [0,T]$ функція $u(t_*,x)$ за змінними $x_1,\ldots,x_p$ належить до простору $E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha,\beta+\delta_1 t_*)}$.

Дослідимо питання про можливість виконання нерівності (3.102). Позначимо: $\widetilde{b} = \min\limits_{j\in\{1,\ldots,p\}}\{b_j\}$; $m_r(k) = n_1(k)+\ldots+n_r(k)$, $r \in \{1,\ldots,l(k)\}$, $m_0(k) = 0$;

$$Z_q(k) = 1, \quad q \in \{1,\ldots,n_1(k)\},$$

$$Z_q(k) = (\mu_j(k)-\mu_1(k))^{n_1(k)}\cdots(\mu_j(k)-\mu_{j-1}(k))^{n_{j-1}(k)}, q \in \{n_1(k)+1,\ldots,n\};$$

$$g_q(t,k) = \exp(\mu_j(k)t)t^{q-m_{j-1}(k)-1}/((q-m_{j-1}(k)-1)!), \quad q \in \{1,\ldots,n\};$$

$$P_q(\beta,k)=\prod_{s=1}^{j-1}(\beta-\mu_s(k))^{n_s(k)}(\beta-\mu_j(k))^{q-m_{j-1}(k)},\quad q\in\{1,\ldots,n\},$$

де індекс $j=j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}(k)<q\leqslant m_j(k)$; $\Upsilon(k,\vec{t})=\det\|g_r(t_j,k)\|_{j\in\{1,\ldots,n\}}^{r\in\{1,\ldots,n\}}$, $\vec{\tau}_q=(t_1,\ldots,t_q)$, $q\in\{1,\ldots,n\}$, причому $\vec{\tau}_n=\vec{t}$, $\Upsilon_q(k,\vec{\tau}_q)=\det\|g_r(t_j,k)\|_{j\in\{1,\ldots,q\}}^{r\in\{1,\ldots,q\}}$.

Теорема 3.12. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t}\in[0,T]^n$ нерівність* (3.102) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^{p-1}\times\mathbb{N}$ при $\omega>n(n-1)(1+p/(2\widetilde{b}))/2$ і $\nu=n\delta_2T$.*

Доведення. Згідно з лемою Бореля-Кантеллі, для доведення теореми досить показати, що при $\omega=n(n-1)(1+p/(2\widetilde{b}))/2+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ і $\nu=n\delta_2T$, ряд

$$\sum_{|k'|\geqslant 0}\sum_{k_p=1}^{\infty}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n}W_\omega^\nu(k),\tag{3.107}$$

де $W_\omega^\nu(k)=\{\vec{t}\in[0,T]^n:|\Delta(k,\vec{t})|<\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^{-\omega}\exp(-\nu\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|)\}$, є збіжним. Розглянемо множини

$$V(k)=\{\vec{t}\in[0,T]^n:|\Upsilon(k,\vec{t})|<\nu_n(k)\},$$

$$V_q(k)=\{\vec{t}\in[0,T]^n:|\Upsilon_q(k,\vec{\tau}_q)|<\nu_q(k),|\Upsilon_{q-1}(k,\vec{\tau}_{q-1})|\geqslant\nu_{q-1}(k)\},$$

де $q\in\{2,\ldots,n\}$, а числа $\nu_q(k)$ визначаються рівностями

$$\nu_q(k)=\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^{-q(q-1)(1+p/(2\widetilde{b}))/2-\varepsilon(q-1)/(n-1)}\exp(-q\delta_2T\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|)\prod_{j=1}^{q}|Z_j(k)|.$$

Із формул (2.7), (3.51), (3.95) випливає, що $\Delta(k,\vec{t})=\Upsilon(k,\vec{t})\prod_{j=1}^{n}Z_j^{-1}(k)$, $k\in\mathbb{Z}^{p-1}\times\mathbb{N}$. Тому ряд (3.107) збігається тоді і тільки тоді, коли збіжним є ряд

$$\sum_{|k'|\geqslant 0}\sum_{k_p=1}^{\infty}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n}V(k).\tag{3.108}$$

Встановимо збіжність ряду (3.108). Зауважимо, що

$$V(k) \subset \bigcup_{q=2}^{n} V_q(k), \quad k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}. \tag{3.109}$$

На підставі (3.109) та адитивності міри Лебега випливає, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} V(k) \leqslant \sum_{q=2}^{n} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} V_q(k). \tag{3.110}$$

Оцінемо спочатку зверху міри Лебега множин $V_q(k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) = \{t_q \in [0,T] : \vec{t} \in V_q(k)\}$, $q \in \{2, \ldots, n\}$. Для цього використаємо лему 2.2. Зауважимо, що функція $\Upsilon_q(k, \vec{\tau}_q)$, $q \in \{2, \ldots, n\}$, як функція змінної t_q (при фіксованих $t_1, \ldots, t_{q-1}$) є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $C_3 T \|\lambda_k^{2\vec{b}}\|$; крім того, з розвинення визначника $\Upsilon_q(k, \vec{\tau}_q)$, $q \in \{2, \ldots, n\}$, за елементами останнього рядка випливають такі рівності:

$$P_{q-1}(\partial/\partial t_q, k) \Upsilon_q(k, \vec{\tau}_q) = \exp(\mu_j(k) t_q) \Upsilon_{q-1}(k, \vec{\tau}_{q-1}) Z_q(k), \tag{3.111}$$

де $q \in \{2, \ldots, n\}$, а індекс $j = j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}(k) < q \leqslant m_j(k)$. Якщо $\vec{t} \in V_q(k)$, $q \in \{2, \ldots, n\}$, то з формул (3.111) на підставі оцінок (3.94) та означення множин $V_q(k)$, отримуємо

$$\forall t_q \in [0,T] \;\; |P_{q-1}(\partial/\partial t_q, k) \Upsilon_q(k, \vec{\tau}_q)| \geqslant \nu_1(k) \nu_{q-1}(k) |Z_q(k)|, \tag{3.112}$$

де $q \in \{2, \ldots, n\}$. Очевидно, що для кожного $q \in \{2, \ldots, n\}$, степінь многочлена $P_{q-1}(\beta, k)$ за змінною β дорівнює $q-1$, а модуль коефіцієнта при β^{q-j-1}, $j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, в цьому многочлені, не перевищує $C_{12} \|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^j$, де $C_{12} = C_{12}(n, C_3)$. Тому з оцінок (3.112) на підставі леми 2.2 отримуємо, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} V_q(k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) \leqslant C_{13} \|\lambda_k^{2\vec{b}}\| \sqrt[q-1]{\frac{\nu_q(k)}{\nu_1(k) \nu_{q-1}(k) |Z_q(k)|}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{13}\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^{-p/(2\widetilde{b})-\widetilde{\varepsilon}}, \quad q \in \{2,\ldots,n\}, \tag{3.113}$$

де $C_{13} = C_{13}(n,T)$, $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon/(n-1)^2 > 0$. Інтегруючи оцінки (3.113) за змінними $t_1,\ldots,t_{q-1},t_{q+1},\ldots,t_n$ та враховуючи нерівність (3.110) отримуємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} V(k) \leqslant \sum_{q=2}^{n} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} V_q(k) \leqslant (n-1)C_{13}T^{n-1}\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^{-p/(2\widetilde{b})-\widetilde{\varepsilon}}. \tag{3.114}$$

Оскільки, згідно з оцінками (3.87) $\frac{1}{\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|} \leqslant \frac{C_{14}}{(1+|k|)^{2\widetilde{b}}}$, де $C_{14} = C_{14}(C_1,p)$, то на підставі (3.114) одержуємо, що ряд (3.108) мажорується збіжним числовим рядом $(n-1)C_{13}C_{14}T^{n-1}\sum\limits_{|k'|\geqslant 0}\sum\limits_{k_p=1}^{\infty}(1+|k|)^{-(p+2\widetilde{b}\widetilde{\varepsilon})}$. Теорему доведено. $\Diamond$

Теорема 3.12 не дає відповіді на питання про виконання оцінки (3.102) для визначника (3.97), бо множина тих векторів $(t_1,\ldots,t_n) \in [0,T]^n$, для яких виконується співвідношення (3.56), де $t_0 \in (0, T/(n-1)]$, є одновимірною і має нульову n-вимірну міру Лебега. Щоб встановити метричні оцінки знизу для визначника (3.97) використаємо допоміжне твердження.

Лема 3.1. *Нехай $\Phi(\lambda_k)$ — обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність*

$$\left|\Phi(\lambda_k) - \frac{am}{\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|}\right| > \frac{1}{\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^{p/(2\widetilde{b})+1+\varepsilon_1}}, \quad \varepsilon_1 > 0,$$

справджується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a > 0$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $(k', m, k_p) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{N}$.

Доведення здійснюється за схемою доведення леми 2.4 із [70, с. 17].

Теорема 3.13. *Для визначника* (3.97) *нерівність* (3.102) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_0 \in (0, T/(n-1)]$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}$ при $\omega > n^2(p/(2\widetilde{b})+1)$, $\nu = (n^2+n/2)\delta_2 T$.*

Доведення. Для того, щоб оцінити знизу визначник (3.97), оцінемо знизу кожен з множників у формулі (3.97). Із оцінок (3.92), випливає, що $|\mu_q(k)-\mu_j(k)| \leqslant 2C_3\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|$, $1 \leqslant j < q \leqslant l(k)$. Оскільки для кожного $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність $|e^z-1| > e^{Rez}|\sin(\mathrm{Im}z)|$, то на підставі леми 3.1 та оцінок (3.94) отримуємо

$$\left|\frac{\exp(\mu_j(k)t_0)-\exp(\mu_q(k)t_0)}{\mu_q(k)-\mu_j(k)}\right| \geqslant C_{15}\frac{\exp(\mathrm{Re}\mu_j(k)t_0)}{\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|}|\sin(\mathrm{Im}(\mu_j(k)-\mu_q(k))t_0)| \geqslant$$

$$\geqslant C_{15}\frac{\exp(-\delta_2 t_0\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|)}{\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|}|\mathrm{Im}(\mu_j(k)-\mu_q(k))t_0-m\pi| \geqslant C_{15}t_0\exp(-\delta_2 t_0\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|)\times$$

$$\times\left|\frac{\mathrm{Im}(\mu_j(k)-\mu_q(k))}{\pi\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|}-\frac{m}{t_0\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|}\right| \geqslant C_{16}\frac{\exp(-\delta_2 T/(n-1)\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|)}{\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^{p/(2\widetilde{b})+1+\varepsilon}}, \quad (3.115)$$

де $1 \leqslant j < q \leqslant l(k)$. Із нерівностей (3.94) та (3.115) випливає, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^{p-1}\times\mathbb{N}$ виконуються оцінки

$$\exp(\rho(k)t_0) \geqslant \exp(-n\delta_2 T\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|/2),$$

$$\prod_{1\leqslant j<q\leqslant l(k)}\left|\frac{\exp(\mu_j(k)t_0)-\exp(\mu_q(k)t_0)}{\mu_q(k)-\mu_j(k)}\right|^{n_j(k)n_q(k)} \geqslant C_{17}\frac{\exp\left(-\frac{n^2\delta_2 T}{(n-1)}\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|\right)}{\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|^{n^2(p/(2\widetilde{b})+1+\varepsilon)}},$$

з яких на підставі формули (3.97) випливає твердження теореми. $\Diamond$

Приклад 3.8. У деяких випадках нерівність (3.102) справджується для довільного вектора $\vec{t} \in [0,T]^n$. Покажемо це на прикладі задачі з умовами (3.41), (3.86) для рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{r=1}^{p-1}(-1)^{b_r}\frac{\partial^{2b_r}}{\partial x_r^{2b_r}}+\mathcal{B}_\sigma^{b_p}\right)^n u(t,x)=0, \quad (t,x)\in\mathcal{D}_T^p. \qquad (3.116)$$

Для задачі (3.41), (3.86), (3.116)

$$\Delta(k,\vec{t}) = \prod_{r=1}^{n-1}(r!)^{-1}\prod_{1\leqslant q<r\leqslant n}(t_r-t_q)\exp(-(t_1+\ldots+t_n)\|\lambda_k^{2\vec{b}}\|).$$

Легко бачити, що в цьому випадку нерівність (3.102) справджується для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}$ і довільного $\vec{t} \in [0,T]^n$ при $\omega = 0$ і $\nu = t_1 + \ldots + t_n$.

З теорем 3.11, 3.12 випливає таке твердження.

Наслідок 3.6. *Нехай* $f \in C\Big([0,T]; E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha_0,\beta_1)}\Big)$, $\varphi_j \in E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha_0,\beta_2)}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_0 > \alpha+n+n(n-1)(1+p/(2\widetilde{b}))/2$, $\beta_1 = \beta+\delta_1 T+n(\delta_2 T-\delta_1 t_1)$, $\beta_2 = \beta+n\delta_2 T-(n-1)\delta_1 t_1$. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0,T]^n$ *існує єдиний розв'язок задачі* (3.41), (3.85), (3.86) *з простору* $C^n\Big([0,T]; E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha,\beta)}\Big)$. *Цей розв'язок справджує нерівність*
$$\Big\|u; C^n\Big([0,T]; E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha,\beta)}\Big)\Big\| \leqslant C_{18}\Bigg(\Big\|f; C\Big([0,T]; E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha_0,\beta_1)}\Big)\Big\| + \sum_{j=1}^{n}\Big\|\varphi_j; E^{\mathbf{X_2}}_{w_3(\alpha_0,\beta_2)}\Big\|\Bigg).$$

Зауваження 3.6. Отримані в даному підрозділі результати можна поширити і на параболічні рівняння з операторами Бесселя за декількома просторовими змінними.

Зауваження 3.7. Результати підрозділів 3.2.1 та 3.2.2 є розвитком і уточненням (на випадок параболічних рівнянь) результатів, отриманих раніше при дослідженні багатоточкових задач з простими вузлами інтерполяції для еволюційних рівнянь із частинними похідними. Уточнення полягає у тому, що для параболічних за Петровським та $2\vec{b}$-параболічних рівнянь: 1) встановлено ефект підвищення гладкості (за просторовими змінними) розв'язку багатоточкової задачі зі зростанням часу t; 2) відслідковано гладкість розв'язку за кожною із просторових змінних $x_1, \ldots, x_p$.

3.2.3. Рівняння з еліптичним оператором, що діє за всіма просторовими змінними. У даному підрозділі дисертації досліджено задачу з багатоточковими умовами, які містять дію диференціальних виразів за просторовими координатами на значення невідомої функції та її похідних у вузлах інтерполяції для параболічних за Петровським рівнянь зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами. Багаточкові умови цієї задачі узагальнюють умови (3.41) та багатоточкові умови з робіт [18, 70]. У результаті дослідження даної задачі виникають малі знаменники складної нелінійної структури, для яких враховуючи умову параболічності рівняння вперше встановлено оцінки знизу для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із вузлів інтерполяції.

В області Q_T^p розглянемо задачу

$$W\left(\frac{\partial}{\partial t}, L\right) u := \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{r=0}^{n-1} A_r L^{b(n-r)} \frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r} = f(t,x), \tag{3.117}$$

$$\sum_{r=0}^{N_j} a_r^j(L) \frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}\Big|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \quad 0 \leqslant N_j \leqslant n-1, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{3.118}$$

$$L^m u(t,x)\Big|_{\Sigma} = 0, \quad m \in \{0,1,\ldots,(\theta-1)\}, \theta = \max\{bn, M\}, \tag{3.119}$$

де $A_r \in \mathbb{C}$, L — самоспряжений в $\overline{G} \in A^{2\theta,\varrho}$ диференціальний вираз із дійснозначними коефіцієнтами

$$L := -\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q(x), \tag{3.120}$$

в якому $p_{ij}(x) = p_{ji}(x) \in C^{2\theta-1,\varrho}(\overline{G})$, $p_{ij}(x) > 0$, $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, $q \in C^{2\theta-2,\varrho}(\overline{G})$, $0 < \varrho < 1$, $q(x) \geqslant 0$, $x \in \overline{G}$; $a_r^j(L) = \sum\limits_{i=0}^{M} a_{r,i}^j L^i$, $a_{r,i}^j \in \mathbb{C}$, $M \in \mathbb{N}$, $a_{N_j,M}^j \neq 0$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. Нехай рівняння (3.117) є рівномірно параболічним за Петровським в області Q_T^p.

У цьому підрозділі та в усіх наступних підрозділах позначимо через $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$, — послідовність власних значень задачі $LX = \lambda X$, $X\big|_{\partial G} = 0$, (що є додатними) яким відповідає повна ортонормована система власних функцій $\mathbf{X}_3 = \{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$; $w_4(\alpha,\beta) := w_4(\alpha,\beta;\lambda_k) = \lambda_k^\alpha \exp(\beta\lambda_k^b)$. Відзначимо, що для елементів послідовності λ_k, $k \in \mathbb{N}$ справджуються оцінки [35]

$$C_1 k^{2/p} \leqslant \lambda_k \leqslant C_2 k^{2/p}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < C_1 < C_2. \tag{3.121}$$

Розв'язок задачі (3.117) — (3.119) з простору $C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x). \tag{3.122}$$

Кожна функція $u_k(t), k \in \mathbb{N}$, є розв'язком задачі

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{r=0}^{n-1} A_r \lambda_k^{b(n-r)} \frac{d^r u_k(t)}{dt^r} = f_k(t), \tag{3.123}$$

$$\sum_{r=0}^{N_j} a_r^j(\lambda_k) \frac{d^r u_k(t)}{dt^r}\Big|_{t=t_j} = \varphi_{j,k}, \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{3.124}$$

Нехай $\mu_1(k),\ldots,\mu_n(k)$ — корені рівняння

$$\mu^n + \sum_{r=0}^{n-1} A_r \lambda_k^{b(n-r)} \mu^r = 0. \tag{3.125}$$

Для прорстоти викладу вважатимемо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$, всі $\mu_q(k)$, $q \in \{1,\ldots,n\}$, є попарно різними. Зі структури рівняння (3.125), згідно з [110, с. 102], випливають оцінки

$$|\mu_q(k)| \leqslant C_3 \lambda_k^b, \quad q \in \{1,\ldots,n\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.126}$$

Із параболічності рівняння (3.117) випливає, що μ-корені рівняння (3.125) справджують оцінки

$$\mathrm{Re}\mu_q(k) \leqslant -\delta_1 \lambda_k^b, \quad \delta_1 > 0, \quad q \in \{1,\ldots,n\}. \tag{3.127}$$

Характеристичний визначник задачі (3.123), (3.124) є таким:

$$\Delta(k,\vec{t}) = \det \left\| \sum_{r=0}^{N_j} a_r^j(\lambda_k) \frac{d^r u_{k,q}(t)}{dt^r}\Big|_{t=t_j} \right\|_{j,q\in\{1,\dots,n\}}, \tag{3.128}$$

де кожна функція $u_{k,q}(t) = R_{(\mu_1(k),\dots,\mu_q(k))}[\exp(\mu t)]$, $q \in \{1,\dots,n\}$, є поділеною різницею порядку $(q-1)$ за набором простих коренів $\mu_1(k),\dots,\mu_q(k)$ від функції $\exp(\mu t)$. Враховуючи формули (2.7), (3.128) визначник $\Delta(k,\vec{t})$ можна подати у вигляді

$$\Delta(k,\vec{t}) = \prod_{1\leqslant j<q\leqslant n} \frac{1}{\mu_q(k)-\mu_j(k)} \Upsilon(k,\vec{t}), \tag{3.129}$$

де $\Upsilon(k,\vec{t}) = \det \left\| \sum_{r=0}^{N_j} a_r^j(\lambda_k)\mu_q^r(k)\exp(\mu_q(k)t_j) \right\|_{j,q\in\{1,\dots,n\}}$.

Теорема 3.14. *Для єдиності розв'язку задачі* (3.117) — (3.119) *у просторі* $C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k\in\mathbb{N} \quad \Upsilon(k,\vec{t}) \neq 0. \tag{3.130}$$

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (3.117) — (3.119). Надалі вважатимемо, що виконується умова (3.130). Тоді для кожного натурального $k\in\mathbb{N}$ розв'язок задачі (3.123), (3.124) визначається формулою

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)d\tau + \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}\varphi_{jk}u_{k,q}(t), \tag{3.131}$$

де $\Delta_{j,q}(k,\vec{t})$ — алгебричне доповнення елемента $\sum\limits_{r=0}^{N_j} a_r^j(\lambda_k)\frac{d^r u_{k,q}(t)}{dt^r}\Big|_{t=t_j}$ у визначнику (3.128), а $G_k(t,\tau)$ функція Ґріна задачі (3.123), (3.124).

У кожній із областей $K_j = \{(t,\tau) : 0\leqslant t\leqslant T,\ t_j<\tau<t_{j+1}\}$, $j\in\{0,1,\dots,n\}$, $t_0=0$, $t_{n+1}=T$, функція $G_k(t,\tau)$, збігається, відповідно,

з функцією $G_{k,j}(t,\tau)$, яка визначається формулою (3.59) у якій

$$F_{km}(t,\tau)=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{n}\frac{\Delta_{m,q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}u_{k,q}(t)\left(\sum_{r=0}^{N_m}a_r^m(\lambda_k)\frac{d^r u_{k,n}(t_m-\tau)}{dt^r}\right). \quad (3.132)$$

На підставі формул (3.122), (3.131) формальний розв'язок задачі (3.117) — (3.119) зображується рядом

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau+\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}\varphi_{jk}u_{k,q}(t)\right)X_k(x). \quad (3.133)$$

Позначимо: $N_0=(N_1+\ldots+N_n)b+nM$, $N=N_0-b\max\limits_{j=\overline{1,n}}\{N_j\}-M$.

Теорема 3.15. *Нехай справджується умова* (3.130) *та існують сталі* $\omega,\nu\in\mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) натуральних* k *виконується нерівність*

$$|\Delta(k,\vec{t})|>\lambda_k^{-\omega}\exp(-\nu\lambda_k^b). \quad (3.134)$$

Якщо $f\in C\left([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha_1,\beta_1)}\right)$, $\varphi_j\in E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha_2,\beta_2)}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_1=\alpha+\omega+N_0+nb$, $\beta_1=\beta+\nu+(T-nt_1)\delta_1$, $\alpha_2=\alpha+\omega+N+nb$, $\beta_2=\beta+\nu-(n-1)\delta_1t_1$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (3.117) — (3.119) *з простору* $C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (3.133) *і неперервно залежить від функцій* f *та* φ_j, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Доведення. Враховуючи лему 2.4 та оцінки (3.126), (3.127) знаходимо, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_{k,q}^{(s_0)}(t)\right|\leqslant C_4\lambda_k^{bs_0},\ s_0\in\{0,1,\ldots,n\}, \quad (3.135)$$

$$\left|\sum_{r=0}^{N_j}a_r^j(\lambda_k)\frac{d^r u_{k,q}(t)}{dt^r}\Big|_{t=t_j}\right|\leqslant\sum_{r=0}^{N_j}\sum_{i=0}^{M}|a_{r,i}^j|\lambda_k^i\left|\frac{d^r u_{k,q}(t)}{dt^r}\Big|_{t=t_j}\right|\leqslant$$
$$\leqslant C_5w_4(N_jb+M,-\delta_1t_1;\lambda_k),\quad j\in\{1,\ldots,n\}. \quad (3.136)$$

З огляду на (3.128) і (3.136) отримуємо

$$|\Delta_{j,q}(k,\vec{t})|\leqslant C_6w_4(N,-(n-1)\delta_1t_1;\lambda_k),\quad j,q\in\{1,\ldots,n\}. \quad (3.137)$$

Із формул (3.59), (3.132) на підставі нерівностей (3.134) — (3.137) встановлюємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}}\int\limits_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau\right| \leqslant C_7\widetilde{f}_k w_4(\omega+N_0+s_0b, \nu+(T-nt_1)\delta_1;\lambda_k), \tag{3.138}$$

де $s_0\in\{0,1,\ldots,n\}$, $\widetilde{f}_k=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|f_k(t)|$. Із формули (3.133) на підставі оцінок (3.134) — (3.138) дістанемо

$$\left\|u; C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)\right\| \leqslant \sum_{s_0=0}^{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^{s_0}u_k(t)}{dt^{s_0}}\right|^2 w_4^2(\alpha,\beta;\lambda_k)} \leqslant$$

$$\leqslant C_8\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{f}_k^2\omega_4^2(\alpha+\omega+N_0+nb, \beta+\nu+(T-nt_1)\delta_1;\lambda_k)}+$$

$$+C_9\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{jk}|^2\omega_4^2(\alpha+\omega+N+nb, \beta+\nu-(n-1)t_1\delta_1;\lambda_k)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\left(\left\|f; C\left([0,T]; E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha_1,\beta_1)}\right)\right\| + \sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_j; E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha_2,\beta_2)}\right\|\right).$$

Із встановлених оцінок випливає твердження теореми. $\Diamond$

Збіжність ряду (3.133) у просторах $C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, пов'язана із можливістю виконання оцінок (3.134). Для з'ясування питання про їх виконання встановимо допоміжне твердження.

