МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

КУНИНЕЦЬ АНДРІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 519.6

ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ СТАЦІОНАРНИХ РІВНЯНЬ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ТА СФЕРИЧНІЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

01.01.07 — обчислювальна математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі обчислювальної математики та програмування Національного університету «Львівська політехніка» Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Кутнів Мирослав Володимирович,
Національний університет
«Львівська політехніка»,
професор кафедри прикладної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Подлевський Богдан Михайлович,
Інститут прикладних проблем механіки та математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
провідний науковий співробітник відділу числових методів
математичної фізики;

кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Василик Віталій Богданович,
Інститут математики НАН України,
докторант.

Захист відбудеться «___» ______________ 2017 р. о 15:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий «___» ______________ 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Б. А. Остудін

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Сингулярні задачі (крайові задачі та задачі Коші) для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь виникають при дослідженні задач квантової механіки та астрофізики, хімії, механіки, а також в інших областях науки. До таких задач зводяться також стаціонарні нелінійні рівняння дифузії та теплопровідності в циліндричній та сферичній системах координат у випадку коли має місце відповідно осьова або центральна симетрія. Крім того, такі крайові задачі виникають при застосуванні методу розділення змінних. Знайти аналітичні розв'язки нелінійних крайових задач здебільшого неможливо, а тому для їх розв'язування використовують чисельні методи, зокрема, метод скінченних різниць.

Серед різницевих схем розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь слід виділити компактні різницеві схеми, тобто схеми, які у випадку диференціального рівняння m-го порядку є $m+1$-точковими. Відомо, що такі схеми стійкі, їх реалізація вимагає невеликої кількісті арифметичних дій, крім того у випадку схем високого порядку точності за допомогою цих схем можна знайти розв'язок вихідної задачі на сітках з великими кроками.

У працях А. М. Тіхонова, О. А. Самарського та їх учнів для чисельного розв'язування крайових задач для лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з кусково-гладкими коефіцієнтами та загальними двоточковими крайовими умовами побудовано точні триточкові (компактні) різницеві схеми та триточкові різницеві схеми довільного (наперед заданого) порядку точності.

Вперше підхід до побудови точних триточкових різницевих схем та триточкових різницевих схем високого порядку для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами першого роду був запропонований О. А. Самарським та В. Л. Макаровим. Надалі ці результати були розвинуті та узагальнені на випадок крайових умов третього роду та систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, а також крайових задач на півпрямій в працях О. А. Самарського, В. Л. Макарова, М. В. Кутніва, І. П. Гаврилюка, M. Hermann, Л. Б. Гнатіва, О.І. Паздрій тощо.

Однак, застосовувати класичні різницеві схеми у випадку сингулярних крайових задач не можна, а запропоновані у працях F. Hoog, R. Weiss, M. Kummar, R. Russel, F. Shampine, О.А. Самарського тощо, спеціальні різницеві схеми розв'язування таких задач мають низький порядок точності.

Отже, побудова та обґрунтування нових точних триточкових різницевих схем та триточкокових різницевих схем високого порядку точності розв'язування крайових задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з сингулярністю першого роду є однією з актуальних задач обчислювальної математики.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертаційної роботи відповідає напрямку досліджень, що проводяться на кафедрі прикладної математики Національного університету «Львівська політехніка», зокрема, темах зареєстрованих в УкрІНТЕІ «Розробка ефективних чисельних методів розв’язування задач Коші, крайових задач та задач на власні числа для звичайних диференціальних рівнянь» (0107U009513), «Побудова і дослідження методів розв’язування задач прикладної математики та інформатики» (0113U005296). В рамках виконання дисертаційної роботи проводилися дослідження у Віденському Технічному Університеті (австрійський грант) з двох науково-дослідних проектів: „Побудова та обгрунтування точної триточкової різницевої схеми. Порівняння з результатами альтернативних методів“, та „Порівняння методу корекції дефекту з модифікованим методом Ньютона. Точна триточкова різницева схема для чисельного розв’язування нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку в сферичній системі координат“.

Мета і завдання дослідження. *Метою дослідження* є побудова та обґрунтування точних триточкових різницевих схем та триточкових різницевих схем довільного порядку точності на нерівномірних сітках для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з сингулярністю першого роду.

Для досягнення мети дисертаційної роботи необхідно реалізувати такі *завдання*:

- побудувати методи типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності для чисельного розв’язування сингулярних задач Коші;
- побудувати та обґрунтувати точні триточкові різницеві схеми розв’язування крайових задач для нелінійних стаціонарних рівнянь в циліндричній та сферичній системах координат;
- розробити алгоритмічну реалізацію точних триточкових різницевих схем через усічені триточкові різницеві схеми довільного порядку точності;
- дослідити існування та єдиність розв’язку усічених триточкових різницевих схем;
- довести збіжність та отримати оцінку похибки усічених триточкових різницевих схем;
- довести збіжність та отримати оцінку похибки ітераційних методів розв’язування різницевих схем;
- перевірити різницеві схеми на тестових прикладах та підтвердити теоретичні висновки шляхом проведення чисельних експериментів.

Об’єктом дослідження є сингулярні крайові задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Предмет дослідження — точні триточкові різницеві схеми та триточкові різницеві схеми довільного порядку точності розв’язування сингулярних крайових задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Методи дослідження. У процесі виконання дисертаційної роботи використано методи теорії різницевих схем, звичайних диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові результати.

1. Побудовано нові методи типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності чисельного розв'язування сингулярних задач Коші.
2. Побудовано точні триточкові різницеві схеми на нерівномірній сітці для розв'язування нелінійних крайових задач з сингулярністю першого роду.
3. Отримано умови існування та єдиності розв'язку цих схем, а також доведено збіжність ітераційного методу послідовних наближень для його знаходження.
4. Розроблено ефективну реалізацію точних триточкових різницевих схем через усічені триточкові різницеві схеми високого порядку точності.
5. Доведено існування та єдиність розв'язку усічених триточкових різницевих схем та отримано оцінку точності, а також доведено збіжність методу послідовних наближень для розв'язування триточкових різницевих схем.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Одержані результати можуть бути використані при розв'язуванні практичних задач, математичні моделі яких зводяться до крайових задач (або задач Коші) для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з сингулярністю першого роду, а також при розробці програмних пакетів для розв'язування таких задач.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, що складають основний зміст дисертаційної роботи, одержані автором самостійно. У роботах, виконаних у співавторстві, науковому керівнику професору М. В. Кутніву належать постановка задачі та обговорення теоретичних і практичних результатів. У роботі, виконаній у співавторстві з М. Круль та М.В. Кутнівом автору належить розробка точних триточкових різницевих схем для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь у сферичній системі координат.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах: Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробагатька, 19–23 вересня 2011 р., Дрогобич; Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача, 2013 р., Львів; Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки», 23-24 квітня 2014 р., Київ; П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 15-17 травня 2014 р., Київ; VI міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» – 2014 р., Кам'янець-Подільський; наукові конференції професорсько-викладацького складу Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка»; науковий семінар «Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики» відділів динаміки та стійкості багатовимірних систем і обчислювальної математики Інституту математики НАН України (керівники академік І. О. Луковський та академік В. Л. Макаров); наукові семінари кафедр прикладної математики та обчислювальної математики (Національний університет «Львівська політехніка», 2011–2016 р.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 13 друкованих працях, серед них: 1 праця — у журналі, який входить до наукометричних баз (Scopus, Web of Science) [1], 4 статті — у фахових наукових виданнях за спеціальністю «Обчислювальна математика» [2-5], 8 праць — тези доповідей чи матеріали наукових конференцій [6-13].

