Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

Гіщак Тетяна Ігорівна

УДК 517.5

МЕЖОВІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ З ПРОСТОРІВ ТИПУ ГАРДІ

01.01.01 — математичний аналіз

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

ДИСЕРТАЦІЇ НА ЗДОБУТТЯ НАУКОВОГО СТУПЕНЯ
КАНДИДАТА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

Львів — 2017

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана на кафедрі математики
Дрогобицького державного педагогічного університету
імені Івана Франка
Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук,
доцент **Дільний Володимир Миколайович**,
доцент кафедри математики
Дрогобицького державного педагогічного університету
імені Івана Франка

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник **Савчук Віктор Васильович**,
провідний науковий співробітник відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України;

доктор фізико-математичних наук,
професор **Скасків Олег Богданович**,
професор кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей
Львівського національного університету імені Івана Франка

Захист відбудеться 28 квітня 2017 р. о 15:00 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий 27 березня 2017 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Гуран І.Й.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. При вивченні функціональних просторів, зокрема просторів аналітичних функцій, одне з першочергових значень має вивчення екстремальних властивостей цих просторів. Одними з найважливіших результатів такого плану є теореми існування та єдиності. Такого типу результати встановлені для класичних просторів Б. Я. Левіним, В. П. Гурарієм, М. А. Євграфовим, Р. Боасом, С. Н. Мергеляном, Дж. Хвангом та іншими математиками. Перенесення цих результатів на вагові узагальнення просторів, зокрема просторів Гарді з експоненціальною вагою, вимагало нових підходів та методів і залишалося відкритим питанням.

Простором Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < +\infty$, називається клас аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ := \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ функцій f, для яких

$$\|f\| := \sup_{x>0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mid f(x+iy) \mid^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

А. Седлєцкий показав, що простори $H^p\left(\mathbb{C}_+\right)$, $1 \leq p < +\infty$, можуть бути визначені як класи аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких

$$||f||_* = \sup_{\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})} \left\{ \int\limits_{0}^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

причому вищенаведені норми є еквівалентними.

Простори функцій експоненціального зростання у півплощині розглядалися, зокрема, Н. В. Говоровим, Б. В. Винницьким та їх учнями. Б. В. Винницький ввів ваговий простір Гарді $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \sigma < +\infty$, функцій, аналітичних у правій півплощині, що характеризуються експоненціальним зростанням. Цей простір є з одного боку, як показав А. М. Седлецький, узагальненням простору Гарді у правій півплощині $H^p(\mathbb{C}_+)$, а з іншого — аналогом для півплощини добре відомого простору Пелі-Вінера W^p_σ, що складається з цілих функцій експоненціального типу $\leq \sigma$, що належать до $L^p(\mathbb{R})$. У процесі досліджень виявилося, що властивості просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \sigma < +\infty$, істотно відрізняються від властивостей просторів у неваговому випадку. Зокрема, у ваговому випадку швидке спадання функції вздовж додатньої дійсної півосі пов'язане зі швидким

зростанням її вздовж уявної осі. Чи справедлива ця закономірність і для простору $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, залишалося відкритим питанням.

У 1949 році А. Бьорлінг одержав повний опис трансляційно інваріантних підпросторів для простору Гарді в крузі. Пізніше П. Лакс переніс цей результат на випадок просторів Гарді у півплощині. При цьому природним виявилося дослідження інваріантності відносно множення на $e^{\tau z}$, $\tau \leq 0$. Подальші дослідження показали, що результати, одержані для просторів Гарді, часто мають прямі аналоги для об'єктів у різних розділах математики. Елегантність результатів А. Бьорлінга та П. Лакса викликала великий інтерес до цієї тематики, що розвинулося в дослідження циклічних, мультициклічних, гіперциклічних функцій та операторів, трансляційно інваріантних підпросторів. Цими питаннями активно займалися, зокрема, Х. Шапіро, В. П. Хавін, Н. К. Нікольський, В. І. Васюнін, В. Рудін, Б. Юсефі, Н. Гогус, К. Массанеда, Н. Зорбоска, А. Бонілла, В. П. Гурарій, Х. Хеденмальм, Б. В. Винницький, В. В. Капустін, А. Д. Баранов, В. Е. Кім, В. М. Дільний, П. Бурдон, Е. Стейн, Р. Койфман, Г. Вейсс, Є. М. Динькін, Б. П. Осіленкер, Г. Семпсон, Д. Фонг та багато інших.