Позначимо: $Z_j(k)=\sum\limits_{r=0}^{N_j}a_r^j(\lambda_k)(\mu_j(k))^r$, $j\in\{1,\ldots,n\}$,
$C_{11}=(\delta_1)^{n(M-1)}\prod\limits_{j=1}^{n}|a^j_{N_j,M}|$, $C_{12}=M\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n}\left(N_j\max\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant N_j,\\ 0\leqslant i\leqslant M-1}}\{|a^j_{r,i}/a^j_{N_j,M}|\}\right)$.

Лема 3.2. *Для довільних фіксованих* $a^j_{r,i}$, $r\in\{0,1,\ldots,N_j\}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, $i\in\{0,1,\ldots,M\}$, *нерівність*

$$\prod_{j=1}^{n}|Z_j(k)| \geqslant C_{11}\lambda_k^{b(N_1+\ldots+N_n)+n(M-1)} \tag{3.139}$$

виконується для всіх $k\in\mathbb{N}$, *таких, що* $\lambda_k>(1+1/\delta_1)^{1/b}+C_{12}$.

Доведення. Очевидно, що

$$|Z_j(k)| = |a^j_{N_j,M}| \left| \lambda_k^M (\mu_j(k))^{N_j} + \sum_{r=0}^{N_j} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{a^j_{r,i}}{a^j_{N_j,M}} \lambda_k^i (\mu_j(k))^r \right| \geqslant$$

$$\geqslant |a^j_{N_j,M}| \left| \lambda_k^M |\mu_j(k)|^{N_j} - \sum_{r=0}^{N_j} \sum_{i=0}^{M-1} \left| \frac{a^j_{r,i}}{a^j_{N_j,M}} \right| \lambda_k^i |\mu_j(k)|^r \right|, \; j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.140}$$

Із параболічності рівняня (3.117) (див. нерівності (3.127)) випливає, що

$$|\mu_j(k)| \geqslant |\mathrm{Re}\mu_j(k)| \geqslant \delta_1 \lambda_k^b, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.141}$$

Якщо $\lambda_k > \left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right)^{1/b}$, то $|\mu_j(k)| \geqslant 1$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, і виконуються оцінки

$$\sum_{r=0}^{N_j} \sum_{i=0}^{M-1} \left| \frac{a^j_{r,i}}{a^j_{N_j,M}} \right| \lambda_k^i |\mu_j(k)|^r \leqslant C_{12} |\mu_j(k)|^{N_j} \lambda_k^{M-1}. \tag{3.142}$$

На підставі нерівностей (3.140) — (3.142) встановлюємо, що для всіх $\lambda_k > \left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right)^{1/b} + C_{12}$, справджуються оцінки

$$\begin{aligned} |Z_j(k)| &\geqslant |a^j_{N_j,M}| |\mu_j(k)|^{N_j} \lambda_k^{M-1} |\lambda_k - C_{12}| \geqslant \\ &\geqslant (\delta_1)^{N_j} |a^j_{N_j,M}| \lambda_k^{bN_j + M - 1}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned} \tag{3.143}$$

Перемножаючи нерівності (3.143) отримуємо твердження леми. $\Diamond$

Теорема 3.16. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0, T]^n$ *нерівність* (3.134) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{N}$ *при* $\omega > n(n-1)(p+2b)/4 - b(N_1 + \ldots + N_n) - n(M-1)$ *і* $\nu = n\delta_2 T$, $\delta_2 = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \max\limits_{q \in \{1, \ldots, n\}} \{|Re\mu_q(k)|/\lambda_k^b\}$.

Доведення. Враховуючи формулу (3.129) доведемо спочатку, що при $\omega_0 > n(n-1)(p+2b)/4$, оцінка

$$|\Upsilon(k, \vec{t})| > \lambda_k^{-\omega_0} \exp(-n\delta_2 T \lambda_k^b) \prod_{q=1}^{n} |P_q(\mu_q(k), k)| |Z_q(k)|, \tag{3.144}$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$, для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k, де $P_1(\mu,k) = 1$, $P_q(\mu,k) = \prod\limits_{j=1}^{q-1}(\mu - \mu_j(k))$, $q \in \{2,\ldots,n\}$. З огляду на лему Бореля Кантеллі [102] для цього досить довести, що збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F(k), \tag{3.145}$$

де $F(k)$ — множина тих векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (3.144), виконується при фіксованому $k \in \mathbb{N}$. Щоб встановити збіжність ряду (3.145), доведемо, що для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F(k) \leqslant C_{13} k^{-1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Для цього запровадимо позначення: $\Upsilon_q(k,t_1,\ldots,t_q)$ — визначник, який отримується з визначника $\Upsilon(k,\vec{t})$ викреслюванням останніх $n-q$ рядків та останніх $n-q$ стовбців, $q \in \{1,\ldots,n\}$; зрозуміло, що $\Upsilon_n(k,t_1,\ldots,t_n) = \Upsilon(k,\vec{t})$, $\Upsilon_1(k,t_1) = Z_1(k)\exp(\mu_1(k)t_1)$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо множини:

$$F_q(k) = \{\vec{t} \in [0,T]^n : |\Upsilon_q(k,t_1,\ldots,t_q)| < \nu_q(k),$$
$$|\Upsilon_{q-1}(k,t_1,\ldots,t_{q-1})| \geqslant \nu_{q-1}(k)\}, \quad q \in \{2,\ldots,n\},$$

де числа $\nu_q(k)$, $q \in \{2,\ldots,n\}$, визначаються таким чином:

$$\nu_q(k) = \lambda_k^{-q(q-1)(p+2b)/4-q\varepsilon/n} \exp(-q\delta_2 T\lambda_k^b) \prod_{j=1}^{q} |P_j(\mu_j(k),k)||Z_j(k)|, \ \varepsilon > 0.$$

Легко перевірити, що $F(k) \subset \bigcup_{q=2}^{n} F_q(k)$. Тому

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F(k) \leqslant \sum_{q=2}^{n} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_q(k). \tag{3.146}$$

За теоремою Фубіні

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_q(k) = \int\limits_{[0,T]^{n-1}} F_q(k,\vec{\tau}_q)d\vec{\tau}_q, q \in \{2,\ldots,n\}, \tag{3.147}$$

де $\vec{\tau}_q = (t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n)$, $d\vec{\tau}_q = dt_1, \ldots, dt_{q-1}, dt_{q+1}, \ldots, dt_n$, $F_q(k, \vec{\tau}_q)$ $= \{t_q \in [0, T] : \vec{t} \in F_q(k)\}$, $q \in \{2, \ldots, n\}$.

Оцінимо зверху міри Лебега множин $F_q(k, \vec{\tau}_q)$, $q \in \{2, \ldots, n\}$. Для цього розкладемо визначник $\Upsilon_q(k, t_1, \ldots, t_q)$ за елементами останнього рядка і до отриманої рівності застосуємо диференціальний вираз $P_q\left(\frac{\partial}{\partial t_q}, k\right)$, одержимо

$$\begin{gathered} P_q\left(\frac{\partial}{\partial t_q}, k\right)\Upsilon_q(k, t_1, \ldots, t_q) = P_q(\mu_q(k), k)Z_q(k)\times \\ \times\exp(\mu_q(k)t_q)\Upsilon_{q-1}(k, t_1, \ldots, t_{q-1}), \quad q \in \{2, \ldots, n\}. \end{gathered} \tag{3.148}$$

Зазначимо, що функція $\Upsilon_q(k, t_1, \ldots, t_q)$, $q \in \{2, \ldots, n\}$, як функція змінної t_q (при фіксованих $t_1, \ldots, t_{q-1}$), є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $C_3 T \lambda_k^b$. Якщо $\vec{t} \in F_q(k)$, $q \in \{2, \ldots, n\}$, то з формул (3.148) та означення множин $F_q(k)$ випливає, що

$$\begin{gathered} \forall t_q \in [0, T] \quad \left|P_q\left(\frac{\partial}{\partial t_q}, k\right)\Upsilon_q(k, t_1, \ldots, t_q)\right| \geqslant |P_q(\mu_q(k), k)|\times \\ \times|Z_q(k)|\exp(-\delta_2 T\lambda_k^b)\nu_{q-1}(k), \quad q \in \{2, \ldots, n\}. \end{gathered} \tag{3.149}$$

Крім того, для кожного q, $q \in \{2, \ldots, n\}$, степінь многочлена $P_q(\mu, k)$ за змінною μ дорівнює $q-1$, а модуль коефіцієнта при μ^{q-j-1}, $j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, в цьому многочлені, не перевищує $C_{14}\lambda_k^{bj}$. Тому з оцінок (3.149) на підставі твердження леми 2.2 встановлюємо

$$\begin{gathered} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} F_q(k, \vec{\tau}_q) \leqslant C_{15}\lambda_k^b\left(\frac{\nu_q(k)\exp(\delta_2 T\lambda_k^b)}{\nu_{q-1}(k)|P_q(\mu_q(k), k)||Z_q(k)|}\right)^{\frac{1}{q-1}} \leqslant \\ \leqslant C_{15}\lambda_k^{-\frac{p}{2}-\frac{\varepsilon}{n(q-1)}}, \quad q \in \{2, \ldots, n\}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{3.150}$$

На підставі (3.121), (3.146), (3.147) і (3.150) отримуємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} F(k) \leqslant C_{16} k^{-1-\varepsilon_0}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.151}$$

де $\varepsilon_0 = \frac{2\varepsilon}{pn(n-1)}$. Із оцінок (3.151) випливає збіжність ряду (3.145). З наведених міркувань та формули (3.129) випливає, що при $\omega_0 > n(n-$

$1)(p+2b)/4$ нерівність

$$|\Delta(k,\vec{t})| > \lambda_k^{-\omega_0}\exp(-n\delta_2 T\lambda_k^b)\prod_{q=1}^{n}|Z_q(k)| \tag{3.152}$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t}\in[0,T]^n$, для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k. Враховуючи оцінки (3.139), (3.152) отримуємо твердження теореми. $\Diamond$

Із результатів, встановлених в теоремах 3.15, 3.16, випливає таке твердження.

Наслідок 3.7. *Якщо* $f\in C\Big([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha_1,\beta_1)}\Big)$, $\varphi_j\in E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha_2,\beta_2)}$, $j\in\{1,\dots,n\}$, *де* $\alpha_1=\alpha+n(b+1+(n-1)(p+2b)/4), \beta_1=\beta+nT\delta_2+(T-nt_1)\delta_1$, $\alpha_2=\alpha+n(n-1)(p+2b)/4-b\max\limits_{j=\overline{1,n}}\{N_j\}-M+n$, $\beta_2=\beta+nT\delta_2-(n-1)t_1\delta_1$, *то для довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння* (3.117) *та умов* (3.118) *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t}\in[0,T]^n$ *існує єдиний розв'язок задачі* (3.117) — (3.119) *з простору* $C^n\Big([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha,\beta)}\Big)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (3.133), *причому*

$$\Big\|u;C^n\Big([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha,\beta)}\Big)\Big\|\leqslant C_{17}\Big(\Big\|f;C\Big([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha_1,\beta_1)}\Big)\Big\|+\sum_{j=1}^{n}\Big\|\varphi_j;E^{\mathbf{X_3}}_{w_4(\alpha_2,\beta_2)}\Big\|\Big).$$

Зауваження 3.8. Отримані в підрозділі 3.2 результати можна поширити і на параболічні рівняння більш загального вигляду, які містять молодші доданки.

3.3. Задача з багатоточковими умовами для параболічних рівнянь з факторизованим оператором (випадок кратних вузлів)

Багатоточкову задачу з кратними вузлами для параболічних рівнянь з факторизованим оператором з коефіцієнтами залежними як від часової, так і від просторових змінних досліджено у даному підрозділі.

В області Q_T^p, розглянемо задачу

$$W\left(\frac{\partial}{\partial t}, L\right)u := \left(\frac{\partial}{\partial t} + a_n(t)L\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial t} + a_1(t)L\right)u(t,x) = f(t,x), \quad (3.153)$$

$$V_{j,q_j}[u] := \frac{\partial^{q_j-1}u(t,x)}{\partial t^{q_j-1}}\bigg|_{t=t_j} = \varphi_{j,q_j}(x), \quad (3.154)$$

$$q_j \in \{1,\ldots,r_j\}, \quad j \in \{1,\ldots,l\}, \quad 2 \leqslant l \leqslant n, \quad 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_l \leqslant T,$$

$$L^m u(t,x)\Big|_{\Sigma} = 0, \quad m \in \{0,1,\ldots,n-1\}, \quad (3.155)$$

де $a_q(t) \in C^{n-q}([0,T])$, $a_q(t) > 0$, $a_q(t) \neq a_j(t)$, $q \neq j$, $t \in [0,T]$, $q,j \in \{1,\ldots,n\}$; $r_1 + \cdots + r_l = n$. Оператори $(\partial/\partial t + a_j(t)L)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, у рівнянні (3.153) діють на функцію u у порядку зростання індексу j. Припустимо, що для диференціального виразу L, який визначений формулою (3.120), виконуються умови $p_{ij} \in C^{2n-1,\varrho}(\overline{G})$, $p_{ij}(x) > 0$, $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, $q \in C^{2n-2,\varrho}(\overline{G})$, $q(x) \geqslant 0$, $x \in \overline{G}$, $\overline{G} \in A^{2n,\varrho}$, $0 < \varrho < 1$.

Задача з умовами (3.154) для гіперболічного рівняння з однією просторовою змінною досліджувалась у роботі [9], а для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами у праці [76]. Встановлено, що умови існування єдиного розв'язку задачі з кратними вузлами для безтипних рівнянь з частинними похідними виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів рівнянь та значень вузлів інтерполяції.

Розв'язок задачі (3.153) — (3.155) з простору $C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha,\beta)}\right)$, де $w_5(\alpha,\beta) := w_5(\alpha,\beta;\lambda_k) = \lambda_k^{\alpha}\exp(\beta\lambda_k)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, шукаємо у вигляді ряду

(3.122). Кожна функція $u_k(t), k \in \mathbb{N}$, є розв'язком задачі

$$(d/dt + a_n(t)\lambda_k) \cdots (d/dt + a_1(t)\lambda_k)u_k(t) = f_k(t), \tag{3.156}$$

$$u_k^{(q_j-1)}(t_j) = \varphi_{j,q_j,k}, \quad q_j \in \{1, \ldots, r_j\}, \quad j \in \{1, \ldots, l\}, \tag{3.157}$$

де $f_k(t) = \int\limits_G f(t,x)X_k(x)dx$, $\varphi_{j,q_j,k} = \int\limits_G \varphi_{j,q_j}(x)X_k(x)dx$, $q_j \in \{1, \ldots, r_j\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$.

Розглянемо відповідну до (3.156), (3.157) однорідну задачу

$$(d/dt + a_n(t)\lambda_k) \cdots (d/dt + a_1(t)\lambda_k)u_k(t) = 0, \tag{3.158}$$

$$u_k^{(q_j-1)}(t_j) = 0, \quad q_j \in \{1, \ldots, n_j\}, \quad j \in \{1, \ldots, l\}. \tag{3.159}$$

Позначимо: $I_0(t) := 0$, $I_q(t) = -\int\limits_0^t a_q(\tau)d\tau$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, $\Theta_{j,k}(t) = \exp((I_j(t) - I_{j-1}(t))\lambda_k)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Відомо [70], що функції

$$\begin{cases} u_{k,1}(t) = \Theta_{1,k}(t), \\ u_{k,2}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \Theta_{2,k}(\xi_1)d\xi_1, \\ u_{k,3}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \left(\Theta_{2,k}(\xi_1)\int\limits_0^{\xi_1} \Theta_{3,k}(\xi_2)d\xi_2\right)d\xi_1, \\ \vdots \\ u_{k,n}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \Theta_{2,k}(\xi_1) \times \ldots \left(\int\limits_0^{\xi_{n-2}} \Theta_{n,k}(\xi_{n-1})d\xi_{n-1}\right)\ldots d\xi_1, \end{cases} \tag{3.160}$$

утворюють на відрізку $[0, T]$ фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.158). Характеристичний визначник задачі (3.158), (3.159) зображується формулою

$$\Delta(k, \vec{t}) = \det\left\| u_{k,r}^{(q_j-1)}(t_j) \right\|_{q_j \in \{1,\ldots,r_j\}, j \in \{1,\ldots,l\}}^{r \in \{1,\ldots,n\}}, \quad \vec{t} = (t_1, \ldots, t_l).$$

Теорема 3.17. *Для довільного вектора* $\vec{t} \in [0, T]^l$ *задача* (3.153) — (3.155) *не може мати двох різних розв'язків із простору* $C^n\Big([0, T]; E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha,\beta)}\Big)$.

Доведення. Припустимо, що існують два різні розв'язки $u_1(t,x)$ та $u_2(t,x)$ задачі (3.153) — (3.155) з простору $C^n\Big([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha,\beta)}\Big)$. Тоді функція $\widetilde{u}(t,x)=u_1(t,x)-u_2(t,x)$, яка належить до простору $C^n\Big([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha,\beta)}\Big)$ є розв'язком однорідної задачі, яка відповідає задачі (3.153) — (3.154) і зображується рядом Фур'є вигляду (3.122). При цьому функції $W\widetilde{u}(t,x)$ та $V_{j,q_j}[\widetilde{u}(t,x)]$, $q_j\in\{1,\dots,r_j\}$, $j\in\{1,\dots,l\}$, також розвиваються в ряди Фур'є за системою функцій $\mathbf{X_3}$, і ці ряди збігаються з рядами, одержаними формальним застосуванням операторів W та V_{j,q_j}, $q_j\in\{1,\dots,r_j\}$, $j\in\{1,\dots,l\}$, до ряду (3.122). Із рівностей Парсеваля для функцій $W\widetilde{u}(t,x)$ та $V_{j,q_j}[\widetilde{u}(t,x)]$, $q_j\in\{1,\dots,r_j\}$, $j\in\{1,\dots,l\}$, випливає, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ $\widetilde{u}_k(t)$ є розв'язком задачі (3.158), (3.159). Оскільки $W(d/dt,\lambda_k)$ є композицією диференціальних виразів першого порядку з дійсними коефіцієнтами, то згідно теореми В. Я. Скоробогатька [70, с. 31] $\widetilde{u}_k(t)\equiv 0$ для кожного $k\in\mathbb{N}$. Із рівностей Парсеваля для функції $\widetilde{u}(t,x)$ та неперервності $\widetilde{u}(t,x)$ в $\overline{Q}^p_T$ випливає, що $\widetilde{u}(t,x)\equiv 0$, тобто $u_1(t,x)=u_2(t,x)$. $\Diamond$

Для кожного $k\in\mathbb{N}$ розв'язок задачі (3.156), (3.157) зображується формулою

$$u_k(t)=H_k(t)+\sum_{r=1}^{n}C_r(k)u_{k,r}(t), \tag{3.161}$$

де

$$H_k(t)=\Theta_{1,k}(t)\int_0^t\Theta_{2,k}(\xi_1)\Bigg(\int_0^{\xi_1}\Theta_{3,k}(\xi_2)\times\ldots\times\int_0^{\xi_{n-2}}\Theta_{n,k}(\xi_{n-1})\times$$
$$\Bigg(\int_0^{\xi_{n-1}}f_k(\xi_n)\exp\{-I_n(\xi_n)\lambda_k\}d\xi_n\Bigg)d\xi_{n-1}\ldots d\xi_2\Bigg)d\xi_1, \tag{3.162}$$

функції $u_{k,r}(t)$ визначені формулами (3.160), а коефіцієнти $C_r(k)$, $r\in\{1,\ldots,n\}$, визначаються із системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{r=1}^{n}C_r(k)u_{k,r}^{(q_j-1)}(t_j)=\varphi_{j,q_j,k}-V_{j,q_j}[H_k(t)],\ q_j\in\{1,\ldots,r_j\},j\in\{1,\ldots,l\}, \tag{3.163}$$

визначник якої збігається з визначником $\Delta(k,\vec{t})$. Розв'язуючи систему (3.163) за правилом Крамера, одержуємо

$$C_r(k)=\sum_{j=1}^{l}\sum_{q_j=1}^{r_j}\frac{\Delta_{j,q_j,r}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}\big(\varphi_{j,q_j,k}-V_{j,q_j}[H_k(t)]\big), r\in\{1,\ldots,n\},$$

де $\Delta_{j,q_j,r}(k,\vec{t})$, $q_j\in\{1,\ldots,r_j\}$, $j\in\{1,\ldots,l\}$, $r\in\{1,\ldots,n\}$, — алгебричне доповнення елемента $u_{k,r}^{(q_j-1)}(t_j)$ у визначнику $\Delta(k,\vec{t})$. Підставляючи знайдені значення для $C_r(k)$, $r\in\{1,\ldots,n\}$, у формулу (3.161) отримаємо формальне зображення розв'язку задачі (3.153) — (3.155) у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(H_k(t)+\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\sum_{q_j=1}^{r_j}\frac{\Delta_{j,q_j,r}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}\varphi_{j,q_j,k}\,u_{k,r}(t)-$$

$$-\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\sum_{q_j=1}^{r_j}\frac{\Delta_{j,q_j,r}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}V_{j,q_j}[H_k(t)]u_{k,r}(t)\Bigg)X_k(x). \qquad (3.164)$$

Позначимо: $A_1=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\max\limits_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t(a_j(\tau)-a_{j-1}(\tau))d\tau\right\}$, $A_2=\max\limits_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t a_n(\tau)d\tau$, $d=\sum\limits_{j=1}^{l}C_{r_j}^2$.