Структура та обсяг роботи. Робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи — 158 сторінки, список використаних джерел охоплює 154 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми, зазначено мету та завдання дослідження, наукову новизну, апробацію одержаних результатів та їх практичне застосування.

У першому розділі наведено огляд літературних джерел за темою дисертаційної роботи. Описано та проаналізовано підхід до побудови точних та усічених компактних різницевих розв'язування крайових задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), а також огляд різних підходів для чисельного розв'язування сингулярних задач (крайових та задач Коші).

Другий розділ дисертації присвячено розробці методів рядів Тейлора та типу Рунге-Кутта розв'язування сингулярних задач Коші для нелінійних ЗДР другого порядку.

У підрозділі 2.1 розглянуто задачу Коші для ЗДР вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^\lambda}\frac{d}{dx}\left[x^\lambda k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x \in (0,a], \\ &u(0)=u_0, \quad \frac{du(0)}{dx}=0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $k(x), f(x,u)$ — задані функції, $\lambda = 1, 2$. Характерною особливістю цієї задачі є те, що вона має сингулярність в точці $x = 0$.

Введемо множину функцій вигляду

$$\Omega_\lambda([0,a], r_\lambda) = \left\{u(x) : u(x) \in W^1_\infty[0,a],\ u(x), x^\lambda k(x)\frac{du}{dx} \in C[0,a], \right.$$
$$\left. \|u-u_0\|^*_{1,\infty,[0,a]} \leqslant r_\lambda \right\}, \quad \lambda = 1, 2, \quad \|u\|_{0,\infty,[0,a]} = \max_{x\in[0,a]} |u(x)|,$$

$$\|u\|^*_{1,\infty,[0,a]} = \max\left\{\|u\|_{0,\infty,[0,a]},\ \left\|x^\lambda k(x)\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,[0,a]}\right\}.$$

Достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі, які випливають з принципу стискувальних відображень дає теорема.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови*

$$\begin{aligned}
&0 < c_1 \leqslant k(x) \quad \forall x \in [0,a], \quad k(x) \in Q^1[0,a],\\
&f_u(x) \equiv f(x,u) \in Q^0[0,a], \quad |f(x,u)| \leqslant K \quad \forall x \in [0,a],\ u \in \Omega_\lambda([0,a], r_\lambda),\\
&|f(x,u) - f(x,v)| \leqslant L|u-v| \quad \forall x \in [0,a],\ u,v \in \Omega_\lambda([0,a], r_\lambda).
\end{aligned}$$

Тоді на множині $\Omega_\lambda([0,x^*], r_\lambda), \lambda = 1,2,$ *де*

$$x^* = \min\left\{\left[\frac{2c_1(\lambda+1)r_\lambda}{K}\right]^{1/2}, \left[\frac{(\lambda+1)r_\lambda}{K}\right]^{1/(\lambda+1)},\right.$$
$$\left.\left[\frac{2c_1(\lambda+1)}{L}\right]^{1/2}, \left[\frac{\lambda+1}{L}\right]^{1/(\lambda+1)}, a\right\},$$

існує єдиний розв'язок задачі (1).

Тут $Q^p[0,a]$ — клас функцій з кусково-неперервними похідними до p-го порядку включно із скінченною кількістю точок розриву першого роду.

У підрозділі 2.2 розроблено метод рядів Тейлора чисельного розв'язування сингулярних задач Коші (1). Задачу (1) зведемо до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{w(x)}{k(x)}, \tag{2}$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = -f(x,u) - \frac{\lambda w(x)}{x}, \quad 0 < x \leqslant R, \tag{3}$$

$$u(0) = u_0, \quad w(0) = 0.$$

На відрізку $[0,R]$ виберемо нерівномірну сітку $\widehat{\widehat{\omega}}_h = \{x_n \in [0,R],\ n = 0,1,\ldots,n_0,\ x_0 = 0,\ x_{n_0} = R\}$ з кроком $h = h_{n+1} = x_{n+1} - x_n$. Задачу (2), (3) будемо розв'язувати наступним чином. На відрізках $[x_n, x_{n+1}],\ n = 1,2,\ldots,n_0-1$ застосуємо класичні однокрокові методи (рядів Тейлора, або Рунге-Кутта) розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. На відрізку $[0,x_1]$ побудуємо нові методи, які будуть враховувати сингулярність цієї задачі в точці $x = 0$.

Розв'язок задачі (2), (3) $u_1 = u(x_1),\ w_1 = w(x_1)$ розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $x = 0$, причому похідні функції $w(x)$ будемо шукати як границю при

$x \to 0$. Тоді метод рядів Тейлора чисельного розв'язування задачі (1) на інтервалі $[0, x_1]$ буде мати вигляд

$$\begin{aligned} y_1 =& u_0 - \frac{h^2}{2(1+\lambda)} \frac{f(0,u_0)}{k(0)} - \\ &- \sum_{p=3}^{m} \frac{h^p}{p!} \left[\sum_{j=0}^{p-2} \binom{p-1}{j} \frac{p-j-1}{p-j-1+\lambda} \frac{d^{p-j-2} f(0,u_0)}{dx^{p-j-2}} \frac{d^j}{dx^j} \frac{1}{k(x)} \bigg|_{x=0} \right], \\ v_1 =& - \frac{h}{1+\lambda} f(0,u_0) - \sum_{p=2}^{m} \frac{h^p}{(p-1)!(p+\lambda)} \frac{d^{p-1} f(0,u_0)}{dx^{p-1}}, \end{aligned}$$

де $y_1 \approx u_1, v_1 \approx w_1$, $\binom{p-1}{j}$ — біноміальні коефіцієнти.