Властивості простору Пелі-Вінера W_σ^p є дуже добре вивченими, а прийоми і методи, розроблені для його дослідження, часто використовуються при дослідженні об'єктів у багатьох розділах математики. Проте деякі задачі, пов'язані з просторами Пелі-Вінера, були розв'язані досить недавно чи залишалися відкритими. Однією з таких є задача про розщеплення функцій з W_σ^1 на суму двох, кожна з яких "велика" тільки в певному куті. Задачі такого типу розглядали Л. Еренпрайс, Р. С. Юлмухаметов, Ю. І. Любарський, І. Е. Чижиков, В. М. Дільний.

Як показано Ю. І. Любарським, простори Гарді можна успішно вивчати за допомогою теорії рядів Діріхле. Тому ця теорія, розвинута у працях А. Ф. Леонтьєва, М. М. Шеремети, О. Б. Скасківа, П. В. Філевича та їх учнів має хороші перспективи бути застосованою до досліджень вагових просторів Гарді. Задачі теорії наближень на просторах Гарді та близьких до них просторах успішно досліджуються А. С. Романюком, С. Б. Вакарчуком, М. Ш. Шабозовом, В. В. Савчуком, С. О. Чайченком та іншими математиками. Дослідження, об'єктом яких є простори Гарді аналітичних функцій, також часто знаходять застосування у комплексному та функціональному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, а також у прикладних напрямах: геодинаміці, теорії інформації, квантовій

фізиці. Тому можна очікувати важливих застосувань і для результатів з теорії просторів типу Гарді, які розглядаються в нашій дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі математики Інституту фізики, математики, економіки та інноваційних технологій Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертації* є встановити зв'язки межових властивостей функцій з просторів типу Гарді з поведінкою функцій в областях аналітичності, що передбачає вирішення таких завдань:

- отримати теореми єдиності та існування у просторах $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \le p < +\infty$;
- встановити теореми єдиності та існування у просторах $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$;
- одержати доповнення опису трансляційно інваріантних підпросторів у просторі $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- встановити для функцій з простору $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, еквівалентність швидкого зростання у деякому сенсі вздовж уявної осі та швидкого спадання вздовж дійсної півосі;
- розглянути та описати властивості простору, що визначається перетином вагових просторів Гарді;
- знайти новий спосіб розщеплення функцій з $W^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та встановити умови розв'язності задачі розщеплення.

Об'єктом дослідження є простори типу Гарді.
Предметом дослідження є властивості функцій з просторів типу Гарді.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовувались методи теорії функцій комплексної змінної, методи математичного аналізу та деякі прийоми з робіт Н. В. Говорова, Г. З. Бера, Б. Я. Левіна, А. М. Седлецького, В. М. Дільного, Б. В. Винницького.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі наукові результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими і полягають у наступному:

- отримано теореми єдиності та існування у просторах $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \le p < +\infty$;
- встановлено теореми єдиності та існування у просторах $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$;
- одержано доповнення опису трансляційно інваріантних підпросторів у просторі $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$;
- встановлено для функцій з простору $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, еквівалентність швидкого зростання у деякому сенсі вздовж уявної осі та швидкого спадання вздовж дійсної осі;
- розглянуто та описано деякі властивості простору, що визначається перетином вагових просторів Гарді;
- запропоновано новий спосіб розщеплення функцій з $W^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та встановлено критерій розв'язності задачі розщеплення.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть знайти застосування як у подальших дослідженнях з теорії функцій, так і у інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані її автором самостійно. У статтях, написаних у співавторстві, співавторам належить постановка задачі та загальне керівництво.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях:

1) IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 р);
2) міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25–28 серпня 2015 р.);
3) міжнародній конференції "Complex Analysis and Related Topics" (Львів, 30 травня - 4 червня 2016 р).