Теорема 3.18. *Нехай існують сталі $\omega,\nu\in\mathbb{R}$ такі, що для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k\in\mathbb{N}$ виконується нерівність*

$$|\Delta(k,\vec{t})|>\lambda_k^{-\omega}\exp(-\nu\lambda_k). \qquad (3.165)$$

Якщо $f\in C\left([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha_1,\beta_1)}\right)$, $\varphi_{j,q_j}\in E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha_1,\beta_2)}$, $q_j\in\{1,\ldots,r_j\}$, $j\in\{1,\ldots,l\}$, де $\alpha_1=\alpha+\omega+d+n$, $\beta_1=\beta+\nu+n(n-1)A_1/2$, $\beta_2=\beta_1+(n-1)A_1+A_2$, то існує єдиний розв'язок задачі (3.153) — (3.155) *з простору $C^n\left([0,T];E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha,\beta)}\right)$. Цей розв'язок неперервно залежить від функцій f та φ_{j,q_j}, $q_j\in\{1,\ldots,r_j\}$, $j\in\{1,\ldots,l\}$.*

Доведення. Із формул (3.160), (3.162) встановлюємо, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_{k,r}^{(s_0)}(t)\right|\leqslant C_1w_5(s_0,(r-1)A_1;\lambda_k),\quad r\in\{1,\ldots,n\}, \qquad (3.166)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|H_k^{(s_0)}(t)\right| \leqslant C_2\widetilde{f}_k w_5(s_0,(n-1)A_1+A_2;\lambda_k), \qquad (3.167)$$

де $s_0 \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\widetilde{f}_k = \max\limits_{t\in[0,T]}|f_k(t)|$. Із оцінок (3.166) отримуємо

$$\left|\Delta_{j,q_j,r}(k,\vec{t})\right| \leqslant (C_1)^{n-1}(n-1)!w_5(d,(n(n-1)/2-r+1)A_1;\lambda_k), \quad (3.168)$$

$$q_j \in \{1,\ldots,r_j\}, \quad j\in\{1,\ldots,l\}, \quad r\in\{1,\ldots,n\}.$$

Із формули (3.164) на підставі оцінок (3.165) – (3.168) знаходимо

$$\left\|u; C^n\left([0,T]; E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha,\beta)}\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant C_3\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{f}_k^{\,2}w_5^2(\alpha_1,\beta_1;\lambda_k)} + C_4\sum_{j=1}^{l}\sum_{q_j=1}^{r_j}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{j,q_j,k}|^2 w_5^2(\alpha_1,\beta_2;\lambda_k)} \leqslant$$

$$\leqslant C_5\left(\left\|f; C\left([0,T]; E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha_1,\beta_1)}\right)\right\| + \sum_{j=1}^{l}\sum_{q_j=1}^{r_j}\left\|\varphi_{j,q_j}; E^{\mathbf{X_3}}_{w_5(\alpha_1,\beta_2)}\right\|\right).$$

Отже, норма функції u є скінченною і неперервно залежить від f, та φ_{j,q_j}, $q_j \in \{1,\ldots,r_j\}$, $j\in\{1,\ldots,l\}$. $\Diamond$

Розглянемо питання про можливість виконання нерівності (3.165) для задачі (3.153) — (3.155).

Нехай у рівнянні (3.153) коефіцієнти $a_r(t)$ є такими

$$a_r(t) = a(t)+\gamma_r,\ r\in\{1,\ldots,n\},\ 0<\rho_1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_n\leqslant\rho_2, \quad (3.169)$$

де $a(t)\in C^{n-1}([0,T])$, $a(t)>0$, $\quad t\in[0,T]$, тоді функції (3.160) визначаються формулами

$$u_{k,1}(t) = \exp\{-(\gamma_1 t + I(t))\lambda_k\}, \ \ I(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau,$$

$$u_{k,r}(t) = \lambda_k^{-r+1}\prod_{j=1}^{r-1}(\gamma_j-\gamma_r)^{-1}\exp\{-(\gamma_r t+I(t))\lambda_k\},\ r\in\{2,\ldots,n\}. \quad (3.170)$$

Із формул (3.170) випливає, що характеристичний визначник задачі (3.158), (3.159), (3.169) визначається рівністю

$$\Delta(k,\vec{t})=\frac{\widetilde{\Delta}(k,\vec{\gamma}\,)}{(-\lambda_k)^{n(n-1)/2-d}}\exp\left\{-\lambda_k\sum_{j=1}^{l}r_jI(t_j)\right\}\prod_{1\leqslant r<q\leqslant n}(\gamma_q-\gamma_r)^{-1}, \quad (3.171)$$

де $\widetilde{\Delta}(k,\vec{\gamma}\,)=\det\left\|\gamma_r^{q_j-1}\exp(-\gamma_r t_j\lambda_k)\right\|_{q_j\in\{1,\ldots,r_j\},j\in\{1,\ldots,l\}}^{r\in\{1,\ldots,n\}}$, $\vec{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$.

Позначимо: $m_0=0$, $m_j=r_1+\ldots+r_j$, $j\in\{1,\ldots,l\}$, $\Phi=\sum\limits_{j=2}^{l}r_jm_{j-1}$,

$$g_q(t,k)=\gamma_q^{q-m_{j-1}-1}\exp(-\gamma_q t\lambda_k),\ q\in\{1,\ldots,n\},$$

$$P_q(\gamma,k)=\prod_{s=1}^{j-1}(\gamma+t_s\lambda_k)^{r_s}(\gamma+t_j\lambda_k)^{q-m_{j-1}},q\in\{1,\ldots,n\},$$

$$T_m=(t_1-t_m)^{r_1}\ldots(t_{m-1}-t_m)^{r_{m-1}},m\in\{2,\ldots,l\},$$

де індекс $j=j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}<q\leqslant m_j$.

Теорема 3.19. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{\gamma}\in[\rho_1,\rho_2]^n$ і для довільних фіксованих $(t_1,\ldots,t_l)\in[0,T]^l$, нерівність* (3.165) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) $k\in\mathbb{N}$ при $\omega>n(n-1)(p+2)/4-\Phi-d$, $\nu=\sum\limits_{j=1}^{l}r_j(\rho_2t_j+I(t_j))$.*

Доведення. Доведемо спочатку, що при $\omega_1>n(n-1)p/4-\Phi$, $\nu_1=\rho_2(r_1t_1+\ldots+r_lt_l)$ нерівність

$$|\widetilde{\Delta}(k,\vec{\gamma}\,)|\geqslant\lambda_k^{-\omega_1}\exp(-\nu_1\lambda_k)$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k\in\mathbb{N}$. Для цього використаємо лему Бореля-Кантеллі [102] (див. підрозділ 2) і покажемо, що збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}A(k) \quad (3.172)$$

де $A(k)=\{\vec{\gamma}\in[\rho_1,\rho_2]^n:|\widetilde{\Delta}(k,\vec{\gamma}\,)|\leqslant\lambda_k^{-\omega_1}\exp(-\nu_1\lambda_k)\}$. Для кожного $k\in\mathbb{N}$, розглянемо такі множини:

$$A_q(k)=\{\vec{\gamma}\in[\rho_1,\rho_2]^n:|\widetilde{\Delta}_q(k,\vec{\gamma}_q\,)|<\nu_q(k),|\widetilde{\Delta}_{q-1}(k,\vec{\gamma}_{q-1}\,)|\geqslant\nu_{q-1}(k)\},$$

де $\vec{\gamma}_q = (\gamma_1, \ldots, \gamma_q)$, $\widetilde{\Delta}_q(k, \vec{\gamma}_q)$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, — визначник, який отримується з визначника $\widetilde{\Delta}(k, \vec{\gamma})$ викреслюванням останніх $(n-q)$ рядків та останніх $(n-q)$ стовпців, а $\nu_q(k)$ числа, які зображуються формулами

$$\nu_q(k) = (q - m_{j-1} - 1)! T_j \lambda_k^{m_{j-1}-(q-1)p/2-q\varepsilon/n} \exp(-\rho_2 t_j \lambda_k) \nu_{q-1}(k),\ q \in \{2, \ldots, n\},$$

де $\varepsilon > 0$, а індекс $j = j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1} < q \leqslant m_j$. Відзначимо, що $A(k) \subset \bigcup\limits_{q=2}^{n} A_q(k)$. Тому для доведення збіжності ряду (3.172) оцінемо зверху Лебегові міри множин $A_q(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Для цього визначник $\widetilde{\Delta}_q(k, \vec{\gamma}_q)$, $q \in \{2, \ldots, n\}$, розвинемо за елементами останнього стовпця, а до одержаного розвинення застосуємо диференціальний вираз $P_{q-1}\left(\frac{\partial}{\partial \gamma_q}, k\right)$. У результаті дістанемо співвідношення

$$P_{q-1}\left(\frac{\partial}{\partial \gamma_q}, k\right) \widetilde{\Delta}_q(k, \vec{\gamma}_q) = (q - m_{j-1} - 1)! T_j \lambda_k^{m_{j-1}} \exp(-\gamma_q t_j \lambda_k) \widetilde{\Delta}_{q-1}(k, \vec{\gamma}_{q-1}),$$

де $q \in \{2, \ldots, n\}$, а індекс $j = j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1} < q \leqslant m_j$. Якщо вектор $\vec{\gamma} \in A_q(k)$, $q \in \{2, \ldots, n\}$, то виконується оцінка

$$\left| P_{q-1}\left(\frac{\partial}{\partial \gamma_q}, k\right) \widetilde{\Delta}_q(k, \vec{\gamma}_q) \right| \geqslant C_6 \lambda_k^{m_{j-1}} \exp(-\rho_2 t_j \lambda_k) \nu_{q-1}(k). \tag{3.173}$$

На підставі другого твердження леми 2.2 та оцінок (3.173) встановлюємо, що

$$\begin{gathered} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} A_q(k, \gamma_1, \ldots, \gamma_{q-1}, \gamma_{q+1}, \ldots, \gamma_n) \leqslant \\ \leqslant C_7 \left(\frac{\nu_q(k)}{\lambda_k^{m_{j-1}} \exp(-\rho_2 t_j \lambda_k) \nu_{q-1}(k)} \right)^{\frac{1}{q-1}} \leqslant C_8 \lambda_k^{-p/2-\widetilde{\varepsilon}}, \end{gathered} \tag{3.174}$$

де $A_q(k, \gamma_1, \ldots, \gamma_{q-1}, \gamma_{q+1}, \ldots, \gamma_n) = \{\gamma_q \in [\rho_1, \rho_2] : \vec{\gamma} \in A_q(k)\}$, $q \in \{2, \ldots, n\}$, $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon/(n^2 - n)$. Інтегруючи оцінки (3.174) за змінними $\gamma_1, \ldots, \gamma_{q-1}$, $\gamma_{q+1}, \ldots, \gamma_n$, отримуємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A_q(k) \leqslant C_9 \lambda_k^{-p/2-\widetilde{\varepsilon}}. \tag{3.175}$$

Із нерівностей (3.175) на підставі оцінок (3.121) встановлюємо, що ряд (3.172) мажорується збіжним числовим рядом $C_{10}\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1-2\widetilde{\varepsilon}/p}$, що й потрібно було встановити. $\Diamond$

Зауваження 3.9. Новизна результатів, отриманих у підрозділі 3.3, полягає у тому, що:

1) багатоточкові задачі з кратними вузлами для рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами не вивчались; досить повні дослідження таких задач стосуються тільки рівнянь зі сталими коефіцієнтами [9, 76];

2) для загальних рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами детально досліджено тільки задачі з простими вузлами інтерполяції [70, 91, 95].

Висновки до розділу 3

Третій розділ дисертації присвячено встановленню умов коректної розв'язності (у відповідних функціональних просторах) задач з локальними багатоточковими умовами за часовою змінною та певними умовами (періодичності, типу Діріхле) за просторовими координатами для лінійних параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

У загальному випадку розв'язність таких задач пов'язана з проблемою малих знаменників, для оцінки знизу яких використано метричний підхід [70, 102, 114]. Внаслідок застосування метричного підходу отримано результати про розв'язність задач для майже всіх (стосовно міри Лебега, Гаусдорфа) параметрів задач — коефіцієнтів рівнянь, або значень вузлів інтерполяції. Розглянуто часткові випадки багатоточкових задач в яких відсутня проблема малих знаменників, та наведено приклади, які ілюструють основний теоретичний матеріал.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [78–81, 104, 133].

РОЗДІЛ 4
ЗАДАЧІ З ЛОКАЛЬНИМИ БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

У цьому розділі дисертації досліджується двоточкова задача для параболічних за Петровським систем другого порядку за часом та задача з багатоточковими умовами для параболічних за Петровським систем вищого порядку зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами.

4.1. Системи рівнянь другого порядку

У підрозділі 4.1 встановлено умови коректної розв'язності задачі з локальними двоточковими умовами для лінійних параболічних систем другого порядку за часом зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами. Доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів систем та значення правого вузла інтерполяції.

В області Q_T^p розглянемо задачу

$$W\left(\frac{\partial}{\partial t}, L\right)\vec{u} := \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \begin{pmatrix} a_{11}^1(L) & a_{12}^1(L) \\ a_{21}^1(L) & a_{22}^1(L) \end{pmatrix} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \begin{pmatrix} a_{11}^0(L) & a_{12}^0(L) \\ a_{21}^0(L) & a_{22}^0(L) \end{pmatrix} \vec{u} = \vec{0}, \quad (4.1)$$

$$\vec{u}(t_1, x) = \vec{\varphi}_1(x), \quad \vec{u}(t_2, x) = \vec{\varphi}_2(x), \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T, \quad (4.2)$$

$$L^m \vec{u}(t, x)\big|_\Sigma = \vec{0}, \quad m \in \{0, 1, \ldots, 2b-1\}, \quad (4.3)$$

де $a_{mj}^r(L) = \sum\limits_{q=0}^{(2-r)b} a_{mj}^{r,q} L^q$, $a_{mj}^{r,q} \in \mathbb{C}$, $m, j \in \{1, 2\}$, $r \in \{0, 1\}$, $\vec{u}(t, x) = \mathrm{col}(u^1(t, x), u^2(t, x))$, $\vec{\varphi}_q(x) = \mathrm{col}(\varphi_q^1(x), \varphi_q^2(x))$, $q \in \{1, 2\}$, L — диференціальний вираз, визначений формулою (3.120). Нехай для виразу L виконуються умови $p_{ij} \in C^{4b-1,\varrho}(\overline{G})$, $p_{ij} > 0$, $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $q \in C^{4b-2,\varrho}(\overline{G})$, $q(x) \geqslant 0$, $x \in \overline{G}$, $\overline{G} \in A^{4b,\varrho}$, $0 < \varrho < 1$.

Будемо вважати, що для системи (4.1) виконуються умови:

A_1) рівняння

$$\det \|W(\mu, \lambda_k)\| = 0 \tag{4.4}$$

має попарно різні корені $\mu_1(k), \dots, \mu_4(k)$, які задовольняють нерівності

$$\mathrm{Re}\mu_q(k) \leqslant -\delta_1 \lambda_k^b, \quad q \in \{1, \dots, 4\}, \quad \delta_1 > 0; \tag{4.5}$$

A_2) для кожного $q \in \{1, \dots, 4\}$ вектори $\vec{h}_{q,k} = \mathrm{col}\left(h_{q,k}^1, h_{q,k}^2\right)$ є ненульовими, координати цих векторів визначаються рівностями

$$\begin{aligned} h_{q,k}^1 &= \mu_q^2(k) + \sum_{r=0}^{b} a_{22}^{1,r} \lambda_k^r \mu_q(k) + \sum_{r=0}^{2b} a_{22}^{0,r} \lambda_k^r, \\ h_{q,k}^2(k) &= -\sum_{r=0}^{b} a_{21}^{1,r} \lambda_k^r \mu_q(k) - \sum_{r=0}^{2b} a_{12}^{0,r} \lambda_k^r. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Легко перевірити, що вектор $\vec{h}_{q,k}$ — це перший стовпець матриці, приєднаної до матриці $W(\mu_q(k), \lambda_k)$, $q \in \{1, \dots, 4\}$, цей вектор є розв'язком системи алгебричних рівнянь

$$W(\mu_q(k), \lambda_k)\vec{h} = \vec{0}, \quad q \in \{1, \dots, 4\}.$$

Розв'язок задачі (4.1) — (4.3) з простору $C^2\left([0, T]; \overline{E}_{w_4(\alpha,\beta)}^{\mathbf{X_3},2}\right)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, шукаємо у вигляді ряду

$$\vec{u}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{u}_k(t) X_k(x). \tag{4.7}$$

Кожна вектор-функція $\vec{u}_k(t), k \in \mathbb{N}$, є розв'язком задачі

$$\frac{d^2\vec{u}_k(t)}{dt^2} + \begin{pmatrix} a_{11}^1(\lambda_k) & a_{12}^1(\lambda_k) \\ a_{21}^1(\lambda_k) & a_{22}^1(\lambda_k) \end{pmatrix} \frac{d\vec{u}_k(t)}{dt} + \begin{pmatrix} a_{11}^0(\lambda_k) & a_{12}^0(\lambda_k) \\ a_{21}^0(\lambda_k) & a_{22}^0(\lambda_k) \end{pmatrix} \vec{u}_k(t) = \vec{0}, \tag{4.8}$$

$$\vec{u}_k(t_1) = \vec{\varphi}_{1k} \quad \vec{u}_k(t_2) = \vec{\varphi}_{2k}, \tag{4.9}$$

де $\vec{\varphi}_{jk} = \mathrm{col}(\varphi^1_{jk}, \varphi^2_{jk})$, $k \in \mathbb{N}$, — коефіцієнти Фур'є вектор-функції $\vec{\varphi}_j$ за системою $\mathbf{X_3}$, $j \in \{1, 2\}$.

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розв'язок задачі (4.8), (4.9) зображується формулою

$$\vec{u}_k(t) = \sum_{q=1}^{4} C_q(k)\vec{h}_{q,k} \exp(\mu_q(k)t), \tag{4.10}$$

де сталі $C_q(k)$, $q \in \{1, \dots, 4\}$, знаходимо із системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{4} C_q(k) h^r_{q,k} \exp(\mu_q(k)t_j) = \varphi^r_{jk}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad r \in \{1, 2\}. \tag{4.11}$$

Визначник $\Delta(k, \vec{t})$, $k \in \mathbb{N}$, системи (4.11) співпадає з характеристичним визначником задачі (4.8), (4.9) і має такий вигляд:

$$\Delta(k, \vec{t}) = \begin{vmatrix} h^1_{1,k} \exp(\mu_1(k)t_1) & \dots & h^1_{4,k} \exp(\mu_4(k)t_1) \\ h^2_{1,k} \exp(\mu_1(k)t_1) & \dots & h^2_{4,k} \exp(\mu_4(k)t_1) \\ h^1_{1,k} \exp(\mu_1(k)t_2) & \dots & h^1_{4,k} \exp(\mu_4(k)t_2) \\ h^2_{1,k} \exp(\mu_1(k)t_2) & \dots & h^2_{4,k} \exp(\mu_4(k)t_2) \end{vmatrix}. \tag{4.12}$$

Для встановлення умов єдиності розв'язку задачі (4.1) — (4.3) розглянемо однорідні умови

$$\vec{u}(t_1, x) = 0, \quad \vec{u}(t_2, x) = 0. \tag{4.13}$$

Теорема 4.1. *Нехай для системи* (4.1) *виконуються умови* A_1), A_2). *Для єдиності розв'язку задачі* (4.1) — (4.3) *у шкалі просторів* $C^2\left([0, T]; \overline{E}^{\mathbf{X_3},2}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *необхідно і досить, щоб справджувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \Delta(k, \vec{t}) \neq 0. \tag{4.14}$$

Доведення. Необхідність. Якщо $\Delta(\widehat{k}, \vec{t}) = 0$ для деякого $\widehat{k} \in \mathbb{N}$ то при $k = \widehat{k}$ система (4.11) в якій $\varphi^r_{jk} = 0, \quad j, r \in \{1, 2\}$ має нетривіальний розв'язок $C_q(\widehat{k})$, $q\in\{1,\ldots,4\}$. Тому вектор-функція

$$\vec{u}(t,x)=\sum_{q=1}^{4}C_q(\widehat{k})\vec{h}_{q,\widehat{k}}\exp(\mu_q(\widehat{k})t)X_{\widehat{k}}(x)$$

належить до простору $C^2\Big([0,T];\overline{E}^{\mathbf{X_3},2}_{w_4(\alpha,\beta)}\Big)$ і є ненульовим розв'язком задачі (4.1), (4.3), (4.13). Тому розв'язок задачі (4.1) — (4.3), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що задача (4.1) — (4.3) має два різні розв'язки $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2\in C^2\Big([0,T];\overline{E}^{\mathbf{X_3},2}_{w_4(\alpha,\beta)}\Big)$. Тоді вектор-функція $\vec{u}(t,x)=\vec{u}_1(t,x)-\vec{u}_2(t,x)$ є ненульовим розв'язком задачі (4.1), (4.3), (4.13). Для коефіцієнтів Фур'є $\vec{u}_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, функції $\vec{u}(t,x)$ справедливі зображення вигляду (4.10) в яких сталі $C_q(k)$, $q\in\{1,\ldots,4\}$ є розв'язками лінійної однорідної системи рівнянь, з ненульовим, згідно умови теореми визначником $\Delta(k,\vec{t})$. Тому $C_q(k)=0$, $q\in\{1,\ldots,4\}$, а отже $\vec{u}_k(t)\equiv 0$, $k\in\mathbb{N}$. Звідси отримуємо, що $\vec{u}(t,x)\equiv 0$, всупереч припущенню. $\Diamond$

Наведемо приклади задач, які демонструють виконання або порушення умови (4.14).

Приклад 4.1. Розглянемо систему

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}+\begin{pmatrix}a_1(L)+a_2(L) & 0\\ a_5(L) & a_3(L)+a_4(L)\end{pmatrix}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\\ +\begin{pmatrix}a_1(L)a_2(L) & 0\\ a_5(L)a_1(L) & a_3(L)a_4(L)\end{pmatrix}\vec{u}=\vec{0},\end{gathered}\tag{4.15}$$

де $a_q(L)=\sum\limits_{r=0}^{b}a_q^rL^r$, $\operatorname{Re}a_q^b>0$, $q\in\{1,\ldots,4\}$. Припустимо, що виконується умова

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad a_{5,k}\neq 0,\quad a_{q,k}\neq a_{r,k},\quad q,r\in\{1,\ldots,4\},\ q\neq r,\tag{4.16}$$

де $a_{q,k}:=a_q(\lambda_k)=\sum\limits_{r=0}^{b}a_q^r\lambda_k^r$, $q\in\{1,\ldots,5\}$. У цьому випадку легко обчислити, що корені рівняння (4.4) мають вигляд $\mu_q(k)=-a_{q,k}$, $q\in$

$\{1, \dots, 4\}$, а вектори $\vec{h}_{q,k} = \mathrm{col}(h^1_{q,k}, h^2_{q,k})$ визначаються формулами

$$h^1_{q,k} = (a_{3,k} - a_{q,k})(a_{4,k} - a_{q,k}), \quad h^2_{q,k} = a_{5,k}(a_{1,k} - a_{q,k}), \quad q \in \{1, \dots, 4\}.$$

Із нерівностей (4.16) випливає, що для системи (4.15) умови A_1) та A_2) виконуються.

Для задачі (4.2), (4.3), (4.15) при $t_1 = 0$, $t_2 = T$, визначник (4.12) є таким:

$$\Delta(k, T) = -(a_{5,k})^2 \prod_{l=1}^{2} \prod_{q=1}^{2} (a_{2+l,k} - a_{q,k})^{3-q} \exp(-(a_{2,k} + a_{4,k})T) \times \\ \times \left(\exp((a_{2,k} - a_{1,k})T) - 1\right) \left(\exp((a_{4,k} - a_{3,k})T) - 1\right). \tag{4.17}$$

Таким чином, умова (4.14) виконується тоді і тільки тоді, коли справджуються нерівності

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall m_q \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{r=0}^{b} (a^r_{1+q} - a^r_q)\lambda^r_k \neq 2\pi i m_q / T, \quad q \in \{1, 3\}.$$

Зокрема, якщо у системі (4.15) $p = b = 1$, $L = -\partial^2/\partial x^2$, $a_1(L) = (1 + i)\partial^2/\partial x^2$, $a_2(L) = (1-i)\partial^2/\partial x^2$, $a_3(L) = (2+i)\partial^2/\partial x^2$, $a_4(L) = (2-i)\partial^2/\partial x^2$, $a_5(L) = \partial^2/\partial x^2$, то

$$\Delta(k, T) = -5(1 + 2i)k^{16} \exp((-3 - 2i)Tk^2)(\exp(2iTk^2) - 1)^2.$$

Оскільки $|\Delta(k, T)| = 20\sqrt{5} k^{16} \exp(-3Tk^2) \sin^2(Tk^2)$, то умова (4.14) виконується тоді і тільки тоді, коли число T/π є ірраціональним.