У підрозділі 2.3 для задачі (2), (3) побудовано явні чотириступеневі методи типу Рунге-Кутта вигляду

$$\begin{aligned} g_1 &= -f(0, u_0), \\ g_2 &= -f\left(c_2 h, u_0 + h^2 \frac{a_{21} g_1}{k(0)}\right), \\ g_3 &= -f\left(c_3 h, u_0 + h^2 \left[\left(\frac{a_{31}}{k(0)} + \frac{a_{32}}{k(c_2 h)}\right) g_1 + \frac{\tilde{a}_{32}}{k(c_2 h)} g_2\right]\right), \\ g_4 &= -f\left(c_4 h, u_0 + h^2 \left[\left(\frac{a_{41}}{k(0)} + \frac{a_{42}}{k(c_2 h)} + \frac{a_{43}}{k(c_3 h)}\right) g_1 + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + \left(\frac{\tilde{a}_{42}}{k(c_2 h)} + \frac{\tilde{a}_{43}}{k(c_3 h)}\right) g_2 + \frac{\bar{a}_{43}}{k(c_3 h)} g_3\right]\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= u_0 + h^2 \left[\left(\frac{d_{12}}{k(0)} + \frac{d_{13}}{k(c_2 h)} + \frac{d_{14}}{k(c_3 h)}\right) g_1 + \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{d_{23}}{k(c_2 h)} + \frac{d_{24}}{k(c_3 h)}\right) g_2 + \frac{d_{34}}{k(c_3 h)} g_3\right], \\ v_1 &= h(b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 g_3 + b_4 g_4), \end{aligned} \tag{4}$$

де $y_1 \approx u_1, v_1 \approx w_1$.

Дійсні коефіцієнти $c_2, c_3, c_4, a_{21}, a_{31}, a_{32}, \tilde{a}_{32}$, $a_{41}, a_{42}, \tilde{a}_{42}, \tilde{a}_{43}, \bar{a}_{43}$, d_{12}, d_{13}, d_{14}, $d_{23}, d_{24}, d_{34}, b_1, b_2, b_3, b_4$ виберемо так, щоб похибка методу (4) задовольняла умови $y_1 - u_1 = O(h^5), v_1 - w_1 = O(h^5)$. Звідси отримаємо систему рівнянь, яку мають задовольняти коефіцієнти методу для того, щоб цей метод мав четвертий порядок апроксимації. Один з таких методів (4) при $\lambda = 1$ має коефіцієнти $c_2 = 1/4, a_{21} = 1/64$, $c_3 = 1/2, a_{31} = 37/504, a_{32} = 1/4, \tilde{a}_{32} = -263/1008, c_4 = 1, a_{41} = 5/12, a_{42} = -13/8$, $a_{43} = 1/2, \tilde{a}_{42} = 1/3, \tilde{a}_{43} = 1/8, \bar{a}_{43} = 1/2$, $d_{12} = 1/4, d_{13} = -2/9, d_{14} =$

$1/18, d_{23} = -4/9, d_{24} = 1/3, d_{34} = 5/18,\ b_1 = 1/15, b_2 = -8/45, b_3 = 7/15, b_4 = 13/90$.

У підрозділі 2.4 наведено чисельні експерименти, результати яких підтверджують теоретичний висновки про четвертий порядок точності запропонованих методів.

У третьому розділі для нелінійних крайових задач

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x \in [0,R], \\
&\lim_{x\to 0} xk(x)\frac{du}{dx} = 0, \quad u(R) = \mu_2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

на нерівномірній сітці побудовано та обгрунтовано точну триточкову різницеву схему (ТТРС) та розроблено її алгоритмічну реалізацію через усічені триточкові різницеві схеми (ТРС).

У підрозділі 3.1 знайдено достатні умови існування і єдиності розв'язку задачі (5), які дає теорема, яка грунтується на методі лінеаризації та принципі стискувальних відображень.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови*

$$
\begin{aligned}
&0 < c_1 \leqslant k(x) \quad \forall x \in [0,R], \quad k(x) \in Q^1[0,R], \quad f_u(x) \equiv f(x,u) \in Q^0[0,R], \\
&|f(x,u)| \leqslant K \quad \forall x \in [0,R],\ u \in \Omega_1([0,R],r_1), \quad r_1 = \frac{KR^2}{4c_1}\max(1, 2c_1), \\
&|f(x,u) - f(x,v)| \leqslant L|u-v| \quad \forall x \in [0,R],\ u,v \in \Omega_1([0,R],r_1), \\
&q = \frac{LR^2}{4c_1}\max(1,2c_1) < 1,
\end{aligned}
$$

тоді задача (5) в $\Omega_1([0,R],r_1)$ має єдиний розв'язок $u(x)$, який можна знайти за допомогою методу послідовних наближень

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{du^{(n)}}{dx}\right] = -f(x, u^{(n-1)}(x)), \quad x \in (0,R), \\
&\lim_{x\to 0} xk(x)\frac{du^{(n)}(x)}{dx} = 0, \quad u^{(n)}(R) = \mu_2, \quad n = 1,2,\ldots, \quad u^{(0)}(x) = \mu_2
\end{aligned}
$$

з оцінкою похибки

$$
\left\| u^{(n)} - u \right\|^*_{1,\infty,[0,R]} \leqslant \frac{q^n}{1-q} r_1.
$$

Тут $Q^p[0,R]$ — клас функцій з кусково - неперервними похідними до p-го порядку включно із скінченною кількістю точок розриву першого роду.

У підрозділі 3.2 доведено існування ТТРС для задачі (5).

На відрізку $[0, R]$ введемо нерівномірну сітку

$$\widehat{\overline{\omega}}_h = \{x_j \in [0, R], \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad x_0 = 0, \; x_N = R\},$$
$$h_j = x_j - x_{j-1} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad |h| = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} h_j$$

так, щоб точки розриву функцій $k(x), f(x, u)$ збігалися з вузлами сітки $\widehat{\omega}_h = \{x_j, \; j = 1, 2, \dots, N-1\}$. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і припустимо, що N таке, що $\rho \subseteq \widehat{\omega}_h$. Введемо позначення

$$\widehat{\omega}_h^- = x_0 \cup \widehat{\omega}_h, \; \|v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-} = \max_{\xi \in \widehat{\omega}_h^-} |v(\xi)|, \; \widehat{\omega}_h^+ = \widehat{\omega}_h \cup x_N, \; \|v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} = \max_{\xi \in \widehat{\omega}_h^+} |v(\xi)|.$$

Розглянемо допоміжні крайові задачі

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{dY_1^1(x,u)}{dx}\right] = -f(x, Y_1^1(x,u)), \quad 0 < x < x_1, \\ &\lim_{x\to 0} xk(x)\frac{dY_1^1(x,u)}{dx} = 0, \quad Y_1^1(x_1, u) = u_1, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx}\right] = -f(x, Y_\alpha^j(x,u)), \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \\ &Y_\alpha^j(x_{j-2+\alpha}, u) = u(x_{j-2+\alpha}), \; Y_\alpha^j(x_{j-1+\alpha}, u) = u(x_{j-1+\alpha}), \\ &j = 3-\alpha, 4-\alpha, \dots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \tag{7}$$

