Міністерство освіти і науки України

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

На правах рукопису

Гіщак Тетяна Ігорівна

УДК 517.5

МЕЖОВІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ З ПРОСТОРІВ ТИПУ ГАРДІ

01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Дільний Володимир Миколайович,
доктор фізико-математичних наук,
доцент

Дрогобич – 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ 4

ВСТУП 7

РОЗДІЛ 1. Огляд літератури і основних результатів . 13

1.1. Огляд літератури 23

1.2. Основний зміст дисертації 26

РОЗДІЛ 2. Теореми єдиності у просторах аналітичних функцій 34

2.1. Теореми єдиності для вагового простору Гарді 34

2.2. Теореми єдиності для одного класу аналітичних функцій експоненціального типу в півплощині 56

2.3. Висновки до розділу 2 69

РОЗДІЛ 3. Умови повноти для систем аналітичних функцій 70

3.1. Інваріантні підпростори просторів типу Гарді 70

3.2. Про еквівалентність деяких умов для класу функцій, аналітичних у півплощині 75

3.3. Про перетин вагових просторів Гарді 87

3.4. Висновки до розділу 3 97

РОЗДІЛ 4. Розщеплення функцій в просторі

$H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ 98
4.1. Формулювання основного результату 98
4.2. Доведення теореми 4.1 111
4.3. Висновки до розділу 4 122
ВИСНОВКИ 123
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 124

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ —права комплексна півплощина
- $\mathbb{C}_- = \{z : \mathrm{Re} < 0\}$ —ліва комплексна півплощина
- $\mathbb{C}^+ = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ —верхня комплексна півплощина
- $\mathbb{C}^- = \{z : \mathrm{Im} z < 0\}$ —нижня комплексна півплощина
- $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < +\infty$, – простір Гарді у правій півплощині, тобто простір функцій f, аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\|f\|_p := \sup \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mid f(x+iy) \mid^p dy : x \in (0; +\infty) \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

- $H^\infty(\mathbb{C}_+)$– простір аналітичних і обмежених у правій півплощині функцій
- $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $p \geq 1$ $\sigma \geq 0$, простір аналітичних функцій в правій півплощині, для яких

$$\|f\|_{p,\sigma} := \sup \left\{ \int\limits_{0}^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p e^{-\sigma p r |\sin\varphi|} dr : \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

- $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \leq \sigma < +\infty$, –простір функцій f, аналітичних в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\|f\| := \sup \left\{ |f(z)| e^{-\sigma |\mathrm{Im} z|} : z \in \mathbb{C}_+ \right\} < +\infty$$

- W^p_σ, $\sigma > 0$, $p \geq 1$,– простір Пелі-Вінера, тобто простір цілих функцій f експоненціального типу, що не перевищує σ і які належать до $L^p(\mathbb{R})$

- $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $1 \leq p < +\infty$, простір аналітичних функцій f в $\mathbb{C}(\alpha;\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ таких, що
$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr : \alpha < \varphi < \beta\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

- $\operatorname{span}_H\{f_\tau\}$– замикання лінійної оболонки системи $\{f_\tau\}$ в банаховому простору H

- h – інтегральна гранична функція функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, яка визначається з точністю до адитивної сталої в точках неперервності рівністю
$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x\to 0+} \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln|f(x+iy)|dy - \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln|f(iy)|dy,\ t_1 < t_2$$

- $$H^p_\cap(\mathbb{C}_+) = \bigcap_{\sigma>0} H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$$

- B – клас неперервних зростаючих функцій $\eta : [0;+\infty) \to (0;+\infty)$ таких, що $\eta(r) = o(r)$, при $r \to +\infty$

- $H^p_\ominus(\mathbb{C}_+)$ –простір аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких існує $\eta \in B$, що
$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-\eta(r)|\sin\varphi|} dr : |\varphi| < \frac{\pi}{2}\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

- $S(r)$ – визначається для послідовності нулів (λ_n), $\mathrm{Re}\lambda_n > 0$, функції f і числа $r > 0$ рівністю

$$S(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\leq r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right) \frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}$$

- $P(r)$– визначається для функції $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і числа $r > 0$ рівністю

$$P(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |dh(t)|$$

- $K(r)$ – визначається для функції $f : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ і числа $r > 0$ рівністю

$$K(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|f(it)|dt$$

ВСТУП

Актуальність теми. При вивченні функціональних просторів, зокрема просторів аналітичних функцій, одне з першочергових значень має вивчення екстремальних властивостей цих просторів. Одними з найважливіших результатів такого плану є теореми існування та єдиності. Отримання аналогів таких теорем, встановлених для класичних просторів Б. Я. Левіним, В. П. Гурарієм, М. А. Євграфовим, Р. Боасом, С. Н. Мергеляном, Дж. Хвангом та іншими математиками, для вагових просторів Гарді з експоненціальною вагою залишалося відкритим питанням.

Простори функцій експоненціального зростання у півплощині розглядалися, зокрема, Н. В. Говоровим, Б. В. Винницьким та їх учнями. Б. В. Винницький ввів ваговий простір Гарді $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p \le \infty$, $0 \le \sigma < +\infty$, функцій, аналітичних у правій півплощині, що характеризуються експоненціальним ростом. Цей простір є з одного боку, як показав А. М. Седлецький, узагальненням простору Гарді у правій півплощині $H^p(\mathbb{C}_+)$, а з іншого — аналогом для півплощини добре відомого простору Пелі-Вінера W^p_σ, що складається з цілих функцій експоненціального типу $\le \sigma$, що належать до $L^p(\mathbb{R})$. У процесі досліджень виявилося, що властивості просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 < \sigma < +\infty$, істотно відрізняються від властивостей просторів у неваговому випадку. З іншого боку, у ваговому випадку швид-

ке спадання функції вздовж додатньої дійсної півосі пов'язане з швидким зростанням її вздовж уявної осі. Чи справедлива ця закономірність і для простору $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, залишалося відкритим питанням.

У 1949 році А. Бьорлінг одержав повний опис трансляційно інваріантних підпросторів для простору Гарді в крузі. Пізніше П. Лакс переніс цей результат на випадок просторів Гарді у півплощині. При цьому природним виявилося питання інваріантності відносно множення на $e^{\tau z}$, $\tau \leq 0$. Подальші дослідження показали, що результати, одержані для просторів Гарді, часто мають прямі аналоги для об'єктів у різних розділах математики. Елегантність результатів А. Бьорлінга та П. Лакса викликала великий інтерес до цієї тематики, що розвинулося в дослідження циклічних, мультициклічних, гіперциклічних функцій та операторів, трансляційно інваріантних підпросторів. Цими питаннями активно займалися, зокрема, Х. Шапіро, В. П. Хавін, Н. К. Нікольський, В. І. Васюнін, В. Рудін, Б. Юсефі, Н. Гогус, К. Массанеда, Н. Зорбоска, А. Бонілла, В. П. Гурарій, Х. Хеденмальм, Б. В. Винницький, В. В. Капустін, А. Д. Баранов, В. Е. Кім, В. М. Дільний, П. Бурдон, Е. Стейн, Р. Койфман, Г. Вейсс, Є. М. Динькін, Б. П. Осіленкер , Г. Семпсон, Д. Фонг, та багато інших.

Властивості простору Пелі-Вінера W_σ^p є дуже добре вивченими, а прийоми і методи досліджень часто використовуються при дослідженні об'єктів у багатьох розділах математики. Проте деякі задачі були розв'язані досить недавно чи залишалися відкритими. Однією з таких є задача про розщеплення функцій з W_σ^1 на суму двох, кожна з яких "велика" тільки в певному куті. Задачі такого типу розглядали Л. Еренпрайс, Р. С. Юлмухаме-

тов, Ю. І. Любарський, І. Е. Чижиков, В. М. Дільний.

Дослідження, об'єктом яких є простори Гарді аналітичних функцій, часто знаходять застосування у комплексному та функціональному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, а також у прикладних напрямах: геодинаміці, теорії інформації, квантовій фізиці (див. [80], [81], [93], [48], [61], [46], [82]). Тому можна очікувати важливих застосувань і для результатів з теорії вагових просторів Гарді.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі математики Інституту фізики, математики, економіки та інноваційних технологій Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертації* є встановити зв'язки межових властивостей функцій з просторів типу Гарді з поведінкою функцій в областях аналітичності, що передбачає вирішення таких завдань:

- отримати теореми єдиності та існування у просторах $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \le p < +\infty$;
- встановити теореми єдиності та існування у просторах $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$;
- одержати доповнення опису трансляційно інваріантних підпросторів у просторі $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$;

- встановити для функцій з простору $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, еквівалентність швидкого зростання у деякому сенсі вздовж уявної осі та швидкого спадання вздовж дійсної півосі;
- розглянути та описати властивості простору, що визначається перетином вагових просторів Гарді;
- знайти новий спосіб розщеплення функцій з $W_\sigma^1(\mathbb{C}_+)$ та встановити умови розв'язності задачі розщеплення.

Об'єктами дослідження є простори типу Гарді.
Предметом дослідження є властивості функцій з вагових просторів Гарді.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовувались методи теорії функцій комплексної змінної, методи математичного аналізу та деякі прийоми з робіт Н. В. Говорова, Г. З. Бер, Б. Я. Левіна, А. М. Седлецького, В. М. Дільного, Б. В. Винницького.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі наукові результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими і полягають у наступному:

- отримано теореми єдиності та існування у просторах $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \le p < +\infty$;
- встановлено теореми єдиності та існування у просторах $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$;
- одержано доповнення опису трансляційно інваріантних підпросторів у просторі $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$;

- встановлено для функцій з простору $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, еквівалентність швидкого зростання у деякому сенсі вздовж уявної осі та швидкого спадання вздовж дійсної осі;
- розглянуто та описано деякі властивості простору, що визначається перетином вагових просторів Гарді;
- запропоновано новий спосіб розщеплення функцій з $W^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та встановлено критерій розв'язності задачі розщеплення.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть знайти застосування як у подальших дослідженнях з теорії функцій, так і у інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані її автором самостійно. У статтях, написаних у співавторстві, співавторам належить постановка задачі та загальне керівництво.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях:

1) IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 р);
2) міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Дрогобич, 25–28 серпня 2015 р.);
3) міжнародній конференції "Complex Analysis and Related Topics" (Львів, 30 травня - 4 червня 2016 р).

Результати дисертації неодноразово доповідалися на Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники — проф. О. Б. Скасків та проф. А. А. Кондратюк), на

семінарі з теорії потенціалу та її застосувань у Львівському національному університеті імені Івана Франка (керівники — проф. О. Б. Скасків, проф. І. Е. Чижиков), семінарі з математичного аналізу у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка (керівник — проф. Б. В. Винницький), семінарі з теорії функцій ІМ НАН України (керівник — доктор фіз.–мат. наук, ст. наук. співробітник А. С. Романюк), математичному семінарі в університеті Я. А. Коменського (Братислава, Словаччина, керівник - проф. М. Фечкан) та науковому семінарі в Інституті математики Словацької академії наук в Братиславі (Братислава, Словаччина, керівник - проф. А. Двуреченський).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 8 статтях і наукових повідомленнях, з яких 5 у виданнях з Переліку фахових видань МОН України, зокрема, у виданні Известия вузов. Математика, яке відображене у міжнародних науково-метричних базах даних Scopus, Український математичний журнал - Web of Science або Scopus.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, який налічує 106 найменувань. Загальний обсяг дисертації — 132 сторінки, обсяг списку використаних джерел — 9 сторінок.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури і основних результатів

В цьому розділі наведемо огляд літератури та результатів дисертації.

1.1 Огляд літератури

1.1.1 Простори Гарді

Простори Гарді використовуються у багатьох галузях математики та прикладних наук, детальний виклад їхніх властивостей можна знайти в монографіях К. Гофмана [13], О. Дьюрена [52], П. Кусіса [24], Дж. Гарнетта [11], Дж. Машрегі [76], Н. К. Нікольського [80], [81], та ін.

Простором Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$, $0 < p < +\infty$, називається клас аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ функцій f, для яких

$$\|f\|^p_{H^p(\mathbb{C}_+)} := \sup_{x>0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mid f(x+iy) \mid^p dy \right\} < +\infty.$$

Функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ мають [13], [52], [24], [11] майже скрізь

на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $f(iy)$, $f \in L^p(\partial\mathbb{C}_+)$ і

$$\|f\|^p_{H^p(\mathbb{C}_+)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(iy)|^p \, dy.$$

Кожна функція $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ визначає (див. [54], [4]) інтегральну граничну функцію h, яка в точках неперервності з точністю до адитивної сталої визначається рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x \to 0+} \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln|f(x+iy)|dy - \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln|f(iy)|dy, \; t_1 < t_2. \tag{1.1}$$

Інтегральна гранична функція h є незростаючою і її похідна дорівнює нулеві майже скрізь на $\mathbb{R}$.

В теорії аналітичних функцій відомо ряд теорем єдиності, що мають важливе значення для дослідження властивостей функцій та функціональних просторів. У 1952 році С. Н. Мергелян в [77] отримав теорему єдиності для функцій аналітичних в $\mathbb{C}^+ = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$.

В 1954 році Р. Боасом [45, с.75] була доведена наступна теорема єдиності для цілих функцій експоненціального типу.

Теорема А1. *Якщо $f(z)$ є цілою функцією експоненціального типу і для деякого θ, $|f(re^{i\theta})| \le e^{-rw(r)}$, де $w(r) \to \infty$, $r \to +\infty$, то $f(z) \equiv 0$.*

Дж. Хванг в [67] встановив аналогічне твердження для функцій голоморфних на множині $\{z : \mathrm{Re} z > 0\} \bigcup \{0\}$. Ця теорема є певним чином аналогічною до результатів В. Гаврілова [59] і Д. Ранга [85] для функцій аналітичних в одиничному крузі. М. Євграфов в [21, с.218] встановив теорему єдиності для

функцій обмежених в півплощині, Дж. Хванг [66] формулює подібну теорему для функцій обмежених і голоморфних в $\mathbb{C}_+$.

Теорема єдиності також є відомою для просторів Гарді (див. [24, с. 163]).

Теорема А2. *Якщо* $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$ *і*

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)|^{\frac{1}{x}} = 0,$$

то $f \equiv 0$.

Простір обмежених аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$ функцій f позначають через $H^\infty(\mathbb{C}_+)$, при цьому він є банаховим відносно норми

$$\|f\| = \sup_{z\in\mathbb{C}_+} |f(z)| < +\infty.$$

Властивості простору $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ близькі до властивостей просторів Гарді. Кожна функція $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ має (див. [24, с. 142], [12, с. 23]) майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $f(iy)$ і $f \in L^\infty(\partial\mathbb{C}_+)$. Кожній функції $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ відповідає інтегральна гранична функція h, яка в точках неперервності з точністю до адитивної сталої визначається рівністю (1.1). Інтегральна гранична функція h є незростаючою і її похідна дорівнює нулеві майже скрізь на $\mathbb{R}$.

Для даного простору добре відомим є наступне твердження.

Теорема А3. *Якщо* $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ *і*

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)|^{1/x} = 0,$$

то $f \equiv 0$.

Дане твердження наведено в [73, с.40], його доведення міститься також в [24, с. 163] і в [21, с. 218]. Правда, в [24, с.

163] додатково вимагається, щоб функція f була аналітичною в замкненій півплощині $\overline{\mathbb{C}}_+$. Однак останнє припущення зайве, оскільки можна застосувати відомий принцип (він випливає безпосередньо з формули Пуассона [24, с.142]) Фрагмена-Ліндельофа: якщо $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ і $|f(iy)| \leq M$ для майже всіх $y \in \mathbb{R}$, то $|f(z)| \leq M$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$.

Результати, пов'язані з теоремою А3 розвинені в ряді робіт [73, с. 209], [98]. Розглянемо результат Б. Я. Левіна [73, с. 209] про отримання оцінки знизу для гармонійної функції.

Теорема А4 (**26.1 Теорема 2. [73]**). *Нехай $u(z)$ – гармонійна функція у верхній півплощині $\mathbb{C}^+ = \{z = x + iy = re^{i\varphi}, y > 0\}$ з неперервними граничними значеннями на дійсній осі і*

$u(z) \leq Kr^\rho$, $z \in C_+$, $r = |z| \geq 1$, $\rho > 1$,

$|u(z)| \leq K$, $|z| \leq 1$, $Imz \geq 0$. *Тоді*

$$u(re^{i\varphi}) \geq -cK\frac{1 + r^\rho}{\sin\varphi},$$

де c не залежить від K, r, φ і функції $u(z)$.

Пізніші версії і уточнення теореми А4 можна знайти в монографії М. К. Нікольського ([79], Розділ I) та в статтях [70], [71], [75].

У 2012 році Гуан-Тянь Ден та співавтори в статті [98] отримали узагальнення теореми А4 з випадку $n = 2$ на $n \geq 2$.

Теорема А5 ([98]). *Нехай $u(x)$ – гармонійна функція у верхній півплощині $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$ з неперервними граничними значеннями на $\partial\mathbb{R}^n_+$ і*

$u(x) \leq Kr^\rho$, $x \in R^n_+$, $r = |x| \geq 1$, $\rho > n - 1$,

$|u(x)| \leq K$, $|x| \leq 1$, $x_n \geq 0$. *Тоді*

$$u(x) \geq -cK\frac{1 + r^\rho}{\sin^{n-1}\varphi},$$

де c не залежить від K, r, φ і функції $u(x)$.