Надалі вважатимемо, що справджується умова (4.14). Тоді для кожного натурального k існує єдиний розв'язок $\vec{u}_k(t)$ задачі (4.8), (4.9), який зображується формулою

$$\vec{u}_k(t) = \sum_{j,q=1}^{4} \frac{\Delta_{j,q}(k, \vec{t})}{\Delta(k, \vec{t})} \exp(\mu_q(k)t) \psi_{j,k} \vec{h}_{q,k}, \tag{4.18}$$

де $(\psi_{1,k}, \dots, \psi_{4,k}) = (\varphi^1_{1,k}, \varphi^2_{1,k}, \varphi^1_{2,k}, \varphi^2_{2,k})$, $\Delta_{j,q}(k, \vec{t})$, $j, q \in \{1, \dots, 4\}$, — алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині j-го рядка та

q-го стовпця у визначнику $\Delta(k,\vec{t})$. Із формул (4.18) випливає формальне зображення розв'язку задачі (4.1) — (4.3) у вигляді ряду Фур'є

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j,q=1}^{4} \frac{\Delta_{j,q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})} \exp(\mu_q(k)t)\psi_{j,k}\vec{h}_{q,k}X_k(x). \tag{4.19}$$

Питання про існування розв'язку задачі (4.1) — (4.3) в шкалі просторів $C^2\left([0,T];\overline{E}^{\mathbf{X_3},2}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)$ пов'язане з проблемою малих знаменників, оскільки вираз $|\Delta(k,\vec{t})|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості натуральних k.

Теорема 4.2. *Нехай виконується умова* (4.14) *і нехай для системи* (4.1) *справджуються умови* A_1) *і* A_2)*, та існують сталі* $\gamma,\nu\in\mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості)* $k\in\mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k,\vec{t})| > \lambda_k^{-\gamma}\exp(-\nu\lambda_k^b). \tag{4.20}$$

Якщо $\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_2\in\overline{E}^{\mathbf{X_3},2}_{w_4(\alpha_0,\beta_0)}$*, де* $\alpha_0=\alpha+\gamma+10b$*,* $\beta_0=\beta+\nu-\delta_1(2t_1+t_2)$*, то існує єдиний розв'язок задачі* (4.1) — (4.3) *з простору* $C^2\Big([0,T];\overline{E}^{\mathbf{X_3},2}_{w_4(\alpha,\beta)}\Big)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (4.19)*, причому*

$$\left\|\vec{u};C^2\left([0,T];\overline{E}^{\mathbf{X_3},2}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)\right\| \leqslant C_1\sum_{j=1}^{2}\left\|\vec{\varphi}_j;\overline{E}^{\mathbf{X_3},2}_{w_4(\alpha_0,\beta_0)}\right\|, \quad C_1=C_1(n,m,T,a^{r,q}_{mj}).$$

Доведення. Встановимо оцінки зверху для коренів рівняння (4.4). Для цього зауважимо, що рівняння (4.4) має вигляд

$$\mu^4+R_{1k}\mu^3+R_{2k}\mu^2+R_{3k}\mu+R_{4k}=0, \tag{4.21}$$

коефіцієнти якого визначаються формулами

$$\begin{gathered}
R_{1k}=\sum_{q=0}^{b}(a^{1,q}_{1,1}+a^{1,q}_{2,2})\lambda_k^q,\ R_{2k}=\sum_{q=0}^{2b}\left(a^{2,q}_{1,1}+a^{2,q}_{2,2}\right)\lambda_k^q+\sum_{l,j=0}^{b}\left(a^{1,l}_{1,2}a^{1,j}_{2,2}-a^{1,l}_{1,2}a^{1,j}_{2,1}\right)\lambda_k^{l+j},\\
R_{3k}=\sum_{q=0}^{b}\sum_{j=0}^{2b}\left(a^{1,q}_{2,2}a^{2,j}_{1,1}+a^{1,q}_{1,1}a^{2,j}_{2,2}-a^{1,q}_{1,2}a^{2,j}_{2,1}-a^{1,q}_{2,1}a^{2,j}_{1,2}\right)\lambda_k^{q+j},\\
R_{4k}=\sum_{q,j=0}^{2b}\left(a^{2,q}_{1,1}a^{2,j}_{2,2}-a^{2,q}_{1,2}a^{2,j}_{2,1}\right)\lambda_k^{q+j}.
\end{gathered} \tag{4.22}$$

Із формул (4.22), отримуємо, що $|R_{jk}| \leqslant C_2 \lambda_k^{jb}$, $j \in \{1, \ldots, 4\}$. Тоді згідно з [110, с. 102], для коренів $\mu_q(k)$ рівняння (4.21) випливають оцінки

$$|\mu_q(k)| \leqslant 2 \max_{j \in \{1,\ldots,4\}} (R_{jk})^{\frac{1}{j}} \leqslant C_3 \lambda_k^b, \quad q \in \{1, \ldots, 4\}. \tag{4.23}$$

Із формул (4.6) на підставі оцінок (4.23) для компонент векторів $\vec{h}_{q,k}$ одержуємо

$$|h_{q,k}^r| \leqslant C_4 \lambda_k^{2b}, \quad r \in \{1, 2\}, \, q \in \{1, \ldots, 4\}. \tag{4.24}$$

З огляду на (4.5), (4.12) і (4.24) отримуємо

$$|\Delta_{j,q}(k, \vec{t})| \leqslant C_5 w_4(6b, -\delta_1(2t_1 + t_2); \lambda_k), \quad j, q \in \{1, \ldots, 4\}. \tag{4.25}$$

Із формули (4.18) на підставі оцінок (4.20), (4.23) — (4.25) встановлюємо

$$\max_{t \in [0,T]} \left| \frac{d^{s_0} u_k^r(t)}{dt^{s_0}} \right| \leqslant \sum_{j,q=1}^{4} \frac{|\Delta_{j,q}(k, \vec{t})|}{|\Delta(k, \vec{t})|} |\psi_{j,k} h_{q,k}^r| |\mu_q(k)|^{s_0} \max_{t \in [0,T]} \{\exp(\mathrm{Re}\mu_q(k)t)\} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 w_4(\gamma + (8 + s_0)b, \nu - \delta_1(2t_1 + t_2); \lambda_k) \sum_{j=1}^{2} (|\varphi_{jk}^1| + |\varphi_{jk}^2|), \tag{4.26}$$

де $s_0 \in \{0, 1, 2\}$, $r \in \{1, 2\}$. Отже

$$\left\| \vec{u}; C^2 \left([0, T]; \overline{E}_{w_4(\alpha,\beta)}^{\mathbf{X_3},2} \right) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|\varphi_{jk}^1|^2 + |\varphi_{jk}^2|^2) w_4^2(\alpha + \gamma + 10b; \beta + \nu - \delta_1(2t_1 + t_2)) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C_7 \sum_{j=1}^{2} \left\| \vec{\varphi}_j; \overline{E}_{w_4(\alpha,\beta)}^{\mathbf{X_3},2} \right\|.$$

З отриманої нерівності випливає твердження теореми. $\Diamond$

Справедливе зауваження про уточнення теореми існування розв'язку задачі (4.1) — (4.3).

Зауваження 4.1. За умов теореми 4.2 для довільного фіксованого $t_* \in [0, T]$ вектор-функція $\vec{u}(t_*, x)$ (як функція змінної x) належить до простору $\overline{E}_{w_4(\alpha,\beta+\delta_1 t_*)}^{\mathbf{X_3},2}$.

Наведемо приклади двоточкових задач, для яких виконується нерівність (4.20). Для цього використаємо наступне твердження.

Лема 4.1. *Для довільних фіксованих* $\rho_q \in \mathbb{C}$*,* $q \in \{0, 1, \dots, n\}$*,*$\rho_n \neq 0$*, нерівність*

$$\left| \sum_{q=0}^{n} \rho_q \lambda_k^q \right| > \frac{|\rho_n|}{2} \lambda_k^n,$$

виконується для всіх $k \in \mathbb{N}$*,* $k > (2\Theta + 1)^{p/2} / (C_2)^{p/2}$*,* $\Theta = \max\limits_{q \in \{1,\dots,n\}} \left| \frac{\rho_{n-q}}{\rho_n} \right|$*, де* C_2 *— стала з оцінок* (3.121).

Доведення. Оскільки $\rho_n \neq 0$, тоді очевидно, що

$$\left| \sum_{q=0}^{n} \rho_q \lambda_k^q \right| = |\rho_n| \lambda_k^n \left| 1 + \sum_{q=1}^{n} \frac{\rho_{n-q}}{\rho_n \lambda_k^q} \right| \geqslant |\rho_n| \lambda_k^n \left| 1 - \left| \sum_{q=1}^{n} \frac{\rho_{n-q}}{\rho_n \lambda_k^q} \right| \right|. \tag{4.27}$$

На підставі оцінок (3.121) і нерівностей

$$\left| \sum_{q=1}^{n} \frac{\rho_{n-q}}{\rho_n \lambda_k^q} \right| \leqslant \Theta \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k^q} \leqslant \Theta \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^q} = \frac{\Theta}{\lambda_k - 1} < \frac{1}{2}, \quad \text{при } \lambda_k > 2\Theta + 1,$$

із (4.27) отримуємо твердження леми. $\Diamond$

Приклад 4.2. Розглянемо систему

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \vec{u}(t,x)}{\partial t^2} + \begin{pmatrix} a_1(L) + a_2(L) & a_6(L) \\ a_5(L) & a_3(L) + a_4(L) \end{pmatrix} \frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t} + \\ + \begin{pmatrix} a_1(L) a_2(L) & a_6(L) a_2(L) \\ a_5(L) a_1(L) & a_3(L) a_4(L) + a_5(L) a_6(L) \end{pmatrix} \vec{u}(t,x) = \vec{0}, \quad (t,x) \in Q_T^p, \end{gathered} \tag{4.28}$$

де $a_q(L) = \sum\limits_{r=0}^{b} a_q^r L^r$, $\operatorname{Re} a_q^b > 0$, $q \in \{1, \dots, 4\}$. Припустимо, що $a_{q,k} = \sum\limits_{r=0}^{b} a_q^r \lambda_k^r$, $q \in \{1, \dots, 4\}$, справджують умову (4.16), і $a_{q,k} \neq 0$, $q \in \{5, 6\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Для цієї системи $\mu_q(k) = -a_{q,k}$, $q \in \{1, \dots, 4\}$, а вектори $\vec{h}_{q,k} = \operatorname{col}(h_{q,k}^1, h_{q,k}^2)$, $q \in \{1, \dots, 4\}$, визначаються формулами

$$h_{q,k}^1 = (a_{3,k} - a_{q,k})(a_{4,k} - a_{q,k}) + a_{5,k} a_{6,k}, \; h_{q,k}^2 = a_{5,k}(a_{1,k} - a_{q,k}). \tag{4.29}$$

Оскільки для довільного натурального k

$$h^1_{q,k} = \mu^2_q(k) + (a_{3,k} + a_{4,k})\mu_q(k) + a_{3,k}a_{4,k} + a_{5,k}a_{6,k} \neq 0, q \in \{1, \dots, 4\},$$

то для системи (4.28) справджуються умови A_1) та A_2).

Твердження 4.1. *Нехай для коефіцієнтів системи* (4.28) *виконуються умови*

$$\begin{gathered} 0 < \mathrm{Re}\ a^b_1 < \ldots < \mathrm{Re}\ a^b_4 < \delta_2, \\ a^b_q \neq 0,\ q \in \{5, 6\},\ (a^b_3 - a^b_1)(a^b_4 - a^b_1) \neq -a^b_5 a^b_6. \end{gathered} \tag{4.30}$$

Для задачі (4.2), (4.3), (4.28) *нерівність* (4.20) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{N}$ *при* $\gamma > -8b$, $\nu = 2\delta_2(t_1 + t_2)$.

Доведення. Розкриваючи визначник $\Delta(k, \vec{t})$ за мінорами перших двох рядків отримуємо

$$\begin{gathered} \Delta(k, \vec{t}) = \sum_{\omega=(i_1,i_2)\in C(4;2)} (-1)^{3+i_1+i_2} h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k) \times \\ \times \exp(-(a_{i_1,k} + a_{i_2,k})t_1 - (a_{j_1,k} + a_{j_2,k})t_2), \end{gathered} \tag{4.31}$$

де набір $\sigma(\omega)$– однозначно визначається за набором $\omega = (i_1, i_2) \in C(4; 2)$, умовою $\omega \cap \sigma(\omega) = \varnothing$. Із формули (4.31) отримуємо

$$\begin{gathered} |\Delta(k, \vec{t})| \geqslant \exp(-\mathrm{Re}(a_{3,k} + a_{4,k})t_1 - \mathrm{Re}(a_{1,k} + a_{2,k})t_2)|h_{\omega_0}(k)||h_{\sigma_0}(k)| - \\ -\Bigg| \sum_{\omega\in C(4;2)\setminus\omega_0} h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k) \exp((a_{3,k} + a_{4,k} - a_{i_1,k} - a_{i_2,k})t_1) \times \\ \times \exp((a_{1,k} + a_{2,k} - a_{j_1,k} - a_{j_2,k})t_2)\Bigg|, \end{gathered} \tag{4.32}$$

де $\omega_0 = \{3, 4\}$, $\sigma_0 = \{1, 2\}$. Із формул (4.29) на підставі леми 4.1 та умов (4.30) отримуємо

$$\begin{gathered} |h_{\omega_0}(k)||h_{\sigma_0}(k)| = |(a_{5,k})^3 a_{6,k}| \times \\ \times |(a_{1,k} - a_{2,k})(a_{3,k} - a_{4,k})((a_{3,k} - a_{1,k})(a_{4,k} - a_{1,k}) + a_{5,k}a_{6,k})| \geqslant C_8 \lambda^{8b}_k. \end{gathered} \tag{4.33}$$

На підставі оцінок (4.30) випливає, що для довільних наборів $\omega, \sigma \in C(4;2)$, $\omega \neq \omega_0$, $\sigma \neq \sigma_0$, виконується умова

$$\lim_{k \mapsto \infty} \exp((a_{3,k} + a_{4,k} - a_{i_1,k} - a_{i_2,k})t_1 + (a_{1,k} + a_{2,k} - a_{j_1,k} - a_{j_2,k})t_2) = 0.$$

Звідси, діснанемо, що $\exists K_1 > 0$ таке, що для всіх $k \in \mathbb{N}$, $k > K_1$ виконується оцінка

$$\Bigg| \sum_{\omega \in C(4;2) \setminus \omega_0} h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k) \exp((a_{3,k} + a_{4,k} - a_{i_1,k} - a_{i_2,k})t_1) \times$$

$$\times \exp((a_{1,k} + a_{2,k} - a_{j_1,k} - a_{j_2,k})t_2) \Bigg| \leqslant \frac{1}{2} |h_{\omega_0}(k)||h_{\sigma_0}(k)|.$$

Отже на підставі оцінок (4.30), (4.32) та (4.33) отримуємо

$$|\Delta(k, \vec{t})| \geqslant \frac{1}{2} \exp(-\mathrm{Re}(a_{3,k} + a_{4,k})t_1 - \mathrm{Re}(a_{1,k} + a_{2,k})t_2) \times$$

$$\times |h_{\omega_0}(k)||h_{\sigma_0}(k)| \geqslant \lambda_k^{8b} \exp(-2\delta_2(t_1 + t_2)\lambda_k^b).$$

Теорему доведено.$\Diamond$

Зауваження 4.2. Оцінки отримані в твердженні 4.1 означають, що для деяких двоточкових задач для систем параболічних рівнянь другого порядку відсутня проблема малих знаменників.

Дослідимо питання про можливість виконання оцінки (4.20). Для цього введемо такі позначення:
$\delta_3 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \max_{q \in \{1,\ldots,4\}} \{|\mathrm{Re}\mu_q(k)|/\lambda_k^b\}$; $\mathrm{set}\omega = \{i_1, i_2\}$; для набору $\omega = (i_1, i_2) \in C(4;2)$ введемо такий набір $\sigma(\omega) = (j_1, j_2) \in C(4;2)$, що $\mathrm{set}\omega \cap \mathrm{set}\sigma(\omega) = \varnothing$; $M_\omega(k) = \mu_{i_1}(k) + \mu_{i_2}(k)$, $\omega = (i_1, i_2) \in C(4;2)$; $\vec{H}_q(k) = \mathrm{col}(\vec{h}_{q,k}, \mu_q(k)\vec{h}_{q,k})$, $q \in \{1, \ldots, 4\}$;

$$H_2(k) = \det \|\vec{H}_1(k), \ldots, \vec{H}_4(k)\|; \tag{4.34}$$

$$S_2(k) = \prod_{\substack{\sigma \prec \omega, \\ \sigma, \omega \in C(4;2)}} \left(M_\sigma(k) - M_\omega(k)\right)^2. \tag{4.35}$$

Теорема 4.3. *Нехай існують такі сталі γ_1 і γ_2, що для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності*

$$|H_2(k)| > \lambda_k^{-\gamma_1}, \tag{4.36}$$

$$|S_2(k)| > \lambda_k^{-\gamma_2}. \tag{4.37}$$

Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_2 \in (t_1; T]$ (при довільному фіксованому $t_1 \in [0, T)$) нерівність (4.20) виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k, якщо $\gamma > 5p/2 + \gamma_1 + \gamma_2/2 + 17b$ та $\nu = 2\delta_3(T + t_1)$.

Доведення. Нехай $F_\gamma^\nu(k) = \{t_2 \in (t_1, T] : |\Delta(k, \vec{t})| \leqslant \nu(k)\}$, $k \in \mathbb{N}$, де $\nu(k) = w_4(-5p/2 - \gamma_1 - \gamma_2/2 - 17b - \varepsilon_0, -2\delta_4(T + t_1); \lambda_k)$, $\varepsilon_0 > 0$. Згідно з лемою Бореля-Кантеллі для доведення теореми досить перевірити, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} F_\gamma^\nu(k), \tag{4.38}$$

є збіжними. Спочатку доведемо, що існують такі попарно неперетинні набори ω_1 і $\omega_2 \in C(4; 2)$ для яких нерівності

$$|h_{\omega_1}(k)||h_{\omega_2}(k)| \geqslant C_9 \lambda_k^{-\gamma_1 - 2b}, \tag{4.39}$$

$$\prod_{\substack{\sigma \in C(4;2), \\ \sigma \neq \omega_2}} |M_{\omega_2}(k) - M_\sigma(k)| \geqslant C_{10} \lambda_k^{-\gamma_2/2 - 10b}, \tag{4.40}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{N}$.

Дійсно, за теоремою Лапласа про обчислення визначників, розкладемо визначник $H_2(k)$ за мінорами перших двох рядків і враховуючи нерівності (4.36) дістанемо

$$\lambda_k^{-\gamma_1} < |H_2(k)| = \left| \sum_{\omega \in C(4;2)} (-1)^{i_1 + i_2 + 1} h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k) \mu_{j_1}(k) \mu_{j_2}(k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\omega \in C(4;2)} |h_\omega(k)||h_{\sigma(\omega)}(k)||\mu_{j_1}(k)||\mu_{j_2}(k)|, \tag{4.41}$$

де $\sigma(\omega) = (j_1, j_2)$. Сума в правій частині нерівності (4.41) містить 6 доданків, тому знайдуться такі два неперетинні набори $\omega_1, \omega_2 \in C(4;2)$, що

$$\sum_{\omega \in C(4;2)} |h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k)||\mu_{j_1}(k)\mu_{j_2}(k)| \leqslant 6|h_{\omega_1}(k)||h_{\omega_2}(k)||\mu_{q_1}(k)\mu_{q_2}(k)|, \tag{4.42}$$

де $\omega_2 = (q_1, q_2)$. Із нерівностей (4.23), (4.41) та (4.42) випливає, що

$$\lambda_k^{-\gamma_1} \leqslant 6|h_{\omega_1}(k)||h_{\omega_2}(k)||\mu_{q_1}(k)||\mu_{q_2}(k)| \leqslant 6(C_3)^2 \lambda_k^{2b} |h_{\omega_1}(k)||h_{\omega_2}(k)|,$$

тобто $|h_{\omega_1}(k)||h_{\omega_2}(k)| \geqslant \frac{1}{6(C_3)^2}\lambda_k^{-\gamma_1 - 2b}$.

Для доведення нерівності (4.40) використаємо, те, що на підставі формули (4.35) функцію $S_2(k)$ можна записати у вигляді

$$S_2(k) = \prod_{\substack{\sigma \in C(4;2),\\ \sigma \neq \omega_2}} (M_{\omega_2}(k) - M_\sigma(k))^2 \prod_{(\sigma,\omega) \in I_2} (M_\sigma(k) - M_\omega(k))^2, \tag{4.43}$$

де $I_1 = \{(\sigma, \omega_2) : \sigma \in C(4;2), \sigma \prec \omega_2\} \cup \{(\omega_2, \omega) : \omega \in C(4;2), \omega_2 \prec \omega\}$, $I_2 = \{(\sigma, \omega) : \sigma \prec \omega, (\sigma, \omega) \notin I_1\}$. Оскільки множина I_2 складається з 10 елементів, то на підставі оцінок (4.23) одержуємо

$$\prod_{(\sigma,\omega) \in I_2} |M_\sigma(k) - M_\omega(k)|^2 \leqslant (4C_3)^{20} \lambda_k^{20b}. \tag{4.44}$$

Із формули (4.43), на підставі оцінок (4.37), (4.44) отримуємо, що нерівність

$$\prod_{\substack{\sigma \in C(4;2),\\ \sigma \neq \omega_2}} |M_{\omega_2}(k) - M_\sigma(k)|^2 \geqslant \frac{1}{(4C_3)^{20}} \lambda_k^{-\gamma_2 - 20b}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k, а отже й нерівність $\prod\limits_{\sigma \in C(4;2), \sigma \neq \omega_2} |M_{\omega_2}(k) - M_\sigma(k)| \geqslant \frac{1}{(4C_3)^{10}} \lambda_k^{-\gamma_2/2 - 10b}$ виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{N}$.

Для доведення збіжності ряду (4.38) оцінемо зверху Лебегові міри множин $F_\gamma^\nu(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Для цього використаємо теорему Лапласа про обчислення визначників та розкладемо $\Delta(k,\vec{t})$ за мінорами перших двох рядків, отримаємо

$$\Delta(k,\vec{t}) = \sum_{\substack{\omega=(i_1,i_2),\\ \omega\in C(4;2)}} (-1)^{i_1+i_2+1} h_\omega(k) h_{\sigma(\omega)}(k) \exp(M_\omega(k)t_1 + M_{\sigma(\omega)}(k)t_2). \quad (4.45)$$

Запровадимо диференціальний вираз п'ятого порядку

$$P_{\omega_2}(d/dt_2,k) = \prod_{\substack{\sigma\in C(4;2),\\ \sigma\neq\omega_2}} \left(\frac{d}{dt_2} - M_\sigma(k)\right),$$

де $\omega_2 \in C(4;2)$ набір для якого виконуються оцінки (4.39), (4.40). Застосуємо диференціальний вираз $P_{\omega_2}(d/dt_2,k)$ до обидвох частин рівності (4.45) отримуємо

$$P_{\omega_2}\left(\frac{d}{dt_2},k\right)\Delta(k,\vec{t}) = h_{\omega_1}(k)h_{\omega_2}(k)P_{\omega_2}(M_{\omega_2}(k),k)\exp(M_{\omega_1}(k)t_1 + M_{\omega_2}(k)t_2). \quad (4.46)$$

Оскільки для довільного фіксованого $t_1 \in [0,T)$ і довільного $t_2 \in (t_1,T]$ виконуються нерівності

$$|\exp(M_{\omega_1}(k)t_1 + M_{\omega_2}(k)t_2)| \geqslant \exp(-2\delta_3(T+t_1)\lambda_k^b),$$

то із рівності (4.46), на підставі оцінок (4.39), (4.40) отримуємо, що для довільного $t_2 \in (t_1,T]$ нерівність

$$\left|P_{\omega_2}(d/dt_2,k)\Delta(k,\vec{t})\right| \geqslant C_{11} w_4(-\gamma_1/2 - \gamma_2 - 12b, -2\delta_3(T+t_1);\lambda_k) \quad (4.47)$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k.