Лема 3.2. *Нехай виконуються умови теореми* 3.1, *тоді задачі (6),(7) мають єдиний розв'язок* $Y_1^1(x,u), Y_\alpha^j(x,u), j = 3-\alpha, 4-\alpha, \dots, N+1-\alpha, \alpha = 1, 2,$ *причому розв'язок задачі (5) зображається у вигляді*

$$\begin{aligned} &u(x) = Y_1^1(x,u), \quad x \in [0, x_1], \\ &u(x) = Y_\alpha^j(x,u), \quad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \\ &j = 3-\alpha, 4-\alpha, \dots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \tag{8}$$

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови теореми* 3.1, *тоді для задачі (5) існує точна триточкова різницева схема*

$$\begin{aligned} &u_{x,0} = -\hat{T}^{x_0}(f(\xi, u(\xi))), \quad a_2 u_{x,1}/(\hbar_1 x_1) = -\hat{T}^{x_1}(f(\xi, u(\xi))), \\ &\frac{1}{x_j}(a u_{\bar{x}})_{\hat{x},j} = -\hat{T}^{x_j}(f(\xi, u(\xi))), \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \quad u_N = \mu_2, \end{aligned} \tag{9}$$

тобто схема, розв'язок якої є проекцією на сітку $\hat{\overline{\omega}}_h$ *розв'язку задачі (5), де*

$$u_{\bar{x},j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}, \quad u_{x,j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h_{j+1}}, \quad u_{\hat{x},j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\hbar_j},$$
$$\hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2}, \quad a_j = a(x_j) = \left[\frac{1}{h_j}V_1^j(x_j)\right]^{-1}, \quad j = 2, 3, ..., N-1,$$

$$\hat{T}^{x_0}(w(\xi)) = -h_1^{-1}V_2^1(x_1)\int\limits_0^{x_1}\xi w(\xi)d\xi + h_1^{-1}\int\limits_0^{x_1}\xi V_2^1(\xi)w(\xi)d\xi,$$

$$\hat{T}^{x_1}(w(\xi)) = (\hbar_1 x_1)^{-1}\int\limits_0^{x_1}\xi w(\xi)d\xi + \left[\hbar_1 x_1 V_2^1(x_1)\right]^{-1}\int\limits_{x_1}^{x_2}\xi V_2^1(\xi)w(\xi)d\xi,$$

$$\hat{T}^{x_j}(w(\xi)) = \left[\hbar_j x_j V_1^j(x_j)\right]^{-1}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\xi V_1^j(\xi)w(\xi)d\xi +$$

$$+\left[\hbar_j x_j V_2^j(x_j)\right]^{-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\xi V_2^j(\xi)w(\xi)d\xi,$$

$$V_1^j(x) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{dt}{tk(t)},\ j=2,3,...,N-1,\ V_2^j(x) = \int\limits_{x}^{x_{j+1}}\frac{dt}{tk(t)},\ j=1,2,...,N-1,$$

функція $u(x)$ *в правій частині (9) визначається за формулами (8) і залежить тільки від* $u(x_j),\ j=0,1,\ldots,N.$

Доведено також єдиність розв'язку ТТРС та збіжність методу послідовних наближень для його знаходження.

У підрозділі 3.3 запропонована алгоритмічна реалізація ТТРС через усічену ТРС рангу $\bar{m} = 2[(m+1)/2],\ m$ – ціле додатне, $[\cdot]$ – ціла частина. Праву частину ТТРС (9) можна записати у вигляді

$$\varphi(x_0,u) = \hat{T}^{x_0}(f(\xi,u(\xi))) = \frac{u_0 - Y_1^1(x_1,u)}{h_1},$$

$$\varphi(x_1,u) = \hat{T}^{x_1}(f(\xi,u(\xi))) = \frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^1(x_1,u) - Z_1^1(x_1,u) + \frac{Y_2^1(x_1,u)-u_2}{x_1V_2^1(x_1)}\right],$$

$$\varphi(x_j,u) = \hat{T}^{x_j}(f(\xi,u(\xi))) =$$

$$= \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^j(x_j,u) + (-1)^\alpha\frac{Y_\alpha^j(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{x_jV_\alpha^j(x_j)}\right],$$

$$j=2,3,\ldots,N-1.$$

де $Y_1^1(x_1,u), Z_1^1(x_1,u),\ Y_\alpha^j(x_j,u), Z_\alpha^j(x_j,u),\ \alpha=1,2$ —розв'язки задач Коші

$$\begin{aligned}
&\frac{dY_1^1(x,u)}{dx} = \frac{Z_1^1(x,u)}{k(x)},\\
&\frac{dZ_1^1(x,u)}{dx} = -f(x,Y_1^1(x,u)) - \frac{Z_1^1(x,u)}{x}, \quad 0<x<x_1,\\
&Y_1^1(0,u) = u_0, \quad \lim_{x\to 0}Z_1^1(x,u) = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx} = \frac{Z_\alpha^j(x,u)}{k(x)},\\
&\frac{dZ_\alpha^j(x,u)}{dx} = -f(x, Y_\alpha^j(x,u)) - \frac{Z_\alpha^j(x,u)}{x},\ x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},\\
&Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = u_{j+(-1)^\alpha},\ Z_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},\\
&\quad j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha,\ \alpha = 1,2,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

а $\bar V_\alpha^j(x) = (-1)^{\alpha+1} V_\alpha^j(x)$ — розв'язки задач Коші

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\bar V_\alpha^j(x)}{dx} = \frac{1}{xk(x)}, \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},\\
&\bar V_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}) = 0, \quad j = 3-\alpha, 4-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Якщо задачі Коші (10)–(12) розв'язати чисельно за допомогою однокрокового методу порядку точності $\bar m$, то отримаємо усічену ТРС рангу $\bar m$

$$
\begin{aligned}
&y_{x,0}^{(\bar m)} = -\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m)}),\ a_2^{(\bar m)} y_{x,1}^{(\bar m)}/(\hbar_1 x_1) = -\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m)}),\\
&\frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar m)} y_{\bar x}^{(\bar m)}\right)_{\hat x, j} = -\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m)}),\ j = 2,3,...,N-1, \quad y_N^{(\bar m)} = \mu_2,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