Результати дисертації неодноразово доповідалися на

- Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники — проф. О. Б. Скасків та проф. А. А. Кондратюк),
- семінарі з теорії потенціалу та її застосувань у Львівському національному університеті імені Івана Франка (керівники — проф. О. Б. Скасків, проф. І. Е. Чижиков),
- семінарі з математичного аналізу у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка (керівник — проф. Б. В. Винницький),
- семінарі з теорії функцій ІМ НАН України (керівник — доктор фіз.–мат. наук, проф. А. С. Романюк),
- математичному семінарі в університеті Я. А. Коменського (Братислава, Словаччина, керівник — проф. М. Фечкан),
- науковому семінарі в Інституті математики Словацької академії наук в Братиславі (Братислава, Словаччина, керівник — проф. А. Двуреченський).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 8 статтях і наукових повідомленнях, з яких 5 у виданнях з Переліку фахових видань МОН України. Зокрема, у журналі "Известия вузов. Математика", який відображений у міжнародній науково-метричній базі даних Scopus, та "Український математичний журнал" - Web of Science та Scopus.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, який налічує 106 найменувань. Загальний обсяг дисертації — 132 сторінки, обсяг списку використаних джерел — 9 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** дисертації розкрито суть і стан наукової роботи, якій присвячено дисертаційне дослідження, обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі дослідження. У **розділі 1** подано огляд літератури і сформульовано основні результати дисертації.

Розділ 2 присвячено отриманню теорем єдиності для вагових просторів.

Нехай $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $0 \le \sigma < +\infty$, – простір функцій f аналітичних в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\sup_{\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right|^p e^{-\sigma pr|\sin\varphi|} dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

У першому підрозділі розділу 2 отримано наступний результат для функцій з $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$.

Теорема 2.1. *Нехай* $0 \le \sigma < +\infty$, $1 \le p < +\infty$, *функція* f *належить до простору* $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і* $f(z) \ne 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$. *Тоді*

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}} \right) > 0. \tag{1}$$

Сформульована теорема 2.1. показує, що коли функція $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$, то в певному кількісному значенні вона не може дуже швидко спадати на дійсній додатній півосі при $x \to +\infty$. З теореми 2.1. та результатів В. М. Дільного випливає, що за умов теореми 2.1. виконується

$$(\forall y \in \mathbb{R}) \quad \varliminf_{x\to+\infty} \left(|f(x+iy)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}} \right) > 0.$$

Подібне виконується і для інших теорем цього розділу.

Зауважимо, що умова (1) еквівалентна до наступної умови

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right) > -\infty.$$

З теореми 2.1. випливає наступне твердження для функцій з класичного простору Гарді, які не мають жодного нуля в правій півплощині, яке теж є новим.

Наслідок 2.1. *Нехай* $1 \le p < +\infty$, $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ *і* $f(z) \ne 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$. *Тоді*

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f(x)|^{1/x} > 0.$$

Наступна теорема доповнює твердження теореми 2.1.

Теорема 2.2. *Якщо* $0 \le \sigma < +\infty$, $1 \le p < +\infty$, $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}} \right) = 0, \tag{2}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Дане твердження для вагового простору Гарді є аналогом теореми єдиності для класичних просторів Гарді.

Зауважимо, що аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція

$$f(z) = (1+z)^{-2/p} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z \right),$$

де $\ln z$ – вітка логарифма в $\mathbb{C}_+$, для якої $\ln 1 = 0$, вказує на точність умов теорем 2.1. та 2.2. в тому сенсі, що замінити сталу σ на меншу в рівностях (1) і (2) не можна.

Нехай $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$, — простір функцій f, аналітичних в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\sup \left\{ |f(z)| e^{-\sigma|\mathrm{Im} z|} : z \in \mathbb{C}_+ \right\} < +\infty.$$

У другому підрозділі **розділу 2** доведено аналог для простору $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ теореми єдиності для функцій з простору обмежених аналітичних у півплощині, яка встановлена незалежно Б. Левіним, М. Євграфовим та іншими математиками.