Для оцінки зверху мір Лебега множин $F_\gamma^\nu(k)$, $k \in \mathbb{N}$, використаємо лему 2.2. Для цього зауважимо, що із формули (4.45) випливає, що для довільного фіксованого $t_1 \in [0,T)$ визначник $\Delta(k,\vec{t})$ є квазімногочленом змінної t_2, модулі показників експонент якого не перевищують $2C_3T\lambda_k^b$. Степінь многочлена $P_{\omega_2}(\mu,k)$ за змінною μ дорівнює 5, а модуль коефіцієнта при похідній $\left(\frac{d}{dt_2}\right)^{5-j}$, $j \in \{0,1,\ldots,5\}$, у виразі $P_{\omega_2}(d/dt_2,k)$ не перевищує $C_{12}\lambda_k^{jb}$, тоді із оцінок (4.47) та леми 2.2 отримуємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} F_\gamma^\nu(k) \leqslant C_{13}\left(\frac{\lambda_k^b \nu(k)}{w_4(-\gamma_1/2-\gamma_2-12b,-2\delta_3(T+t_1);\lambda_k)}\right)^{\frac{1}{5}} \leqslant C_{13}\lambda_k^{-\frac{p}{2}-\frac{\varepsilon_0}{5}}. \tag{4.48}$$

Із оцінок (3.121), (4.48) випливає, що ряд (4.38) мажорується збіжним числовим рядом $C_{13}(C_1)^{-\frac{p}{2}-\frac{\varepsilon_0}{5}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1-\frac{2\varepsilon_0}{5p}}$. Теорему доведено. $\Diamond$

Наведемо приклад параболічної системи для якої виконуються умови (4.36), (4.37).

Приклад 4.3. Для системи (4.28) функція $S_2(k)$ зображується формулою

$$S_2(k) = \prod_{\substack{\sigma\prec\omega,\\ \sigma,\omega\in C(4;2)}} \left(\sum_{r=0}^{b}(a_{j_1}^r + a_{j_2}^r - a_{i_1}^r - a_{i_2}^r)\lambda_k^r\right)^2. \tag{4.49}$$

Припустимо, що

$$\forall\omega,\sigma\in C(4;2) \quad a_{j_1}^b + a_{j_2}^b \neq a_{i_1}^b + a_{i_2}^b, \quad \sum_{r=0}^{b}(a_{j_1}^r + a_{j_2}^r - a_{i_1}^r - a_{i_2}^r)\lambda_k^r \neq 0,\ \forall k\in\mathbb{N},$$

тоді із формули (4.49) на підставі леми 4.1 отримуємо, що для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k виконується нерівність $|S_2(k)| \geqslant C_{14}\lambda_k^{30b}$, тобто оцінка (4.37) справджується при $\gamma_2 > -30b$. Із формул (4.29), (4.34) знаходимо, що

$$H_2(k) = (a_{5,k})^2\,(a_{5,k}a_{6,k} + (a_{3,k}-a_{1,k})(a_{4,k}-a_{1,k})) \prod_{1\leqslant j<q\leqslant 4}(a_{q,k}-a_{j,k}).$$

На підставі леми 4.1 та умов (4.30), отримуємо, що нерівність $|H_2(k)| > C_{15}\lambda_k^{10b}$ виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k\in\mathbb{N}$.

Щоб зясувати питання про можливість виконання нерівностей (4.36), (4.37) для системи параболічних рівнянь (4.1) доведемо наступне твердження. Позначимо:

$$F(z_1,\ldots,z_n,\lambda) = \sum_{|s|\leqslant m} f_s(\lambda) z_1^{s_1}\ldots z_n^{s_n},\ s=(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{Z}_+^n,\ m\in\mathbb{N}, \tag{4.50}$$

де

$$f_s(\lambda)=\sum_{j=0}^{\chi(s)} f_{j,s}\lambda^j, \quad f_{j,s}\in\mathbb{Z}, \quad \chi(s)\leqslant N_1, \quad N_1\in\mathbb{N}. \tag{4.51}$$

Лема 4.2. *Якщо існує точка* $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ *така, що*

$$\forall k\in\mathbb{N} \quad F(z_1,\ldots,z_n,\lambda_k)\not\equiv 0, \tag{4.52}$$

то існує вектор $s(k)=(s_1(k),\ldots,s_n(k))\in\mathbb{Z}_+^n$, $|s(k)|\leqslant m$, *та стала* $K_2>0$ *такі, що:*

1) доданок $f_{s(k)}(\lambda_k)z_1^{s_1(k)}\ldots z_n^{s_n(k)}$ *є старшим стосовно лексикографічного впорядкування доданків у* $F(z_1,\ldots,z_n,\lambda_k)$*;*

2) для всіх $k\in\mathbb{N}$, $k>K_2$, *виконується нерівність*

$$\left|f_{s(k)}(\lambda_k)\right|\geqslant 1. \tag{4.53}$$

Доведення. З умови (4.52) випливає, що в сумі (4.50) при $\lambda=\lambda_k$ хоча б один з доданків є відмінним від нуля, тому для довільного $k\in\mathbb{N}$ знайдеться вектор $s(k)=(s_1(k),\ldots,s_n(k))\in\mathbb{Z}_+^n$, $|s(k)|\leqslant m$, такий, що

$$f_{s(k)}(\lambda_k)\neq 0, \tag{4.54}$$

інакше не виконується умова (4.52). Не обмежуючи загальності міркувань, можна вважати, що вектор $s(k)$ є таким, що доданок $f_{s(k)}(\lambda_k)z_1^{s_1(k)}\ldots z_n^{s_n(k)}$ є старшим стосовно лексикографічного впорядкування доданків [111, с. 284]. Многочлен $f_{s(k)}(\lambda)$ як функція однієї змінної λ відмінний від тотожного нуля, бо при $\lambda=\lambda_k$ значення $f_{s(k)}(\lambda_k)$ цього многочлена відмінне від нуля (див. формулу (4.54)). Таким чином,

$$f_{s(k)}(\lambda)=\sum_{j=0}^{N(s(k))} f_{j,s(k)}\lambda^j,$$

де $N(s(k))\leqslant\chi(s(k))\leqslant N_1$, причому старший коефіцієнт $f_{N(s(k)),s(k)}$ є цілим числом, відмінним від нуля. Якщо $\lambda>1+2N_1\xi$, де $\xi=\max\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant\chi(s),\\ |s|\leqslant m}}|f_{j,s}|\in$

$\mathbb{N}$, то виконується оцінка

$$\left|\sum_{j=0}^{N(s(k))-1} f_{j,s(k)}\lambda^j\right| \leqslant N_1\xi\lambda^{N(s(k))-1}. \tag{4.55}$$

З оцінки (4.55) та нерівності трикутника випливає, що для всіх $\lambda > 1 + 2N_1\xi$ виконується оцінка

$$\left|f_{s(k)}(\lambda)\right| \geqslant \left|f_{N(s(k)),s(k)}\lambda^{N(s(k))}\right| - \left|\sum_{j=0}^{N(s(k))-1} f_{j,s(k)}\lambda^j\right| \geqslant$$

$$\geqslant \lambda^{N(s(k))} - N_1\xi\lambda^{N(s(k))-1} > N_1\xi\lambda^{N(s(k))-1} \geqslant 1. \tag{4.56}$$

Тоді із (3.121) та (4.56) отримуємо, що для всіх $k > K_2$, $K_2 = (1 + 2N_1\xi)^{p/2}/(C_1)^{p/2}$, виконується нерівність

$$|f_{s(k)}(\lambda_k)| \geqslant 1. \tag{4.57}$$

Із (4.57) випливає твердження леми. $\Diamond$

Встановимо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега) систем рівнянь (4.1) виконуються умови (4.36), (4.37). Нехай $\vec{Y} = \mathrm{col}(Y_1, \ldots, Y_\theta) := \mathrm{col}(a_{mj}^{r,q_r} : m, j \in \{1, 2\}, r \in \{0, 1\}, q_r \in \{0, 1, \ldots, (2-r)b\})$ — вектор розміру $\theta = 12b + 8$, складений з коефіцієнтів системи (4.1); $U^\theta(\rho) = \{\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_\theta) \in \mathbb{C}^\theta : \max\limits_{j\in\{1,\ldots,\theta\}} |Y_j| \leqslant \rho\}$, $\rho > 0$; $\widetilde{U}^\theta(\rho)$ — множина тих векторів $\vec{Y_0} = \mathrm{col}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{8b+4}, a_{11}^{1,b}, \ldots, a_{22}^{1,b}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{4b-4}, a_{11}^{0,2b}, \ldots, a_{22}^{0,2b}) \in U^\theta(\rho)$ для яких: 1) $a_{11}^{0,2b} = a_1a_2$, $a_{22}^{0,2b} = a_3a_4$, $a_{11}^{1,b} = a_1 + a_2$, $a_{11}^{1,b} = a_3 + a_4$, де $a_q > 0, q \in \{1, \ldots, 4\}$, $a_q \neq a_r$, $q \neq r$, 2) $a_{21}^{0,2b} = \rho$, $\rho > 0$, 3) $a_{12}^{1,b} = a_{12}^{0,2b} = a_{21}^{1,b} = 0$.

Теорема 4.4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^\theta$) векторів $\vec{Y} \in U^\theta(\rho)$ нерівність* (4.36) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k при $\gamma_1 > 3p$.*

Доведення. Із формул (4.6), (4.34) та елементарних властивостей визначника випливає, що функцію $H_2(k)$, $k \in \mathbb{N}$, можна записати у вигляді

$$H_2(k) = \sum_{\substack{q=(q_1,\dots,q_4)\\ q_1+\dots+q_4\leqslant 8}} v_q(k)\mu_1^{q_1}(k)\dots\mu_4^{q_4}(k),$$

де $v_q(k)$, $q=(q_1,\dots,q_4)$, — многочлени від $Y_1,\dots,Y_\theta$, степінь яких не перевищує 4. Таким чином

$$H_2^2(k) = \sum_{\substack{q=(q_1,\dots,q_4)\\ q_1+\dots+q_4\leqslant 16}} \widetilde{v}_q(k)\mu_1^{q_1}(k)\dots\mu_4^{q_4}(k),$$

де $\widetilde{v}_q(k)$, $q=(q_1,\dots,q_4)$, — многочлени від $Y_1,\dots,Y_\theta$, степінь яких не перевищує 8.

Із формули (4.34) випливає, що функція $H_2^2(k)$ є симетричним многочленом від коренів $\mu_1(k),\dots,\mu_4(k)$ степеня 16. Тоді на підставі основної теореми теорії симетричних многочленів [111, с. 285] функцію $H_2^2(k)$ можна подати у вигляді

$$H_2^2(k) = \sum_{\substack{m=(m_1,\dots,m_4)\\ m_1+2m_2+3m_3+4m_4\leqslant 16}} g_m(k)R_{1k}^{m_1}\dots R_{4k}^{m_4},$$

де $g_m(k)$, $m=(m_1,\dots,m_4)$, — многочлени, які є лінійними комбінаціями многочленів $\widetilde{v}_q(k)$, $q=(q_1,\dots,q_4)$, а тому $g_m(k)$, $m=(m_1,\dots,m_4)$, є многочленами від $Y_1,\dots,Y_\theta$ степеня 8. Із формул (4.22) видно, що R_{jk}, $j\in\{1,\dots,4\}$, є многочленами від $Y_1,\dots,Y_\theta$ степеня не вищого 2, тоді

$$H_2^2(k) = \sum_{\substack{s=(s_1,\dots,s_\theta),\\ |s|\leqslant 24}} \alpha_s(\lambda_k)Y_1^{s_1}\dots Y_\theta^{s_\theta}, \tag{4.58}$$

де $\alpha_s(\lambda_k) = \sum\limits_{j=0}^{20b}\alpha_{j,s}\lambda_k^j, \quad \alpha_{j,s}\in\mathbb{Z}, \quad |s|\leqslant 24$. Користуючись лемою 2.3 оцінемо зверху Лебегові міри множин $E_\rho^H(k)=\{\vec{Y}\in U^\theta(\rho) : |H_2^2(k)|\leqslant \lambda_k^{-2\gamma_1}\}, \quad k\in\mathbb{N}$. Доведемо спочатку, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функція $H_2(k)$ відмінна від тотожного нуля в $U^\theta(\rho)$, $\rho>0$. Для цього покажемо, що $H_2(k)$ відмінна від тотожного нуля в $\widetilde{U}^\theta(\rho)\subset U^\theta(\rho)$. Для такого вектора $\vec{Y}_1 \in \widetilde{U}^\theta(\rho)$, $\rho > 0$, корені $\mu_q(k_0) = -a_q\lambda_{k_0}^b$, $q \in \{1,\ldots,4\}$, — є різними, $\vec{h}_{q,k_0} = \mathrm{col}((a_3-a_q)(a_4-a_q)\lambda_{k_0}^{2b},\rho)$, $q \in \{1,\ldots,4\}$, а функція $H_2(k_0)$ дорівнює

$$H_2(k_0) = -\prod_{1\leqslant j<q\leqslant 4}(a_q-a_j)\rho^2\lambda_{k_0}^{8b} \neq 0, \forall k \in \mathbb{N},$$

оскільки $a_r \neq a_q$, $r \neq q$. Таким чином для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $H_2(k)$ не дорівнює тотожно нулеві, тобто числа $\alpha_s(\lambda_k)$ у (4.58) не можуть одночасно дорівнювати нулеві. Тоді із леми 4.2 випливає, що існує вектор $s(k) = (s_1(k),\ldots,s_\theta(k)) \in \mathbb{Z}_+^\theta$, $|s(k)| \leqslant 24$, і стала K_3 такі, що для всіх $k > K_3$ доданок $\alpha_{s(k)}(\lambda_k)Y_1^{s_1(k)}\ldots Y_\theta^{s_\theta(k)}$ є старшим стосовно лексикографічного впорядкування доданків у (4.62) і для всіх $k > K_3$ виконується оцінка

$$\left|\frac{\partial^{|s(k)|}H_2^2(k)}{\partial Y_1^{s_1(k)}\ldots\partial Y_\theta^{s_\theta(k)}}\right| = |\alpha_{s(k)}(\lambda_k)|s_1(k)!\ldots s_\theta(k)! \geqslant 1. \tag{4.59}$$

На підставі леми 2.3 та оцінки (4.59) отримуємо $\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\theta}E_\rho^H(k) = 0$, коли $s(k) = \vec{0}$, або

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\theta}E_\rho^H(k) \leqslant C_{16}\lambda_k^{-4\gamma_1/|s(k)|} \leqslant C_{16}\lambda_k^{-p/2-\varepsilon_1/6}, \tag{4.60}$$

де $\gamma_1 = 3p+\varepsilon_1$, $s(k) \neq \vec{0}$. Із оцінок (3.121), (4.60) випливає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\theta}E_\rho^H(k)$ є збіжним. Звідси, за лемою Бореля-Кантеллі, міра Лебега в $\mathbb{C}^\theta$ множини тих векторів $\vec{Y}$, які належать до нескінченної кількості множин $E_\rho^H(k)$, дорівнює нулеві. Множину $E^H(k) = \{\vec{Y} \in \mathbb{C}^\theta : |H_2^2(k)| \leqslant \lambda_k^{-2\gamma_1}\}$, $k \in \mathbb{N}$, можна зобразити як злічене об'єднання множин $E_\rho^H(k)$, а, отже, й міра Лебега в $\mathbb{C}^\theta$ множини тих векторів $\vec{Y}$, які належать до нескінченної кількості множин $E^H(k)$, дорівнює нулеві. $\Diamond$

Теорема 4.5. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^\theta$) векторів $\vec{Y} \in U^\theta(\rho)$ нерівність* (4.37) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k, при $\gamma_2 > 15p/2$.*

Доведення. Із формули (4.35) видно, що функція $S_2(k)$ є симетричним многочленом від коренів $\mu_1(k), \ldots, \mu_4(k)$ степеня 30 з цілими коефіцієнтами. На підставі основної теореми теорії симетричних многочленів [111, глава XI] та формул Вієта функцію $S_2(k)$ можна подати у вигляді

$$S_2(k) = \sum_{\substack{q=(q_1,\ldots,q_4), \\ q_1+2q_2+\ldots+4q_4\leqslant 30}} \vartheta_q R_{1k}^{q_1} \ldots R_{4k}^{q_4}, \tag{4.61}$$

де ϑ_q є цілими числами, що одночасно не дорівнюють нулю, а R_{jk} — визначені формулами (4.22). Із формул (4.22), (4.61) отримуємо

$$S_2(k) = \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_\theta), \\ |s|\leqslant 30}} \phi_s(\lambda_k) Y_1^{s_1} \ldots Y_\theta^{s_\theta}, \tag{4.62}$$

де $\phi_s(\lambda_k) = \sum\limits_{r=0}^{30b} \phi_{r,s}\lambda_k^r$, $\phi_{r,s} \in \mathbb{Z}$.

Доведемо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $S_2(k)$ відмінна від тотожного нуля в полікрузі $\widetilde{U}^\theta(\rho) \subset U^\theta(\rho)$, $\rho > 0$. Дійсно для такого вектора $\vec{Y}_1 \in \widetilde{U}^\theta(\rho)$, коефіцієнти R_{jk}, $j \in \{1, \ldots, 4\}$ є такими: $R_{1k} = (a_1+\ldots+a_4)\lambda_k^b$, $R_{2k} = (a_1a_2+\ldots+a_3a_4)\lambda_k^{2b}$, $R_{3k} = (a_1a_2a_3+\ldots+a_2a_3a_4)\lambda_k^{3b}$, $R_{4k} = a_1a_2a_3a_4\lambda_k^{4b}$. Тоді отримуємо, що функція

$$S_2(k) = \sum_{\substack{s=(q_1,\ldots,q_4), \\ |q|\leqslant 30}} g_s\lambda_k^{30b}(a_1)^{q_1} \ldots (a_4)^{q_4},$$

є многочленом 4 змінних a_q, $q \in \{1, \ldots, 4\}$, що є компонентами вектора $\vec{Y}_1$, і як многочлен цих змінних для кожного $k \in \mathbb{N}$ відмінна від тотожного нуля. Отже функція $S_2(k)$ є ненульовим многочленом змінних $Y_1 \ldots Y_\theta$ у $U^\theta(\rho)$. Тоді із леми 4.2 випливає, що існує вектор $s(k) = (s_1(k), \ldots, s_\theta(k)) \in \mathbb{Z}_+^\theta$, $|s(k)| \leqslant 30$, і стала K_4 такі, що для всіх $k > K_4$ доданок $\phi_{s(k)}(\lambda_k)Y_1^{s_1(k)} \ldots Y_\theta^{s_\theta(k)}$ є старшим стосовно лексикографічного впорядкування доданків у (4.62) і для всіх $k > K_4$ виконується оцінка

$$\left|\frac{\partial^{|s(k)|}S_2(k)}{\partial Y_1^{s_1(k)}\ldots\partial Y_\theta^{s_\theta(k)}}\right| \geqslant |\phi_{s(k)}(\lambda_k)|s_1(k)!\ldots s_\theta(k)! \geqslant 1. \qquad (4.63)$$

Згідно леми 2.3 на підставі нерівностей (4.63) отримуємо, що $\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\theta}\{\vec{Y}\in U^\theta(\rho): |S_2(k)|\leqslant\lambda_k^{-\gamma_2}\}=0$, коли $s(k)=\vec{0}$, або

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\theta}\{\vec{Y}\in U^\theta(\rho): |S_2(k)|\leqslant\lambda_k^{-\gamma_2}\}\leqslant C_{17}\lambda_k^{-2\gamma_2/|s(k)|}\leqslant C_{17}\lambda_k^{-\frac{p}{2}-\frac{\varepsilon_2}{15}}, \qquad (4.64)$$

коли $s(k)\neq\vec{0}$, $\gamma_2=15p/2+\varepsilon_2$, $\varepsilon_2>0$. Із оцінок (3.121), (4.64) випливає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\theta}\{\vec{Y}\in U^\theta(\rho): |S_2(k)|\leqslant\lambda_k^{-\gamma_2}\}$ є збіжним. Тоді враховуючи лему Бореля-Кантеллі отримує твердження теореми. $\Diamond$

З теорем 4.2 — 4.5 випливає таке твердження про однозначну розв'язність задачі (4.1) — (4.3) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів складених з її параметрів.

Наслідок 4.1. *Нехай* $\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_2\in\overline{E}^{\mathbf{X_3},2}_{w_4(\alpha_0,\beta_0)}$, *де* $\alpha_0>\alpha+37p/4+27b$, $\beta_0=\beta+2\delta_3(T+t_1)-\delta_1(2t_1+t_2)$. *Для довільного фіксованого* $t_1\in[0,T)$ *для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $t_2\in(t_1;T]$ *і для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^\theta$) *векторів* $\vec{Y}\in U^\theta(\rho)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (4.1) — (4.3) *з простору* $C^2\left([0,T];\overline{E}^{\mathbf{X_3},2}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)$. *Цей розв'язок зображується рядом* (4.19) *і неперервно залежить від вектор-функцій* $\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_2$.

Зауваження 4.3. При дослідженні двоточкової задачі для параболічних систем другого порядку за часом та розміру два встановлено точніші результати (стосовно розв'язності та виконання метричних оцінок для малих знаменників) у порівнянні з результатами дослідження багатоточкової задачі для безтипних систем високого порядку та довільного розміру (див. [94]). Відзначимо, що задачі з двоточковими умовами для деяких класів безтипних та гіперболічних систем другого порядку за часом досліджувались у роботах [20, 77].

4.2. Системи рівнянь високого порядку

У цьому підрозділі дисертації дослідження проведені в підрозділі 3.2.3 поширено на випадок систем рівнянь. Вивчається задача з багатоточковими умовами (які містять дію диференціальних виразів за просторовими координатами на значення невідомої вектор-функції та її похідних у вузлах інтерполяції) для параболічних за Петровським системи вищих порядків зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами. Розв'язність цієї задачі пов'язана з проблемою малих знаменників, для оцінки знизу яких використано допоміжні твердження з розділу 2 та теорію симетричних многочленів.