де

$$
a^{(\bar m)}(x_j) = \left[\frac{1}{h_j} V_1^{(\bar m)j}(x_j)\right]^{-1}, \quad \varphi^{(\bar m)}(x_0, u) = \frac{1}{h_1}\left(u_0 - Y_1^{(\bar m)1}(x_1, u)\right),
$$

$$
\varphi^{(\bar m)}(x_1, u) = \frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^{(m)1}(x_1,u) - Z_1^{(m)1}(x_1,u) + \frac{Y_2^{(\bar m)1}(x_1,u) - u_2}{x_1 V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\right],
$$

$$
\varphi^{(\bar m)}(x_j, u) = \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u) + (-1)^\alpha \frac{Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\right].
$$

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови теореми* 3.1, $k(x) \in Q^{m+1}[0,R]$ *та існує стала* $\Delta > 0$ *така, що* $f(x,u) \in \bigcup_{j=1}^{N} C^m\left([x_{j-1}, x_j] \times \Omega_1([0,R], r_1 + \triangle)\right)$. *Тоді* $\exists h_0 > 0$ *таке, що при* $|h| \leqslant h_0$ *ТРС (13) має єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою*

$$
\left\|y^{(\bar m)} - u\right\|_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_h}^{*} = \max\left\{\left\|y^{(\bar m)} - u\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}, \left\|xk\frac{dy^{(\bar m)}}{dx} - xk\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}\right\} \leqslant M|h|^{\bar m},
$$

де

$$\left[xk\frac{dy^{(\bar{m})}}{dx}\right]_{x=x_1} = x_1 Z_1^{(m)1}(x_1, y^{(\bar{m})}),$$

$$\left[xk\frac{dy^{(\bar{m})}}{dx}\right]_{x=x_j} = x_j Z_1^{(m)j}\left(x_j, y^{(\bar{m})}\right) + \frac{y_j^{(\bar{m})} - Y_1^{(\bar{m})j}\left(x_j, y^{(\bar{m})}\right)}{V_1^{(\bar{m})j}(x_j)}, \quad j = 2, 3, ..., N.$$

Розв'язок нелінійної ТРС (13) може бути знайдено методом послідовних наближень.

Теорема 3.5. *Нехай виконуються умови теореми* 3.4, *тоді розв'язок задачі (13) може бути знайдено за допомогою методу послідовних наближень*

$$y_{x,0}^{(\bar{m},n)} = -\varphi^{(\bar{m})}(x_0, y^{(\bar{m},n-1)}), \quad a_2^{(\bar{m})} y_{x,1}^{(\bar{m},n)}/(\hbar_1 x_1) = -\varphi^{(\bar{m})}(x_1, y^{(\bar{m},n-1)}),$$
$$\frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar{m})} y_{\bar{x}}^{(\bar{m},n)}\right)_{\hat{x},j} = -\varphi^{(\bar{m})}(x_j, y^{(\bar{m},n-1)}), \quad j = 2, 3, \ldots, N-1,$$
$$y_N^{(\bar{m},n)} = \mu_2, \quad n = 1, 2, \ldots\ , \quad y_j^{(\bar{m},0)} = \mu_2, \quad j = 0, 1, \ldots, N$$

і справджується оцінка

$$\left\| y^{(\bar{m},n)} - u \right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^{*} \leqslant M(|h|^{\bar{m}} + q_2^n),$$

де

$$\left[xk\frac{dy^{(\bar{m},n)}}{dx}\right]_{x=x_1} = x_1 Z_1^{(m)1}(x_1, y^{(\bar{m},n)}),$$

$$\left[xk\frac{dy^{(\bar{m},n)}}{dx}\right]_{x=x_j} = x_j Z_1^{(m)j}\left(x_j, y^{(\bar{m},n)}\right) + \frac{y_j^{(\bar{m})} - Y_1^{(\bar{m})j}\left(x_j, y^{(\bar{m},n)}\right)}{V_1^{(\bar{m})j}(x_j)},$$
$$j = 2, 3, ..., N,$$

стала M *не залежить від* $|h|, m, n,$ *а величина* $q_2 = q + M_2|h| < 1$.

У підрозділі 3.4 наведено чисельні експерименти, результати яких підтверджують теоретичні висновки.

Приклад 3.1. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right] = u^3 - 3u^5, \quad x \in (0, 1), \quad \lim_{x\to 0} x\frac{du}{dx} = 0, \quad u(1) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

точний розв'язок якої $u(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$.

Задачу розв'язувалася чисельно на рівномірній сітці $\overline{\omega}_h = \{x_j = jh, j = 0, 1, \ldots, N,\ h = 1/N\}$ за допомогою ТРС (13) четвертого порядку точності ($m =$

$\bar{m} = 4$). Функції $Y_\alpha^{(4)j}(x_j, u), Z_\alpha^{(4)j}(x_j, u)$—чисельні розв'язки допоміжних задач Коші (10), (11), отримані методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності. Для знаходження розв'язку $y_j^{(4)},\ j = 0, 1, \ldots, N$ різницевої схеми (13) використовувався модифікований ітераційний метод Ньютона, а розв'язок відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею отримано методом прогонки. Результати чисельного розв'язування задачі наведено в таблиці 3.1, де

$$Error = \left\| y^{(4)} - u \right\|^*_{1,\infty,\bar{\omega}_h} \qquad p = \log_2 \frac{\left\| y^{(4)} - u \right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_h}}{\left\| y^{(4)} - u \right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_{h/2}}}.$$

Таблиця 3.1

Результати розв'язування прикладу 3.1

N	$Error$	p
20	$0.6075 \cdot 10^{-5}$	
40	$0.4896 \cdot 10^{-6}$	3.6
80	$0.3748 \cdot 10^{-7}$	3.7
160	$0.2773 \cdot 10^{-8}$	3.8
320	$0.2013 \cdot 10^{-9}$	3.8
640	$0.1302 \cdot 10^{-10}$	4.0

У четвертому розділі досліджувалася нелінійна стаціонарна задача в сферичній системі координат. Побудовано та обгрунтовано ТТРС та запропоновано алгоритмічну реалізацію ТТРС через усічені ТРС рангу $\bar{m}$.

Розглянемо нелінійну крайову задачу

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2 k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x, u), \quad x \in [0, R], \\ &\lim_{x\to 0} x^2 k(x)\frac{du}{dx} = 0, \quad u(R) = \mu_2. \end{aligned} \tag{14}$$

У підрозділі 4.1 встановлено достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (14).