Також розглядаються вагові узагальнення просторів Гарді для випадку одиничного круга в [1], [90], [22]. Вагові простори Гарді у півплощині розглядалися Ж. Стрьомбергом та А. Торчинським, М. Розенблумом та Дж. Ровняком, П. Руні, Дж. Бенедетто та Х. Хейнігом, Дж. Гарсіа-Куервою, С. Кісляковим і К. Куанхуа та іншими математиками [91], [84], [83], [44], [58], [69]. Техніку вагових просторів Гард використовують [90] і до дослідження диференціальних рівнянь в частинних похідних, зокрема [92] до рівнянь Нав'є-Стокса. В. Власов та А. Рачков розглянули ваговий простір Харді з вагою, що є модулем аналітичної функції [9], [10].

Б. В. Винницький в [6] розглянув простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$, $1 \le p < +\infty$, функцій f, аналітичних в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\|f\|_{H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)} := \sup_{\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p e^{-\sigma p r |\sin\varphi|} dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Б. В. Винницький і В. Л. Шаран в [95] досліджували простір $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$, що складається з аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$\sup_{z \in \mathbb{C}_+} \left\{ |f(z)| e^{-\sigma |\mathrm{Im} z|} \right\} < +\infty.$$

Інтегральна гранична функція h функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma \le +\infty$, $1 \le p \le +\infty$, також визначається з точністю до адитивної сталої в точках неперервності [54], [4] рівністю (1.1), вона є незростаючою і її похідна дорівнює нулеві майже скрізь. Окрім цього, в [95], [6] показано, що кожна функція

$f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $f(iy)$ і $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$.

При цьому А. М. Седлецький встановив [33], що множини просторів $H^p_0(\mathbb{C}_+)$ та $H^p(\mathbb{C}_+)$ співпадають, а норми $\|f\|_{H^p_0(\mathbb{C}_+)}$ та $\|f\|_{H^p(\mathbb{C}_+)}$ є еквівалентними.

Для функцій з просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$, $1 \le p \le +\infty$, аналоги теорем єдиності відомими не були.

1.1.2 Циклічність функцій

Функція $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ називається циклічною в $H^p(\mathbb{C}_+)$, якщо система

$$\{f(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}, \tag{1.2}$$

є повною в $H^p(\mathbb{C}_+)$.

Функція f називається циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, якщо $f \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і система (1.2) є повною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Теорема А6 (Бьорлінга-Лакса [72]). *Нехай $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $G \not\equiv 0$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) *G є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$;*

2) *рівняння*

$$\int_{-\infty}^{0} f(u+\tau)g(u)dw = 0, \tau \le 0, g \in L^2(-\infty;0),$$

де

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} g(u)e^{uz}du,$$

має тільки тривіальний розв'язок в $L^2(-\infty;0)$;

3) *система $\{g(u-\tau) : \tau \le 0\}$, де $g(u) = 0, u > 0$, є повною в $L^2(-\infty;0)$;*

4) *G не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$,*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln|G(x)|}{x} = 0$$

і інтегральна гранична функція функції G є сталою;

5) *множина функцій $\{G(z)e^{\tau z}\}$, $\tau \le 0$, є повною в $H^2(\mathbb{C}_+)$.*

Б. В. Винницький отримав [7] необхідні умови циклічності в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. В. М. Дільний отримав критерій циклічності в просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та його аналог для аналітичних функцій в крузі[50]. Також В. М. Дільним було отримано [20] твердження про опис трансляційно інваріантних підпросторів.

Відомим є наступне факторизаційне твердження для просторів Гарді.

Теорема A7 ([24]). *Для кожної функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+), 1 \le p < +\infty$, правильне зображення*

$$f(z) = e^{ia_0+a_1 z} \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz+i}{(1+t^2)(t+iz)} \ln|f(it)|dt\right\} \cdot B_f(z) \cdot S_f^*(z), \tag{1.3}$$

де

$$a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_1 = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln|f(x)|}{x} \le 0, \tag{1.4}$$

B_f –добуток Бляшке для півплощини, побудований за послідовністю нулів функції f,

$$S_f^*(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz+i}{(1+t^2)\,(t+iz)}\right\} dh(t),$$

при цьому для кутових граничних значень f на $i\mathbb{R}$, її інтегральної граничної функції h та послідовності нулів (λ_n) ви-

конуються умови

$$f \in L^p(i\mathbb{R}), \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|f(it)||}{1+t^2}dt < +\infty,$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh(t)|}{1+t^2}dt < +\infty, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Re\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < +\infty. \tag{1.5}$$

Навпаки, якщо для функції $f : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *неспадної функції* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь, послідовності* $(\lambda_n), \lambda_n \in \mathbb{C}_+$, *виконуються умови (*1.4*)–(*1.5*), то функція* f, *визначена рівністю (*1.3*), належить простору до* $H^p(\mathbb{C}_+)$.

Функцію $I_{f(z)} := e^{a_1 z} B_f(z) S_f^*(z)$ називають [24, с.149] внутрішнім множником функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ у просторі $H^p(\mathbb{C}_+)$. Нехай $\widetilde{I}_f$– внутрішній множник у просторі $H^2(\mathbb{C}_+)$ функції

$$f(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-\widetilde{c}z},$$

де

$$\widetilde{c} = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left(\frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right).$$

Позначимо

$$I_f^*(z) = \widetilde{I}_f e^{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z}.$$

Позначимо через $\operatorname{span}_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ замикання лінійної оболонки системи $\{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ в нормі $\|\cdot\|_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)}$.

Теорема A8. *Якщо* $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $G(z) \ne 0$ *для кожного* $z \in \mathbb{C}_+$ *і* h_G *є сталою, то*

$$span_{H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)} \{G(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\} =$$
$$= \begin{cases} H^2(\mathbb{C}_+) I_G^*(z), G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+) \text{ для деякого } c \in \mathbb{R}, \\ H^2_\sigma(\mathbb{C}_+) \qquad \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Простори Гарді та близкі до них простори розглядаються також А. С. Романюком [30], С. Б. Вакарчуком [3], М. Ш. Шабозовом [36], В. В. Савчуком [86], [87], [88], С. О. Чайченком [89], А. Г. Баканом [41].

В. Дільний в [17] встановив для випадку $p \in [1; +\infty)$ еквівалентність швидкого спадання по додатній осі модуля функції $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та швидкого зростання її модуля на межі.

Теорема A9 ([17]). *Нехай $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, $\sigma > 0$ і $G(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, а також $h(t) \equiv const$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

$$1)\ \varliminf_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt-2\sigma\ln r\right)=-\infty;$$

2)$G_1 \notin H^p(\mathbb{C}_+)$ *для кожного* $c \in \mathbb{R}$,

де $G_1(z) = G(z)\exp\left\{\dfrac{2\sigma}{\pi}z\ln z - cz\right\}$;

$$3)\ \lim_{r\to+\infty}\left(\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt-2\sigma\ln r\right)=-\infty;$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)=+\infty;$$

$$5)\ \varlimsup_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)=+\infty.$$

Такого типу результати використовуються для дослідження циклічності функцій [50], дослідження рівнянь типу згортки та можуть бути застосованими в теорії рядів Діріхле, розвинутою у працях А. Ф. Леонтьєва, М. М. Шеремети, О. Б. Скасківа [26], [35], [34], [37]. Подібного роду результати отримані Ю. І. Любарським [27].

Нехай Λ – клас аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій $f \not\equiv 0$, що мають нулі в точках λ_n.

Теорема A10 ([6]). *Для того, щоб існувала функція $f \in \Lambda \cap H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < \infty$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови*

$$\sum_{|\lambda_n|} Re \quad \lambda_n < \infty$$

і

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \left(S(r) - \frac{\sigma}{\pi} \ln r \right) < \infty,$$

де

$$S(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \cos\varphi_n, \quad \varphi_n = \arg\lambda_n, \quad |\varphi_n| < \frac{\pi}{2}.$$

Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ – довільна послідовність точок з півплощини $\mathbb{C}_+$). Тоді аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція F належить до класу Λ_+, якщо $F \not\equiv 0$, і в кожній точці λ_n вона має нуль (нуль кратності $k \ge m$, якщо m членів послідовності λ дорівнює λ_n).

Б. В. Винницький описав [5] нулі класу функцій $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ у термінах функції S.

Теорема A11 ([5]). *Для того, щоб існувала аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція $F \in \Lambda_+$, яка для заданих $\sigma \ge 0$ і $p > 0$ належить до $H^p_\sigma \mathbb{C}_+$, необхідно і досить, щоб виконувалася умова*

$$\sum_{|\lambda_n|\le 1} Re \quad \lambda_n + \overline{\lim_{r\to\infty}} \left(S(r) - \frac{\sigma}{\pi} \ln r \right) < \infty.$$

Федоров С. І., Джонс П. В. та інші математики вивчали [55], [68] простори, що визначаються як перетин просторів Гарді чи споріднених просторів. Але простір

$$H^p_\cap(\mathbb{C}_+) = \bigcap_{\sigma>0} H^p_\sigma(\mathbb{C}_+).$$

досі не досліджувався.

1.1.3 Простори Пелі-Вінера

Нехай W_σ^p, $\sigma > 0$, $p \geq 1$,– простір Пелі-Вінера, тобто, простір цілих функцій f експоненціального типу, що не перевищує σ і які належать до $L^p(\mathbb{R})$. Цей простір можна також визначити [25, с. 663] як простір цілих функцій f, які задовольняють умову

$$\sup_{\varphi\in(0;2\pi)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

К. Еофф [53] показала, що простір W_σ^1 є ізоморфним до дискретного простору Гарді. В теорії просторів Пелі-Вінера фундаментальними є наступні теореми [39].

Теорема А12 (П. -В). *Функція $f_0 \in L^p(\partial\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p \leq 2$, є кутовою граничною функцією деякої функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли її обернене перетворення Фур'є дорівнює нулеві майже скрізь на від'ємній дійсній півосі, тобто*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(it)e^{i\tau t}dt = 0, \quad \tau \leq 0.$$

Теорема П. -В. *Простір W_σ^2 співпадає з простором функцій f, що допускають зображення*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(it)e^{itz}dt, \varphi \in L^2(-i\sigma; i\sigma). \tag{1.6}$$

Аналогічні твердження також відомі для випадків $1 < p < 2$. Для випадку $p = 1$ аналог останньої теореми довів Г. З. Бер [2]. В іншій формі критерій належності до W_σ^1 був отриманий Р. Боасом [45, с. 106] та ін.

Теорема Б. [2]. *Простір W_σ^1 співпадає з простором функцій f, які подаються у вигляді* (1.6), *де*

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{-ik\pi t}{\sigma}}, \qquad (c_k) \in l^1 \tag{1.7}$$

і

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+m} c_{k+m} \frac{k}{1+k^2} \right| < +\infty.$$

Для простору $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$ Б. Винницький [5] встановив наступний аналог теореми Пелі-Вінера.

Теорема А13. *Для того, щоб функція $f_0 : \partial\mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ така, що $f_0(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, була кутовою граничною функцією деякої функції $f \in H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$, необхідно і досить, щоб знайшлась така функція f_2 , що*

а)$f_2 \in H_{2\sigma}^p(\mathbb{C}_+)$;

б)$f_3(iy) := f_1(iy) + f_2(iy) \in L^p(-\infty; 0)$, $f_1(iy) := f_0(iy)e^{-\sigma|y|}$;

в) для майже всіх $\tau < 0$

$$\int_0^{+\infty} f_1(i\upsilon)e^{i\tau\upsilon}d\upsilon + \int_0^{+\infty} f_2(u)e^{\tau u}du + \int_{-\infty}^{0} f_3(i\upsilon)e^{i\tau\upsilon}d\upsilon = 0.$$

Також вказано на необхідність умов а)-в) у випадку $p = 1$, що має ключове значення для опису трансляційно інваріантних підпросторів, але питання про достатні умови у цьому випадку залишалося відкритим. В. М. Дільний в [51] довів, що ця

теорема є правельною і для випадку $p = 1$, якщо виконується наступне твердження.

Твердження 1.1. *Для кожної функції $f \in W^1_\sigma$ можливе зображення $f = \chi + \mu$, де функції χ і μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+$, $\chi \in E^1\left[\mathbb{C}\left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right]$, $\mu \in E^1\left[\mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)\right]$.*

Нехай $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $1 \le p < +\infty$, – простір аналітичних функцій f в $\mathbb{C}(\alpha;\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ таких, що

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

В [51] розглянуто частковий випадок твердження 1.1, а саме додатково вимагається, щоб функції χ та μ були цілими. Питання про необхідні та достатні умови є важливими для дослідження рівнянь типу згортки та повноти деяких систем функцій. Дане питання залишається відкритим.

Проте відомі способи зображення у твердженні 1.1 можуть бути застосованими до досить вузьких підкласів класу W^1_σ. Питання про загальний спосіб залишається відкритим.

Зазначимо, що схожі проблеми розщеплення функції з деякого функціонального простору у вигляді суми або добутку двох функцій з "простіших" класів досліджувалися багатьма вченими. Р. С. Юлмухаметов в [39], [38] розглянув задачу про розщеплення кожної функції з деякого підпростору простору Пелі-Вінера на добуток двох функцій. Ю. І. Любарський вивчав [28] розщеплення функцій з трикутною індикаторною діаграмою на суму двох. І. Е. Чижиков розглядав [47] схожі задачі в термінах субгармонійних функцій.

1.2 Основний зміст дисертації

Розділ 2 присвячено отриманню теорем єдиності для вагових просторів.

Розглянемо отриманий результат для функцій з вагового простору Гарді $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$, і $1 \le p < +\infty$, який доведено у першому підрозділі розділу 2.

Теорема 2.1. *Нехай* $0 \le \sigma < +\infty$, $1 \le p < +\infty$, *функція* f *належить до простору* $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і* $f(z) \ne 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$. *Тоді*

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}} \right) > 0. \tag{1.8}$$

Сформульована теорема 2.1 показує, що коли функція $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$, то в певному кількісному значенні вона не може дуже швидко спадати на дійсній додатній півосі при $x \to \infty$. З теореми 2.1 та результатів статті [49] випливає, що за умов теореми 2.1 виконується

$$(\forall y \in \mathbb{R}) \qquad \varliminf_{x\to+\infty} \left(|f(x+iy)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}} \right) > 0.$$

Подібне виконується і для інших теорем цього розділу.

Зауважимо, що умова (1.8) еквівалентна до наступної умови

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right) > -\infty.$$

З теореми 2.1 випливає наступне твердження для функцій з класичного простору Гарді, які не мають жодного нуля в правій півплощині, яке теж є новим.

Наслідок 2.1. *Нехай* $1 \le p < +\infty$, *функція* $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ *і* $f(z) \ne 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$. *Тоді*

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f(x)|^{1/x} > 0.$$

Наступна теорема доповнює твердження теореми 2.1.

Теорема 2.2. *Якщо* $0 \le \sigma < +\infty$, $1 \le p < +\infty$, $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}} \right) = 0, \tag{1.9}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Дане твердження для вагового простору Гарді є аналогом теореми єдиності для класичних просторів Гарді.

Зауважимо, що аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція

$$f(z) = (1+z)^{-2/p} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z \right),$$

де $\ln z$ – вітка логарифма в $\mathbb{C}_+$, для якої $\ln 1 = 0$, вказує на точність умов теорем 2.1 та 2.2 в тому сенсі, що замінити сталу σ на меншу в рівностях (1.8) і (1.9) не можна.

У другому підрозділі **розділу 2** доведено аналог для простору $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ теореми єдиності для функцій з простору обмежених аналітичних у півплощині, яка встановлена незалежно Б. Левінbм, М. Євграфовим.

Ми отримали теорему єдиності для функцій, аналітичних та обмежених в правій півплощині з вагою $e^{-\sigma|z|}$. Результати формулюються в термінах поведінки функцій на дійсній півосі.

Теорема 2.3. *Нехай* $0 \le \sigma < +\infty$ *і* $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$. *Якщо*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}} \right) = 0, \tag{1.10}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Наступна теорема доповнює твердження даної теореми для випадку, коли функція не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$.

Теорема 2.4. *Нехай* $0 \le \sigma < +\infty$, *функція* f *належить до*

простору $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і* $f(z) \neq 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$. *Тоді*

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}} \right) > 0. \tag{1.11}$$

Також ми отримали таке доповнення до теореми А3.

Наслідок 2.2. *Якщо* $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ *і* $f(z) \neq 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$, *тоді*

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f(x)|^{1/x} > 0.$$

Функція

$$f(z) = \exp\left\{ -\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z \right\}$$

де $\ln z$ – вітка логарифма в $\mathbb{C}_+$, для якої $\ln 1 = 0$, належить до $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і вказує на точність теорем 2.3 і 2.4 в тому сенсі, що замінити сталу σ на меншу в рівностях (1.10) і (1.11) не можна.

Отримані у розділі 2 результати є важливими для дослідження рівнянь типу згортки, дослідження циклічності та інших властивостей аналітичних функцій.

У третьому розділі отримано доповнення опису до трансляційно інваріантрих підпросторів, одержаного в [20] В. М. Дільним .

Позначимо через $\operatorname{span}_H \{f_\tau\}$ замикання лінійної оболонки системи $\{f_\tau\}$ в банаховому просторі H.

Нехай $\widetilde{I}_f$– внутрішній множник у просторі $H^p(\mathbb{C}_+)$ функції

$$f(z) e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-\widetilde{c} z},$$

де $\ln z$ – вітка логарифма в $\mathbb{C}_+$, для якої $\ln 1 = 0$,

$$\widetilde{c} = \varlimsup_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln |f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right).$$

Позначимо

$$I_f^*(z) = \widetilde{I}_f e^{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z}.$$

Ми одержали наступне твердження.