Ми отримали теорему єдиності для функцій, аналітичних та обмежених в правій півплощині з вагою $e^{-\sigma|z|}$. Результати формулюються в термінах поведінки функцій на дійсній півосі.

Теорема 2.3. *Нехай* $0 \le \sigma < +\infty$ *і* $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$. *Якщо*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}} \right) = 0, \tag{3}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Наступна теорема доповнює твердження даної теореми для випадку, коли функція не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$.

Теорема 2.4. *Нехай* $0 \le \sigma < +\infty$, *функція* f *належить до простору* $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і* $f(z) \ne 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$. *Тоді*

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}} \right) > 0. \tag{4}$$

Також ми отримали наступне доповнення до теореми єдиності для функцій з простору обмежених аналітичних у півплощині.

Наслідок 2.2. *Якщо $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ і $f(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, тоді*

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f(x)|^{1/x} > 0.$$

Функція

$$f(z) = \exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right\}$$

де $\ln z$ – вітка логарифма в $\mathbb{C}_+$, для якої $\ln 1 = 0$, належить до $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і вказує на точність теорем 2.3. і 2.4. в тому сенсі, що замінити сталу σ на меншу в рівностях (3) і (4) не можна.

Отримані у розділі 2 результати є важливими для дослідження рівнянь типу згортки, дослідження циклічності та інших властивостей аналітичних функцій.

У третьому розділі отримано доповнення опису трансляційно інваріантних підпросторів, одержаного В. М. Дільним.

Позначимо через $\operatorname{span}_H \{f_\tau\}$ замикання лінійної оболонки системи $\{f_\tau\}$ в банаховому просторі H.

Інтегральна гранична функція h функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ існує і з точністю до адитивної сталої в точках неперервності визначається рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x\to 0+} \int_{t_1}^{t_2} \ln|f(x+iy)|dy - \int_{t_1}^{t_2} \ln|f(iy)|dy,\ t_1 < t_2.$$

Вона є незростаючою і її похідна дорівнює нулеві майже скрізь на $\mathbb{R}$.

Нехай $\widetilde{I}_f$– внутрішній множник у просторі $H^p(\mathbb{C}_+)$ функції

$$f(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-\widetilde{c}z},$$

де $\ln z$ – вітка логарифма в $\mathbb{C}_+$, для якої $\ln 1 = 0$,

$$\widetilde{c} = \varlimsup_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x\right).$$

Позначимо

$$I^*_f(z) = \widetilde{I}_f e^{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z}.$$

Ми одержали наступне твердження.

Теорема 3.1. *Якщо $f \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $f(z) \neq 0$ для кожного $z \in \mathbb{C}_+$ і інтегральна гранична функція h функції f є сталою, то*

$$\operatorname{span}\{f(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\} =$$

$$= \begin{cases} H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \quad \text{якщо} \quad \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\, \psi(x) = +\infty \\ H^2(\mathbb{C}_+)I^*_f(z), \quad \text{якщо} \quad \psi(x) = O(1), \quad x \to +\infty, \\ \mathbf{0}, \quad \text{якщо} \quad \underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\, \psi(x) = -\infty, \end{cases}$$

де

$$\psi(x) = \frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x,$$

а $\boldsymbol{0}$ – простір, що складається з єдиної функції – тотожного нуля.

Для випадку, коли для послідовності нулів функції f виконується умова Бляшке для півплощини, нами отримано такий результат.

Теорема 3.2. *Якщо $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < +\infty$, і для послідовності нулів (λ_n) функції f виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Re\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < +\infty, \tag{5}$$

то

$$span\{f(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\} =$$

$$= \begin{cases} H^p(\mathbb{C}_+)I^*_f(z), \quad \text{якщо} \quad \psi(x) = O(1), \quad x \to +\infty, \quad x \notin E, \\ \boldsymbol{0}, \quad \text{якщо} \quad \underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}^{*}\psi(x) = -\infty, \end{cases}$$

де E - множина скінченної логарифмічної міри, а $\underline{\lim}^*$ означає нижню границю, яка розглядається поза множиною E, $\boldsymbol{0}$ – простір, що складається з єдиної функції-тотожного нуля.

