ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію **Мостової Мар'яни Романівни**
"Логарифмічна похідна близьких до поліномів цілих функцій",
подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз

Актуальність теми. Проблема встановлення зв'язку між асимптотичною поведінкою цілих функцій та розподілом їх нулів є однією з центральних проблем теорії аналітичних функцій. Перші результати у цьому напрямі було отримано вже в роботах К.Вейєрштрасса, Ж.Адамара, Е.Ліндельофа, Е.Бореля, Ж.Валірона. Власне, Ж.Валірон ще в 1914 р. встановив зв'язок між правильними (у відомому сенсі) поведінками логарифма цілої функції нецілого порядку з від'ємними нулями та їх лічильної функції.

Пошук узагальнень згаданого результату Ж.Валірона на випадок довільної цілої функції додатного порядку призвів до зародження в 30-х роках минулого століття теорії цілих функцій цілком регулярного зростання. Основи цієї теорії було закладено в фундаментальних роботах Б.Я.Левіна та А.Пфлюгера, які, зокрема, незалежно один від одного отримали критерій цілком регулярного зростання цілої функції додатного порядку в термінах послідовної її нулів. Пізніше теорія цілих функцій цілком регулярного зростання поповнилась новими важливими результатами. Серед них варто згадати критерії цілком регулярного зростання цілої функції, отримані в термінах коефіцієнтів Фур'є логарифма її модуля (В.С.Азарін, 1977 р.) і в термінах зростання логарифма її модуля за нормою простору $L^p[0,2\pi]$ (А.А.Кондратюк, 1978 р.).

Окремо вкажемо на результати щодо цілком регулярного зростання цілої функції додатного порядку, для отримання яких було задіяно поняття її логарифмічної похідної. У 1980 р. А.А.Гольдберг та М.Є.Коренков знайшли асимптотику логарифмічної похідної цілої функції, яка випливає з її цілком регулярного зростання. У 1985 р. А.А.Гольдберг, М.Л.Содін та М.М.Строчик довели обернене твердження: зі знайденої А.А.Гольдбергом та М.Є.Коренковим асимптотики логарифмічної похідної цілої функції додатного порядку випливає цілком регулярне зростання цієї функції. Згадані результати дозволяють сформулювати критерії цілком регулярного зростання як в термінах асимптотики логарифмічної похідної, так і в термінах коефіцієнтів Фур'є логарифмічної похідної. В термінах зростання логарифмічної похідної за нормою простору $L^p[0,2\pi]$ такий критерій було отримано також Я.В.Васильківим (1999 р.).

Теорію цілих функцій цілком регулярного зростання було поширено на інші класи функцій додатного скінченного порядку: на аналітичні в крузі,

Загальна канцелярія
ЛНУ імені Івана Франка
Вхідний № 362
31. 03 2017 р.

аналітичні в півплощині, мероморфні, мероморфні в крузі, мероморфні в півплощині, субгармонійні та інші функції.

З іншого боку, цілі функції додатного скінченного порядку становлять лише певний підклас класу цілих функцій. З огляду на це природною є задача щодо побудови теорії, аналогічної до теорії цілих функцій цілком регулярного зростання, для інших підкласів цілих функцій, зокрема, для цілих функцій нульового порядку.

Пряме перенесення поняття цілком регулярного зростання на випадок функцій нульового порядку не дозволяє отримати результати такого ж рівня змістовності, як для цілих функції додатного скінченного порядку. З огляду на це, для цілих функцій нульового порядку було введено поняття сильного регулярного зростання (М.В.Заболоцький, 1998 р.), яке за своїми властивостями є близьким до поняття цілком регулярного зростання цілих функцій додатного порядку. У роботах М.В.Заболоцького, а також М.В.Заболоцького і О.В.Костюк для цілих функцій сильного регулярного зростання встановлено аналоги згаданих вище результатів Б.Я.Левіна та А.Пфлюгера, В.С.Азаріна, А.А.Кондратюка, що дозволило знайти зв'язки між сильним регулярним зростанням таких функцій, розподілом їх нулів за аргументами, асимптотичною поведінкою коефіцієнтів Фур'є їх логарифма, регулярним зростанням логарифма їх модуля та їх аргументу в метриці простору $L^p[0,2\pi]$. Поза увагою залишались питання про можливість розширення цих зв'язків за рахунок ґрунтовного вивчення властивостей логарифмічної похідної цілих функцій нульового порядку, зокрема, встановлення у певному сенсі аналогів згаданих вище результатів А.А.Гольдберга та М.Є.Коренкова, А.А.Гольдберга, М.Л.Содіна та М.М.Строчика, Я.В.Васильківа. Розгляду задач такого роду й присвячена дисертаційна робота Мостової М.Р.

На нашу думку, актуальність теми дисертаційної роботи сумнівів не викликає.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Результати дисертаційної роботи є новими і вперше отримані автором дисертації. Зупинимось на основних з них.