Теорема 3.1. *Якщо функція $f \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $f(z) \neq 0$ для кожного $z \in \mathbb{C}_+$ і інтегральна гранична функція h функції f є сталою, то*

$$span\,\{f(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\} =$$

$$= \begin{cases} H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \quad \text{якщо} \quad \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\, \psi(x) = +\infty \\ H^2(\mathbb{C}_+) I_f^*(z), \quad \text{якщо} \quad \psi(x) = O(1), \quad x \to +\infty, \\ \boldsymbol{0}, \quad \text{якщо} \quad \underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\, \psi(x) = -\infty, \end{cases}$$

де

$$\psi(x) = \frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x,$$

а $\boldsymbol{0}$ – простір, що складається з єдиної функції-тотожного нуля.

Теорема 3.2. *Якщо функція $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p < +\infty$ і для послідовності нулів (λ_n) функції f виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Re\lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} < +\infty, \tag{1.12}$$

то

$$span\,\{f(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\} =$$

$$= \begin{cases} H^p(\mathbb{C}_+) I_f^*(z), \quad \text{якщо} \quad \psi(x) = O(1), \quad x \to +\infty, \quad x \in E, \\ \boldsymbol{0}, \quad \text{якщо} \quad \underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}^{*} \psi(x) = -\infty, \end{cases}$$

де E - множина скінченної логарифмічної міри, а $\underline{\lim}^*$ означає нижню границю, яка розглядається поза множиною E, $\boldsymbol{0}$ – простір, що складається з єдиної функції-тотожного нуля.

В другому підрозділі розділу 3 для простору $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ встановлено еквівалентність швидкого спадання по додатній осі модуля функції $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ до швидкого зростання її модуля на межі.

Теорема 3.3. *Нехай $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$ і $f(z) \ne 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, $h(t) = const$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

а) $\varliminf\limits_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|f(it)|dt - 2\sigma \ln r \right) > -\infty;$

б) $\varlimsup\limits_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|f(it)|dt - 2\sigma \ln r \right) > -\infty;$

в) $\varliminf\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right) < +\infty;$

г) $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right) < +\infty;$

д) $(\exists c \in \mathbb{R}) : f(z) \exp\left\{ \frac{2\sigma}{\pi} z \ln z - cz \right\} \in H^\infty(\mathbb{C}_+).$

Такого типу результати використовуються для дослідження циклічності функцій. Аналогічний результат для випадку $p < \infty$ одержав В. М. Дільний.

Останній підрозділ **розділу 3** присвячений опису властивостей простору

$$H^p_\cap(\mathbb{C}_+) = \bigcap_{\sigma>0} H^p_\sigma(\mathbb{C}_+).$$

Зауважимо, що $H^p_\cap(\mathbb{C}_+) \supset H^p(\mathbb{C}_+)$ і $H^p_\cap(\mathbb{C}_+) \subset H^p_\varepsilon(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\varepsilon > 0$.

Теорема 3.4. $H^p_\cap(\mathbb{C}_+) \ne H^p(\mathbb{C}_+)$.

Прикладом функції, яка належить до простору $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, але не належить до простору $H^p(\mathbb{C}_+)$ є

$$f(z) = e^{-z\sqrt{\ln(z+2)}},$$

де вітки логарифма та корені вибрані стандартним способом. Нехай B– клас неперервних зростаючих функцій $\eta : [0; +\infty) \to (0; +\infty)$ таких, що $\eta(r) = o(r)$ при $r \to +\infty$. Позначимо через $H^p_\ominus(\mathbb{C}_+)$ простір аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких існує $\eta \in B$, що

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-\eta(r)|\sin\varphi|} dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Теорема 3.5. *Якщо $f \in H^p_\ominus(\mathbb{C}_+)$, то $f \in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$.*

Б. В. Винницький описав нулі класу функцій $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ у термінах функції

$$S(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}.$$

Нам вдалося встановити наступні твердження про опис нулів та інтегральних граничних функцій.

Теорема 3.6. *Якщо $f \in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, то $S(r) = o(\ln r)$, $r \to +\infty$.*

Теорема 3.7. *Якщо $f \in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, то $P(r) = o(\ln r)$, $r \to +\infty$, де*

$$P(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) |dh(t)|.$$

Теорема 3.8. *Нехай λ_n –довільна послідовність із $\mathbb{C}_+$. Асимтотична рівність $S(r) = o(\ln r)$, $r \to +\infty$, виконується тоді і*

тільки тоді, коли $S_0(r) = o(\ln r)$, *де*

$$S_0(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\le r} \frac{Re\lambda_n}{|\lambda_n|^2}.$$

У **розділі 4** розглянуто проблему зображення функцій в просторах Пелі-Вінера W_σ^p у вигляді суми двох функцій, кожна з яких є "великою" лише у першій або четвертій чверті координатної площини.

Спочатку введемо ряд означень і допоміжних тверджень.

Нехай $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $1 \le p < +\infty$, простір аналітичних функцій f в $\mathbb{C}(\alpha;\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ таких, що

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Функції f з простору $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$ мають майже скрізь на $\partial\mathbb{C}\,(\alpha;\beta)$ кутові граничні значення, які теж позначаються через f, і $f \in L^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$.

В даному розділі ми розглядаємо наступну проблему.

Проблема. *Чи для кожної функції* $f \in W_\sigma^1$ *можливе зображення* $f = \chi + \mu$, *де функції* χ *і* μ *є аналітичними в* $\mathbb{C}_+$, *а також* $\chi \in E^1\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$, $\mu \in E^1\left[\mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\right]$*?*

Дана задача зумовлена питаннями повноти систем функцій. Вона також становить безпосередній інтерес в теорії інтегральних операторів, дослідженнях оператора зсуву. В. М. Дільним знайдено необхідні і достатні умови її розв'язності, які не співпадають між собою, а також встановлено, нерозв'язність задачі за строгіших умов на функції χ і μ. Ми пропонуємо новий, відмінний від розглядуваних раніше, спосіб розв'язування цієї

Проблеми.

Функцію χ шукатимемо у вигляді

$$\chi(z) = \chi_1(z) + i\chi_2(-iz), \tag{1.13}$$

де

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\sigma} \varphi(t) e^{itz} dt, \quad \chi_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{0} \varphi(t) e^{itz} dt.$$

Оскільки $\mu = f - \chi$, то надалі під розв'язком проблеми розумітимемо знаходження функції χ.

Ми отримали наступне твердження.

Теорема 4.1. *Нехай функція $f \in W_\sigma^1$. Функція χ, визначена рівністю* (1.13), *є розв'язком Проблеми, тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(m - \frac{i}{2} - k\right)\left(m - \frac{i}{2} - ik\right)} \right| < +\infty, \tag{1.14}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(m + \frac{i}{2} + ik\right)\left(m + \frac{i}{2} - k\right)} \right| < +\infty. \tag{1.15}$$

де коефіцієнти c_k визначаються рівністю (1.7).

В [51] показано, що якщо у зображення (1.7) функції $f \in W_\sigma^1$ є скінченна кількість ненульових коефіцієнтів c_k, то Проблема для неї розв'язується позитивно. Зазначимо, що в останньому випадку виконуються умови (1.14) та (1.15), тобто, спосіб отримання розв'язку проблеми, запропонований у даній дисертації, є загальнішим, ніж запропоновано в [51].

РОЗДІЛ 2

ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ У ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

2.1 Теорема єдиності для вагового простору Гарді

Даний розділ почнемо з підрозділу, у якому доведемо теореми єдиності для вагового простору Гарді.

Нехай $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$, $1 \le p < +\infty$, – простір функцій f аналітичних в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\|f\|^p_{H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)} := \sup_{\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right|^p e^{-\sigma pr|\sin\varphi|} dr \right\} < +\infty.$$

Інтегральна гранична функція h функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ існує [54],[4] і з точністю до адитивної сталої в точках неперервності визначається рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x\to 0+} \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln|f(x+iy)|dy - \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln|f(iy)|dy,\ t_1 < t_2.$$

Вона є незростаючою і її похідна дорівнює нулеві майже скрізь на $\mathbb{R}$. Окрім цього, кожна функція $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $f(iy)$ і $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$.

Нехай $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$, $0<\beta-\alpha<2\pi$, $1\le p<+\infty$, простір аналітичних функцій f в $\mathbb{C}(\alpha;\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$ таких, що

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p dr\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

Функції f з простору $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$ [16] мають майже скрізь на $\partial\mathbb{C}\,(\alpha;\beta)$ кутові граничні значення, які теж позначаються через f і $f\in L^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$.

Функція f належить до простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли функції $f^+(z)=f(z)e^{i\sigma z}$, $f^-(z)=f(z)e^{-i\sigma z}$ є аналітичними в $\mathbb{C}_+$ і $f^+(z)$ належить до простору $E^p\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$, а $f^-(z)$ належить до простору $E^p\left[\mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\right]$.

А. М. Седлецький довів [33], що $H^p_0(\mathbb{C}_+)=H^p(\mathbb{C}_+)$, норми $\|f\|_{H^p_0(\mathbb{C}_+)}$ та $\|f\|_{H^p(\mathbb{C}_+)}$ є еквівалентними.

Введемо деякі позначення. Через c_j позначимо додатні сталі. Нехай $z=x+iy=re^{i\varphi}$,

$$Q(t;z)=\frac{(tz+i)^2}{(1+t^2)^2(t+iz)}$$

і

$$K_0(r):=\sum_{1<|\lambda_k|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}-\frac{1}{r^2}\right)\mathrm{Re}\lambda_k-\frac{1}{\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)dh(t)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log|f(it)|\,dt.$$

Наступна теорема показує, що функція f з простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, яка не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$ в певному кількісному значенні не може дуже швидко спадати на дійсній додатній півосі при x, прямуючому до нескінченості.

Теорема 2.1. *Нехай* $0 \le \sigma < +\infty$, $1 \le p < +\infty$, *функція* f *належить до простору* $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і* $f(z) \ne 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$. *Тоді*

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}} \right) > 0. \tag{2.1}$$

Для доведення теореми 2.1 нам знадобиться наступне факторизаційне твердження, яке випливає з результатів Говорова Н. В. [12] та формули Карлемана [6]. В потрібній формі вона наведена в [95], [4].

Лема 2.1. *Якщо* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і* $f \not\equiv 0$, *то*

$$\begin{gathered} f(z) = e^{ia_0+a_1 z} \exp\left\{ \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t;z) \ln|G(it)| dt \right\} \times \\ \times \exp\left\{ \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t;z) dh(t) \right\} \prod_{|\lambda_n|\le 1} \frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda_n}} \prod_{|\lambda_n|>1} W_n(z), \end{gathered} \tag{2.2}$$

де $a_0 \in \mathbb{R}$ *і* $a_1 \in \mathbb{R}$– *сталі,* λ_n–*нулі функції* f *і*

$$W_n(z) = \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\overline{\lambda_n}} \exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\overline{\lambda_n}} \right).$$

При цьому, добутки і інтеграли в (2.2) збігаються рівномірно і абсолютно на кожному компакті з $\mathbb{C}_+$, $\ln|f(it)| \in L^p(\mathbb{R})$ *і*

$$\begin{gathered} \varlimsup_{x\to+\infty} \sum_{1<|\lambda_k|\le r} \left(\frac{1}{|\lambda_k|^2} - \frac{1}{r^2} \right) Re\lambda_k - \frac{1}{\pi} \int\limits_{1\le|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) dh(t) \\ -\frac{1}{\pi} \int\limits_{1\le|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \log|f(it)|\, dt < +\infty. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Доведемо допоміжне твердження.

Лема 2.2.

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|\,Q(t;z)dt=\frac{z}{\pi}-\frac{2z}{\pi}\ln z,\quad z\in\mathbb{C}_+. \tag{2.4}$$

Доведення. Оскільки

$$Q(t;z)=-\frac{1}{(t+iz)}+\frac{t}{(1+t^2)}+\frac{t}{(1+t^2)^2}-\frac{it^2z}{(1+t^2)^2},$$

то

$$Q(t;z)+Q(-t;z)=-\frac{1}{(t+iz)}+\frac{t}{(1+t^2)}+\frac{t}{(1+t^2)^2}-$$

$$-\frac{it^2z}{(1+t^2)^2}-\frac{1}{(-t+iz)}-\frac{t}{(1+t^2)}-\frac{t}{(1+t^2)^2}-\frac{it^2z}{(1+t^2)^2}=$$

$$=-\frac{1}{(t+iz)}+\frac{1}{(t-iz)}-\frac{2it^2z}{(1+t^2)^2}.$$

Перетворимо третій доданок

$$Q(t;z)+Q(-t;z)=\frac{1}{(t-iz)}-\frac{1}{(t+iz)}-i2z\frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{(t-iz)}-\frac{1}{(t+iz)}-\frac{2iz}{(1+t^2)}+\frac{2iz}{(1+t^2)^2}=$$

$$=\frac{2iz}{(t-iz)(t+iz)}-\frac{2iz}{(1+t^2)}+\frac{2iz}{(1+t^2)^2}=$$

$$=2iz\left(\frac{1}{(t-iz)(t+iz)}-\frac{1}{(1+t^2)}\right)+\frac{2iz}{(1+t^2)^2}=$$

$$=2iz\left(\frac{(1+t^2)-t^2-z^2}{(t-iz)(t+iz)(1+t^2)}\right)+\frac{2iz}{(1+t^2)^2}=$$

$$=2iz(1-z^2)\frac{1}{(t-iz)(t+iz)(t-i)(t+i))}+\frac{2iz}{(1+t^2)^2}.$$

Легко бачити, що

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|\,Q(t;z)dt=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{0}|t|\,Q(t;z)dt+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}tQ(t;z)dt.$$

В першому інтегралі справа зробимо заміну $t=-t$. Тоді,

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|\,Q(t;z)dt=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}tQ(-t;z)dt+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}tQ(t;z)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}t\left(Q(t;z)+Q(-t;z)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}t\left(2iz(1-z^2)\frac{1}{(t-iz)(t+iz)(t-i)(t+i)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2iz}{(1+t^2)^2}\right)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{2tz}{(1+t^2)^2}dt+$$

$$+\frac{2z(1-z^2)}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t}{(t-iz)(t+iz)(t-i)(t+i)}dt.$$

Порахуємо інтеграл

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{2tz}{(1+t^2)^2}dt=\frac{z}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^2}=-\frac{z}{\pi}\frac{1}{(1+t^2)}\Bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{z}{\pi}.$$

Обчислимо інтеграл

$$\frac{2z(1-z^2)}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t}{(t-iz)(t+iz)(t-i)(t+i)}dt,$$

для цього скористаємось формулою з [8, с. 84]. Нехай раціональна функція $\psi(x)$ має полюси $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, ні один з яких не лежить на дійсній додатній півосі і не дорівнює нулеві, p – таке ціле число, що

$$\lim_{z\to 0} z^{p+1} f(z) = \lim_{z\to\infty} z^{p+1} f(z) = 0,$$

тоді

$$\int\limits_0^{+\infty} x^p \psi(x) dx = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(z^p \psi(z) \ln_0 z\right)\big|_{z=\alpha_k},$$

де α_k – полюси функції ψ, і

$$\ln_0 z = \ln|z| + i \arg z, \quad 0 \le z < 2\pi.$$

Звідси, поклавши

$$\psi(t) = \frac{1}{(t-iz)(t+iz)(t-i)(t+i)},$$

Отримаємо

$$\frac{2z(1-z^2)}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t}{(t-iz)(t+iz)(t-i)(t+i)} dt = -\frac{2z(1-z^2)}{\pi} \times$$

$$\times \left(\underset{t=i}{res} \left(\frac{t \ln t}{(t-i)(t+i)(t-iz)(t+iz)} \right) \right.$$

$$+ \underset{t=-i}{res} \left(\frac{t \ln t}{(t-i)(t+i)(t-iz)(t+iz)} \right)$$

$$+ \underset{t=iz}{res} \left(\frac{t \ln t}{(t-i)(t+i)(t-iz)(t+iz)} \right)$$

$$\left. + \underset{t=-iz}{res} \left(\frac{t \ln t}{(t-i)(t+i)(t-iz)(t+iz)} \right) \right).$$

Обчислимо лишки в точках i і $-i$:

$$\underset{t=i}{res}\left(\frac{t\ln t}{(t-i)(t+i)(t-iz)(t+iz)}\right)=$$

$$=\lim_{t\to i}\frac{(t-i)t\ln t}{(t-i)(t+i)(t-iz)(t+iz)}=$$

$$=\frac{i\ln i}{2i(i+iz)(i-iz)}=\frac{\ln i}{2(i+iz)(i-iz)}=\frac{\ln i}{-2(1+z)(1-z)}=$$

$$=\frac{\ln i}{-2(1-z^2)}=-\frac{\pi i}{4(1-z^2)}$$

і

$$\underset{t=-i}{res}\left(\frac{t\ln t}{(t-i)(t+i)(t-iz)(t+iz)}\right)=$$

$$=\lim_{t\to -i}\frac{(t+i)t\ln t}{(t-i)(t+i)(t-iz)(t+iz)}=$$

$$=\frac{-i\ln(-i)}{-2i(-i+iz)(-i-iz)}=\frac{\ln(-i)}{2(-i+iz)(-i-iz)}$$

$$=-\frac{\ln(-i)}{2(1+z)(1-z)}=-\frac{\ln(-i)}{2(1-z^2)}=-\frac{3\pi i}{4(1-z^2)}.$$