В другому підрозділі розділу 3 для простору $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ встановлено еквівалентність швидкого спадання по додатній осі модуля функції $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ до швидкого зростання її модуля на межі.

Теорема 3.3. *Нехай $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \leq \sigma < +\infty$ і $f(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, $h(t) = const$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

$$\text{a)} \ \underline{\lim_{r\to+\infty}} \left(\int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|f(it)|dt - 2\sigma\ln r \right) > -\infty;$$

б) $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\left(\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)|dt-2\sigma\ln r\right)>-\infty;$

в) $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\left(\frac{\ln|f(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)<+\infty;$

г) $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\left(\frac{\ln|f(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)<+\infty;$

д) $(\exists c\in\mathbb{R}):f(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z-cz\right\}\in H^\infty(\mathbb{C}_+).$

Такого типу результати використовуються для дослідження циклічності функцій. Аналогічний результат для випадку $p<\infty$ одержав В. М. Дільний.

Останній підрозділ **розділу 3** присвячений опису властивостей простору

$$H^p_\cap(\mathbb{C}_+)=\bigcap_{\sigma>0}H^p_\sigma(\mathbb{C}_+).$$

Зауважимо, що $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)\supset H^p(\mathbb{C}_+)$ і $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)\subset H^p_\varepsilon(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\varepsilon>0$.

Теорема 3.4. $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)\ne H^p(\mathbb{C}_+)$.

Прикладом функції, яка належить до простору $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, але не належить до простору $H^p(\mathbb{C}_+)$ є

$$f(z)=e^{-z\sqrt{\ln(z+2)}},$$

де вітки логарифма та кореня вибрані стандартним способом.

Нехай B– клас неперервних зростаючих функцій $\eta:[0;+\infty)\to(0;+\infty)$ таких, що $\eta(r)=o(r)$ при $r\to+\infty$. Позначимо через $H^p_\ominus(\mathbb{C}_+)$ простір аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких існує $\eta\in B$, що

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^pe^{-\eta(r)|\sin\varphi|}dr\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

Теорема 3.5. *Якщо* $f\in H^p_\ominus(\mathbb{C}_+)$, *то* $f\in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$.

Б. В. Винницький описав нулі класу функцій $f\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ у термінах функції

$$S(r)=\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}.$$

Нам вдалося встановити наступне твердження про опис нулів функцій із $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$.

Теорема 3.6. *Якщо $f \in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, то $S(r) = o(\ln r)$, $r \to +\infty$.*

Наступна теорема дає опис інтегральних граничних функцій із $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$.

Теорема 3.7. *Якщо $f \in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, то $P(r) = o(\ln r)$, $r \to +\infty$, де*

$$P(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)|.$$

Наступне твердження показує еквівалентність для простору $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$ двох класичних характеристик послідовностей нулів у півплощині.

Теорема 3.8. *Нехай (λ_n) –довільна послідовність із $\mathbb{C}_+$. Асимтотична рівність $S(r) = o(\ln r)$, $r \to +\infty$, виконується тоді і тільки тоді, коли $S_0(r) = o(\ln r)$, $r \to +\infty$, де*

$$S_0(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\le r} \frac{Re\lambda_n}{|\lambda_n|^2}.$$

У **розділі 4** розглянуто проблему зображення функцій в просторах Пелі-Вінера W^p_σ у вигляді суми двох функцій, кожна з яких є "великою" лише у першій або четвертій чверті координатної площини.

Спочатку введемо ряд означень і допоміжних тверджень.

Нехай $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $1 \le p < +\infty$, простір аналітичних функцій f в $\mathbb{C}(\alpha;\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ таких, що

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Функції f з простору $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$ мають майже скрізь на $\partial\mathbb{C}\,(\alpha;\beta)$ кутові граничні значення, які теж позначаються через f, і $f \in L^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$.

В даному розділі ми розглядаємо наступну проблему.