В розділі 2 такими є теорема 2.2, в якій знайдено асимптотику логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку за умови, що нулі цієї функції мають кутову ν-щільність, теорема 2.3, яка встановлює зв'язок між регулярною поведінкою логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку та регулярною поведінкою коефіцієнтів Фур'є логарифмічної похідної, теорема 2.4, яка встановлює зв'язок між коефіцієнтами Фур'є логарифмічної похідної та регулярним зростанням логарифмічної похідної за нормою простору $L^p[0,2\pi]$, а також теорема 2.6, якою обґрунтовано неможливість отримання тверджень, обернених до теорем 2.2-2.4.

Питання щодо встановлення умов на розподіл нулів цілої функції нульового порядку, за яких будуть правильні й обернені твердження до теорем 2.2-2.4, розглядаються у розділі 3.

Як виявилось, встановити не лише необхідні, а й достатні умови існування кутової ν-щільності можна у випадку, коли нулі цілої функції повільного зростання розміщенні на скінченній системі променів, а асимптотика її логарифмічної похідної є точнішою ніж та, що розглядається у попередньому розділі. Серед результатів розділу 3 варто відзначити теореми 3.1 та 3.2, в яких знайдено необхідну та достатню умову існування кутової ν-щільності для цілої функції повільного зростання з нулями на скінченній системі променів в термінах асимптотики її логарифмічної похідної, теореми 3.3 та 3.4, які встановлюють зв'язок між кутовою ν-щільністю такої цілої функції і коефіцієнтами Фур'є її логарифмічної похідної, теореми 3.6 та 3.6, в яких отримано необхідну та достатню умову існування кутової ν-щільності в термінах збіжності логарифмічної похідної цілої функції за нормою простору $L^p[0,2\pi]$.

Якщо ж відмовитись від умови розміщення нулів на скінченній системі променів, але накласти дещо точніші умови на коефіцієнти Фур'є логарифмічної похідної та її поведінку за нормою простору $L^p[0,2\pi]$, то також будуть правильні твердження, обернені до теорем теорем 2.3 та 2.4, що, власне, й випливає з теорем 3.7 та 3.8.

Відзначимо, що для доведення результатів дисертації автором було використано сучасні методи теорії аналітичних функцій. Основні результати мають форму критеріїв.

Обґрунтованість і достовірність результатів дисертації. Результати дисертації доведено з достатньою повнотою, на прийнятому в сучасній математичній літературі рівні строгості. Їх обґрунтованість і достовірність не викликає сумніву.

Зауваження. Робота написана грамотною математичною мовою і містить незначну кількість похибок. Проте в ній наявні деякі неточності та описки. До роботи є такі зауваження.

1. На с. 10 (рядки 19, 20) замість $F = zf'/f$ варто було писати $F(z) = zf'(z)/f(z)$ (або не писати нічого). Це ж зауваження стосується автореферату.

2. На відміну від стверджуваного на с. 21 (рядки 13-19), логарифм максимуму модуля мероморфної функції практично не використовується в якості її характеристики зростання, а порядок цілої функції, лічильна чи усереднена лічильна функція нулів якої є повільно зростаючою, не зобов'язаний дорівнювати нулеві.

3. На с. 24 у формулюванні теореми 1.4 замість "$f \in H_+^*(\rho(r))$ порядку $\rho \in (0,+\infty)$" повинно бути "функція $f \in H_+(\rho(r))$".

4. На с. 29 (рядок 2 знизу) і с. 68 (рядок 5 знизу) замість "$f \in H_+^*(\rho(r))$" має бути "$f \in H_+(\rho(r))$".

5. На нашу думку на с. 53 в доведення теореми 2.2 варто було детальніше описати перехід від випадку одного променя до випадку

скінченної системи променів (наприклад так, як це зроблено далі в доведенні теореми 3.1).

Публікації і апробація результатів роботи. З достатньою повнотою основні результати дисертації опубліковані в 14 роботах. Серед них 5 робіт опубліковано у фахових наукових виданнях, з яких 2 – у наукових виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз даних “Scopus” та “Web of Science”.

Основні результати дисертації доповідались на багатьох наукових конференціях і спеціалізованих семінарах, а тому пройшли належну апробацію.

Практичне значення результатів роботи. Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані та використані для подальшого вивчення властивостей аналітичних функцій, а також в інших розділах сучасної математики, в яких як природні об’єкти виникають аналітичні функції.

Висновки. Дисертаційна робота Мостової М.Р. виконана на належному науковому рівні і містить розв’язки ряду актуальних задач теорії цілих функцій.

Наведені вище зауваження не применшують загалом позитивного враження від роботи.

В ідейному плані дисертація є єдиним цілим. Її результати опубліковано у фахових наукових виданнях і апробовано на багатьох конференціях і спеціалізованих семінарах.

Автореферат правильно і достатньо повно відображає зміст дисертації.

Оскільки дисертаційна робота Мостової М.Р. є завершеним науковим дослідженням, виконана на актуальну тему, містить нові науково обґрунтовані результати, то, на нашу думку, вона повністю відповідає вимогам пункту 11 “Порядку присудження наукових ступенів” (затвердженого постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 р.), які ставляться до робіт, що подані на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, а її автор Мостова Мар’яна Романівна заслуговує присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри
інформаційних технологій
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника П.В.Філевич

Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
і.к. 02125266

Підпис Філевича П.В. ЗАВІРЯЮ
Начальник відділу кадрів
Державного вищого навчального закладу
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
код 02125266
«30» 03 2017 р.