Обчислимо лишки також в точках iz і $-iz$:

$$\underset{t=iz}{res}\left(\frac{t\ln t}{(t-i)(t+i)(t-iz)(t+iz)}\right)=$$

$$=\lim_{t\to iz}\frac{(t-iz)t\ln t}{(t-i)(t+i)(t-iz)(t+iz)}=$$

$$=\frac{iz\ln(iz)}{2iz(iz-i)(iz+i)}=\frac{\ln(iz)}{2(i+iz)(i-iz)}=\frac{\ln(iz)}{2(1+z)(1-z)}=$$

$$=\frac{\ln(iz)}{2(1-z^2)}=\frac{\ln r+i(\frac{\pi}{2}+\varphi)}{2(1-z^2)}$$

і

$$\underset{t=-iz}{res}\left(\frac{t\ln t}{(t-i)(t+i)(t-iz)(t+iz)}\right)=$$

$$= \lim_{t\to -iz} \frac{(t+iz)t\ln t}{(t-i)(t+i)(t-iz)(t+iz)} = \frac{-iz\ln(-iz)}{-2iz(-iz-i)(-iz+i)} =$$

$$= \frac{\ln(-iz)}{2(i+iz)(i-iz)} =$$

$$= \frac{\ln(-iz)}{2(1+z)(1-z)} = \frac{\ln(-iz)}{2(1-z^2)} = \frac{\ln r + i(\frac{3\pi}{2}+\varphi)}{2(1-z^2)}.$$

Тоді

$$\frac{2z(1-z^2)}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t}{(t-iz)(t+iz)(t-i)(t+i)} dt =$$

$$= -\frac{2z(1-z^2)}{\pi} \left(-\frac{\pi i}{4(1-z^2)} - \frac{3\pi i}{4(1-z^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\ln r + i(\frac{\pi}{2}+\varphi)}{2(1-z^2)} + \frac{\ln r + i(\frac{3\pi}{2}+\varphi)}{2(1-z^2)} \right) =$$

$$= -\frac{z}{\pi i} \left(-\frac{\pi}{2} i - \frac{3\pi}{2} i + 2\ln r + i(\frac{\pi}{2}+\varphi) + +i(\frac{3\pi}{2}+\varphi) \right) =$$

$$= -\frac{z}{\pi} (2\ln r + 2i\varphi) = -\frac{2z}{\pi} \ln z.$$

Отже,

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|\, Q(t;z) dt = \frac{z}{\pi} - \frac{2z}{\pi} \ln z.$$

□

Доведення теореми 2.1. Прологарифмуємо умову (2.1), тоді

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(\ln |f(x)|^{\frac{1}{x}} + \ln x^{\frac{2\sigma}{\pi}} \right) > -\infty.$$

Тому,

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln |f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right) > -\infty. \tag{2.5}$$

Аналогічно можна переконатись, що з (2.5) випливає (2.1). Отже, умови (2.1) і (2.5) є еквівалентними. Переконаємось, що при виконанні умов теореми виконується умова (2.5). Нехай $z = x > 0$, тоді уявна частина правої частини формули (2.4) дорівнює нулеві. Тому, і уявна частина лівої частини рівності (2.4) дорівнює нулеві. Тобто

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|\mathrm{Im}\left\{\frac{Q(t;x)}{i}\right\}=0.$$

Звідси, за лемою 2.2

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|\mathrm{Re}\left\{\frac{Q(t;x)}{i}\right\}dt=\frac{x}{\pi}-\frac{2x}{\pi}\ln x,\quad x>0. \tag{2.6}$$

З леми 2.1 випливає, що

$$|f(x)|=e^{a_1x}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{Q(t,x)}{i}\right\}\ln|f(it)|dt\right)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{Q(t,x)}{i}\right\}dh(t)\right).$$

Перемноживши отриману рівність і пропотенційовану рівність (2.6), одержимо

$$|f(x)|e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x-\frac{\sigma}{\pi}x}=e^{a_1x}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{Q(t,x)}{i}\right\}\ln|f(it)|dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{Q(t,x)}{i}\right\}dh(t)\right)\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{Q(t,x)}{i}\right\}\sigma|t|dt\right).$$

Звідси отримаємо

$$\ln|f(x)|e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x-\frac{\sigma}{\pi}x}=a_1x+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{Q(t,x)}{i}\right\}\ln|f(it)e^{-\sigma|t|}|dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\left\{\frac{Q(t,x)}{i}\right\}dh(t).$$

Оскільки

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{Q(t;x)}{i}\right\}=\frac{2t^2x+x-t^2x^3}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)},$$

то

$$\ln|f(x)|e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x-\frac{\sigma}{\pi}x}=$$

$$=a_1x+x\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2+1+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln|f(it)e^{-\sigma|t|}|dt+$$

$$+x\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2+1+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}dh(t).$$

Отже,

$$\frac{\ln|f(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x-\frac{\sigma}{\pi}=a_1+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2+1+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln|f(it)e^{-\sigma|t|}|dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2+1+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}dh(t).$$

Врахувавши, що

$$\ln t=\ln^+t-\ln^+\frac{1}{t},$$

одержимо

$$\frac{\ln|f(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x-\frac{\sigma}{\pi}=a_1-\Xi_1(x)-\Xi_2(x)+\Xi_3(x)+\Xi_4(x),$$

де

$$\Xi_1(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2} \ln e^{-\sigma|t|}|f(it)|dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2} dh(t),$$

$$\Xi_2(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2} \sigma|t|dt,$$

$$\Xi_3(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2} \ln^+|f(it)|dt,$$

$$\Xi_4(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2} \ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right) dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2} dh(t).$$

Оцінимо Ξ_1. Функція h незростаюча, тому другий інтеграл є додатним. Покажемо, що

$$\frac{t^2x^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \leq 1$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $t \in \mathbb{R}$. Справді, якщо $t \in (0;1)$, то

$$\frac{t^2x^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \leq \frac{t^2x^2}{t^2+x^2} \leq 1.$$

Якщо $t \in [1;+\infty)$, то

$$\frac{t^2x^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \leq \frac{t^2x^2}{t^4(t^2+x^2)} = \frac{x^2}{t^2(t^2+x^2)} \leq \frac{1}{t^2} \leq 1.$$

Тоді,

$$\Xi_1(x) \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\ln\left(e^{-\sigma|t|}|f(it)|\right)dt \le$$

$$\le \frac{1}{p\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(e^{-p\sigma|t|}|f(it)|^p\right)dt \le$$

$$\le \frac{1}{p\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma p|t|}\,|f(it)|^p\,dt \le c_1, \quad x\in(0;+\infty).$$

Окрім цього, $\Xi_3(x)\ge 0$, якщо $x\in(0;+\infty)$ і

$$\Xi_2(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\sigma|t|dt \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(t^2+1)(1+t^2)^2}\sigma|t|dt \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2+1}{(t^2+1)(1+t^2)^2}\sigma|t|dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\sigma|t|dt = c_2 < +\infty,$$

якщо $x\in(1;+\infty)$. Далі,

$$\Xi_4(x) \ge c_3 - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge 1} \frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge 1} \frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}dh(t) \ge$$

$$\ge c_3 - \frac{2}{\pi}\int\limits_{|t|\ge 1} \frac{1}{(1+t^2)^2}\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_{|t|\ge 1} \frac{1}{(1+t^2)^2}dh(t) \ge$$

$$\geq c_4 - \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{t^4} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt + \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{t^4} dh(t),$$

якщо $x \in (1; +\infty)$.

До того ж, згідно з умовою (2.3) леми 2.1

$$\int\limits_{1\leq|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) dh(t) + \int\limits_{1\leq|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |f(it)| \, dt > -c_5$$

Тоді,

$$\int\limits_{1\leq|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt - \int\limits_{1\leq|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) dh(t) <$$

$$< c_5 + \int\limits_{1\leq|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ |f(it)| \, dt.$$

Тому,

$$\int\limits_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt - \int\limits_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) dh(t) \leq$$

$$\leq c_6 + \int\limits_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ |f(it)| \, dt.$$

Розглянемо останній інтергал. Враховуючи, що $f(it)e^{-\sigma|t|} \in L^p[1; +\infty)$, отримаємо

$$\int\limits_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ |f(it)| \, dt =$$

$$= \int\limits_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\ln^+ |f(it)| \, e^{-\sigma|t|} \right) dt + \int\limits_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \sigma \, |t| \, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\int\limits_1^r \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln^+\left(|f(it)|\,e^{-\sigma|t|}\right)^p dt + c_7 + \sigma\ln r \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\int\limits_1^r \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|f(it)|^p\,e^{-p\sigma|t|}dt + c_7 + \sigma\ln r \leq$$

$$\leq \frac{1}{p}\int\limits_1^r |f(it)|^p\,e^{-p\sigma|t|}dt + c_7 + \sigma\ln r \leq c_8 + \sigma\ln r, \quad r\in(1;+\infty).$$

Використаємо нерівність

$$\frac{1}{t^2} \leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4r^2}\right),$$

якщо $|t|\leq|r|$. Тому,

$$\int\limits_1^r \frac{1}{t^2}\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt - \int\limits_1^r \frac{1}{t^2}dh(t) \leq$$

$$\leq \int\limits_1^r \frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right)\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt - \int\limits_1^r \frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right)dh(t) \leq$$

$$\leq \int\limits_1^{2r} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right)\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt - \int\limits_1^{2r} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right)dh(t) \leq$$

$$\leq c_9 + \sigma\ln r, \quad r\in[1;+\infty).$$

Звідси,

$$\int\limits_1^r \frac{1}{t^2}\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt - \int\limits_1^r \frac{1}{t^2}dh(t) \leq c_9 + \sigma\ln r, \quad r\in[1;+\infty). \tag{2.7}$$

Аналогічно,

$$\int\limits_{-r}^{-1} \frac{1}{t^2} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt - \int\limits_{-r}^{-1} \frac{1}{t^2} dh(t) \leq c_{10} + \sigma \ln r, \quad r \in [1; +\infty).$$

Отже,

$$\int\limits_{1 \leq |t| \leq r} \frac{1}{t^2} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt - \int\limits_{1 \leq |t| \leq r} \frac{1}{t^2} dh(t) \leq c_{11} + \sigma \ln r, \quad r \in [1; +\infty).$$

Тому,

$$- \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^4} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^4} dh(t) =$$

$$= \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \left(d \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{\tau^2} \left(- \ln^+ \left(\frac{1}{|f(i\tau)|} \right) d\tau + dh(\tau) \right) \right).$$

Отриманий інтеграл інтегруємо за частинами. Звідси отримаємо

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^4} \left(- \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt + dh(t) \right) =$$

$$= \frac{1}{t^2} \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{\tau^2} \left(- \ln^+ \left(\frac{1}{|f(i\tau)|} d\tau \right) + dh(\tau) \right) \Bigg|_{1}^{+\infty} -$$

$$-2 \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^3} \left(\int\limits_{1}^{t} \frac{1}{\tau^2} \left(- \ln^+ \left(\frac{1}{|f(i\tau)|} \right) d\tau + dh(\tau) \right) \right) dt.$$

Підставимо оцінку (2.7) в останню рівність, отримаємо

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^4} \left(- \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt + dh(t) \right) =$$

$$= \frac{1}{t^2}(c_9 + \sigma \ln t)\Big|_1^{+\infty} - 2\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}(c_9 + \sigma \ln t) \geq -c_{12}.$$

Аналогічно,

$$-\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^4} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|}\right) dt + \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^4} dh(t) \geq -c_{13}.$$

Отож,

$$-\int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{t^4} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|}\right) dt + \int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{t^4} dh(t) \geq -c_{14}.$$

Тому, $\Xi_4(x) \geq -c_{15}$, якщо $x \in [1; +\infty)$. Отже, виконується (2.5).

□

З доведення наведеної вище теореми випливає, що умови (2.1) та (2.5) є еквівалентними.

Наступну теорему можна вважати доповненням до теореми 2.1.

Теорема 2.2. *Якщо* $0 \leq \sigma < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$, $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}}\right) = 0, \tag{2.8}$$

то $f \equiv 0$.

Для доведення теореми 2.2 нам потрібне наступне твердження з [74].

Лема 2.3. *Нехай* f*–функція, голоморфна в куті* $\Lambda(\pi/2) = \{z : 0 < \arg < \pi/2\}$ *і для деякого* $p \in (0; +\infty)$ *виконуються наступні умови:*

а) існує гранична функція $\tilde{f} : \partial\Lambda(\pi/2) \to \mathbb{C}$ *така, що* $\tilde{f} \in L^p(\partial\Lambda(\pi/2))$, *для кожного проміжку* $(\delta; R)$, $\quad 0 < \delta < R < +\infty$,

$$\tilde{f}(re^{i\pi/2}) = \underset{\varphi\to\pi/2-}{\overset{(p)}{l.i.m}} f(re^{i\varphi})$$

і

$$\tilde{f}(r) = \underset{\varphi\to 0+}{\overset{(p)}{l.i.m}} f(re^{i\varphi});$$

б) $$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right|^p e^{-\varepsilon r^2} dt : \varphi \in (0; \pi/2)\right\} = A_f(\varepsilon) < +\infty$$

для кожного $\varepsilon > 0$. *Тоді*

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right|^p dt : \varphi \in (0; \pi/2)\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{\int\limits_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right|^p dt : \varphi \in \{0; \pi/2\}\right\}.$$

Доведення теореми 2.2. Справді, з умови теореми 2.2 випливає, що

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln|f(x)|^{\frac{1}{x}} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x + B\right) = -\infty$$

для кожного $B \in (0; +\infty)$. Тоді,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln|f(x)| + \frac{2\sigma}{\pi}x\ln x + Bx\right) = -\infty.$$

Тому,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|f(x)|e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{Bx}\right) = 0.$$

Отже, функція

$$|f(x)|e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{Bx}$$

є обмеженою на проміжку $(0;+\infty)$, тобто,

$$|f(x)|e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{Bx} < c_{16}.$$

Тому,

$$|f(x)|e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{Bx}e^{-\frac{B}{2}x} < c_{16}e^{-\frac{B}{2}x}.$$

Отже, функція

$$|f(x)|e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{Bx}e^{-\frac{B}{2}x}$$

належить до простору $L^1(0;+\infty)$.

Звідси, отримаємо

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|f(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{Bx}\right|^p dx < +\infty$$

для кожного $\quad B\in(0;+\infty)$.

Нехай $\ln z$ – та вітка логарифма в $\mathbb{C}_+$, для якої $\ln 1 = 0$. Розглянемо функцію

$$F_B(z) = f(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{Bz}.$$

Тоді,

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|F_B(re^{i\varphi})\right|^p e^{-\varepsilon r^2}dr =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\left|f(re^{i\varphi})\right|^p e^{\frac{2p\sigma}{\pi}(r\cos\varphi\ln r - r\varphi\sin\varphi)}e^{Bpr\cos\varphi}e^{-\varepsilon r^2}dr.$$

Тому,

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|F_B(re^{i\varphi})\right|^p e^{-\varepsilon r^2}dr : \varphi\in(-\pi/2;\pi/2)\right\} < +\infty$$

для кожного $\varepsilon > 0$.

Мартіросян В. М. в [29] довів, що існує гранична функція $f_0 : \partial\Lambda(\pi/2) \to \mathbb{C}$ така, що $f_0(z)e^{i\sigma z} \in L^p(\partial\Lambda(\pi/2))$ і для кожного проміжку $(\delta; R)$, $0 < \delta < R < +\infty$,

$$G(re^{i\pi/2})e^{-\sigma r} = \underset{\varphi\to\pi/2-}{\overset{(p)}{l.i.m}} f(re^{i\varphi})e^{\sigma re^{i\varphi}}$$

і

$$f(r)e^{i\sigma r} = \underset{\varphi\to 0+}{\overset{(p)}{l.i.m}} f(re^{i\varphi})e^{i\sigma re^{i\varphi}}.$$

Водночас,

$$F_B(re^{i\pi/2}) - F_B(re^{i\varphi}) = f(re^{i\pi/2})e^{\frac{2\sigma}{\pi}(ir)(\ln r + i\pi/2)}e^{Bir} -$$
$$-f(re^{i\varphi})e^{\frac{2\sigma}{\pi}(r\cos\varphi + ir\sin\varphi)(\ln r + i\varphi)}e^{B(r\cos\varphi + ir\sin\varphi)} =$$
$$= f(re^{i\pi/2})e^{-\sigma r}e^{\frac{2\sigma}{\pi}ir\ln r}e^{Bir} -$$
$$-f(re^{i\varphi})e^{\frac{2\sigma}{\pi}(r\cos\varphi + ir\sin\varphi)(\ln r + i\varphi)}e^{B(r\cos\varphi + ir\sin\varphi)} =$$
$$= \left(f(re^{i\pi/2})e^{-\sigma r} - f(re^{i\varphi})e^{i\sigma re^{i\varphi}}\right)e^{\frac{2\sigma}{\pi}ir\ln r}e^{Bir} +$$
$$+f(re^{i\varphi})e^{i\sigma re^{i\varphi}}e^{\frac{2\sigma}{\pi}ir\ln r}e^{Bir} -$$
$$-f(re^{i\varphi})e^{\frac{2\sigma}{\pi}(r\cos\varphi + ir\sin\varphi)(\ln r + i\varphi)}e^{B(r\cos\varphi + ir\sin\varphi)}.$$

Тому,

$$F_B(re^{i\pi/2}) - F_B(re^{i\varphi}) = \underset{\varphi\to\pi/2-}{\overset{(p)}{l.i.m}} F_B(re^{i\varphi})$$

і

$$F_B(r) = \underset{\varphi\to 0+}{\overset{(p)}{l.i.m}} F_B(re^{i\varphi})$$

для кожного проміжку $(\delta; R)$, $0 < \delta < R < +\infty$. Отже, за лемою 2.3,

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty} \left|F_B(re^{i\varphi})\right|^p dr : \varphi \in (0; \pi/2)\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|F_B(re^{i\varphi})\right|^p dr : \varphi\in\{0;\pi/2\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|f(re^{i\pi/2})e^{-\sigma r}\right|^p dr;\int\limits_0^{+\infty}\left|f(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{Bx}\right|^p dx\right\}<+\infty.$$

Аналогічні міркування застосовні і до кута $\Lambda(-\pi/2)=\{z:-\pi/2<\arg<0\}$. Тому,

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|F_B(re^{i\varphi})\right|^p dr : \varphi\in(-\pi/2;0)\right\}=$$

$$=\max\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|f(re^{-i\pi/2})e^{-\sigma r}\right|^p dr;\int\limits_0^{+\infty}\left|f(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{Bx}\right|^p dx\right\}<+\infty.$$

Отже [27], $F_B\in H^p(\mathbb{C}_+)$ і

$$\|F_B\|^p=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|F_B(iy)|^p dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|f(iy)e^{-\sigma|y|}\right|^p dy\leq\|f\|_{H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)}.$$

Тому [24, с. 139],

$$|F_B(z)|\leq\frac{\|f\|_{H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)}}{x^{1/p}},$$

якщо $z=x+iy=re^{i\varphi}\in\mathbb{C}_+$. Внаслідок цього,

$$|f(x)|\leq\frac{\|f\|_{H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)}\,e^{-\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{-Bx}}{x^{1/p}}$$

для кожного $x>0$. Спрямувавши B до $+\infty$, отримуємо, що $f\equiv 0$.