В області Q_T^p розглянемо задачу: знайти вектор-функцію $\vec{u}(t,x)$, яка є розв'язком системи рівнянь

$$W\left(\frac{\partial}{\partial t}, L\right)\vec{u} := \frac{\partial^n \vec{u}(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{r=0}^{n-1} A_r(L)\frac{\partial^r \vec{u}(t,x)}{\partial t^r} = \vec{0}, \tag{4.65}$$

і справджує умови

$$V_q[\vec{u}] := \sum_{r=0}^{N_q} B_r^q(L)\frac{\partial^r \vec{u}(t,x)}{\partial t^r}\bigg|_{t=t_q} = \vec{\varphi}_q(x),\ 0 \leqslant N_q \leqslant n-1,\ q \in \{1,\ldots,n\}, \tag{4.66}$$

$$L^r \vec{u}(t,x)\big|_{\Sigma} = \vec{0}, \quad r \in \{0,1,\ldots,(\zeta-1)\}, \quad \zeta = \max\{nb, M\}, \tag{4.67}$$

де $A_r(L) = \|a_{i,j}^r(L)\|_{i,j=1}^m$, $r \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, $a_{i,j}^r(L) = \sum\limits_{q=0}^{(n-r)b} a_{i,j}^{r,q} L^q$, $a_{i,j}^{r,q} \in \mathbb{C}$, $i,j \in \{1,\ldots,m\}$, $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x))$, $B_r^q(L) = \|b_{i,j}^{r,q}(L)\|_{i,j=1}^m$, $b_{i,j}^{r,q}(L) = \sum\limits_{s=0}^{M} b_{i,j}^{r,q,s} L^s$, $b_{i,j}^{r,q,s} \in \mathbb{C}$, $M \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$, $\vec{\varphi}_q(x) = \mathrm{col}(\varphi_q^1(x),\ldots,\varphi_q^m(x))$, $q \in \{1,\ldots,n\}$. Нехай для виразу L виконуються умови $p_{ij} \in C^{2\zeta-1,\varrho}(\overline{G})$, $p_{ij} > 0$, $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, $q \in C^{2\zeta-2,\varrho}(\overline{G})$, $q \geqslant 0$, $\overline{G} \in A^{2\zeta,\varrho}$, $0 < \varrho < 1$.

Будемо вважати, що для системи (4.65) виконуються умови:

A_1) рівняння

$$\det \|W(\mu, \lambda_k)\| = 0 \tag{4.68}$$

має попарно різні корені $\mu_1(k), \ldots, \mu_{mn}(k)$, які задовольняють нерівності

$$\mathrm{Re}\mu_q(k) \leqslant -\delta_1 \lambda_k^b, \quad q \in \{1, \ldots, mn\}, \quad \delta_1 > 0; \tag{4.69}$$

A_2) для кожного $q \in \{1, \ldots, mn\}$ вектори $\vec{h}_{q,k} = \mathrm{col}\left(h^1_{q,k}, \ldots, h^m_{q,k}\right)$, є ненульовими, де вектор $\vec{h}_{q,k}$ — це перший стовпець матриці $W^*(\mu_q(k), \lambda_k)$, приєднаної до матриці $W(\mu_q(k), \lambda_k)$, $q \in \{1, \ldots, mn\}$. Для компонентів векторів $\vec{h}_{q,k}$, $q \in \{1, \ldots, mn\}$, справедливі формули

$$h^r_{q,k} = Q_{0,r}\mu_q^{mn-n}(k) + Q_{1,r}(k)\mu_q^{mn-n-1}(k) + \ldots + Q_{mn-n,r}(k), \tag{4.70}$$

в яких $q \in \{1, \ldots, mn\}$, $r \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in \mathbb{N}$,

$$Q_{j,r}(k) = (-1)^{r-1} \sum_{\substack{0 \leqslant l_1 \leqslant n, \ldots, 0 \leqslant l_{r-1} \leqslant n, \\ 0 \leqslant l_{r+1} \leqslant n, \ldots, 0 \leqslant l_m \leqslant n, \\ l_1 + \ldots + l_{r-1} + l_{r+1} + \ldots + l_m = mn-n-j}} \det \|a^{l_q}_{q,s}(\lambda_k)\|^{q \in \{1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, m\}}_{s \in \{2, \ldots, m,\}}, \tag{4.71}$$

$$j \in \{1, \ldots, mn-n\},\ Q_{0,1}(k) = 1,\ Q_{0,r}(k) = 0,\ r \in \{2, \ldots, m\}.$$

Розв'язок задачі (4.65) — (4.67) з простору $C^n\left([0,T]; \overline{E}^{\mathbf{X_3},m}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, шукаємо у вигляді ряду

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \vec{u}_k(t) X_k(x). \tag{4.72}$$

Кожна вектор-функція $\vec{u}_k(t), k \in \mathbb{N}$, є розв'язком задачі

$$W\left(\frac{d}{dt}, \lambda_k\right) \vec{u}_k(t) = \vec{0}, \tag{4.73}$$

$$V_q[\vec{u}_k(t)] = \vec{\varphi}_{q,k} \quad q \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4.74}$$

де $\vec{u}_k(t) = \mathrm{col}(u^1_k(t), \ldots, u^m_k(t))$, $\vec{\varphi}_{q,k} = \mathrm{col}(\varphi^1_{q,k}, \ldots, \varphi^m_{q,k})$, $k \in \mathbb{N}$, — коефіцієнти Фур'є вектор-функції $\vec{\varphi}_q(x)$ за системою $\mathbf{X_3}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розв'язок задачі (4.73), (4.74) зображується формулою

$$\vec{u}_k(t) = \sum_{l=1}^{mn} C_l(k)\vec{h}_{l,k} \exp(\mu_l(k)t), \tag{4.75}$$

де сталі $C_l(k)$, $l \in \{1,\ldots,mn\}$, знаходимо із системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{l=1}^{mn} C_l(k) \sum_{r=0}^{N_q} \mu_l^r(k) \sum_{j=1}^{m} b_{i,j}^{r,q}(k) h_{l,k}^j \exp(\mu_l(k)t_q) = \vec{\varphi}_{q,k}, \tag{4.76}$$

$$q \in \{1,\ldots,n\}, \quad i \in \{1,\ldots,m\},$$

визначник якої позначимо $\Delta(k,\vec{t})$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\Delta(k,\vec{t}) = \det \left\| \sum_{r=0}^{N_q} \mu_l^r(k) \sum_{j=1}^{m} b_{i,j}^{r,q}(k) h_{l,k}^j \exp(\mu_l(k)t_q) \right\|_{q\in\{1,\ldots,n\}, i\in\{1,\ldots,m\},}^{l\in\{1,\ldots,mn\}} . \tag{4.77}$$

Теорема 4.6. *Нехай для системи* (4.65) *виконуються умови* A_1) *та* A_2). *Для єдиності розв'язку задачі* (4.65) — (4.67) *у просторі* $C^n\left([0,T]; \overline{E}_{w_4(\alpha,\beta)}^{\mathbf{X_3},m}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \Delta(k,\vec{t}) \neq 0. \tag{4.78}$$

Надалі вважатимемо, що справджується умова (4.78). Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує єдиний розв'язок $\vec{u}_k(t)$ задачі (4.73), (4.74), а формальний розв'язок задачі (4.65) — (4.67) зображується рядом

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i,l=1}^{mn} \frac{\Delta_{i,l}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})} \exp(\mu_l(k)t)\vec{h}_{l,k}\psi_{i,k}X_k(x), \tag{4.79}$$

де $(\psi_{1,k},\ldots,\psi_{mn,k}) = (\varphi_{1,k}^1,\ldots,\varphi_{1,k}^m,\ldots,\varphi_{n,k}^1,\ldots,\varphi_{n,k}^m)$, $\Delta_{i,l}(k,\vec{t})$, $i,l \in \{1, \ldots,mn\}$, — алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині i-го рядка та l-го стовпця у визначнику $\Delta(k,\vec{t})$.

Для встановлення достатніх умов коректної розв'язності задачі (4.65) — (4.67) запровадимо позначення $N_0 = \min\limits_{q\in\{1,\ldots,n\}}\{N_q\}$, $N = bn(m-1)(mn-1) + bm(N_1+\ldots+N_n) - bN_0 + M(mn-1)$, $\beta_1 = m\delta_1(t_1+\ldots+t_n) - \delta_1 t_n$.

Теорема 4.7. *Нехай виконується умова* (4.78) *і нехай для системи* (4.65) *справджуються умови* A_1) *і* A_2), *та існують сталі* $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$ *і такі, що для всіх (крім скінченної кількості)* $k \in \mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k, \vec{t})| > \lambda_k^{-\gamma} \exp(-\nu \lambda_k^b). \tag{4.80}$$

Якщо $\vec{\varphi}_q \in \overline{E}^{\mathbf{X_3},m}_{w_4(\alpha_0,\beta_0)}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, *де* $\alpha_0 = \alpha + \gamma + bmn + N$, $\beta_0 = \beta + \nu - \beta_1$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (4.65) — (4.67) *з простору* $C^n\left([0,T]; \overline{E}^{\mathbf{X_3},m}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (4.79) *і неперервно залежить від вектор-функцій* $\vec{\varphi}_q$, $q \in \{1, \ldots, n\}$.

Доведення. Встановимо оцінки зверху для коренів рівняння (4.68). Для цього зауважимо, що рівняння (4.68) має вигляд

$$\mu^{mn} + R_{1,k}\mu^{mn-1} + R_{2,k}\mu^{mn-2} + \ldots + R_{mn,k} = 0, \tag{4.81}$$

у якому

$$R_{l,k} = \sum_{\substack{0 \leqslant q_1 \leqslant n, \ldots, 0 \leqslant q_m \leqslant n, \\ q_1 + \ldots + q_m = mn - l}} \det \| a_{i,j}^{q_i}(\lambda_k) \|_{i,j=1}^m, \quad l \in \{1, \ldots, mn\}. \tag{4.82}$$

Оскільки $|a_{i,j}^r(\lambda_k)| \leqslant \sum_{q=0}^{(n-r)b} |a_{i,j}^{r,q}| \lambda_k^q \leqslant C_1 \lambda_k^{(n-r)b}$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$, то враховуючи явні формули для коефіцієнтів $R_{l,k}$, отримуємо, що $|R_{l,k}| \leqslant C_2 \lambda_k^{lb}$, $l \in \{1, \ldots, mn\}$. Тоді згідно з [110, с. 102], для коренів $\mu_l(k)$ рівняння (4.81) випливають оцінки

$$|\mu_l(k)| \leqslant 2 \max_{j \in \{1, \ldots, mn\}} (R_{l,k})^{\frac{1}{j}} \leqslant C_3 \lambda_k^b, \quad l \in \{1, \ldots, mn\}. \tag{4.83}$$

Із формул (4.70), (4.71) на підставі оцінок (4.83) для компонент векторів $\vec{h}_{l,k}$ одержуємо

$$|h_{l,k}^r| \leqslant C_4 \lambda_k^{bn(m-1)}, \ \ r \in \{1, \ldots, m\}, \ \ l \in \{1, \ldots, mn\}. \tag{4.84}$$

На підставі нерівностей (4.69), (4.83) отримуємо, що для кожного $t > 0$

справджуються нерівності

$$\left|\sum_{q=0}^{s_0} \mu_l^q(k)\exp(\mu_l(k)t)\right| \leqslant C_5 w_4(s_0 b, -\delta_1 t; \lambda_k), \tag{4.85}$$

де $s_0 \in \{0,1,\ldots,n\}$, $l \in \{1,\ldots,mn\}$. З огляду на (4.77), (4.83) — (4.85) отримуємо

$$|\Delta_{i,l}(k,\vec{t})| \leqslant C_6 w_4(N, -\beta_1; \lambda_k), \;\; i,l \in \{1,\ldots,mn\}. \tag{4.86}$$

Із формули (4.79) на підставі оцінок (4.80), (4.83) — (4.86) встановлюємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^{s_0}u_k^r(t)}{dt^{s_0}}\right| \leqslant C_7 w_4(\gamma + s_0 b + bn(m-1) + N, \nu - \beta_1; \lambda_k)\times$$

$$\times\sum_{q=1}^{n}(|\varphi_{qk}^1| + \ldots + |\varphi_{qk}^m|),\; s_0 \in \{0,1,\ldots,n\},\; r \in \{1,\ldots,m\}. \tag{4.87}$$

Отже

$$\left\|\vec{u}; C^n\left([0,T]; \overline{E}_{w_4(\alpha,\beta)}^{\mathbf{X_3},m}\right)\right\| \leqslant C_8 \sum_{q=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(|\varphi_{qk}^1|^2 + \ldots + |\varphi_{qk}^m|^2)\times\right.$$

$$\left.\times w_4^2(\alpha + \gamma + bnm + N, \beta + \nu - \beta_1; \lambda_k)\right)^{\frac{1}{2}} = C_8 \sum_{q=1}^{n}\left\|\vec{\varphi}_q; \overline{E}_{w_4(\alpha_0,\beta_0)}^{\mathbf{X_3},m}\right\|.$$

Із встановленої нерівності випливає твердження теореми. $\diamondsuit$

Для дослідження питання про можливість виконання оцінки (4.80) встановимо деякі допоміжні твердження та запровадимо позначення: $M_\omega(k) = \mu_{i_1}(k) + \ldots + \mu_{i_m}(k)$, $h_\omega(k) = \det\|h_{i_j,k}^q\|_{j,q=1}^m$, $\Lambda_\omega(k) = \prod_{j\in\mathrm{set}\,\omega}\mu_j(k)$, $\omega = (i_1,\ldots,i_m) \in C(mn;m)$; $\vec{H}_q(k) = \mathrm{col}(\vec{h}_{q,k}, \mu_q(k)\vec{h}_{q,k}, \ldots, \mu_q^{n-1}(k)\vec{h}_{q,k})$, $q \in \{1,\ldots,mn\}$;

$$H_m(k) = \det\|\vec{H}_1(k),\ldots,\vec{H}_{mn}(k)\|; \tag{4.88}$$

$$S_m(k) = \prod_{\substack{\sigma\prec\omega \\ \sigma,\omega\in C(mn;m)}} (M_\sigma(k) - M_\omega(k))^2. \tag{4.89}$$

Дослідимо, якими діофантовими властивостями володіють запроваджені величини (4.88), (4.89). З'ясуємо, за яких умов для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k виконуються нерівності

$$|H_m(k)| > \lambda_k^{-\gamma_1}, \tag{4.90}$$

$$|S_m(k)| > \lambda_k^{-\gamma_2}. \tag{4.91}$$

Встановимо, що нерівності (4.90), (4.91) притаманні майже всім (стосовно міри Лебега) системам вигляду (4.65).

Позначимо: $\vec{Y} = \mathrm{col}\,(Y_1, \ldots, Y_\theta) = \mathrm{col}(a_{i,j}^{q,r_q}, i, j \in \{1, \ldots, m\}, q \in \{0, 1, \ldots, n-1\},\ r_q \in \{0, 1, \ldots, (n-q)b\})$ — вектор розміру $\theta = m^2n^2((n+1)b+2)/2$, складений з коефіцієнтів системи (4.65); $\widetilde{U}^\theta(\rho)$ — множина тих векторів $\vec{Y} \in U^\theta(\rho)$, $\rho > 0$, для яких:

1) $a_{i,i}^{q,(n-q)b} = \alpha_{i,1} \ldots \alpha_{i,q} + \ldots + \alpha_{i,n-q+1} \ldots \alpha_{i,n}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, де $\alpha_{i,q} > 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha_{i,j} \neq \alpha_{r,l}$, $i \neq r$, $j \neq l$;

2) $a_{i+1,i}^{0,0} = \rho$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\rho > 0$;

3) всі решту координати векторів $\vec{Y}$ дорівнюють нулю.

Теорема 4.8. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^\theta$) векторів $\vec{Y} \in U^\theta(\rho)$ нерівність* (4.90) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{N}$ при $\gamma_1 > m^2n(2mn-n-1)p/8$.*

Доведення. Із формул (4.70) отримуємо

$$H_q^{m(i-1)+r}(k) = \sum_{l=0}^{mn-n} Q_{l,r}(k)\mu_q^{mn-n-l+i-1}(k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.92}$$

$$q \in \{1, \ldots, mn\}, \quad i, r \in \{1, \ldots, n\}.$$

З рівностей (4.71) видно, що коефіцієнти $Q_{l,r}(k)$, $q \in \{1, \ldots, mn\}$, $r \in \{1, \ldots, n\}$, є многочленами від $Y_1, \ldots, Y_\theta$ степеня не вищого $(m-1)$. Тоді з формул (4.88), (4.92) та елементарних властивостей визначника випливає, що $H_m(k)$, $k \in \mathbb{N}$, можна подати у вигляді

$$H_m(k) = \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_{mn}),\\ s_1+\ldots+s_{mn}\leqslant(2m^2n-mn-3m+2)n/2}} \phi_s(\lambda_k)\mu_1^{s_1}(k)\ldots\mu_{mn}^{s_{mn}}(k), \qquad (4.93)$$

де $\phi_s(\lambda_k)$, $s = (s_1, \ldots, s_{mn}) \in \mathbb{Z}_+^{mn}$, — многочлени від $Y_1, \ldots, Y_\theta$ степінь яких не перевищує $mn(m-1)$. Таким чином

$$H_m^2(k) = \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_{mn}),\\ s_1+\ldots+s_{mn}\leqslant(2m^2n-mn-3m+2)n}} \widetilde{\phi}_s(\lambda_k)\mu_1^{s_1}(k)\ldots\mu_{mn}^{s_{mn}}(k), \qquad (4.94)$$

де $\widetilde{\phi}_s(\lambda_k)$, $s = (s_1, \ldots, s_{mn}) \in \mathbb{Z}_+^{mn}$, — многочлени від $Y_1, \ldots, Y_\theta$ степінь яких не перевищує $2mn(m-1)$. Із формули (4.88) випливає, що функція $H_m^2(k)$ є симетричним многочленом від коренів $\mu_1(k), \ldots, \mu_{mn}(k)$ степеня $(2m^2n - mn - 3m + 2)n$. За основною теоремою теорії симетричних многочленів [111, глава XI] функцію $H_m^2(k)$ можна подати у вигляді многочлена від $R_{l,k}$, $l \in \{1, \ldots, mn\}$, які на підставі (4.82) є многочленами від $Y_1, \ldots, Y_\theta$, степеня не вищого ніж m, тобто

$$H_m^2(k) = \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_\theta),\\ s_1+\ldots+s_\theta\leqslant m^2n(2mn-n-1)}} g_s(\lambda_k)Y_1^{s_1}\ldots Y_\theta^{s_\theta}, \qquad (4.95)$$

де $g_s(\lambda_k) = \sum\limits_{j=1}^{\chi(s)} g_{j,s}\lambda_k^j$, $g_{j,s} \in \mathbb{Z}$, $\chi(s) \leqslant n^2m(m-1)b$, $|s| \leqslant m^2n(2mn - n - 1)$. Доведемо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $H_m(k)$ відмінна від тотожного нуля в полікрузі $U^\theta(\rho)$, $\rho > 0$. Розглянемо вектор $\vec{Y_0} \in \widetilde{U}^\theta(\rho) \subset U^\theta(\rho)$, $\rho > 0$. Для такого вектора $\vec{Y_0}$ корені рівняння $\det \|W(\mu, \lambda_{k_0})\| = 0$ дорівнюють $\mu_{(i-1)n+j}(k_0) = -\alpha_{i,j}\lambda_{k_0}^b$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ — є різними. Визначник $H_m(k)$ є визначником Вандермонда від коренів $\mu_q(k_0)$, оскільки $\alpha_{i,j} \neq \alpha_{q,r}$, $i \neq q$, $j \neq r$, то $H_m(k) \neq 0$. Таким чином для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $H_m(k)$ не дорівнює тотожно нулеві, тобто числа $g_s(\lambda_k)$ у (4.95) не можуть одночасно дорівнювати нулеві.

Тоді на підставі леми 4.2 випливає, що існує вектор $s(k) = (s_1(k), \ldots, s_\theta(k)) \in \mathbb{Z}_+^\theta$, $|s(k)| \leqslant m^2 n(2mn - n - 1)$, і стала K_1 такі, що для всіх $k > K_1$ доданок $g_{s(k)}(\lambda_k) Y_1^{s_1(k)} \ldots Y_\theta^{s_\theta(k)}$ є старшим стосовно лексикографічного впорядкування доданків у (4.95) і для всіх $k > K_1$ виконується оцінка

$$\left| \frac{\partial^{|s(k)|} H_m^2(k)}{\partial Y_1^{s_1(k)} \ldots \partial Y_\theta^{s_\theta(k)}} \right| \geqslant |\phi_{s(k)}| s_1(k) \ldots s_\theta(k) \geqslant 1. \tag{4.96}$$

Згідно леми 2.3 та оцінки (4.96) для довільного $\rho > 0$ при $\gamma_1 = m^2 n(2mn - n - 1)p/8 + \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$, виконуються співвідношення

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\theta} \{ \vec{Y} \in U^\theta(\rho) : |H_m^2(k)| \leqslant \lambda_k^{-2\gamma_1} \} = 0, \quad \text{коли} \quad s(k) = (0),$$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\theta} \{ \vec{Y} \in U^\theta(\rho) : |H_m^2(k)| \leqslant \lambda_k^{-2\gamma_1} \} \leqslant C_9 \lambda_k^{-4\gamma_1/|s(k)|} \leqslant C_9 \lambda_k^{-p/2 - \varepsilon_1} \tag{4.97}$$

при $s(k) \neq (0)$. Із оцінок (3.121), (4.97) на підставі леми Бореля-Кантеллі випливає твердження теореми. $\Diamond$

Теорема 4.9. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^\theta$) векторів $\vec{Y} \in U^\theta(\rho)$ нерівність* (4.91) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k при $\gamma_2 > mp\mathcal{P}/4$, де $\mathcal{P} = C_{mn}^m (C_{mn}^m - 1)$.*

Доведення. Із формули (4.89) випливає, що функція $S_m(k)$ є однорідним симетричним многочленом від коренів $\mu_1(k), \ldots, \mu_{mn}(k)$ степеня $\mathcal{P}$ з цілими коефіцієнтами. За основною теоремою теорії симетричних многочленів [111] та формулами Вієта функцію $S_m(k)$ можна подати у вигляді многочлена від $R_{1,k}, \ldots R_{mn,k}$

$$S_m(k) = \sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_{mn}), \\ s_1+2s_2+\ldots+mns_{mn} \leqslant \mathcal{P}}} g_s R_{1,k}^{s_1} \ldots R_{mn,k}^{s_{mn}}, \tag{4.98}$$

де $g_s \in \mathbb{Z}$. Із формул (4.82) видно, що $R_{l,k}$, $l \in \{1, \ldots, mn\}$, є многочленати від $Y_1, \ldots, Y_\theta$ степеня не вищого за m, тому із (4.98) отримуємо

$$S_m(k) = \sum_{\substack{r=(r_1,\ldots,r_\theta), \\ r_1+r_2+\ldots+r_\theta \leqslant m\mathcal{P}}} \alpha_r(\lambda_k) Y_1^{r_1} \ldots Y_\theta^{r_\theta}. \tag{4.99}$$

Доведемо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція $S_m(k)$ відмінна від тотожного нуля в полікрузі $U^\theta(\rho)$. Для цього доведемо, що $S_m(k) \not\equiv 0$ в $\widetilde{U}_\theta(\rho) \subset U_\theta(\rho)$. Дійсно для такого вектора $\vec{Y}_0 \in \widetilde{U}^\theta(\rho)$, корені рівняння (4.68) є такими $\mu_{(i-1)n+j}(k) = -\alpha_{i,j}\lambda_k^b$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, а функція

$$S_m(k) = \sum_{\substack{(q_1,\ldots,q_{mn}) \in \mathbb{Z}_+^{mn}, \\ q_1+\ldots+q_{mn} \leqslant \mathcal{P}}} \lambda_k^{b\mathcal{P}} (\alpha_{1,1})^{q_1} \cdots (\alpha_{m,n})^{q_{mn}},$$

є многочленом mn змінних $\alpha_{i,j}$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, які є компонентами вектора $\vec{Y}_0$, і як многочлен цих змінних відмінна від тотожного нуля. Тоді із леми 4.2 випливає, що існує вектор $r(k) = (r_1(k),\ldots, r_\theta(k)) \in \mathbb{Z}_+^\theta$, $|r(k)| \leqslant m\mathcal{P}$, і стала K_2 такі, що для всіх $k > K_2$ доданок $\alpha_{r(k)}(\lambda_k) Y_1^{r_1(k)} \ldots Y_\theta^{r_\theta(k)}$ є старшим стосовно лексикографічного впорядкування доданків у (4.99) і для всіх $k \in \mathbb{N}$, $k > K_2$ виконується оцінка

$$\left| \frac{\partial^{|r(k)|} S_m(k)}{\partial Y_1^{r_1(k)} \ldots \partial Y_\theta^{r_\theta(k)}} \right| \geqslant |\alpha_{r(k)}(\lambda_k)| r_1(k)! \ldots r_\theta(k)! \geqslant 1. \qquad (4.100)$$

Тоді на підставі леми 2.3 та оцінки (4.100) для довільного $\rho > 0$ при $\gamma_2 = mp\mathcal{P}/4 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > 0$, отримуємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\theta}\{\vec{Y} \in U^\theta(\rho) : |S_m(k)| \leqslant \lambda_k^{-\gamma_2}\} = 0, \quad \text{коли} \quad r(k) = (0),$$

або

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\theta}\{\vec{Y} \in U^\theta(\rho) : |S_m(k)| \leqslant \lambda_k^{-\gamma_2}\} \leqslant C_{10} \lambda_k^{-2\gamma_2/|r(k)|} \leqslant C_{10} \lambda_k^{-\frac{p}{2} - \widetilde{\varepsilon}_2}, \quad (4.101)$$

при $r(k) \neq (0)$, $\widetilde{\varepsilon}_2 = \frac{4\varepsilon_2}{mp\mathcal{P}}$. Із (3.121), (4.101) видно, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{mes}_{\mathbb{C}^\theta}\{\vec{Y} \in U^\theta(\rho) : |S_m(k)| \leqslant \lambda_k^{-\gamma_2}\} \leqslant C_{11} \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1-2\widetilde{\varepsilon}_1/p}$ є збіжним. Тоді враховуючи лему Бореля-Кантеллі отримуємо твердження теореми. $\Diamond$

Для довільних наборів $\omega_1, \ldots, \omega_r \in C(mn; m)$, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, таких, що $\mathrm{set}\omega_j \cap \mathrm{set}\omega_q = \varnothing$, $1 \leqslant j < q \leqslant r$, означимо множини $W_1 = C(mn; m)$,

$$W_{j+1}(\omega_1,\ldots,\omega_j) = \{\omega : \mathrm{set}\omega \cap \mathrm{set}\omega_q = \varnothing, 1 \leqslant q \leqslant j\}, \qquad (4.102)$$

та многочлени

$$P_j(\mu, k; \omega_1 \ldots, \omega_j) = \prod_{\omega \in W_j(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1}) \setminus \{\omega_j\}} (\mu - M_\omega(k)), \qquad (4.103)$$

де $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Відзначимо, що степінь многочлена $P_j(\mu, k; \omega_1 \ldots, \omega_j)$ за змінною μ дорівнює $d_j = C^m_{Q_j} - 1$, $Q_j = m(n-j+1)$.