Проблема. *Чи для кожної функції $f \in W^1_\sigma$ можливе зображення $f = \chi + \mu$, де функції χ і μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+$, а також $\chi \in E^1\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$, $\mu \in E^1\left[\mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\right]$?*

Дана задача зумовлена питаннями повноти систем функцій. Вона також становить безпосередній інтерес в теорії інтегральних операторів, дослідженнях оператора зсуву. В. М. Дільним знайдено необхідні і достатні умови її

розв'язності, які не співпадають між собою, а також встановлено, нерозв'язність задачі за строгіших умов на функції χ і μ. Ми пропонуємо новий, відмінний від розглядуваних раніше, спосіб розв'язування цієї Проблеми.

За теоремою Пелі-Вінера простір $f \in W_\sigma^2$ співпадає з простором функцій, що допускають зображення

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(it) e^{itz} dt, \varphi \in L^2(-i\sigma; i\sigma).$$

Функцію χ шукатимемо у вигляді

$$\chi(z) = \chi_1(z) + i\chi_2(-iz), \tag{6}$$

де

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\sigma} \varphi(t) e^{itz} dt, \quad \chi_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{0} \varphi(t) e^{itz} dt.$$

Оскільки $\mu = f - \chi$, то надалі під розв'язком проблеми розумітимемо знаходження функції χ.

Ми отримали наступне твердження.

Теорема 4.1. *Нехай $f \in W_\sigma^1$. Функція χ, визначена рівністю* (6)*, є розв'язком Проблеми, тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(m - \frac{i}{2} - k\right)\left(m - \frac{i}{2} - ik\right)} \right| < +\infty, \tag{7}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(m + \frac{i}{2} + ik\right)\left(m + \frac{i}{2} - k\right)} \right| < +\infty. \tag{8}$$

де коефіцієнти c_k є коефіцієнтами Фур'є функції φ.

В. М. Дільний показано, що якщо у зображенні функції $f \in W_\sigma^1$ є скінченна кількість ненульових коефіцієнтів c_k, то Проблема для неї розв'язується позитивно. Зазначимо, що в останньому випадку виконуються умови (7) та (8), тобто, спосіб отримання розв'язку проблеми, запропонований у даній дисертації, є загальнішим, ніж запропонований В. М. Дільним.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розглядалися простори Гарді у півплощині, їх вагові узагальнення та аналоги.

Зміст основних результатів дисертації полягає в наступному:

- отримано теореми єдиності для функцій, які належать до просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \le p < +\infty$;
- одержано теорему єдиності для функцій, аналітичних та обмежених в правій півплощині з вагою $e^{-\sigma|z|}$;
- встановлено для функцій із простору $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, еквівалентність швидкого зростання у деякому сенсі по уявній осі та швидкого спадання по уявній осі;
- знайдено новий спосіб розщеплення функцій із простору W^1_σ, встановлено необхідні та достатні умови, при яких він розв'язує проблему зображення;
- отримано опис нулів та інтегральних функцій, які належать до простору $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, показано, що він не співпадає з класичним простором Гарді.

Результати отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть знайти застосування як у подальших дослідженнях з теорії функцій, теорії інтерполяції, теорії ймовірності та і у інших розділах математики.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Гіщак Т. Про еквівалентність деяких умов для класу функцій, аналітичних у півплощині / Т. Гіщак // Буковинський мат. журн. – 2014. – Т.2, № 4. – С. 28–33.
2. Гіщак Т. Про одну теорему єдиності для вагового простору Гарді / Т. Гіщак // Укр. мат. журн. – 2015. – Т.67, № 3. – С. 326–332.
3. Гищак Т. О теореме единственности для класса функций, аналитических в полуплоскости / Т. И. Гищак, Б. В. Винницкий // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 4. – С. 3–7.

4. Hishchak T. On splitting functions in Paley-Wiener space / T. Hishchak, V. Dilnyi // Mat. Stud. – 2016. – V.45, № 2. – P. 137 –148.

5. Hishchak T. On the intersection of weighted Hardy spaces / T. Hishchak, V. Dilnyi // Carpathian Mathematical Publications. – 2016. – V.8, № 2. – P.1–6.