$\square$

Приклад 2.1. *Функція*

$$f(z) = (1+z)^{-2/p} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right)$$

належить до $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Якщо $z = x + iy = re^{i\varphi}$, *то*

$$|f(z)| = \left|\frac{\exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right\}}{(1+z)^{2/p}}\right| = \left|\frac{\exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi}(x+iy)(\ln|z| + i\varphi)\right\}}{(1+x+iy)^{2/p}}\right| =$$

$$= \frac{\cos\frac{2y}{p(1+x)} \exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}|z||\varphi \sin\varphi|\right\} \exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln|z|\right\}}{((1+x)^2 + y^2)^p} \leq$$

$$\leq \frac{\exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln|z|\right\} \exp\{\sigma|y|\}}{((1+x)^2 + y^2)^p}.$$

Умова (2.1) *для функції* f *виконується, бо*

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}}\right) = \varliminf_{x\to+\infty} \left(\left|\frac{\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right)}{(1+x)^{2/p}}\right|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}}\right) =$$

$$= \varliminf_{x\to+\infty} \left(\frac{\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} \ln x\right)}{(1+x)^{2/xp}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}}\right) = \varliminf_{x\to+\infty} \frac{1}{(1+x)^{2/xp}} = 1 > 0.$$

З цього випливає, що умова (2.8) *не виконується оскільки* $f \not\equiv 0$.

Зауваження 2.1. *Функція*

$$f(z) = (1+z)^{-2/p} \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right)$$

вказує на точність отриманих у теоремах 2.1 *та* 2.2 *результатів в тому сенсі, що замінити сталу* σ *на меншу в рівностях* (2.1) *і* (2.8) *не можна.*

Доведення. Справді розглянемо замість умови (2.1) наступну умову

$$\varliminf_{x\to+\infty}\left(|f(x)|^{\frac{1}{x}}x^{\frac{2\sigma_1}{\pi}}\right)>0 \quad \text{для деякого} \quad \sigma_1\in(0;\sigma). \tag{2.9}$$

Тоді,

$$\varliminf_{x\to+\infty}\left(|f(x)|^{\frac{1}{x}}x^{\frac{2\sigma_1}{\pi}}\right)=\varliminf_{x\to+\infty}\left(\left|\frac{\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x\right)}{(1+x)^{2/p}}\right|^{\frac{1}{x}}x^{\frac{2\sigma_1}{\pi}}\right)=$$

$$=\varliminf_{x\to+\infty}\left(\frac{\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)}{(1+x)^{2/xp}}x^{\frac{2\sigma_1}{\pi}}\right)=\varliminf_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{2}{\pi}(\sigma_1-\sigma)}}{(1+x)^{2/xp}}=0.$$

Отже, умова (2.9) не виконується.

Аналогічні міркування є правельними і для умови (2.8).

□

Інші приклади дає теорема з [17].

На основі отриманих результатів ми отримаємо наступне доповнення до теореми A2.

Наслідок 2.1. *Нехай* $1\le p<+\infty$, *функція* f *належить до простору* $H^p(\mathbb{C}_+)$ *і* $f(z)\neq 0$ *для всіх* $z\in\mathbb{C}_+$. *Тоді*

$$\varliminf_{x\to+\infty}|f(x)|^{1/x}>0.$$

Цей наслідок можна також отримати з оцінок, наведених в [14].

2.2 Теореми єдиності для одного класу аналітичних функцій експоненціального типу в півплощині

Простір обмежених аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$ функцій f позначають через $H^\infty(\mathbb{C}_+)$, при цьому він є банаховим відносно норми

$$\|f\| = \sup_{z\in\mathbb{C}_+} |f(z)| < +\infty.$$

Кожна функція $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ має (див. [24, с. 142],[12, с. 23]) майже скрізь $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $f(iy)$ і $f \in L^\infty(\partial\mathbb{C}_+)$. Кожній функції $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ відповідає інтегральна гранична функція h, яка в точках неперервності визначається з точністю до адитивної сталої рівністю

$$h(t_2)-h(t_1) = \lim_{x\to 0+} \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln|f(x+iy)|\,dy - \int\limits_{t_1}^{t_2} \ln|f(iy)|dy, \quad t_1 < t_2. \tag{2.10}$$

Інтегральна гранична функція h є незростаючою і її похідна дорівнює нулеві майже скрізь.

Нехай $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$, –простір функцій f, аналітичних в $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\sup\left\{|f(z)|e^{-\sigma|\mathrm{Im} z|} : z \in \mathbb{C}^+\right\} < +\infty.$$

При цьому $H^\infty_0(\mathbb{C}_+) = H^\infty(\mathbb{C}_+)$. Інтегральна гранична функція h функції $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ також визначається рівністю (2.10), вона є незростаючою і її похідна дорівнює нулеві майже скрізь ([24, с. 149], [12, с. 23]). Окрім цього, кожна функція $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення і $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^\infty(\mathbb{R})$ [12, теорема 2.1].

Дослідження Н. В. Говорова, Б. В. Винницького, В. Л. Шарана, В. М. Дільного показали, що при роботі з просторами $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < \infty$ та $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$ виникають істотні технічні відмінності.

Метою даного підрозділу є пошук аналога теореми А3 для простору $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Теорема 2.3. *Нехай* $0 \le \sigma < +\infty$ *і* $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$. *Якщо*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|f(x)|^{\frac{1}{x}}x^{\frac{2\sigma}{\pi}}\right) = 0, \tag{2.11}$$

то $f \equiv 0$.

Доведення. Нехай $A \in (0;+\infty)$, $\ln z$ – вітка логарифма в $\mathbb{C}_+$, для якої $\ln 1 = 0$,

$$F_A(z) = f(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{Az}$$

і

$$B_{f,\sigma} = \left\|f(iy)e^{-\sigma|y|}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Звідси,

$$B_{F_A,0} = \left\|f(iy)e^{\frac{2\sigma}{\pi}iy\ln iy}e^{Aiy}\right\| =$$

$$= \sup\left\{|f(iy)e^{\frac{2\sigma}{\pi}iy(\ln|y|+i\frac{\pi}{2})}e^{Aiy}| : y \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \sup\left\{|f(iy)||e^{\frac{2\sigma}{\pi}iy(\ln|y|+i\frac{\pi}{2})}e^{Aiy}| : y \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \sup\left\{|f(iy)||e^{\frac{2\sigma}{\pi}iy\ln|y|}|e^{-\sigma|y|} : y \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \sup\left\{f(iy)e^{-\sigma|y|} : y \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\|f(iy)e^{-\sigma|y|}\right\|.$$

Тому $B_{F_A,0} = B_{f,\sigma} < +\infty$ для будь-яких $A \in (0;+\infty)$ і $\sigma \in [0;+\infty)$. Крім цього, за умовою функція f є роду 1, а

$$|z \ln z| \leq |z|^{\frac{3}{2}}, \quad |z| \geq r_0,$$

тому

$$|F_A(z)| \leq c_1 e^{|z|^{3/2}}, z \in \mathbb{C}_+.$$

Легко бачити, що

$$\|F_A\|_{L^\infty(0;+\infty)} = \sup\left\{|f(x)|e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{Ax} : x > 0\right\} =$$

$$= \sup\left\{e^{\ln|f(x)|}e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x + Ax} : x > 0\right\} =$$

$$= \sup\left\{e^{\ln|f(x)| + \frac{2\sigma}{\pi}x\ln x + Ax} : x > 0\right\} =$$

$$= \sup\left\{e^{x\left(\ln|f(x)|^{\frac{1}{x}} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x + A\right)} : x > 0\right\} =$$

$$= \sup\left\{e^{x\left(\ln|f(x)|^{\frac{1}{x}} + \ln x^{\frac{2\sigma}{\pi}} + A\right)} : x > 0\right\} =$$

$$= \sup\left\{e^{x\left(\ln\left(|f(x)|^{\frac{1}{x}}x^{\frac{2\sigma}{\pi}}\right) + A\right)} : x > 0\right\}.$$

За умовою теореми

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(|f(x)|^{\frac{1}{x}}x^{\frac{2\sigma}{\pi}}\right) = -\infty,$$

тому

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(|f(x)|^{\frac{1}{x}}x^{\frac{2\sigma}{\pi}}\right)} = 0.$$

Оскільки функція

$$e^{x\ln\left(|f(x)|^{\frac{1}{x}}x^{\frac{2\sigma}{\pi}}\right)}$$

є додатною і неперервною при $x \in [1; +\infty)$, то вона є обмежена на $x \in [1; +\infty)$. Функція f є також обмеженою на $(0; 1]$, бо $f \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, тому

$$e^{x \ln\left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma}{\pi}}\right)}$$

є обмеженою на $[0; +\infty)$. Тоді,

$$\|F_A\|_{L^\infty(0;+\infty)} < +\infty.$$

Врахувавши, що

$$\|F_A\|_{L^\infty(i\mathbb{R})} = \left\| f(iy) e^{\frac{2\sigma}{\pi} iy \ln iy} e^{Aiy} \right\| =$$

$$= \sup \left\{ |f(iy) e^{\frac{2\sigma}{\pi} iy (\ln|y| + i\frac{\pi}{2})} e^{Aiy}| : y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\| f(iy) e^{-\sigma|y|} \right\|,$$

маємо

$$\|F_A\|_{L^\infty(i\mathbb{R})} = B_{F_A,0} < +\infty.$$

Скористаємось наступним принципом Фрагмена-Ліндельофа (див. [74], [97]).

Якщо функція f є аналітичною в $\mathbb{C}(\alpha; \beta)$, має кутові граничні значення майже скрізь на $\partial\mathbb{C}(\alpha; \beta)$, $f \in L^p(\partial\mathbb{C}(\alpha; \beta))$, і для деякого $\gamma \in (0; \pi/(\alpha - \beta))$

$$(\forall \varepsilon > 0) : \sup_{\alpha < \varphi < \beta} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-\varepsilon r^\gamma} dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

то $f \in E^p[\mathbb{C}(\alpha; \beta)]$.

Звідси функція F_A є обмеженою в першому і четвертому координатному куті. Отже, вона є обмеженою в $\mathbb{C}_+$. За Принципом максимума модуля аналітичних функцій

$$|F_A(z)| \leq \|F_A\|_{L^\infty(i\mathbb{R})} = B_{f,\sigma}, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Тому $|f(x)|\, e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x} \leq B_{f,\sigma}e^{-Ax}$, $x \in (0;+\infty)$. Спрямувавши A до $+\infty$, отримуємо, що $f(x) = 0$, якщо $x > 0$. Тому, $f \equiv 0$. $\square$

Теорема 2.4. *Нехай* $0 \leq \sigma < +\infty$, *функція* f *належить до простору* $H^{\infty}_{\sigma}(\mathbb{C}_+)$, *і* $f(z) \neq 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$. *Тоді*

$$\varliminf_{x\to+\infty}\left(|f(x)|^{\frac{1}{x}}x^{\frac{2\sigma}{\pi}}\right) > 0. \tag{2.12}$$

Доведення. За лемою 2.1 функція f подається у вигляді (2.2). Оскільки функція f за умовою теореми не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$, то вона набуває вигляду

$$\begin{aligned}|f(x)| = e^{a_1x}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\frac{Q(t,x)}{i}\ln|f(it)|dt+\right)\times\\ \times\exp\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\frac{Q(t,x)}{i}dh(t)\right).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Використовуючи дане зображення покажемо, що виконується

$$\varliminf_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|f(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) > -\infty. \tag{2.14}$$

Оскільки $z = x > 0$, то уявна частина правої частини формули (2.4) дорівнює нулеві. Тому і уявна частина лівої частини рівності (2.4) дорівнює нулеві. Отже, виконується умова

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|\frac{\mathrm{Re}Q(t;x)}{i}dt = \frac{x}{\pi}-\frac{2x}{\pi}\ln x, \quad x > 0.$$

Звідси

$$\exp\left\{\sigma\frac{2x}{\pi}\ln x-\sigma\frac{x}{\pi}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sigma|t|\mathrm{Re}\frac{Q(t;x)}{i}dt\right\}.$$

Перемноживши отриману рівність і рівність (2.13), одержимо

$$|f(x)|e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x-\frac{\sigma}{\pi}x}=e^{a_1x}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\frac{Q(t,x)}{i}\ln|f(it)|dt\right)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\frac{Q(t,x)}{i}dh(t)\right)\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\frac{Q(t,x)}{i}\sigma|t|dt\right).$$

Тоді,

$$\ln|f(x)|e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x-\frac{\sigma}{\pi}x}=a_1x+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\frac{Q(t,x)}{i}\ln|f(it)e^{-\sigma|t|}|dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\frac{Q(t,x)}{i}dh(t).$$

Оскільки

$$\mathrm{Re}\frac{Q(t;x)}{i}=\frac{2t^2x+x-t^2x^3}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)},$$

то

$$\frac{\ln|f(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x-\frac{\sigma}{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2-x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\ln\left(e^{-\sigma|t|}|f(it)|\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2-x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}dh(t)=$$

$$=T_1(x)-T_2(x)+T_3(x)+T_4(x),$$

де

$$T_1(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\ln\left(e^{-\sigma|t|}|f(it)|\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}dh(t),$$

$$T_2(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\sigma|t|dt,$$

$$T_3(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\ln^+|f(it)|dt,$$

$$T_4(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}dh(t).$$

Оцінимо T_1. Функція h незростаюча, тому другий інтеграл є недодатним

$$T_1(x)\leq-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\ln\left(e^{-\sigma|t|}|f(it)|\right)dt.$$

З властивостей просторів $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$ випливає, що

$$|f(it)|\leq c_3e^{\sigma|t|},$$

тому,

$$|f(it)|e^{-\sigma|t|}\leq c_3.$$

Тоді,

$$T_1(x)\leq c_4\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}dt\leq$$

$$\leq c_5 \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt < +\infty, \quad x \in (0; +\infty).$$

Крім цього, $T_3(x) \geq 0$ і

$$T_2(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2} \sigma |t| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(t^2+1)(1+t^2)^2} \sigma |t| dt \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \sigma |t| dt = c_5 < +\infty,$$

якщо $x \in (1; +\infty)$. До того ж,

$$T_4(x) \geq c_6 - \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t| \geq 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt + \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t| \geq 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} dh(t) \geq$$

$$\geq c_7 - \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t| \geq 1} \frac{1}{t^4} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt + \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t| \geq 1} \frac{1}{t^4} dh(t), \quad x \in (1; +\infty).$$

Згідно з лемою 2.1,

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} K_0(r) < +\infty.$$

Тому,

$$\int\limits_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\ln^+ |f(it)| - \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} \right) dt +$$

$$+ \int\limits_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) dh(t) > -c_8.$$

Отже,

$$\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt-\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)dh(t)\le$$

$$\le c_8+\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln^+|f(it)|dt\le$$

$$\le c_8+\frac{1}{p}\int\limits_{1<|t|\le r}\frac{1}{t^2}\ln^+|f(it)e^{-\sigma|t|}|^p dt+\int\limits_{1<|t|\le r}\frac{\sigma}{|t|}dt\le$$

$$\le c_9+2\sigma\ln r,\quad r\in(1;+\infty).$$

Звідси,

$$\int\limits_1^r\frac{1}{t^2}\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt-\int\limits_1^r\frac{1}{t^2}dh(t)\le c_{10}+\sigma\ln r,\quad r\in(1;+\infty).$$