Для параболічних систем (4.65), які справджують оцінки (4.90) та (4.91) справедливі наступні твердження.

Лема 4.3. *Якщо виконується оцінка* (4.90)*, то існують такі попарно непретинні набори* $\omega_1, \ldots, \omega_n \in C(mn; m)$*, для яких нерівність*

$$\prod_{j=1}^{n} |h_{\omega_j}(k)| > C_{12} \lambda_k^{-\gamma_1 - bmn(n-1)/2}, \quad C_{12} > 0, \qquad (4.104)$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k.

Доведення. Користуючись теоремою Лапласа про обчислення визначників, розкладемо визначник $H_m(k)$ і враховуючи нерівності (4.90) дістанемо

$$\lambda_k^{-\gamma_1} < |H_m(k)| = \left| \sum_{\substack{(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \\ \omega_1 \in W_1, \omega_2 \in W_2(\omega_1), \ldots, \\ \omega_{n-1} \in W_{n-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2})}} \prod_{j=1}^{n} h_{\omega_j}(k) \Lambda^{j-1}_{\omega_j}(k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \\ \omega_1 \in W_1, \omega_2 \in W_2(\omega_1), \ldots, \\ \omega_{n-1} \in W_{n-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2})}} \prod_{j=1}^{n} |h_{\omega_j}(k)| |\Lambda^{j-1}_{\omega_j}(k)|, \qquad (4.105)$$

де W_1, $W_j(\omega_1, \ldots, \omega_{j-1})$, $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, — множини, визначені формулами (4.102), $\omega_n \in C(mn; m)$ — набір, що однозначно визначається за наборами $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ умовою $\mathrm{set}\, \omega_n \cap \mathrm{set} \omega_j = \varnothing$, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Сума в лівій частині нерівності (4.105) містить $(mn)!/(m!)^n$ доданків, тому знайдуться такі неперетинні набори $\omega_1, \dots, \omega_n \in C(mn; m)$, що

$$\sum_{\substack{(\omega_1,\dots,\omega_{n-1})\\ \omega_1\in W_1,\omega_2\in W_2(\omega_1),\dots,\\ \omega_{n-1}\in W_{n-1}(\omega_1,\dots,\omega_{n-2})}} \prod_{j=1}^{n} |h_{\omega_j}(k)||\Lambda_{\omega_j}^{j-1}(k)| \leqslant \frac{(mn)!}{(m!)^n} \prod_{j=1}^{n} |h_{\omega_j}(k)| \prod_{j=1}^{n} |\Lambda_{\omega_j}^{j-1}(k)|. \tag{4.106}$$

Оскільки з нерівностей (4.83) випливає, що для довільного набору $\omega \in C(mn; m)$ $|\Lambda_\omega(k)| \leqslant C_{13}\lambda_k^{mb}$, а $\prod\limits_{j=1}^{n} |\Lambda_{\omega_j}^{j-1}(k)| \leqslant C_{14}\lambda_k^{bmn(n-1)/2}$, то із оцінок (4.105), (4.106) отримуємо

$$\lambda_k^{-\gamma_1} \leqslant \frac{(mn)!}{(m!)^n} \prod_{j=1}^{n} |h_{\omega_j}(k)| \prod_{j=1}^{n} |\Lambda_{\omega_j}^{j-1}(k)| \leqslant C_{14}\lambda_k^{bmn(n-1)/2} \prod_{j=1}^{n} |h_{\omega_j}(k)|.$$

Тобто $\prod\limits_{j=1}^{n} |h_{\omega_j}(k)| \geqslant (C_{14})^{-1}\lambda_k^{-\gamma_1 - bmn(n-1)/2}$. $\Diamond$

Лема 4.4. *Якщо виконується нерівність* (4.91)*, то для довільних попарно непретинних наборів* $\omega_1, \dots, \omega_{n-1} \in C(mn; m)$ *нерівність*

$$\prod_{j=1}^{n-1} \left| P_j(M_{\omega_j}(k); k, \omega_1, \dots, \omega_j) \right| \geqslant C_{15}\lambda_k^{-\frac{1}{2}(\gamma_2 + b\mathcal{P}) + b\sum\limits_{j=1}^{n-1} d_j}, \tag{4.107}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k*, де* $\mathcal{P} = C_{mn}^m (C_{mn}^m - 1)$.

Доведення. На підставі формули (4.89) функцію $S_m(k)$ можна записати у вигляді

$$S_m(k) = \prod_{j=1}^{n-1} \left| P_j(M_{\omega_j}(k), k; \omega_1, \dots, \omega_j) \right|^2 \prod_{(\sigma,\omega)\in I_2} (M_\sigma(k) - M_\omega(k))^2, \tag{4.108}$$

де $I_1(j) = \{(\sigma, \omega_j) : \sigma \in W_j(\omega_1, \dots, \omega_{j-1}), \sigma \prec \omega_j\} \cup \{(\omega_j, \omega) : \omega \in W_j(\omega_1, \dots, \omega_{j-1}), \omega_j \prec \omega\}$, $j \in \{1, \dots, n-1\}$, а $I_2 = \left\{(\sigma, \omega) : \sigma \prec \omega, (\sigma, \omega) \notin \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} I_1(j)\right\}$. Оскільки множина I_2 складається із $\mathcal{P} - \sum\limits_{j=1}^{n-1} d_j$ елементів, то враховуючи оцінки (4.83) одержуємо, що

$$\prod_{(\sigma,\omega)\in I_2} |M_\sigma(k) - M_\omega(k)|^2 \leqslant C_{16}\lambda_k^{b(\mathcal{P} - \sum_{j=1}^{n-1} d_j)}. \tag{4.109}$$

Із формули (4.108) на підставі оцінок (4.89), (4.109) встановлюємо, що нерівність

$$\prod_{j=1}^{n-1} \left| P_j(M_{\omega_j}(k), k; \omega_1, \ldots, \omega_j) \right| \geqslant C_{17} \lambda_k^{-\frac{1}{2}(\gamma_2 + b\mathcal{P} - b\sum_{j=1}^{n-1} d_j)} \tag{4.110}$$

виконується для всіх крім скінченної кількості натуральних k, а отже й виконується нерівність (4.107). $\Diamond$

Лема 4.5. *Для довільних попарно неперетинних наборів* $\omega_1, \ldots, \omega_n \in C(mn; m)$*, для всіх* $k \in \mathbb{N}$*, справджується нерівність*

$$\prod_{j=1}^{n} |\Lambda_{\omega_j}(k)|^{N_j} \geqslant C_{18} \lambda_k^{bm(N_1 + \ldots + N_n)}. \tag{4.111}$$

Доведення. Із умови A_1) — параболічності системи (4.65), випливає, що $|\mathrm{Re}\mu_l(k)| \geqslant \delta_1 \lambda_k^b$, $l \in \{1, \ldots, mn\}$. Враховуючи елементарну нерівність $|z| \geqslant |\mathrm{Re} z|$, отримуємо $|\mu_l(k)| \geqslant \delta_1 \lambda_k^b$, $l \in \{1, \ldots, mn\}$. Із встановлених оцінок одержуємо нерівність

$$\prod_{j=1}^{n} |\Lambda_{\omega_j}(k)|^{N_j} \geqslant (\delta_1)^{bm(N_1 + \ldots + N_n)} \lambda_k^{bm(N_1 + \ldots + N_n)},$$

з якої випливає твердження леми. $\Diamond$

Дослідимо питання про можливість виконання оцінки (4.80), якщо для системи (4.65) справджуються нерівності (4.90), (4.91). Позначимо: $\vec{Z} = \left(b_{i,i}^{N_q,q,M} : q \in \{1, \ldots, n\},\ i \in \{1, \ldots, m\}\right)$; $\delta_2 = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \max\limits_{q \in \{1, \ldots, nm\}} \{|\mathrm{Re}\mu_q(k)| / \lambda_k^b\}$.

Теорема 4.10. *Нехай система* (4.65) *справджує умови* (4.90)*,* (4.91). *Тоді для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^{mn}$) *векторів* $\vec{Z} \in U^{mn}(\rho)$ *і для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$) *векторів* $\vec{t} \in [0; T]^n$ *нерівність* (4.80) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних* k*, при* $\nu = nm\delta_2 T$*, а*

$$\gamma > \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \frac{pmn}{4} + \frac{b}{2}(\mathcal{P} + mn(n-1)) + \frac{1}{2}(p+b)\sum_{j=1}^{n-1} d_j - bm(N_1 + \ldots + N_n) - nmM.$$

Доведення. Продиференціюємо визначник $\Delta(k,\vec{t})$ за змінними $z_1,\ldots,$ z_{mn} отримуємо

$$\frac{\partial^{mn}\Delta(k,\vec{t})}{\partial z_1\ldots\partial z_{mn}} = \lambda_k^{mnM}\Upsilon(k,\vec{t}), \tag{4.112}$$

де

$$\Upsilon(k,\vec{t}) = \det\left\|\mu_l^{N_q}(k)\vec{h}_{l,k}e^{\mu_l(k)t_q}\right\|_{q\in\{1,\ldots,n\},}^{l\in\{1,\ldots,mn\}}.$$

Встановимо спочатку що при виконанні оцінок (4.90), (4.91), для всіх (крім скінченної кількості) $k\in\mathbb{N}$ виконується нерівність

$$|\Upsilon(k,\vec{t})| \geqslant \lambda_k^{-\gamma_0}\exp(-mn\delta_2T\lambda_k^b), \tag{4.113}$$

де $\gamma_0 = \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \frac{b}{2}(\mathcal{P} + mn(n-1)) + \frac{1}{2}(p+b)\sum_{j=1}^{n-1} d_j - bm(N_1+\ldots+N_n) + \varepsilon$, $\varepsilon>0$. Для цього запровадимо позначення: $\Upsilon_\omega^j(k,t_{j+1},\ldots,t_n)$, $\omega\in W_j$, — визначник, який отримується з $\Upsilon(k,\vec{t})$ викреслюванням jm стовпців, номери яких складають множину $\mathrm{set}\omega_1\cup\ldots\cup\mathrm{set}\omega_{j-1}\cup\mathrm{set}\omega$, та перших jm рядків;

$$F_0(k) = \{\vec{t}\in[0,T]^n : |\Upsilon^0(k,t_1\ldots,t_n)| < \nu_0(k)\},$$

$$F_j(k) = \Big\{\vec{t}\in[0,T]^n : \Big|\Upsilon_{\omega_{j-1}}^{j-1}(k,t_j,\ldots,t_n)\Big| < \nu_{j-1}(k),$$

$$\Big|\Upsilon_{\omega_j}^{j}(k,t_{j+1},\ldots,t_n)\Big| \geqslant \nu_j(k)\Big\},\quad j\in\{1,\ldots,n-1\},\quad k\in\mathbb{N},$$

де $\Upsilon^0(k,t_1\ldots,t_n) := \Upsilon(k,\vec{t})$, а числа $\nu_0(k),\nu_1(k),\ldots,\nu_{n-1}(k)$, $k\in\mathbb{N}$, визначаються рекурентними формулами

$$\nu_{n-1}(k)=|\Lambda_{\omega_n}(k)|^{N_n}|h_{\omega_n}(k)|\exp(-m\delta_2T\lambda_k^b), \nu_{j-1}(k)=\nu_j(k)|\Lambda_{\omega_j}(k)|^{N_j}|h_{\omega_j}(k)|\times$$

$$\times|P_j(M_{\omega_j}(k),k;\omega_1,\ldots,\omega_j)|\exp(-m\delta_2T\lambda_k^b)\lambda_k^{-d_j(p/2+b)-\zeta_j},\ j\in\{n-1,\ldots,1\},$$

в яких всі числа ζ_j, є додатними. Оцінемо зверху міри Лебега в $\mathbb{R}^n$ множин $F_j(k)$, $j\in\{n-1,\ldots,1\}$. Для цього зауважимо, що з теореми Лапласа про обчислення визначників випливають рівності:

$$\Upsilon_{\omega_{j-1}}^{j-1}(k,t_j,\ldots,t_n) = \sum_{\omega\in W_j(\omega_1,\ldots,\omega_{j-1})} \pm h_\omega(k)\exp(M_\omega(k)t_j)\Upsilon_\omega^j(k,t_{j+1},\ldots,t_n), \tag{4.114}$$

де $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. З отриманих формул (4.114) встановлюємо

$$\left| P_j\left(\frac{\partial}{\partial t_j}, k; \omega_1, \ldots, \omega_j\right) \Upsilon^{j-1}_{\omega_{j-1}}(k, t_j, \ldots, t_n) \right| = |\Lambda_{\omega_j}(k)|^{N_j} |h_{\omega_j}(k)| \times$$

$$\times |P_j(M_{\omega_j}(k), k, \omega_1, \ldots, \omega_j)| \exp(M_{\omega_j}(k) t_j) \left| \Upsilon^{j}_{\omega_j}(k, t_{j+1} \ldots, t_n) \right|, \qquad (4.115)$$

$$j \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Якщо $\vec{t} \in F_j(k)$, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $k \in \mathbb{N}$, то з формул (4.115) отримуємо

$$\left| P_j\left(\frac{\partial}{\partial t_j}, k; \omega_1, \ldots, \omega_j\right) \Upsilon^{j-1}_{\omega_{j-1}}(k, t_j \ldots, t_n) \right| \geqslant |\Lambda_{\omega_j}(k)|^{N_j} |h_{\omega_j}(k)| \times$$

$$\times |P_j(M_{\omega_j}(k), k; \omega_1, \ldots, \omega_j)| \exp(-m\delta_2 T \lambda_k^b) \nu_j(k). \qquad (4.116)$$

На підставі леми 2.2 та нерівності (4.116) випливає, що $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} F_j(k, t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n) \leqslant$$

$$\leqslant C_{19} \left(\frac{\lambda_k^{bd_j} \nu_{j-1}(k) |\Lambda_{\omega_j}(k)|^{-N_j} \exp(m\delta_2 T \lambda_k^b)}{\nu_j(k) |h_{\omega_j}(\lambda_k)| |P_j(M_{\omega_j}(k), k; \omega_1, \ldots, \omega_j)|} \right)^{\frac{1}{d_j}} \leqslant C_{20} \lambda_k^{-\frac{p}{2} - \frac{\zeta_j}{d_j}}, \quad (4.117)$$

де $F_j(k, t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n) = \{t_j \in [0, T] : \vec{t} \in F_j(k)\}$, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Інтегруючи оцінки (4.117) за змінними $t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n$, отримуємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_j(k) \leqslant C_{20} \lambda_k^{-\frac{p}{2} - \varepsilon_3}, j \in \{1, \ldots, n-1\}, \varepsilon_3 = \min_{j \in \{1, \ldots, n-1\}} \{\zeta_j / d_j\}. \quad (4.118)$$

Зауважимо, що $F_0(k) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} F_j(k)$. Це випливає з того, що в наслідок рівності $\Upsilon^{n-1}_{\omega_{n-1}}(k, t_n) = (\Lambda_{\omega_n}(k))^{N_n} h_{\omega_n}(k) \exp(M_{\omega_n}(k) t_n)$ виконується нерівність $|\Upsilon^{n-1}_{\omega_{n-1}}(k, t_n)| \geqslant \nu_{n-1}(k)$. Тоді на підставі (4.118) отримуємо, що для міри множини $F_0(k)$ справджується нерівність

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_0(k) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_j(k) \leqslant C_{21} \lambda_k^{-\frac{p}{2} - \varepsilon_3}, \qquad (4.119)$$

з якої на підставі оцінок (3.121) випливає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_0(k)$ є збіжним. Тоді згідно леми Бореля-Кантеллі для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$ нерівність

$$|\Upsilon(k)| \geqslant \nu_0(k) \equiv \prod_{j=1}^{n} |\Lambda_{\omega_j}(k)|^{N_j} |h_{\omega_j}(k)| \prod_{j=1}^{n-1} |P_j(M_{\omega_j}(k), k, \omega_1, \ldots, \omega_j)| \times$$

$$\times w_4 \left(-(p/2+b) \sum_{j=1}^{n-1} d_j - \varepsilon_3, -mn\delta_2 T; \lambda_k \right), \tag{4.120}$$

виконується для всіх крім скінченної кількості $k \in \mathbb{N}$. Із (4.120) на підставі тверджень лем 4.3 — 4.5 встановлюємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$ нерівність

$$\begin{gathered} |\Upsilon(k,\vec{t})| \geqslant C_{22} w_4 \Bigg(-\gamma_1 - \frac{\gamma_2}{2} - \frac{b}{2}(\mathcal{P} + mn(n-1)) - \\ \frac{1}{2}(p+b) \sum_{j=1}^{n-1} d_j + bm(N_1 + \ldots + N_n) - \varepsilon, -mn\delta_2 T; \lambda_k \Bigg), \end{gathered} \tag{4.121}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{N}$.

Із формули (4.112) на підставі нерівностей (4.121) отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$ нерівність

$$\begin{gathered} \left| \frac{\partial^{mn} \Delta(k,\vec{t})}{\partial z_1 \ldots \partial z_{mn}} \right| \geqslant C_{23} w_4 \Bigg(-\gamma_1 - \frac{\gamma_2}{2} - \frac{b}{2}(\mathcal{P} + mn(n-1)) - \frac{1}{2}(p+b) \sum_{j=1}^{n-1} d_j + \\ + bm(N_1 + \ldots + N_n) + nmM - \varepsilon, -mn\delta_2 T; \lambda_k \Bigg) = C_{23} w_4(-\gamma_0, -mn\delta_2 T; \lambda_k), \end{gathered} \tag{4.122}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathbb{N}$. Тоді згідно леми 2.3 та оцінки (4.122) при $\gamma = \gamma_0 + pmn/4 + \varepsilon_4$, та $\nu = mn\delta_2 T$, де $\varepsilon_4 > \varepsilon > 0$, отримуємо, що

$$\begin{gathered} \mathrm{mes}_{\mathbb{C}^{mn}} \{ \vec{Z} \in U^{mn}(\rho) : |\Delta(k,\vec{t})| \leqslant w_4(-\gamma; -\nu) \} \leqslant \\ \leqslant C_{24} \left(\frac{w_4(-\gamma; -\nu)}{w_4(-\gamma_0; -mn\delta_2 T)} \right)^{\frac{2}{mn}} \leqslant C_{24} \lambda_k^{-\frac{p}{2} - \frac{2(\varepsilon_4 - \varepsilon)}{mn}}. \end{gathered} \tag{4.123}$$

Із оцінок (4.123) на підставі нерівностей (3.121), та леми Бореля-Кантеллі випливає твердження теореми. $\diamondsuit$

Зауваження 4.4. Вибір коефіцієнтів при найстарших похідних в умовах (4.66) в якості параметрів метричної теореми зумовлений кращою (порівняно з вибором інших параметрів) оцінкою в теоремі 4.10.

З теорем 4.7 — 4.10 випливає твердження про однозначну розв'язність задачі (4.65) — (4.67) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів складених з її параметрів.

Наслідок 4.2. *Нехай* $\vec{\varphi}_q \in \overline{E}^{\mathbf{X_3},m}_{w_4(\alpha_0,\beta_0)}$, $q \in \{1,\ldots,n\}$, *де* $\beta_0 = \beta + mn\delta_2 - m\delta_1(t_1+\ldots+t_n) + \delta_1 t_n$, $\alpha_0 > \alpha + \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \frac{pmn}{4} + \frac{b}{2}(p+mn(n+1)) + \frac{1}{2}(p+b)\sum\limits_{j=1}^{n-1} d_j + bn(m-1)(mn-1) - bN_0 - M$. *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^\theta$*) векторів* $\vec{Y} \in U^\theta(\rho)$*, для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^{mn}$*) векторів* $\vec{Z} \in U^{mn}(\rho)$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0,T]^n$ *існує єдиний розв'язок задачі* (4.65) — (4.67) *з простору* $C^n\left([0,T]; \overline{E}^{\mathbf{X_3},m}_{w_4(\alpha,\beta)}\right)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (4.79) *і неперервно залежить від вектор-функцій* $\vec{\varphi}_q$, $q \in \{1,\ldots,n\}$.

Зауваження 4.5. Характерною особливістю, яка проявляється при дослідженні задачі з багатоточковими умовами (4.66) для параболічної системи рівнянь (4.65), стала поява визначника $\Delta(k,\vec{t})$ (див. формулу (4.77)). Визначник $\Delta(k,\vec{t})$ має складну нелінійну структуру, в науковій літературі метричні оцінки знизу для нього не були встановлені. Відзначимо, що простіші (за структурою) до $\Delta(k,\vec{t})$ вирази виникали в роботі [20], але питання про метричні оцінки таких виразів не розглядалось.

Висновки до розділу 4

У цьому підрозділі встановлено умови коректної розв'язності задачі з двоточковими умовами за часовою змінною і умовами типу Діріхле за просторовими координатами для параболічних систем другого порядку, які справджують певні діофантові властивості. Доведено, що такі властивості притаманні майже всім (стосовно міри Лебега) параболічним системам другого порядку.