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови*

$$\begin{aligned} &0 < c_1 \leqslant k(x) \quad \forall x \in [0, R], \quad k(x) \in Q^1[0, R], \quad f_u(x) \equiv f(x, u) \in Q^0[0, R], \\ &|f(x, u)| \leqslant K \ \forall x \in [0, R], u \in \Omega_2([0, R], r_2), \quad r_2 = \frac{KR^2}{6c_1}\max(1, 2Rc_1), \\ &|f(x, u) - f(x, v)| \leqslant L|u - v| \quad \forall x \in [0, R],\ u, v \in \Omega_2([0, R], r_2), \\ &q = \frac{LR^2}{6c_1}\max(1, 2Rc_1) < 1, \end{aligned}$$

тоді задача (14) в $\Omega_2([0,R],r_2)$ *має єдиний розв'язок* $u(x)$*, який можна знайти за допомогою методу послідовних наближень*

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{du^{(n)}}{dx}\right]=-f(x,u^{(n-1)}(x)),\quad x\in(0,R),$$

$$\lim_{x\to0}x^2k(x)\frac{du^{(n)}(x)}{dx}=0,\quad u^{(n)}(R)=\mu_2,\quad n=1,2,\dots,\quad u^{(0)}(x)=\mu_2$$

з оцінкою похибки

$$\left\|u^{(n)}-u\right\|^*_{1,\infty,[0,R]}\leqslant\frac{q^n}{1-q}r_2.$$

У підрозділі 4.2 за умов існування та єдиності розв'язку задачі доведено існування точної різницевої схеми для розв'язування вихідної задачі. Розглянемо крайові задачі

$$\begin{gathered}\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{dY_1^1(x,u)}{dx}\right]=-f(x,Y_1^1(x,u)),\quad 0<x<x_1,\\ \lim_{x\to0}x^2k(x)\frac{dY_1^1(x,u)}{dx}=0,\quad Y_1^1(x_1,u)=u_1,\end{gathered}\tag{15}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx}\right]=-f(x,Y_\alpha^j(x,u)),\quad x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha},\\ Y_\alpha^j(x_{j-2+\alpha},u)=u(x_{j-2+\alpha}),\quad Y_\alpha^j(x_{j-1+\alpha},u)=u(x_{j-1+\alpha}),\\ j=3-\alpha,4-\alpha,\dots,N+1-\alpha,\quad \alpha=1,2.\end{gathered}\tag{16}$$

Лема 4.2. *Нехай виконані умови теореми* 4.1*, тоді задачі (15), (16) матимуть єдиний розв'язок* $Y_1^1(x,u),Y_\alpha^j(x,u),j=3-\alpha,4-\alpha,\dots,N+1-\alpha,\alpha=1,2,$ *причому для розв'язку задачі (14) справджується*

$$\begin{gathered}u(x)=Y_1^1(x,u),\quad x\in[0,x_1],\\ u(x)=Y_\alpha^j(x,u),\quad x\in[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],\\ j=3-\alpha,4-\alpha,\dots,N+1-\alpha,\quad \alpha=1,2.\end{gathered}\tag{17}$$

За допомогою леми доводиться існування ТТРС.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови теореми* 4.1*. Тоді для задачі (14) існує ТТРС вигляду*

$$\begin{gathered}u_{x,0}=-\hat{T}^{x_0}(f(\xi,u(\xi))),\quad a_2u_{x,1}/(\hbar_1x_1^2)=-\hat{T}^{x_1}(f(\xi,u(\xi))),\\ \frac{1}{x_j^2}(au_{\bar{x}})_{\hat{x},j}=-\hat{T}^{x_j}(f(\xi,u(\xi))),\quad j=2,3,\dots,N-1,\quad u_N=\mu_2,\end{gathered}\tag{18}$$

де

$$u_{\bar{x},j}=\frac{u_j-u_{j-1}}{h_j},\quad u_{x,j}=\frac{u_{j+1}-u_j}{h_{j+1}},\quad u_{\hat{x},j}=\frac{u_{j+1}-u_j}{\hbar_j},$$

$$\hbar_j=\frac{h_j+h_{j+1}}{2},\quad a_j=a(x_j)=\left[\frac{1}{h_j}V_1^j(x_j)\right]^{-1},\quad j=2,3,\ldots,N-1,$$

$$\hat{T}^{x_0}(w(\xi))=h_1^{-1}\int\limits_0^{x_1}\xi^2V_2^0(\xi)w(\xi)d\xi,$$

$$\hat{T}^{x_1}(w(\xi))=(\hbar_1x_1^2)^{-1}\int\limits_0^{x_1}\xi^2w(\xi)d\xi+\left[\hbar_1x_1^2V_2^1(x_1)\right]^{-1}\int\limits_{x_1}^{x_2}\xi^2V_2^1(\xi)w(\xi)d\xi,$$

$$\hat{T}^{x_j}(w(\xi))=\left[\hbar_jx_j^2V_1^j(x_j)\right]^{-1}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\xi^2V_1^j(\xi)w(\xi)d\xi+$$

$$+\left[\hbar_jx_j^2V_2^j(x_j)\right]^{-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\xi^2V_2^j(\xi)w(\xi)d\xi,$$

$$V_1^j(x)=\int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{dt}{t^2k(t)},\ j=2,3,...,N-1,\ V_2^j(x)=\int\limits_{x}^{x_{j+1}}\frac{dt}{t^2k(t)},\ j=0,1,...,N-1,$$

функція $u(x)$ *в правій частині (18) визначається за формулою (17) і залежить тільки від* $u(x_j),\ j=0,1,\ldots,N$.

Доведена лема про єдиність розв'язку ТТРС, який можна знайти методом послідовних наближень.

У підрозділі 4.3 побудовано усічену ТРС рангу $\bar{m}$ вигляду

$$\begin{gathered}y_{x,0}^{(\bar{m})}=-\varphi^{(\bar{m})}(x_0,y^{(\bar{m})}),\quad a_2^{(\bar{m})}y_{x,1}^{(\bar{m})}/(\hbar_1x_1^2)=-\varphi^{(\bar{m})}(x_1,y^{(\bar{m})}),\\ \frac{1}{x_j^2}\left(a^{(\bar{m})}y_{\bar{x}}^{(\bar{m})}\right)_{\hat{x},j}=-\varphi^{(\bar{m})}(x_j,y^{(\bar{m})}),\ j=\overline{2,N-1},\quad y_N^{(\bar{m})}=\mu_2,\end{gathered}\tag{19}$$

де

$$a^{(\bar{m})}(x_j)=\left[\frac{1}{h_j}V_1^{(\bar{m})j}(x_j)\right]^{-1},\quad \varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)=\frac{1}{h_1}\left(Y_2^{(\bar{m})0}(x_0,u)-u_1\right),$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_1,u)=\frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^{(m)1}(x_1,u)-Z_1^{(m)1}(x_1,u)+\frac{Y_2^{(\bar{m})1}(x_1,u)-u_2}{x_1^2V_2^{(\bar{m})1}(x_1)}\right],$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)=\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)+(-1)^\alpha\frac{Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j^2V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)}\right],$$

$Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u), Z^(m)j_\alpha(x_j,u), V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j), j=2-\alpha, 3-\alpha, \dots, N+1-\alpha,\ \alpha=1,2$ — чисельні розв'язки допоміжних задач Коші

$$\begin{aligned}
&\frac{dY_2^0(x,u)}{dx}=\frac{Z_2^0(x,u)}{k(x)},\\
&\frac{dZ_2^0(x,u)}{dx}=-f(x,Y_2^0(x,u))-\frac{2Z_2^0(x,u)}{x},\quad 0<x<x_1,\\
&Y_2^0(x_1,u)=u_1,\quad Z_2^0(x_1,u)=\left.k(x)\frac{du}{dx}\right|_{x=x_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dY_1^1(x,u)}{dx}=\frac{Z_1^1(x,u)}{k(x)},\\
&\frac{dZ_1^1(x,u)}{dx}=-f(x,Y_1^1(x,u))-\frac{2Z_1^1(x,u)}{x},\quad 0<x<x_1,\\
&Y_1^1(0,u)=u_0,\quad \lim_{x\to 0}Z_1^1(x,u)=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx}=\frac{Z_\alpha^j(x,u)}{k(x)},\\
&\frac{dZ_\alpha^j(x,u)}{dx}=-f(x,Y_\alpha^j(x,u))-\frac{2Z_\alpha^j(x,u)}{x},\ x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha},\\
&Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)=u_{j+(-1)^\alpha},\ Z_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)=\left.k(x)\frac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},\\
&\quad j=3-\alpha,4-\alpha,\dots,N+1-\alpha,\ \alpha=1,2,\\
&\frac{d\bar V_\alpha^j(x)}{dx}=\frac{1}{x^2k(x)},\quad x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha},\\
&\bar V_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})=0,\quad j=3-\alpha,4-\alpha,...,N+1-\alpha,\quad \alpha=1,2,
\end{aligned}$$

отримані будь-яким однокроковим методом (рядів Тейлора або Рунге-Кутта) порядку точності $\bar m$.

Доведено теорему, яка дає умови єдиності розв'язку та встановлює точність ТРС (19).

Теорема 4.4. *Нехай виконуються умови теореми* 4.1, $k(x)\in Q^{m+1}[0,R]$ *та існує стала* $\Delta>0$ *така, що* $f(x,u)\in\bigcup\limits_{j=1}^{N}C^m\left([x_{j-1},x_j]\times\Omega_2([0,R],r_2+\triangle)\right)$. *Тоді* $\exists h_0>0$ *таке, що при* $|h|\leqslant h_0$ *ТРС (19) має єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою*

$$\left\|y^{(\bar m)}-u\right\|^*_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}=\max\left\{\left\|y^{(\bar m)}-u\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-},\left\|x^2k\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}-x^2k\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant M|h|^{\bar m},$$

де

$$\left[x^2 k \frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_1} = x_1^2 Z_1^{(m)1}(x_1, y^{(\bar m)}),$$

$$\left[x^2 k \frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_j} = x_j^2 Z_1^{(m)j}\left(x_j, y^{(\bar m)}\right) + \frac{y_j^{(\bar m)} - Y_1^{(\bar m)j}\left(x_j, y^{(\bar m)}\right)}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)}, \quad j = 2, 3, ..., N.$$

Доведено також збіжність методу послідовних наближень для знаходження розв'язку ТРС порядку точності $\bar m$.

Для підтвердження теоретичних висновків **у підрозділі 4.4** наведено результати чисельних експериментів.

Приклад 4.1. Розглянемо крайову задачу

$$\begin{gathered}\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2 \frac{du}{dx}\right] = -4(2\exp(u) + \exp(u/2)), \quad x \in (0,1),\\ \lim_{x\to 0} x^2 \frac{du}{dx} = 0, \quad u(1) = -2\ln 2,\end{gathered} \tag{20}$$

із заданим точним розв'язком $u(x) = -2\ln(1+x^2)$. Задачу будемо розв'язувати чисельно на рівномірній сітці $\overline{\omega}_h = \{x_j = jh, j = 0, 1, \ldots, N, h = 1/N\}$ за допомогою ТРС (19) 4-го порядку точності ($m = \bar m = 4$). Для знаходження розв'язку різницевої схеми використаємо модифікований ітераційний метод Ньютона, а для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею — метод прогонки. Результати розрахунків наведені в таблиці 4.1, де

$$Error = \left\|y^{(4)} - u\right\|^*_{1,\infty,\bar\omega_h} \qquad p = \log_2 \frac{\left\|y^{(4)} - u\right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_h}}{\left\|y^{(4)} - u\right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_{h/2}}}.$$

Таблиця 4.1

Результати чисельного розв'язування задачі (20)

N	$Error$	p
20	0.1381E-04	
40	0.9075E-06	3.9
80	0.5718E-07	4
160	0.3578E-08	4
320	0.2237E-09	4

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі побудовано та обґрунтовано точні триточкові різницеві схеми та триточкові різницеві схеми високого порядку точності для розв'язування крайових задач для нелінійних стаціонарних рівнянь в циліндричній та сферичній системах координат.

Основні результати.

1. Побудовано методи рядів Тейлора та типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності для чисельного розв'язування сингулярних задач Коші для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь.
2. Побудовано точні триточкові різницеві схеми розв'язування крайових задач для нелінійних стаціонарних рівнянь у циліндричній та сферичній системах координат. Встановлено достатні умови існування та єдиності розв'язку цих схем, доведено збіжність методу послідовних наближень для його знаходження.
3. Розроблено ефективну алгоритмічну реалізацію точних триточкових різницевих схем через усічені триточкові різницеві схеми довільного порядку точності.
4. Досліджено існування та єдиність розв'язку усічених триточкових різницевих схем.
5. Доведено збіжність та отримано оцінку похибки усічених триточкових різницевих схем.
6. Доведено збіжність та отримано оцінку похибки ітераційного методу послідовних наближень розв'язування різницевих схем.
7. Перевірено різницеві схеми на тестових прикладах та підтверджено теоретичні висновки шляхом проведення чисельних експериментів. Наведено результати порівняння розроблених різницевих схем з іншими методами.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Król M. Exact three-point difference scheme for singular nonlinear boundary value problems /M. Król, A. V. Kunynets, M. V. Kutniv // J. Comput. Appl. Math.– 2016. – Vol. 298, no. 1. – P. 175–189.
2. Kunynets A. V. Exact three-point difference scheme for nonlinear stationary differential equations in cylindrical coordinates / A. V. Kunynets, M. V. Kutniv // Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія "Обчислювальна математика". – 2011. Вип. 2(105). – С. 51–68.
3. Кунинець А. В. Триточкова різницева схема високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку в циліндричних координатах / А. В. Кунинець, М. В. Кутнів // Вісник Національного університету "Львівська політехніка" (Фіз.-мат. науки). – 2013.– Вип. 768. – С. 85–99.