Оскільки $\frac{1}{t^2}\le\frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4r^2}\right)$, при $|t|\le|r|$, то

$$\int\limits_1^r\frac{1}{t^2}\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt-\int\limits_1^r\frac{1}{t^2}dh(t)\le$$

$$\le\int\limits_1^r\frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right)\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt-\int\limits_1^r\frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right)dh(t)\le$$

$$\le\int\limits_1^{2r}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right)\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt-\int\limits_1^{2r}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(2r)^2}\right)dh(t)\le$$

$$\le c_{11}+\sigma\ln r.$$

Отже,

$$\int\limits_1^r\frac{1}{t^2}\ln^+\left(\frac{1}{|f(it)|}\right)dt-\int\limits_1^r\frac{1}{t^2}dh(t)\le c_{11}+\sigma\ln r. \tag{2.15}$$

Аналогічно,

$$\int\limits_{-r}^{-1} \frac{1}{t^2} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt - \int\limits_{-r}^{-1} \frac{1}{t^2} dh(t) \leq c_{12} + \sigma \ln r, \quad r \in [1; +\infty).$$

Тоді,

$$\int\limits_{1 \leq |t| \leq r} \frac{1}{t^2} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt - \int\limits_{1 \leq |t| \leq r} \frac{1}{t^2} dh(t) \leq c_{13} + \sigma \ln r, \quad r \in [1; +\infty).$$

Тому,

$$- \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^4} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^4} dh(t) =$$

$$= \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \left(d \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{\tau^2} \left(- \ln^+ \left(\frac{1}{|f(i\tau)|} \right) d\tau + dh(\tau) \right) \right).$$

Отриманий інтеграл інтегруємо за частинами. Звідси отримаємо

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^4} \left(- \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt + dh(t) \right) =$$

$$= \frac{1}{t^2} \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{\tau^2} \left(- \ln^+ \left(\frac{1}{|f(i\tau)|} \right) d\tau + dh(\tau) \right) \Bigg|_{1}^{+\infty} +$$

$$+ 2 \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^3} \left(\int\limits_{1}^{t} \frac{1}{\tau^2} \left(- \ln^+ \left(\frac{1}{|f(i\tau)|} \right) d\tau + dh(\tau) \right) \right) dt.$$

Підставляючи оцінку (2.15) в останню рівність отримаємо

$$- \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^4} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|} \right) dt + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^4} dh(t) =$$

$$= \frac{1}{t^2}(c_{11} + \sigma \ln t)\Big|_1^{+\infty} + 2\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}(c_{11} + \sigma \ln t) \geq -c_{14}.$$

Аналогічно,

$$-\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^4} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|}\right) dt + \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^4} dh(t) \geq -c_{15}.$$

Тоді,

$$-\int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{t^4} \ln^+ \left(\frac{1}{|f(it)|}\right) dt + \int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{t^4} dh(t) \geq -c_{16}.$$

Внаслідок цього, $T_4(x) \geq -c_{17}$, якщо $x \in [1; +\infty)$. Отже, виконується умова (2.14). Легко бачити, що умова (2.14) еквівалентна до умови (2.12), тому теорему доведено. □

При цьому ми отримаємо наступне доповнення до теореми А3.

Наслідок 2.2. *Якщо $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ і $f(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$. Тоді*

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f(x)|^{1/x} > 0.$$

Приклад 2.2. *Функція*

$$f(z) = \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right) \tag{2.16}$$

задовольняє умови теореми 2.4.

Доведення. Якщо $z = x + iy = re^{i\varphi}$, то

$$\left|\exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right\}\right| = \left|\exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi}(x+iy)(\ln|z| + i\varphi)\right\}\right| =$$

$$= \exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}|z||\varphi\sin\varphi|\right\}\exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi}x\ln|z|\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi}x\ln|z|\right\}\exp\{\sigma|z|\} \leq$$

$$\leq \exp\{\sigma|z|\}\begin{cases}\exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi}|z|\ln|z|\right\} & , |z| \leq 1,\\ 1 & , |z| > 1.\end{cases}$$

$$\leq \exp\{\sigma|z|\}\begin{cases}\exp\{\frac{2\sigma}{e\pi}\} & , |z| \leq 1,\\ 1 & , |z| > 1,\end{cases}$$

бо $\lim\limits_{t\to 0+}\chi(t) = \lim\limits_{t\to 0+} t\ln t = 0$, і $\min\{\chi(t) : t \in \mathbb{R}_+\} = \chi\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, якщо $\chi(t) = t\ln t$.

Умова (2.12) для функції f виконується, бо

$$\varliminf_{x\to+\infty}|f(x)|^{\frac{1}{x}}x^{\frac{2\sigma}{\pi}} = \varliminf_{x\to+\infty}\left|e^{-\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}\right|^{\frac{1}{x}}x^{\frac{2\sigma}{\pi}} =$$

$$= \varliminf_{x\to+\infty} e^{-\frac{2\sigma}{\pi}\ln x}x^{\frac{2\sigma}{\pi}} = 1 > 0.$$

З цього випливає, що умова (2.11) не виконується оскільки $f \not\equiv 0$.

□

Зауваження 2.2. *Функція (2.16) вказує на точність теорем 2.3 та 2.4 в тому сенсі, що замінити сталу σ на меншу в рівностях (2.11) і (2.12) не можна.*

Доведення. Функція (2.16) належить до $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Розглянемо замість умови (2.11) наступну умову

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|f(x)|^{\frac{1}{x}}x^{\frac{2\sigma_1}{\pi}}\right) = 0 \quad \text{для деякого} \quad \sigma_1 \in (0;\sigma). \qquad (2.17)$$

Тоді,

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma_1}{\pi}} = \lim_{x\to+\infty} \left|\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right)\right|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma_1}{\pi}} = 0.$$

Звідси отримаємо, що виконується умова (2.17), але функція не є тотожним нулем.

Розглянемо замість умови (2.12) наступну умову

$$\varliminf_{x\to+\infty} \left(|f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma_1}{\pi}}\right) > 0 \quad \text{для деякого} \quad \sigma_1 \in (0;\sigma). \tag{2.18}$$

Тоді,

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f(x)|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma_1}{\pi}} = \varliminf_{x\to+\infty} \left|\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln x\right)\right|^{\frac{1}{x}} x^{\frac{2\sigma_1}{\pi}} = 0.$$

Звідси отримаємо, що умова (2.18) не виконується.

□

Також на точність теорем 2.3 та 2.4 вказують функції розглянуті в [40],[57].

2.3 Висновки до розділу 2

У розділі 2 дисертаційної роботи, доведено дві теореми єдиності для вагового простору Гарді $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \leq \sigma < +\infty$, і $1 \leq p < +\infty$. Використовуючи дані результати ми отримали аналогічне твердження для класичного простору Гарді про поведінку функції f, яка не має жодного нуля в правій півплощині, на дійсній додатній півосі. Також ми отримали узагальнення добре відомої теореми єдиності для класичного простору Гарді.

Доведено теорему єдиності для функцій, аналітичних та обмежених в правій півплощині з вагою $e^{-\sigma|z|}$. Результати формулюються в термінах поведінки функцій на дійсній півосі. Теорема 2.3 узагальнює відомий результат для окремого випадку функцій, обмежених в правій півплощині ($\sigma = 0$). Встановили доповнення (теорема 2.4) до даної теореми для випадку коли функція не має нулів в правій півплощині.

В даному розділі отримані нові результати, які є важливими для дослідження рівнянь типу згортки.

РОЗДІЛ 3

УМОВИ ПОВНОТИ ДЛЯ СИСТЕМ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

3.1 Інваріантні підпростори просторів типу Гарді

У цьому підрозділі ми застосуємо результати попереднього розділу до опису трансляційно інваріантних підпросторів у термінах функції

$$\psi(x) = \frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x$$

яка, як показано в [20], має визначальне значення для опису властивостей вагових просторів Гарді з вагою експоненціального типу.

Функція $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$ називається циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$, якщо система

$$\{f(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\}, \tag{3.1}$$

є повною в $H^2(\mathbb{C}_+)$.

Функція f називається циклічною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, якщо $f \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і система (3.1) є повною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Позначимо через $\operatorname{span}_H\{f_\tau\}$ замикання лінійної оболонки системи $\{f_\tau\}$ в банаховому простору H.

Функцію $I_{f(z)} := e^{a_1 z}B_f(z)S^*_f(z)$ називають внутрішнім мно-

жником функції $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ у просторі $H^p(\mathbb{C}_+)$, де

$$a_1 = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln|f(x)|}{x} \le 0,$$

B_f – добуток Бляшке для півплощини, побудований за послідовністю нулів функції f, і

$$S_f^*(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz+i}{(1+t^2)(t+iz)}\right\} dh(t).$$

Через $\widetilde{I}_f$ позначимо – внутрішній множник у просторі $H^2(\mathbb{C}_+)$ функції

$$f(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-\widetilde{c}z},$$

де

$$\widetilde{c} = \overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(\frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right).$$

Позначимо також

$$I_f^*(z) = \widetilde{I}_f e^{-\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}.$$

Теорема 3.1. *Якщо функція $f \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $f(z) \ne 0$ для кожного $z \in \mathbb{C}_+$ і інтегральна гранична функція h функції f є сталою, то*

$$span\{f(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\} =$$

$$= \begin{cases} H^2_\sigma(\mathbb{C}_+), \quad \text{якщо} \quad \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\,\psi(x) = +\infty \\ H^2(\mathbb{C}_+)I_f^*(z), \quad \text{якщо} \quad \psi(x) = O(1), \quad x \to +\infty, \\ \boldsymbol{0}, \quad \text{якщо} \quad \underline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\,\psi(x) = -\infty, \end{cases}$$

де

$$\psi(x) = \frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x,$$

а $\boldsymbol{0}$ – простір, що складається з єдиної функції-тотожного нуля.

Лема 3.1. *[20]*

Нехай $f \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $f(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geq 0$, *для деякого* $c \in \mathbb{R}$. *Тоді,*

$$span_{\widetilde{H}^2_\sigma(\mathbb{C}_+)}\{f(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\} = H^2(\mathbb{C}_+)I^*_f(z).$$

Лема 3.2. *Нехай* $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \leq \sigma < +\infty$ *і* $f(z) \neq 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$, *а також* $h(t) = const$. *Тоді наступні умови еквівалентні:*

$$1)\ \varliminf_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) < +\infty;$$

$$2)\ \varlimsup_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) < +\infty;$$

Доведення теореми 3.1. Оскільки функція не має жодного нуля в $\mathbb{C}_+$ і її інтегральна гранична функція є сталою, то з умови

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\psi(x) = +\infty$$

випливає [50] циклічність функції f, тобто, у цьому випадку

$$\operatorname{span}\{f(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\} = H^2_\sigma(\mathbb{C}_+).$$

Якщо

$$\varliminf_{x\to+\infty}\psi(x) = -\infty,$$

то з теореми 2.2 випливає, що $f(z) \equiv 0$. Тому,

$$\operatorname{span}\{f(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\} = 0.$$

Якщо ж $\psi(x) = O(1), \quad x \to +\infty$, то за лемою 3.2 з цього випливає, що $\exists c \in \mathbb{R}$ таке, що

$$f(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+).$$

Тому, за лемою 3.1,

$$\operatorname{span}\{f(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\} = H^2(\mathbb{C}_+)I^*_f(z).$$

□

Теорема 3.2. *Якщо функція* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$ *і для послідовності нулів* (λ_n) *функції* f *виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Re\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < +\infty, \tag{3.2}$$

то

$$span\,\{f(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\} =$$

$$= \begin{cases} H^p(\mathbb{C}_+)I^*_f(z), & \text{якщо} \quad \psi(x) = O(1), \quad x \to +\infty, \quad x \in E, \\ \boldsymbol{0}, & \text{якщо} \quad \varliminf\limits_{x\to+\infty}{}^*\psi(x) = -\infty, \end{cases}$$

де E *- множина скінченної логарифмічної міри, а* $\varliminf^*$ *означає нижню границю, яка розглядається поза множиною* E, $\boldsymbol{0}$ *– простір, що складається з єдиної функції-тотожного нуля.*

Доведення. Оскільки функція $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і виконується умова (3.2), то за теоремою [18] з умови

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \psi(x) < +\infty$$

випливає, що

$$(\exists c \in \mathbb{R}) : f(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+).$$

З цього, за лемою 3.1, отримаємо

$$\text{span}\,\{f(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\} = H^p(\mathbb{C}_+)I^*_f(z).$$

Якщо ж

$$\varliminf_{x\to+\infty}{}^*\psi(x) = -\infty,$$

то

$$\varliminf_{x\to+\infty} \psi(x) = \infty.$$

З теореми 2.2 випливає, що $f(z) \equiv 0$. Тому,

$$\operatorname{span}\left\{f(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\right\} = 0.$$

$\square$

3.2 Про еквівалентність деяких умов для класу функцій, аналітичних у півплощині

В даному підрозділі для простору $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$ встановлено еквівалентність швидкого спадання по додатній осі модуля функції $f \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$ до швидкого зростання її модуля на межі. Основний результат міститься в наступній теоремі.

Теорема 3.3. *Нехай $f \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$ і $f(z) \ne 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, а також $h(t) = const$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

а) $\varliminf\limits_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|f(it)|dt - 2\sigma \ln r \right) > -\infty;$

б) $\varlimsup\limits_{r\to+\infty} \left(\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|f(it)|dt - 2\sigma \ln r \right) > -\infty;$

в) $\varliminf\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right) < +\infty;$

г) $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi} \ln x \right) < +\infty;$

д) $(\exists c \in \mathbb{R}) : f(z) \exp\left\{ \frac{2\sigma}{\pi} z \ln z - cz \right\} \in H^\infty(\mathbb{C}_+).$

В [95] показано, що функції з цих просторів мають майже скрізь на $i\mathbb{R}$ кутові граничні значення $f(it)$ і $f(it)e^{-\sigma|t|} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Якщо для функції f існує $c_1 \in \mathbb{R}$, що виконується умова

$$|f(z)| \le c_1 e^{\sigma|z|},\ z \in \mathbb{C}_+, \tag{3.3}$$

то легко бачити, що $f(z)e^{-\sigma z} \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$. Тому теж для кожної функції f, що задовольняє умову (3.3), існують майже скрізь

на $i\mathbb{R}$ кутові граничні значення і

$$f(it)e^{-\sigma|t|} \in L^{\infty}(\mathbb{R}). \tag{3.4}$$

З цього одержимо

Наслідок 3.1. *Твердження теореми* 3.3 *залишається правильним для класу аналітичних в* $\mathbb{C}_+$ *функцій, для яких виконується умова* (3.3).

Лему 2.1 сформулюємо для випадку, коли $h(t) \equiv const$.

Лема 3.3. *Нехай* $f \in H_{\sigma}^{\infty}(\mathbb{C}_+)$, $0 \leq \sigma < +\infty$, $h(t) \equiv const$, $f(z) \neq 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$. *Тоді справедливе зображення*

$$f(z) = \exp\left(ia_0 + a_1 z + \frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\ln|f(it)|dt\right),$$

$a_0 \in \mathbb{R}, a_1 \in \mathbb{R}$, *і виконуються умови*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)|dt > -\infty, \tag{3.5}$$

$\ln|f(it)| \in L^1[-1;1]$.

Доведемо декілька допоміжних тверджень.

Лема 3.4. *Якщо* $f \in H_{\sigma}^{\infty}(\mathbb{C}_+)$, $0 \leq \sigma < +\infty$, *і виконується умова б), то виконується умова а).*

Доведення. Легко бачити, що

$$\int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln e^{-\sigma|t|}dt = \int\limits_{-r}^{-1} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\sigma t dt -$$

$$-\int\limits_1^r \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\sigma t dt =$$

$$= \sigma \ln|t|\Big|_{-r}^{-1} - \sigma\frac{t^2}{2r^2}\Big|_{-r}^{-1} - \sigma \ln t\Big|_1^r + -\sigma\frac{t^2}{2r^2}\Big|_1^r =$$

$$= -2\sigma \ln r + \frac{\sigma}{r^2}(r^2-1),$$

тому, умова б) набуває вигляду

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)e^{-\sigma|t|}|dt > -\infty.$$

Оскільки

$$\ln|f(it)e^{-\sigma|t|}| = \ln^+|f(it)e^{-\sigma|t|}| - \ln^+\frac{1}{|f(it)e^{-\sigma|t|}|}, \tag{3.6}$$

то

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)e^{-\sigma|t|}|dt =$$

$$= \varlimsup_{r\to+\infty}(\varphi_1(r)-\varphi_2(r)),$$

де

$$\varphi_1(r) = \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln^+\left|f(it)e^{-\sigma|t|}\right|dt$$

і

$$\varphi_2(r) = \int\limits_{1<|t|\leqslant r} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln^+\frac{1}{\left|f(it)e^{-\sigma|t|}\right|}dt.$$

Тоді умова б) запишеться у вигляді

$$\varlimsup_{r\to+\infty}(\varphi_1(r)-\varphi_2(r)) > -\infty. \tag{3.7}$$

Врахувавши, що $f(it)e^{-\sigma|t|} \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, отримаємо

$$\varphi_1(r) \leq c_2 \int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) dt < c_3 < +\infty.$$

Припустимо, що $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \varphi_2(r) = +\infty$, тоді існує така послідовність (r_k), що $\lim\limits_{r\to+\infty} \varphi_2(r_k) = +\infty$. Проте функція φ_2 є неспадною, тому для кожної зростаючої послідовності (n_k), такої, що $n_k \to +\infty$, при $k \to \infty$, маємо $\lim\limits_{r\to+\infty} \varphi_2(n_k) = +\infty$. Але $\lim\limits_{r\to+\infty} \varphi_1(n_k) < +\infty$, тоді $\lim\limits_{r\to+\infty} (\varphi_1(r) - \varphi_2(r)) = -\infty$, що суперечить умові (3.7). Отже, виконується умова а).