У підрозділі 5.2 досліджено задачу з багатоточковими умовами для параболічних систем вищих порядків та довільного розміру. При цьому встановлено нові метричні твердження про оцінки знизу малих знаменників і показано, що такі оцінки виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів систем, коефіцєнтів умов та вузлів інтерполяції.

Побудовано явні формули для розв'язків цих задач у вигляді рядів за системою ортогональних функцій.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [96, 105].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню в обмежених циліндричних областях задач з локальними багатоточковими умовами за часовою змінною та певними умовами (періодичності, типу Діріхле) за просторовими змінними для лінійних параболічних рівнянь та систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Такі задачі, в загальному випадку, є умовно коректними, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників.

Одержано такі нові результати:

1) встановлено умови коректності двоточкової задачі для параболічних за Петровським рівнянь другого порядку за часовою змінною з операторами Штурма-Ліувілля за просторовими координатами; доведено, що такі умови виконуються для довільних фіксованих вузлів інтерполяції і для майже всіх (стосовно міри Гаусдорфа) векторів, складених із коефіцієнтів рівнянь;

2) для параболічних за Петровським рівнянь вищих порядків з операторами Штурма-Ліувілля за просторовими координатами та для $2\vec{b}$-параболічних рівнянь з оператором Бесселя за однією з просторових змінних встановлено однозначну розв'язність багатоточкової задачі з простими вузлами для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із вузлів інтерполяції;

3) знайдено умови коректної розв'язності багатоточкових задач для параболічних за Петровським рівнянь коефіцієнти яких залежать від просторових змінних, а також для параболічних рівнянь із факторизованим оператором із коефіцієнтами, залежними як від часової, так і від просторових змінних; доведено метричні теореми про оцінки знизу ма-

лих знаменників, які виниклають при побудові розв'язків;

4) встановлено умови коректної розв'язності двоточкової задачі для параболічних за Петровським систем другого порядку за часовою змінною та багатоточкової задачі для систем вищих порядків за часовою змінною і доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів систем, коефіцієнтів багатоточкових умов та значень вузлів інтерполяції;

5) для всіх розглянутих задач побудовано зображення розв'язків у вигляді рядів Фур'є за системами відповідних функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абдо С. А.* Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки / С. А. Абдо, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 3. – С. 417–425.
2. *Абдо С. А.* Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. II. Разрешимость и свойства решений / С. А. Абдо, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 5. – С. 806–815.
3. *Антыпко И. И.* О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое / И. И. Антыпко, М. А. Перельман // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. – 1972. – Вып. 16. – С. 98–109.
4. *Асанова А. Т.* Об однозначной разрешымости семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / А. Т. Асанова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – **12**, № 4. – С. 21–39.
5. *Бенуар Н. Э.* Смешанная задача с интегральным условием для параболических уравнений с оператором Бесселя / Н. Э. Бенуар, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 12. – С. 2094–2098.
6. *Березанський Ю. М.* О задаче типа Дирихле для уравнения колебания струны / Ю. М. Березанський // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, № 4. – С. 363–372.
7. *Берник В. И.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами / В. И. Берник,

Б. И. Пташник, Б. О. Салыга // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.

8. *Берник В. И.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа / В. И. Берник, Ю. В. Мельничук. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.
9. *Бернік В. І.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для лінійних гіперболічних рівнянь / В. І. Бернік, В. В. Бересневіч, П. Б. Василишин, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1311–1316.
10. *Бобик О. І.* Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними / О. І. Бобик, П. І. Боднарчук, Б. Й. Пташник, В. Я. Скоробогатько. – К.: Наук. думка, 1972. – 175 с.
11. *Бобик І. О.* Оцінки характеристичних визначників задач з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними / І. О. Бобик, М. М. Симотюк // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту Сер. Математика. – 2007. – Вип. 336–337. – С. 20–28.
12. *Борок В. М.* О корректной разрешимости краевой задачи в бесконечном слое для линейных уравнений с постоянными коэффициентами / В. М. Борок // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1971. – **35**, № 4. – С. 922–939.
13. *Борок В. М.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое / В. М. Борок, М. А. Перельман // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29 – 34.
14. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений / В. П. Бурський. – К.: Наук. думка, 2002. – 316 с.
15. *Валицкий Ю. Н.* Корректность многоточечной задачи для уравнения с операторными коэффициентами / Ю. Н. Валицкий // Сиб.

мат. журн. – 1988. – **29**, № 4. – С. 44–53.

16. *Валицкий Ю. Н.* К вопросу об условной корректности многоточечной задачи / Ю. Н. Валицкий // Сиб. мат. журн. – 1989. – **30**, № 4. – С. 251–258.
17. *Валицкий Ю. Н.* Корректность задачи при заданных значениях функции и ее производных в нескольких точках / Ю. Н. Валицкий // Сиб. мат. журн. – 1996. – **37**, № 2. – С. 251–258.
18. *Василишин П. Б.* Багатоточкова задача для лінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами / П. Б. Василишин, І. С. Клюс, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1468 – 1476.
19. *Василишин П. Б.* Багатоточкова задача для інтегро-диференціальних рівнянь із частинними похідними / П. Б. Василишин, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 9. – С. 1155–1168.
20. *Василишин П. Б.* Багатоточкові задачі для безтипних систем диференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами / П. Б. Василишин, Б. Й. Пташник, Л. П. Силюга // Вісн. Прикарпатського ун-ту. Математика. Фізика. – 2001. – Вип. 2. – С. 151–166.
21. *Ватсон Г. Н.* Теория Бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. – Ч. І.: Изд. иностр. литер., 1949. – 787 с.
22. *Вишенський В. А.* Українські математичні олімпіади. Довідник / В. А. Вишенський, О. Г. Ганюшкін, М. В. Карташов, В. І. Михайловський, Г. Й. Призва, М. Й. Ядренко. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.
23. *Гадецкая С. В.* Корректные многоточечные задачи в полосе для дифференциальных уравненй с нагрузками / С. В. Гадецкая // Изв. вузов. Математика. – 1989. – 3. – С. 79–82.

24. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – М.: Изд. физ.-мат. литер, 1959. – 401 с.

25. *Горбачук В. И.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений / В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.

26. *Городецький В. В.* Коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу еволюційних рівнянь / В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, Р. І. Петришин // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 339–353.

27. *Городецький В. В.* Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодифенціальними операторами в просторах періодичних функцій / В. В. Городецький, Я. М. Дрінь // Буковинський. мат. журн. – 2014. – **2**, № 1. – С. 26–42.

28. *Гребеников Е. А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике / Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов. – М.: Наука, 1978. – 127 с.

29. *Дезин А. А.* Об операторных уравнениях второго порядка / А. А. Дезин // Сиб. мат. журн. – 1978. – **19**, № 5. – С. 1032–1042.

30. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач / А. А. Дезин. – М.: Наука, 1980. – 208 с.

31. *Дороговцев А. Я.* Элементы общей теории меры и интеграла / А. Я. Дороговцев. – Киев: Высш. шк., 1989. – 152 с.

32. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем / С. Д. Эйдельман // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40–43.

33. *Иванчов Н. И.* Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями / Н. И. Иванчов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 8. – С. 1066–1071.

34. *Іванчов М. І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами: Препринт. – К.: ІСДО, 1995. – 84 с.

35. *Ильин В. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их проиводных / В. А. Ильин, И. А. Шишмарев // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 6. – С. 883 – 896.

36. *Илькив В. С.* Нелокальная многоточечная задача для псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами / В. С. Илькив, В. Н. Полищук, Б. И. Пташник, Б. О. Салыга // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 5. – С. 582–587.

37. *Каленюк П. І.* Багатоточкова задача для неоднорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними / П. І. Каленюк, З. М. Нитребич, Я. М. Плешівський // Вісн. Львів. нац. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 144–152.

38. *Каленюк П. І.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод / П. І. Каленюк, З. М. Нитребич. – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка“, 2002. – 292 с.

39. *Каленюк П. І.* Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь з частинними похідними / П. І. Каленюк, І. В. Когут, З. М. Нитребич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 4. – С. 7–17.

40. *Картынник А. В.* Трехточечная смешанная задача с интегральным условием по пространственной переменной для параболических уравнений второго порядка / А. В. Картынник // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 9. – С. 1568–1575.

41. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – 352 с.

42. *Клюс І. С.* Двоточкова задача для системи рівнянь із частин-

ними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної / І. С. Клюс // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 2. – С. 75–81.

43. *Клюс І. С.* Багатоточкова задача для диференціального рівняння із частинними похідними, що розкладається в добуток лінійних відносно диференціювання множників / І. С. Клюс, З. М. Нитребич // Вісник Держ. ун-ту „Львівська політехніка“ Прикладна математика. – 2000. – Вип. 407. – С. 220–226.
44. *Клюс І. С.* Багатоточкові задачі для гіперболічних рівнянь та рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / *Клюс Ірина Степанівна*. – Львів, 2003. – 18 с.
45. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе / А. Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 5. – С. 763–766.
46. *Комарницька Л. І.* Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом / Л. І. Комарницька, Б. Й. Пташник // Доп. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 20–23.
47. *Комарницька Л. І.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь та систем із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.02 / *Комарницька Леся Іванівна*. – Львів, 1995. – 24 с.
48. *Корбут Л. І.* Про зображення розв'язку нелокальної крайової задачі для параболічних рівнянь / Л. І. Корбут, М. І. Матійчук // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 947–952.
49. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами / А. М. Кузь // Вісн. нац. ун-ту „Львівська політехніка“. – Сер.

Фіз-мат. науки. – 2012. – №740. – С. 25–33.

50. *Лавренчук В. П.* Деякі нелокальні задачі для параболічного рівняння другого порядку з оператором Бесселя / В. П. Лавренчук // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута. – 1990. – С. 111–119.
51. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б. М. Левитан // Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6, Вып. 2(42). – С. 102–143.
52. *Лучка А. Ю.* Проекционно–итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / А. Ю. Лучка. – К.: Наук. думка, 1980. – 264 с.
53. *Лучка А. Ю.* Наближене розв'язання задачі Валле Пуссена для звичайних диференціальних рівнянь проекційно-ітеративним методом / А. Ю. Лучка, О. М. Габрель // Доп. АН УРСР. – 1982. – № 8. – С. 18–22.
54. *Лучко В. М.* Про двоточкову крайову задачу для параболічних рівнянь вищого порядку / В. М. Лучко // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Серія Математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 51–59.
55. *Макаров А. А.* О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для системы дифференциальных уравнений в частных производных / А. А. Макаров // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 2. – С. 320–324.
56. *Макаров А. А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений / А. А. Макаров // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 1. – С. 144–150.
57. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі / М. І. Матійчук. – К.: Інститут математики НАН України, 1999. – 176 с.

58. *Митропольський Ю. А.* О двухтоточечной задаче для систем гиперболических уравнений / Ю. А. Митропольський, Л. Б. Урманчева // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 12. – С. 1657–1663.

59. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

60. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

61. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

62. *Нитребич З. М.* Граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння з частинними похідними / З. М. Нитребич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 3. – С. 64–70.

63. *Нитребич З. М.* Про граничні переходи у задачах з локальними за часом умовами для рівнянь із частинними похідними / З. М. Нитребич // Вісн. Львів. ун-ту. – Сер. мех.- мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 137–150.

64. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.

65. *Покорный Ю. В.* Вопросы качественной теории краевой задачи Валле Пуссена: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. / Покорный Юлий Витальевич – Л., 1980. – 24 с.

66. *Покорный Ю. В.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

67. *Полиа Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. / Г. Полиа, Г. Сеге. – М: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.

68. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник // Доп. АН УРСР. – 1966. – № 10. – С. 1254–1257.

69. *Пташник Б. Й.* n-лінійна задача для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1967. – № 16. – С. 80–87.

70. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

71. Пташник Б. Й. Багатоточкові задачі для еволюційних рівнянь // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2011. – Т. 1, № 1-2. – С. 145–157.

72. *Пташник Б. Й.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

73. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для факторизованих гіперболічно-параболічних операторів / Б. Й. Пташник, К. С. Галун // Доп. НАН України. – 2009. – № 11. – С. 33 – 38.

74. *Пташник Б. Й.* Аналог многоточечной задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами / Б. Й. Пташник, Б. О. Салыга // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 6. – С. 728–734.

75. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, М. М. Симотюк // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241–254.

76. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефі-

цієнтами / Б. Й. Пташник, М. М. Симотюк // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 3. – С. 400–413.

77. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для безтипних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, Л. П. Силюга // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1236–1249.
78. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для параболічого рівняння зі змінними коефіцієнтами / Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків // Доп. НАН України. – 2008. – № 12. – С. 42–48.
79. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для параболічних рівняннь високого порядку в паралелепіпеді / Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 336–346. (Переклад: *Ptashnyk B. I.* Multipoint problem for higter-order parabolic equations in a parallepiped / B. I. Ptashnyk, I. R. Tymkiv // Nonlinear oscillations. – 2009. – **12**, N 3. – P. 346–357.)
80. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області / Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 1. – С. 15–26. (Переклад: *Ptashnyk B. Yo.* A multipoint problem for a parabolic equation with variable coefficients in a cylindrical domain / B. Yo. Ptashnyk, I. R. Tymkiv // J. Math. Sci. – 2012. – **183**, N 1. – P. 1–16.)
81. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для B-параболічних рівнянь / Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 394–405. (Переклад: *Ptashnyk B. I.* Multipoint problem for B-parabolic equations / B. I. Ptashnyk, I. R. Tymkiv // Ukrainian Mathematical Journal. – 2013. – **65**, N 3. – P. 463–477.)
82. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння / Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків // IV Всеукраїнська наукова конферен-

ція „Нелінійні проблеми аналізу“ (Івано-Франківськ, 9–11 вересня 2008 р.): Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2008. – С. 80.

83. *Пташник Б. Й.* Розв'язність, стійкість і регуляризація багатоточкової задачі для гіперболічних рівнянь / Б. Й. Пташник, В. В. Фіголь, П. І. Штабалюк // Мат. Студії. Праці Львів. матем. тов-ва. – 1991. – Вип. 1. – С. 16–32.

84. *Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних / Б. Й. Пташник, П. І. Штабалюк // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1992. – Вип. 35. – С. 210–215.

85. *Пукальський І. Д.* Нелокальна задача Діріхле та задача оптимального керування для лінійних параболічних рівнянь з виродженнями / І. Д. Пукальський // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2006. – Вип. 314–315. – С. 150 – 158.

86. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями / І. Д Пукальський. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.

87. *Романко В. К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов / В. К. Романко // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 1. – С. 117–131.

88. *Романко В. К.* Граничные задачи для общих дифференциальных операторов с выделенной переменной: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / *Романко Василий Кирилович.* – Москва, 1980. – 26 с.

89. *Сайдаматов Э. М.* О корректности общих нелокальных неоднородных граничных задач для псевдодифференциальных уравнений с частными производными / Э. М. Сайдаматов // Мат. труды. – 2006. – **9**, № 2. – С. 133–153.

90. *Самойленко А. М.* Численно-аналитические методы исследования

решений краевых задач / А. М Самойленко, Н. И. Ронто. – К.: Наук. думка, 1986. – 224 с.

91. *Силюга Л. П.* Багатоточкові задачі для лінійних параболічних та безтипних диференціальних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / *Силюга Людмила Павлівна.* – Львів, 1996. – 24 с.
92. *Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / Л. П. Силюга // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 4. – С. 42–48.
93. *Симотюк М. М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху / М. М. Симотюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 90–95.
94. *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для лінійних систем рівнянь з частинними похідними / М. М. Симотюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 107–118.
95. *Симотюк М. М.* Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / *Симотюк Михайло Михайлович.* – Львів, 2005. — 19 с.
96. *Симотюк М. М.* Задача з багатоточковими умовами для системи параболічних рівнянь високого порядку зі змінними коефіцієнтами / М. М. Симотюк, І. Р. Тимків // Прикарпатський вісник НТШ. Серія „Число“. – 2015. – №1 (29). – С. 45–59.
97. *Симотюк М. М.* Оцінки характеристичного визначника задачі з двоточковими умовами для параболічного рівняння / М. М. Симотюк, І. Р. Тимків // Всеукраїнська наукова конференція „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“ (Ворохта, 25-лютого –3 березня 2013 р.): Тези доповідей. – Івано-Франківськ. – 2013, С. 82–83.

98. *Симотюк М. М.* Двоточкова задача для системи параболічних рівнянь / М. М. Симотюк, І. Р. Тимків // Міжн. наук конф. „Сучасні проблеми механіки і математики“ (Львів, 21–25 травня 2013 р.): Зб. наук. прац. – Т. 3, С. 160–162.

99. *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для системи параболічного рівнянь високого порядку / М. М. Симотюк, І. Р. Тимків // Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 3–6 червня, 2015 р.): Київ. – 2015. – С. 166.

100. *Симотюк М. М.* Метричні оцінки характеристичного визначника задачі з багатоточковими умовами для системи параболічних рівнянь високого порядку / М. М. Симотюк, І. Р. Тимків // Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаге (Чернівці, 1–4 липня, 2015). Тези доповідей. – Чернівці: ЧНУ, 2015. – С. 106–108.

101. *Скоробогатько В. Я.* Разложимость дифференциального оператора на множители и теорема о дифференциальных неравенствах / В. Я. Скоробогатько // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, № 2. – С. 215–219.

102. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений / В. Г. Спринджук. – М.: Наука, 1977. – 144 с.

103. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды / Я. Д. Тамаркин. – Петроград: 1917, 308+XIV. – 23 с.

104. *Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами / І. Р. Тимків // Карпатські математичні публікації. – 2011. – **3**, № 2. – С. 120–130.

105. *Тимків І. Р.* Задача з двоточковими умовами для системи параболічних рівнянь другого порядку за часом / І. Р. Тимків // При-

карпатський вісник НТШ. Серія „Число“. – 2016. – №1 (33). – С. 124–138.

106. *Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами / І. Р. Тимків // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 15–17 травня 2008 р.): Тези доповідей. Т. 1. – Київ, 2008. – С. 394.
107. *Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для факторизованого параболічного рівняння / І. Р. Тимків // Конференція молодих вчених із сучасних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача (Львів, 25–27 травня 2009 р.): Тези доповідей. – Львів, 2009. – С. 228–229.
108. *Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для B-параболічного рівняння / І. Р. Тимків // Third international conf. for Young Mathematical on Differential equations and applications dedicated to Y. Lopatynsky (Lviv, 3–6 November, 2010 p.): Donetsk. – 2010. – P. 89–91
109. *Тимків І. Р.* Метричні оцінки малих знаменників, які виникають у двоточковій задачі для параболічної системи рівнянь / І. Р. Тимків // Одинадцята відкрита наукова конференція ІМФН "PSC-IMFS-10"(Львів, 13–14 червня 2013 р.): Збірник матеріалів та програма конференції. – Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2013. – С. 109–110.
110. *Фаддеев Д. К.* Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
111. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре / Д. К. Фаддеев. – М.: Наука, 1984. – 446 с.
112. *Фардигола Л. В.* Корректные задачи в слое с дифференциальными операторами в краевом условии / Л. В. Фардигола // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 8. – С. 1083–1090.

113. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

114. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби / А. Я. Хинчин. – М.: Наука, 1978. – 112 с.

115. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

116. *Шмидт В. М.* Диофантовы приближения / В. М. Шмидт. – М.: Мир, 1983. – 232 с.

117. *Штабалюк П. И.* Оценка снизу определителя, связанного с многоточечной задачей для гиперболического уравнения / П. И. Штабалюк. – В. сб.: Материалы 9-ой конференции молодых ученых Института прикладных проблем механики и математики АН УССР, ч. II, Львов, 1982, с. 170–174. /Рукопись деп. в ВИНИТИ 10.01.1984, № 324-84 Деп.

118. *Asanova A. T.* On a solvability of a family of multi-point boundary value problems for system of differential equations and their application to the nonlocal boundary value problems / A. T. Asanova // Mathematical journal, Almaty. – 2013. – V. 13, N. 3. – P. 58–73.

119. *Ashyralyev A.* Well-posedness of the rothe differencescheme for reverse parabolic equations / A. Ashyralyev, A. Dural, Y. Sozen // Iranian J. of Optimization . – 2009. – N. 93. – P. 107–131.

120. *Borel E.* Sur une problème de probabilités relatives aux fractions continues // Math. Ann. – 1912, **72**. – P. 578–584.

121. *Bourgin D. G.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation / D. G. Bourgin, R. Duffin // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939. – V. 45, N. 12. – P. 851–858.

122. *Bouziani A.* On thee-point boundary value problem with a weighted integral condition for a classe of singular parabolic equations /

A. Bouziani // Abstract and Applied Analysis. – 2002. – V. 7, N. 10. – P. 517–530.

123. *Chabrovski J.* On non-local problems for parabolic equations / J. Chabrovski // Nagoya Math. J. – 1984. – N. 93. – P. 109–131.
124. *Hartman P.* On nonoscillatory linear differential equations with monotone coefficients / P. Hartman // Amer. J. Math. – 1954. – N. 76. – P. 207–219.
125. *Kenge E.* On well-posedness of multi-point integral boundary value problems in a stripe / E. Kenge, J. Tayou Simo // Visnyk Kharkivskogo natsionalnogo Universytetu. – 2003. – N. 582. – P. 10–14.
126. *Majchrowski M.* On certain nonlocal problem with mixed boundary condition for a parabolic system of partial differential equations / M. Majchrowski // Demonstratio Math. – 1982. – V. 15, N. 3. – P. 635–646.
127. *Nicoletti O.* Sulle condizioni iniziali che determiniano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie / O. Nicoletti // Atti della R. Acc. Sc.Torino. – 1897–1898. – N. 33. – P. 746–759.
128. *Picone M.* Sui valori eccezionali di un parametr do cui dipende un equazion differentiale lineare ordinaria del secondo ordine / M. Picone. – Pisa, 1909. – 176 p.
129. *Polya G.* On the mean value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation / G. Polya // Trans. Amer. Math. Soc. – 1922. – N. 24. – P. 312–324.
130. *Rassias J. M.* Boundary-values problem with non-local initial conditions for parabolic equations with parameter / J. M. Rassias, E. T. Karimov // Eur. J. Appl. Math. – 2010. – V. 3, N. 6. – P. 948–957.
131. *Rassias J. M.* Boundary-values problem with non-local conditions for degenerate parabolic equations / J. M. Rassias, E. T. Karimov //

Contemporary Analisis and Applied mathematics. – 2013. – N. 1. – P. 42–48.

132. *Roth K. F.* Rational approximations of algebraic numbers // Mathematica. – 1955. – **2**. – P. 1–20; corrigendum: 168. (переклад російською мовою: Сб. Математика. – 1957. – **1**:1. – С. 3–18).

133. *Symotyuk M. M.* Problem with two-point conditions for parabolic equation of second order on time / M. M. Symotyuk, I. R. Tymkiv // Carpathian Math. Publ. – 2014. – V. 6, N. 2. – P. 151–160.

134. *Tymkiv I.* Problem with multipoint conditions for system parabolic equations of higt order / Ivan Tymkiv // International V. Skorobohatko mathematical conference (Drohobych, 25–28 august, 2015): Lviv. – 2015. – P. 166.

135. *Umarov S.* Cauchy and nonlocal multi point problems for distributed order pseudo differential equations, part one / S. Umarov, R. Gorenfo // J. Anal. und ihre Anvendungen. – 2005. – V. 24, N. 3. – P. 449–446.

136. *Valitskiy Yu. N.* Multipoint problem for a differential equation in the Hilbert space / Yu. N. Valitskiy // Journ. of inverse and ill-posed problems. – 1994. – V. 2, N. 4. – P. 327–247.

137. *Vallée–Poussin de la Ch. J.* Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n. / Ch. J. Vallée–Poussin // Journ. de Math. pure et appl. – 1929. – V. 9, N. 8. – P. 125–144.