ПРАЦІ АПРОБАЦІЙНОГО ХАРАКТЕРУ

6. Гіщак Т. Теорема єдиності для вагового простору Гарді / Т. Гіщак // IV міжн. ганська конф, присв. 135 річн. ... Ганса Гана: Тези доп. – Чернівці, 30 червня–5 липня, 2014. – С. 29.

7. Hishchak T. On upper-lower splitting in the Paley-Wiener spaces / V. Dilnyi, T. Hishchak, I. Hordienko // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька: Тези доп. – Дрогобич, 25–28 серпня, 2015. – С. 55.

8. Hishchak T. On decomposition of functions in Paley-Wiener space / T. Hishchak // International conference "Complex Analysis and Related Topics" : Abstracts. – Lviv, Ukraine, May 30 - June 4, 2016.– P. 34-35.

АНОТАЦІЯ

Гіщак Т. І. Межові властивості функцій з просторів типу Гарді. - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз. - Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, Дрогобич, 2016.

У дисертаційній роботі досліджено зв'язки межових властивостей функцій з просторів типу Гарді з поведінкою функцій в областях аналітичності. Отримано теореми єдиності та існування у вагових просторах Гарді. Доповнено опис трансляційно інваріантних підпросторів у вагових просторах. Встановлено еквівалентність швидкого зростання у деякому сенсі вздовж уявної осі та швидкого спадання вздовж дійсної півосі для функцій з простору H_σ^∞. Описано властивості простору, що визначається перетином вагових просторів Гарді. Запропоновано новий спосіб розщеплення функцій

з простору Пелі-Вінера та встановлено критерій розв'язності задачі розщеплення.

Отримані результати можуть знайти застосування як у подальших дослідженнях з теорії функцій, так і у інших розділах математики.

Ключові слова: аналітична функція, простір Гарді, теорема єдиності, циклічна функція, простір Пелі-Вінера, задача розщеплення.

ABSTRACT

Hishchak T. I. Boundary properties of functions in Hardy-type spaces. - Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 - Mathematical Analysis. - Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, 2016.

The thesis consists of a list of denotations, introduction, 4 chapters divided into sections, conclusions and a bibliography, which includes 106 items.

In Chapter 1 we introduce an overview of works related to Hardy spaces and formulate the main results of the thesis.

In Chapter 2 of the dissertation paper we consider relationships between properties of functions in Hardy-type spaces and the behavior of functions inside the domain of analyticity. We obtain existence theorems and uniqueness theorems in weighted Hardy spaces.

In Chapter 3 the description of the translation invariant subspaces of weighted Hardy spaces is supplemented. We showed the equivalence of the rapid growth in some sense on imaginary axis and rapid decrease on the positive half-axis for functions in the space H_σ^∞. We describe the properties of the space defined by the intersections of weighted Hardy spaces.

In Chapter 3 for the decomposition problem in Paley-Wiener space W_σ^1 we found the new way of splitting and obtain the solvability criterion.

These results can be used as in further investigations inside the theory of functions, and in other directions of mathematics.

Key words: analytic function, Hardy space, uniqueness theorem, cyclic function, Paley-Wiener space, decomposition problem.

АННОТАЦИЯ

Гищак Т. И. Предельные свойства функций з пространств типа Харди. - Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - математический анализ. - Дрогобычский государственный педагогический университет имени Ивана Франко, Дрогобыч, 2016.

В диссертационной работе исследованы связи граничных свойств функций из пространств типа Харди с поведением функций в областях аналитичности. Получены теоремы единственности и существования в весовых пространствах Харди. Дополнено описание трансляционно инвариантных подпространств в весовых пространствах. Установлено эквивалентность быстрого роста в некотором смысле по мнимой оси и быстрого убывания по действительной полуоси для функций из пространства H_σ^∞. Описаны свойства пространства, определяющегося пересечением весовых пространств Харди. Предложен новый способ расщепления функций из пространства Пэли-Винера и установлен критерий разрешимости им задачи расщепления.

Полученные результаты могут найти применение как в дальнейших исследованиях по теории функций, так и в других разделах математики.

Ключевые слова: аналитическая функция, пространство Харди, теорема единственности, циклическая функция, пространство Пэли-Винера, задача расщепления.