□

Лема 3.5. *Якщо $f \in H^{\infty}_{\sigma}(\mathbb{C}_+)$, $0 \leq \sigma < +\infty$ і $h(t) \equiv const$, $f(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$, а також виконується умова в), то виконується умова б).*

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що $f \in H^{\infty}_{\sigma}(\mathbb{C}_+)$, $G(z) \not\equiv 0$ і не виконується умова б), тобто,

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \left(\int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|f(it)| dt - 2\sigma \ln r \right) = -\infty. \quad (3.8)$$

Оскільки

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{Q(t;x)}{i}\right\} = \frac{2t^2x + x - t^2x^3}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)},$$

то за лемою 2.2

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t| \mathrm{Re}\left\{\frac{Q(t;x)}{i}\right\} dt = \frac{x}{\pi} - \frac{2x}{\pi} \ln x, \quad x > 0.$$

Тоді,

$$\ln e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x} = \left(\frac{\sigma}{\pi}x - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\left\{\frac{Q(t;x)}{i}\right\}\sigma|t|dt\right).$$

Тому, за лемою 3.3

$$\frac{\ln|f(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}|}{x} = c_4 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-t^2x^2+1+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln|f(it)e^{-\sigma|t|}|dt.$$

Використавши умову (3.6), отримаємо

$$\frac{\ln|f(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}|}{x} = c_4 - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2x^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln^+|f(it)e^{-\sigma|t|}|dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln^+|f(it)e^{-\sigma|t|}|dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2x^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln^+\frac{1}{|f(it)e^{-\sigma|t|}|}dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}\ln^+\frac{1}{|f(it)e^{-\sigma|t|}|}dt =$$

$$= c_4 - K_1(x) + K_2(x) + K_3(x) - K_4(x).$$

Оцінимо $K_1(x)$. З умови (3.3) випливає, що $|f(it)| \le c_1e^{\sigma|t|}$, тому, $|f(it)|e^{-\sigma|t|} \le c_1$. Отже,

$$K_1(x) \le \frac{c_5x^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}dt.$$

Обчислимо інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} dt.$$

Для функції

$$s(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}$$

точки $t_1 = xi$ та $t_2 = -xi$ є простими полюсами, а точки $t_3 = i$ та $t_4 = -i$ – полюсами другого порядку, інших особливих точок функція не має. У верхній півплощині міститься лише полюси $t_1 = xi$ і $t_3 = i$ функції $s(t)$. Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} dt = 2\pi i \left(\underset{t=i}{res} \left(\frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \right) + \right.$$

$$\left. \underset{t=ix}{res} \left(\frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \right) \right).$$

Обчислимо лишок функції $s(t)$ в точці $t_1 = ix$:

$$\underset{t=ix}{res} \left(\frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \right) = \lim_{t \to ix} \left(\frac{t^2}{(1+t^2)^2(t+ix)} \right) =$$

$$= \frac{-x^2}{2ix(1-x^2)^2} = \frac{-x}{2i(1-x^2)^2}.$$

Обчислимо лишок функції $s(t)$ в точці $t_3 = i$:

$$\underset{t=i}{res} \left(\frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \right) = \lim_{t \to i} \left(\frac{t^2}{(i+t)^2(t^2+x^2)} \right)' =$$

$$= \lim_{t \to i} \left(\frac{2t(i+t)^2(t^2+x^2) - t^2(2(t+i)(t^2+x^2) + (i+t)^2 2t)}{(i+t)^4(t^2+x^2)^2} \right) =$$

$$= \frac{-8i(x^2-1) + (4i(x^2-1) - 8i)}{16(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-2i(x^2-1)+i(x^2-1)-2i}{4(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-2i(x^2-1)+i(x^2-1)-2i}{4(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-i(x^2-1)-2i}{4(x^2-1)^2} = \frac{-ix^2-i}{4(x^2-1)^2}.$$

Звідси,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)}dt = 2\pi i\left(\frac{-x}{(1-x^2)^2(2i)} + \frac{-ix^2-i}{4(x^2-1)^2}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{-x}{(1-x^2)^2} + \frac{x^2+1}{2(x^2-1)^2}\right) = \pi\left(\frac{-2x+x^2+1}{2(1-x^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2(1+x)^2}.$$

Отже,

$$K_1(x) \le \frac{c_5x^2}{2(1+x)^2} \le c_6,\ x > 0.$$

Оцінимо K_4:

$$K_4(x) \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2+2t^2}{(1+t^2)^2(t^2+x^2)} \ln^+ \frac{1}{|f(it)e^{-\sigma|t|}|}dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(t^2+x^2)} \ \ln^+ \frac{1}{|f(it)e^{-\sigma|t|}|}dt.$$

Розглянемо випадок $x > 1$. Тоді,

$$K_4(x) \le \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)e^{-\sigma|t|}|}dt.$$

Використавши нерівність $\ln^+ \frac{1}{ab} \leq \ln^+ \frac{1}{a} + \ln^+ \frac{1}{b}$, отримаємо

$$K_4(x) \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \left(\ln^+ \frac{1}{|f(it)|} + \ln^+ \frac{1}{e^{-\sigma|t|}} \right) dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt + \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \sigma |t| dt =$$

$$= c_7 + \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt + \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt \leq$$

$$\leq c_8 + \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt + \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt.$$

За лемою 3.3, $\ln |f(it)| \in L^1[-1;1]$, тому,

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} |\ln |f(it)|| dt \leq c_9.$$

Звідси,

$$K_4(x) \leq c_{10} + \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt.$$

Тоді,

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt \leq \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt =$$

$$= \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} d \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|f(is)|} ds.$$

Проінтегрувавши за частинами, отримаємо

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt \le \frac{1}{t^2} \int\limits_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|f(is)|} ds \Bigg|_1^{+\infty} + \\ +2 \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} \int\limits_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|f(is)|} ds dt. \tag{3.9}$$

Застосувавши нерівність $\frac{1}{t^2} \le \frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{4r^2}\right)$, при $|t| \le |r|$ одержимо

$$\int\limits_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|f(is)|} ds \le \frac{4}{3} \int\limits_1^{2t} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2t^2}\right) \ln^+ \frac{1}{|f(is)|} ds.$$

За лемою 3.3 виконується умова (3.5), тобто,

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln |f(it)| dt > -c_{11},$$

для деякої сталої $c_{11} \in \mathbb{R}$. Тоді,

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \left(\ln^+ |f(it)| - \ln^+ \frac{1}{|f(it)|}\right) dt > -c_{11}.$$

Звідси отримаємо

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt <$$

$$< c_{11} + \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^+ |f(it)| dt \le$$

$$\le c_{11} + \int\limits_{1<|t|\le r} \frac{1}{t^2} \ln^+ |f(it)| \le c_{12} + 2\sigma \ln r.$$

Отже,

$$\int\limits_1^t \frac{1}{s^2} \ln^+ \frac{1}{|f(is)|} ds \le c_{12} + \sigma \ln t.$$

Підставивши останню оцінку в нерівність (3.9), отримаємо

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt \le c_{13}.$$

Аналогічно

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)|} dt \le c_{14},$$

тому, $K_4(x) \le c_{15}$, якщо $x \ge 1$.

Легко бачити, що

$$K_3(x) \ge \frac{1}{\pi} \int\limits_{1<|t|\le x} \frac{t^2 x^2}{(1+t^2)^2 (t^2+x^2)} \ln^+ \frac{1}{|f(it)e^{-\sigma|t|}|} dt \ge$$

$$\ge \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1<|t|\le x} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)e^{-\sigma|t|}|} dt \ge$$

$$\ge \frac{1}{8\pi} \int\limits_{1<|t|\le x} \frac{1}{t^2} \ln^+ \frac{1}{|f(it)e^{-\sigma|t|}|} dt \ge$$

$$\ge -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{1<|t|\le x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{x^2} \right) \ln |f(it)e^{-\sigma|t|}| dt.$$

Тому, за умовою (3.8) маємо, що $\varliminf\limits_{x\to+\infty} K_3(x) = +\infty$. Оскільки

$K_2(x) > 0$, то

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{\ln|f(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}|}{x} = +\infty.$$

А це суперечить умові в). □

Лема 3.6. *Якщо* $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$, $h(t) \equiv const$ *і виконується умова д), то виконується й умова г).*

Доведення. Оскільки виконується умова д), то з означення простору $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ маємо :

$$\left|G(z)\exp\left\{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z - cz\right\}\right| \le c_{16}.$$

Звідси,

$$\ln|f(x)| + \frac{2\sigma}{\pi}x\ln x \le c_{16}x.$$

Оскільки

$$\frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x \le c_{16},$$

то виконується умова г) □

Лема 3.7. *Якщо* $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0 \le \sigma < +\infty$, $h(t) \equiv const$, $f(z) \ne 0$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}_+$, *і виконується умова а), то виконується умова д).*

Доведення. З умови леми а) маємо

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall r > 1) : \int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)e^{-\sigma|t|}|dt > c.$$

Оскільки $f \in H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, то виконується умова (3.4). Тому,

$$\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)e^{-\sigma|t|}|dt \le$$

$$\leq c_{17} \int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) dt \leq c_{18}.$$

Врахувавши, що за лемою 2.3, $\ln|f(it)| \in L^1[-1;1]$ і $f \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|f(it)e^{-\sigma|t|}|}{1+t^2} dt = c_{19} + \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leq r} \frac{\ln|f(it)e^{-\sigma|t|}|}{1+t^2} dt \leq$$

$$\leq c_{19} + \frac{4}{3} \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_{1<|t|\leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2r^2}\right) \ln|f(it)e^{-\sigma|t|}| dt < +\infty.$$

Тоді, з [11, с. 81-82], [13, с.25], і [52, с. 189-190] оскільки $f(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z}$ не має нулів в $\mathbb{C}_+$ і її інтегральна гранична функція є тотожною сталою, отримаємо, що виконується д). $\square$

Доведення теореми 3.3 випливає з лем 3.4-3.7 і тривіальної імплікації умов в) і г).

3.3 Про перетин вагових просторів Гарді

Метою даного підрозділу є опис властивостей простору

$$H^p_{\cap}(\mathbb{C}_+) = \bigcap_{\sigma>0} H^p_\sigma(\mathbb{C}_+).$$

Легко бачити, що $H^p_{\cap}(\mathbb{C}_+) \supset H^p(\mathbb{C}_+)$ і $H^p_{\cap}(\mathbb{C}_+) \subset H^p_\varepsilon(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\varepsilon > 0$.

Теорема 3.4. $H^p_{\cap}(\mathbb{C}_+) \neq H^p(\mathbb{C}_+)$.

Доведення. Нехай $f(z) = e^{-z\sqrt{\ln(z+2)}}$, де вітки логарифма і кореня вибрані так, що $\ln 1 = 0$, $\sqrt{1} = 1$. Покажемо, що функція f належить простору до $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\sigma > 0$. Справді,

$$\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| = \left|\exp\left\{-re^{i\varphi}\sqrt{\ln(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)+2)}\right\}\right| =$$
$$= \left|\exp\left\{-r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\ln\sqrt{r^2+4r\cos\varphi+4} + i\,\mathrm{arctg}\,\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right| =$$
$$= \left|\exp\left\{-r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\times\right.\right.$$
$$\times\left(\sqrt[4]{\ln^2\sqrt{r^2+4r\cos\varphi+4} + \mathrm{arctg}^2\,\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}\right)\times$$
$$\left.\left.\times\left(\cos\frac{\mathrm{arctg}\,\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}{\ln\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}} + i\sin\frac{\mathrm{arctg}\,\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}{\ln\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}}\right)\right\}\right|.$$

Отже,

$$|f(re^{i\varphi})| = \exp\left\{-r\sqrt[4]{\ln^2\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4} + \mathrm{arctg}^2\,\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}\times\right.$$

$$\times\left(\cos\varphi\cos\frac{\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}{\ln\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}}}{2}-\sin\varphi\sin\frac{\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}{\ln\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}}}{2}\right)\Bigg\}.$$

Прологарифмуємо отриману рівність і оцінимо праву частину

$$\ln|f(re^{i\varphi})|=-r\sqrt[4]{\ln^2\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}+\operatorname{arctg}^2\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}\times$$

$$\times\left(\cos\varphi\cos\frac{\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}{\ln\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}}}{2}-\sin\varphi\sin\frac{\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}{\ln\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}}}{2}\right)\leq$$

$$\leq r\sqrt[4]{\ln^2\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}+\operatorname{arctg}^2\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}\sin\varphi\times$$

$$\times\sin\frac{\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}{\ln\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}}}{2}=$$

$$=\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\ln^2\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}+\operatorname{arctg}^2\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}\times$$

$$\times\sin\varphi\sqrt{1-\cos\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}{\ln\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}}}=$$

$$=\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\ln^2\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}+\operatorname{arctg}^2\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}\sin\varphi\times$$

$$\times\sqrt{1-\frac{\ln\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}}{\sqrt{\ln^2\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}+\operatorname{arctg}^2\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}}}=\frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi\times$$

$$\times\left(\sqrt{\ln^2\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}+\operatorname{arctg}^2\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi+2}}-\right.$$

$$\left.-\ln\sqrt{4r\cos\varphi+r^2+4}\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi\sqrt{\sqrt{\ln^2 r+\varphi^2}-\ln r}=\frac{r}{\sqrt{2}}\varphi\sin\varphi\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\ln^2 r+\varphi^2}+\ln r}}\leq$$

$$\leq\frac{r}{2}\varphi\sin\varphi\frac{1}{\sqrt{\ln r}},\quad r\to+\infty,$$

для кожного $\sigma>0$.

Звідси, функція належить до простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma>0$. Отже, f належить і до простору $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$.

Тепер покажемо, що функція $f(z)=e^{-z\sqrt{\ln(z+2)}}$ не належить до простору $H^p(\mathbb{C}_+)$

$$|f(iy)|=\left|\exp\left\{-iy\sqrt{\ln\sqrt{y^2+4}+i\operatorname{arctg}\frac{y}{2}}\right\}\right|=$$

$$=\left|\exp\left\{-iy\left(\sqrt{\ln^2\sqrt{y^2+4}+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{2}}e^{i\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{2}}{\ln\sqrt{y^2+4}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right|=$$

$$=\left|\exp\left\{-iy\sqrt[4]{\ln^2\sqrt{y^2+4}+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{2}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{2}}{\ln\sqrt{y^2+4}}}{2}+i\sin\frac{\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{2}}{\ln\sqrt{y^2+4}}}{2}\right)\right\}\right|=$$

$$=\exp\left\{y\sqrt[4]{\ln^2\sqrt{y^2+4}+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{2}}\sin\frac{\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{2}}{\ln\sqrt{y^2+4}}}{2}\right\}.$$

Звідси,

$$\ln|f(iy)| = y\sqrt[4]{\ln^2\sqrt{4+y^2}+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{2}}\sin\frac{\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{2}}{\ln\sqrt{4+y^2}}}{2} =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\ln^2\sqrt{4+y^2}+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{2}}\sqrt{1-\cos\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{2}}{\ln\sqrt{4+y^2}}} =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\ln^2\sqrt{4+y^2}+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{2}}\sqrt{1-\frac{\ln\sqrt{4+y^2}}{\sqrt{\ln^2\sqrt{4+y^2}+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{2}}}} =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\ln^2\sqrt{4+y^2}+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{2}}-\ln\sqrt{4+y^2}} \geq$$

$$\geq \frac{y}{\sqrt{2\ln(4+y^2)}}, \quad \text{для} \quad y \geq C > 0.$$

Тому, $f(iy) \notin L^p(0;+\infty)$ для кожного $p > 1$. Отже, $f \notin H^p(\mathbb{C}_+)$.

Звідси, $f \in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$ і $f \notin H^p(\mathbb{C}_+)$. □

Твердження 3.1. *Якщо $f \in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, тоді виконуються наступні умови:*

а) існують майже скрізь на $i\mathbb{R}$ кутові граничні значення;

б) $|f(it)|e^{-\varepsilon|t|} \in L^p(\mathbb{R})$ для будь-якого $\varepsilon > 0$;

в) простір $H^p_\cap$ є повним метричним відносно рівномірної збіжності на компактах.

Доведення. Нехай $f \in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, тоді $f \in H^p_\varepsilon(\mathbb{C}_+)$ для деякого $\varepsilon > 0$. В [94] показано що, функція з простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $p \in (1;+\infty)$ має майже скрізь на $i\mathbb{R}$ кутові граничні значення $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$. Тому $f(iy)e^{-\varepsilon|y|} \in L^p(\mathbb{R})$ для кожного додатного ε.

Якщо $p = \infty$, в [6] показано, що функції з цих просторів мають майже скрізь на $i\mathbb{R}$ кутові граничні значення $f(it)$ і $f(it)e^{-\varepsilon|t|} \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ для кожного $\varepsilon > 0$.

В [94] отримано, що для кожної функції з простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ виконується нерівність

$$|f(z)| \leq \frac{c_1 \exp(c_1|z|)}{\mathrm{Re}\{z\}^{\frac{1}{p}}}.$$

Тому простір $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$ є повним метричним відносно рівномірної збіжності на компактах. $\square$

Нехай B – клас неперервних, зростаючих функцій $\eta : [0; +\infty) \to (0; +\infty)$ таких, що $\eta(r) = o(r)$, при $r \to +\infty$. Позначимо через $H^p_\ominus(\mathbb{C}_+)$ простір аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій f, для яких існує $\eta \in B$, що

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-\eta(r)|\sin\varphi|} dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Теорема 3.5. *Якщо* $f \in H^p_\ominus(\mathbb{C}_+)$, *то* $f \in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$.