4. Кунинець А. В. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних диференціальних рівнянь в сферичній системі координат / А. В. Кунинець, М. В. Кутнів // Вісник Національного університету "Львівська політехніка" (Фіз.-мат. науки). – 2014. – Вип. 804. – С. 141–165.
5. Кунинець А. Методи Рунге-Кутта четвертого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з сингулярністю першого роду / А. Кунинець, М. Кутнів // Вісник Львівського університету. Серія прикл. матем. інформ. – 2015. – Вип. 23. – С. 28–36.
6. Кунинець А. В. Точна триточкова різницева схема для нелінійного стаціонарного рівняння у циліндричній системі координат / А. В. Кунинець, М. В. Кутнів // Тези доповідей дев'ятої відкритої наукової конференції професорсько-викладацького складу Інституту прикладної математики та фундаментальних наук. – Львів, 2010. – С. 47.
7. Кунинець А. Точна триточкова різницева схема для нелінійного стаціонарного рівняння в циліндричній системі координат / А. Кунинець, М. Кутнів // Матеріали міжнародної математичної конференції ім. В. Я. Скоробогатька. – Дрогобич, 2011. – С. 111.
8. Кунинець А. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь в циліндричних координатах / А. Кунинець, М. Кутнів // Матеріали міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми механіки та математики". – Львів, 2013. – С. 29–32.
9. Кунинець А. В. Точна триточкова різницева схема для нелінійного стаціонарного рівняння в сферичній системі координат / А. В. Кунинець, М. В. Кутнів // Матеріали міжнародної математичної конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки". – Київ, 2014. – С. 78.
10. Кунинець А. В. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь у сферичній системі координат / А. В. Кунинець // Матеріали XV міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. Т.1 Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – Київ, 2014. – С. 178–180.
11. Кунинець А. В. Чисельне дослідження стаціонарних процесів теплопровідності або дифузії в циліндричній системі координат / А. В. Кунинець // Тези доповідей VI міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації". – Кам'янець-Подільський, 2014. – С. 93–94.
12. Кунинець А. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності для сингулярних задач Коші / А. Кунинець // Матеріали конференції молодих учених «Підстригачівські читання – 2015». – Львів, 2015. – Available online at: http://iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Kunynets.pdf
13. Кунинець А. В. Методи Рунге-Кутта для нелінійних сингулярних задач Коші / А. В. Кунинець // Тези доповідей дванадцятої відкритої наукової конфе-

ренції Інституту прикладної математики та фундаментальних наук. – Львів, 2016. – С. 75 – 77.

АНОТАЦІЯ

Кунинець А. В. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для стаціонарних рівнянь в циліндричній та сферичній системах координат. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 — обчислювальна математика. — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2017.

У дисертаційній роботі для чисельного розв'язування сингулярних задач Коші для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку розроблено методи рядів Тейлора та типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності. Побудовано та обгрунтовано точну триточкову різницеву схему (ТТРС) розв'язування крайових задач для нелінійних стаціонарних рівнянь в циліндричній та сферичній системах координат на нерівномірній сітці. Розроблено ефективну алгоритмічну реалізацію ТТРС через усічені триточкові різницеві схеми (ТРС) рангу $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$ (m – ціле додатне, $[\cdot]$ – ціла частина). Одержано достатні умови існування та єдиності розв'язку усіченої ТРС. Доведено, що ТРС рангу $\bar{m}$ має порядок точності $\bar{m}$ як для розв'язку $u(x)$, так і для потоку $k(x)du/dx$. Доведено збіжність та отримано оцінку похибки ітераційного методу послідовних наближень розв'язування нелінійних різницевих схем. Теоретичні висновки підтверджено результатами чисельних експериментів.

Ключові слова: сингулярне звичайне диференціальне рівняння, сингулярна задача Коші, сингулярна крайова задача, триточкова різницева схема, ітераційний метод, порядок точності.

АННОТАЦИЯ

Кунинец А. В. Трехточечные разностные схемы высокого порядка точности для стационарных уравнений в цилиндрической и сферической системах координат. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 — вычислительная математика. — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2017.

Диссертационная работа посвящена построению методов рядов Тейлора и типа Рунге-Кутта четвертого порядка точности для решения сингулярных задач Коши для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, а также построению и обоснованию точных и усеченных трехточечных разностных схем на неравномерной сетке решения краевых задач для нелинейных стационарных уравнений в цилиндрической и сферической системах координат. Используя метод линеаризации и принцип сжимающих отображений доказано существование точных трехточечных разностных схем (ТТРС), единственность их решения, а также сходимость итерационного метода последовательных приближений для его нахождения.

Разработана алгоритмическая реализация ТТРС через усеченные трехточечные разностные схемы (ТРС) ранга $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$ ($m-$ натуральное число, $[\cdot]$ – целая часть). Получены достаточные условия существования и единственности решения усеченной ТРС. Доказано, что ТРС ранга $\bar{m}$ имеет порядок точности $\bar{m}$ как для решения $u(x)$, так и для потока $k(x)du/dx$. Доказана сходимость и получена оценка погрешности итерационного метода последовательных приближений решения усеченных разностных схем. Теоретические выводы подтверждены результатами вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, сингулярная задача Коши, сингулярная краевая задача, трехточечная разностная схема, итерационный метод, порядок точности.

SUMMARY

Kunynets A. V. Three-point difference schemes of high order accuracy for stationary equations in cylindrical and spherical coordinate systems. — Manuscript.

The thesis for obtaining the scholar degree of the Candidate of Physics and Mathematics, speciality 01.01.07 — Computational mathematics. — Ivan Franko National University of Lviv, 2017.

The methods of Teylor series as well as Runge-Kutta method of the four order accuracy have been developed for the numerical solving the singular initial value problems for the nonlinear ordinary differential equations of the order 2 in this dissertation thesis. It has been constructed and justified the exact three-point difference scheme (ETDS) for solving the boundary problems of nonlinear stationary equations in the cylindrical and spherical coordinate systems on the non-uniform grid. An effective algorithmic realization of ETDS has been implemented via the truncated three-point difference schemes (TDS) of the rank $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$, where m is a natural number and $[\cdot]$ is an integer part. The enough conditions of existence and uniqueness of the truncated TDS solution have been obtained. It has been proved that the TDS of rank $\bar{m}$ has the accuracy order of $\bar{m}$ both for the solution of $u(x)$ and for the flow of $k(x)du/dx$. The estimation of iteration method of serial approximation for the solving the nonlinear differential schemes has been obtained and the convergence of this method has been proved as well. The theoretical conclusions have been verified by the results of numerical experiments.

Key words: singular ordinary differential equation, initial value problem, boundary value problem, three-point difference scheme, iterative method, order of accuracy .