Доведення. Нехай $f \in H^p_\ominus(\mathbb{C}_+)$, тоді $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\sigma > 0$. Тоді

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-\eta(r)|\sin\varphi|} e^{-pr\sigma|\sin\varphi| + \eta(r)|\sin\varphi|} dr.$$

Оскільки

$$-pr\sigma|\sin\varphi| + \eta(r)|\sin\varphi| = |\sin\varphi|(-pr\sigma + \eta(r)) < 0,$$

при $r > r_0$, то

$$\int\limits_{r_0}^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \leq \int\limits_{r_0}^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-\eta(r)|\sin\varphi|} dr < +\infty.$$

Тоді

$$\sup\left\{\int\limits_{r_0}^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\int\limits_{r_0}^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-\eta(r)|\sin\varphi|} dr\right\}$$

і

$$\sup\left\{\int\limits_{0}^{r_0} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-\eta(r)|\sin\varphi|} dr\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\int\limits_{0}^{r_0} |f(re^{i\varphi})|^p \exp\{\min_{r\in[0;r_0]}\{-\eta(r)\}|\sin\varphi|\} dr\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\exp\{\min_{r\in[0;r_0]}\{-\eta(r)\}|\sin\varphi|\} \int\limits_{0}^{r_0} |f(re^{i\varphi})|^p dr\right\} \leq$$

$$\leq c_2 \int\limits_{0}^{r_0} |f(re^{i\varphi})|^p dr < +\infty.$$

Тоді знайдеться таке $c_3 = \frac{2p\sigma r_0}{\eta(0)}$ для якого

$$\int\limits_{0}^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \leq c_3 < +\infty.$$

Звідси отримаємо, що $f \in H^p_{\ominus}(\mathbb{C}_+)$. $\square$

Б. В. Винницький описав [94] нулі класу функцій $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ у термінах функції

$$S(r) = \sum_{1<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right) \frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|},$$

де $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$. Нам вдалося встановити наступне твердження.

Теорема 3.6. *Якщо* $f \in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, *то* $S(r) = o(\ln r)$, $r \to +\infty$.

Доведення. Нехай $f \in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, тоді $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для деякого $\sigma > 0$. Скористаємось наступним варіантом формули Карлемана [54], [4], [12]

$$S(r) = \frac{1}{\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln|f(re^{i\varphi})|\cos\varphi d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)|dt - \\ -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)|dh(t)| + O(1). \tag{3.10}$$

В [94] показано, що для кожної функції, що належить до простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma > 0$ перший доданок в правій частині останньої рівності є обмежений сталою незалежною від r і σ, тому цей доданок є обмеженим і для кожної функції з простору $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$. Розглянемо другий доданок

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)|dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)(\ln|f(it)|e^{-\sigma|t|} + e^{\sigma|t|})dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)(|f(it)|e^{-\sigma|t|} + \sigma|t|)dt.$$

Оскільки
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\sigma|t|dt=\frac{1}{\pi}\sigma\ln r$$
і $f(iy)e^{-\sigma|y|}\in L^p(\mathbb{R})$, тоді
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)|dt\le c_4+\frac{1}{\pi}\sigma\ln r.$$
Звідси
$$S(r)=c_5+\frac{1}{\pi}\sigma\ln r-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|.$$
Останній інтеграл від'ємний, його при оцінці можна відкинути. Тоді
$$S(r)\le c_5+\frac{\sigma}{\pi}\ln r.$$
Внаслідок довільності σ одержимо твердження теореми. □

Теорема 3.7. *Якщо* $f\in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, *то* $P(r)=o(\ln r)$, $r\to+\infty$, *де*
$$P(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|.$$
Доведення. Нехай $f\in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, тоді $f\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\sigma>0$. З формули (3.10) отримаємо, що
$$P(r)=K(r)-S(r)+O(1),\quad r\to+\infty$$
де
$$K(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)|dt.$$
Оскільки
$$K(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|f(it)|e^{-\sigma|t|}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\sigma|t|dt\le c_4+\frac{1}{\pi}\sigma\ln r$$

для кожного $\sigma>0$, тоді

$$K(r)=o(\ln r)\quad \text{при } r\to+\infty.$$

Звідси і з теореми 3.6, отримаємо $P(r)=o(\ln r),\quad r\to+\infty.$

□

Теорема 3.8. *Нехай λ_n –довільна послідовність із $\mathbb{C}_+$. Асимтотична рівність $S(r)=o(\ln r)$, $r\to+\infty$, виконується тоді і тільки тоді, коли $S_0(r)=o(\ln r)$, де*

$$S_0(r)=\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\frac{Re\lambda_n}{|\lambda_n|^2}.$$

Доведення. Справді,

$$S_0(r)-S(r)=\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{r^2}\le\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|r}=\frac{s(r)}{r},$$

де

$$s(r)=\sum_{1<|\lambda_n|\le r}\frac{\mathrm{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|}.$$

В [6] доведено, що

$$S(2r)\ge\frac{3s(r)}{4r}.$$

Звідси

$$S_0(r)-S(r)\le\frac{4rS(2r)}{3r}=\frac{4}{3}S(2r).$$

Оскільки $S(r)=o(\ln r)$, то

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{S(r)}{\ln r}=0.$$

Тому

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{S(2r)}{\ln 2r} = 0.$$

Тоді $S(2r) = o(\ln r)$.

Отже,

$$S_0(r) - S(r) = o(\ln r)$$

при $r \to +\infty$.

Протилежне твердження тривіальне. $\square$

3.4 Висновки до розділу 3

У даному розділі одержано опису трансляційно інваріантних підпросторів. Отримано твердження про еквівалентність швидкого швидкого зростання у деякому сенсі по уявній осі та швидкого спадання по дійсній півосі для функцій з простору $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$. Це доповнює результати В. М. Дільного для просторів $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, і $1 \leq p < +\infty$. Тобто, встановлено еквівалентні умови швидкого спадання по додатній осі модуля функції f з простору $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$ до швидкого зростання її модуля на межі.

Такого типу результати використовуються для дослідження циклічності функцій.

В останньому підрозділі досліджуємо властивості простору $H_\cap^p(\mathbb{C}_+)$. Отримано опис нулів та інтегральних граничних функцій цього простору. Показано, що він не співпадає з класичним простором Гарді.

РОЗДІЛ 4

РОЗЩЕПЛЕННЯ ФУНКЦІЙ В ПРОСТОРІ $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$

4.1 Формулювання основного результату

В даному розділі розглянемо проблему розщеплення функцій в просторах Пелі-Вінера W^p_σ на суму двох функцій $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ кожна з яких є "великою" лише першому або четвертому координатному куті. Спочатку введемо ряд означень і допоміжних тверджень.

Нехай W^p_σ, $\sigma > 0$, $p \geq 1$, – простір Пелі-Вінера, тобто простір цілих функцій f експоненціального типу, що не перевищує σ і які належать $L^p(\mathbb{R})$. Цей простір можна також визначити [25, с. 663] як простір цілих функцій f, які задовільняють умову

$$\sup_{\varphi\in(0;2\pi)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

В теорії просторів Пелі-Вінера фундаментальною є наступна теорема.

Теорема П. -В. *Простір $f \in W^2_\sigma$ співпадає з простором фун-*

кцій, що допускають зображення

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(it) e^{itz} dt, \varphi \in L^2(-i\sigma; i\sigma). \qquad (4.1)$$

Аналогічні твердження також відомі для випадків $1 < p < 2$. Для випадку $p = 1$ аналог довів Г. Бер. В іншій формі критерій належності до W_σ^1 був отриманий Р. Боасом та ін.

Теорема Г. Бер. *Простір $f \in W_\sigma^1$ співпадає з простором функцій, які подаються у вигляді* (4.1), *де*

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{-ik\pi t}{\sigma}}, \qquad (c_k) \in l^1 \qquad (4.2)$$

і

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+m} c_{k+m} \frac{k}{1+k^2} \right| < +\infty.$$

Нехай $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $1 \le p < +\infty$, простір аналітичних функцій f в $\mathbb{C}(\alpha;\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ таких, що

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Функції f з простору $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$ [16] мають майже скрізь на $\partial\mathbb{C}\,(\alpha;\beta)$ кутові граничні значення, які теж позначаються через f і $f \in L^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$.

Проблема. *Чи для кожної функції $f \in W_\sigma^1$ можливий розклад $f = \chi + \mu$, де функції χ і μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+$, а також $\chi \in E^1\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$, $\mu \in E^1\left[\mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\right]$?*

Ця Проблема зумовлена питаннями повноти систем функцій [96], вона також становить безпосередній інтерес у теорії інтегральних операторів, дослідженнях оператора зсуву. Ми

пропонуємо новий, відмінний від вказаного в [51], спосіб розв'язування Проблеми.

Функцію χ шукатимемо у вигляді

$$\chi(z) = \chi_1(z) + i\chi_2(-iz), \tag{4.3}$$

де

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\sigma} \varphi(t) e^{itz} dt, \quad \chi_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{0} \varphi(t) e^{itz} dt.$$

Оскільки $\mu = f - \chi$, то надалі під розв'язком проблеми розумітимемо знаходження функції χ.

Ми отримуємо наступне твердження.

Теорема 4.1. *Нехай функція $f \in W_\sigma^1$. Функція χ, визначена рівністю* (4.3), *є розв'язком Проблеми, тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(m - \frac{i}{2} - k\right)\left(m - \frac{i}{2} - ik\right)} \right| < +\infty, \tag{4.4}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(m + \frac{i}{2} + ik\right)\left(m + \frac{i}{2} - k\right)} \right| < +\infty. \tag{4.5}$$

де коефіцієнти c_k визначаються рівністю (4.2).

Приклад 4.1. *Для функції*

$$f(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} z^2} \left(\cos \sigma z - 1\right) \in W_\sigma^1$$

розв'язок Проблеми визначають функції

$$\chi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} z^2} \left(e^{i\sigma z} + i e^{-\sigma z} - 1 - i\right),$$

$$\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} z^2} \left(e^{-i\sigma z} - i e^{-\sigma z} - 1 + i\right).$$

Доведення. Нехай $\varphi(t) = |t| - \sigma$. За теоремою Пелі-Вінера

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} (|t| - \sigma)\, e^{itz} dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} z^2} (\cos \sigma z - 1)\,.$$

Обчислимо χ_1 і χ_2:

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\sigma} (|t| - \sigma) e^{itz} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{0}^{\sigma} t e^{itz} dt - \frac{\sigma}{iz} e^{i\sigma z} + \frac{\sigma}{iz} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma}{iz} e^{i\sigma z} + \frac{e^{i\sigma z}}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{\sigma}{iz} e^{i\sigma z} + \frac{\sigma}{iz} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\sigma z}}{z^2} - \frac{1}{z^2} + \frac{\sigma}{iz} \right)$$

і

$$\chi_2(-iz) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{0} (|t| - \sigma) e^{tz} dt =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\int\limits_{-\sigma}^{0} t e^{tz} dt - \frac{\sigma}{z} + \frac{\sigma}{z} e^{-\sigma z} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\sigma}{z} e^{-\sigma z} + \frac{1}{z^2} - \frac{e^{-\sigma z}}{z^2} - \frac{\sigma}{z} + \frac{\sigma}{z} e^{-\sigma z} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{e^{-\sigma z}}{z^2} \right).$$

За формулою (4.3) отримаємо, що

$$\chi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} z^2} \left(e^{i\sigma z} + i e^{-\sigma z} - 1 - i \right).$$

Отже,

$$\mu(z) = f(z) - \chi(z) = \frac{1}{z^2 \sqrt{2\pi}} \left(e^{i\sigma z} + e^{-i\sigma z} - 2 \right) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}z^2}\left(e^{i\sigma z}+ie^{-\sigma z}-1-i\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}z^2}\left(e^{-i\sigma z}-ie^{-\sigma z}-1+i\right).$$

□

Для доведення теореми 4.1, нам буде потрібно декілька допоміжних лем.

Лема 4.1. *Нехай функція f належить до простору W^1_σ. Тоді функція*
$\chi(x-i\frac{\pi}{2\sigma})$ належить до $L^1(\frac{\pi}{\sigma};+\infty)$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{k}{\left(x-\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x-i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}\right|dx<+\infty, \quad (4.6)$$

де коефіцієнти c_k визначаються рівністю (4.2).

Доведення. Оскільки $f\in W^1_\sigma$, а $W^1_\sigma\subset W^2_\sigma$ [23], то за теоремою Пелі-Вінера функція подається у вигляді (4.1), де φ визначається рівністю (4.2). Оскільки ряди в (4.2) збіжні абсолютно і рівномірно за ознакою Вейєрштраса на кожному відрізку додатної дійсної півосі, то їх можна почленно інтегрувати, тому

$$\chi_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\sigma\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{\frac{-ik\pi t}{\sigma}}e^{itz}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\int\limits_0^\sigma e^{it\left(\frac{-k\pi}{\sigma}+z\right)}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{e^{i\sigma(z-\frac{k\pi}{\sigma})}-1}{i(z-\frac{k\pi}{\sigma})},$$

і

$$\chi_2(-iz)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^0\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{\frac{-ik\pi t}{\sigma}}e^{tz}dt=$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{-\sigma}^{0} e^{t\left(\frac{-ik\pi}{\sigma}+z\right)} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{1-e^{-\sigma(z-i\frac{k\pi}{\sigma})}}{(z-i\frac{k\pi}{\sigma})}.$$

Отримані значення функцій χ_1 і χ_2 підставимо в формулу (4.3), тоді

$$\chi_1(z) + i\chi_2(-iz) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k i \left(\frac{1-e^{i\sigma(z-\frac{k\pi}{\sigma})}}{z-\frac{k\pi}{\sigma}} - \frac{1-e^{-\sigma(z-i\frac{k\pi}{\sigma})}}{z-i\frac{k\pi}{\sigma}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{-ie^{i\sigma(z-\frac{k\pi}{\sigma})}}{z-\frac{k\pi}{\sigma}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{ie^{-\sigma(z-i\frac{k\pi}{\sigma})}}{z-i\frac{k\pi}{\sigma}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k i \frac{(1-i)\frac{\pi k}{\sigma}}{\left(z-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\left(z-i\frac{k\pi}{\sigma}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k e^{i\sigma z}}{z-\frac{k\pi}{\sigma}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k i e^{-\sigma z}}{z-i\frac{k\pi}{\sigma}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(1+i)\pi k}{\sigma\left(z-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\left(z-i\frac{k\pi}{\sigma}\right)}.$$

Звідси

$$\chi(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k e^{i\sigma z}}{z-\frac{k\pi}{\sigma}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k i e^{-\sigma z}}{z-i\frac{k\pi}{\sigma}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(1+i)\pi k}{\sigma\left(z-\frac{k\pi}{\sigma}\right)\left(z-i\frac{k\pi}{\sigma}\right)}. \tag{4.7}$$

Для $z = x - i\frac{\pi}{2\sigma}$, маємо

$$\chi\left(x - i\frac{\pi}{2\sigma}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k i e^{i\sigma x+\frac{\pi}{2}}}{x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k)} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k i e^{-\sigma x+\frac{\pi i}{2}}}{x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\pi k(1+i)}{\sigma(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))}.$$

Отримані доданки відповідно позначимо через $T_1(x)$, $T_2(x)$ і $T_3(x)$, тоді

$$\chi\left(x-i\frac{\pi}{2\sigma}\right)=-T_1(x)+T_2(x)+T_3(x). \tag{4.8}$$

Розглянемо інтеграл по $x\in[\frac{\pi}{\sigma};+\infty)$ від модуля першого доданка

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}|T_1(x)|dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|T_1\left(x+\frac{\pi n}{\sigma}\right)\right|dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|ie^{i\sigma\left(x+\frac{\pi n}{\sigma}\right)+\frac{\pi}{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k c_k}{x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k)+\frac{\pi n}{\sigma}}\right|dx=$$

$$=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k c_k}{x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k)+\frac{\pi n}{\sigma}}\right|dx.$$

Позначимо $k'=k-n$, тоді

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}|T_1(x)|dx=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{k'+n}c_{k'+n}}{x-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{\sigma}k'}\right|dx.$$

Щоб оцінити отриманий інтеграл додамо і віднімемо деякі ряди:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}|T_1(x)|dx=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{k'+n}c_{k'+n}}{x-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{\sigma}k'}-\right.\right.$$

$$-\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{k'+n}c_{k'+n}}{\frac{\pi}{\sigma}\left(-\frac{i}{2}-k'\right)}+\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{k'+n}c_{k'+n}}{\frac{\pi}{\sigma}\left(-\frac{i}{2}-k'\right)}+$$

$$+\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{k'+n}c_{k'+n}k'}{\frac{\pi}{\sigma}(1+k'^2)}-\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{k'+n}c_{k'+n}k'}{\frac{\pi}{\sigma}(1+k'^2)}\Bigg|dx\Bigg).$$

Погрупуємо доданки перший з другим і третій з четвертим:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}|T_1(x)|dx\le\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg(\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\Bigg|\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k'+n}c_{k'+n}\Bigg(\frac{1}{x-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{\sigma}k'}-$$

$$-\frac{1}{-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{\sigma}k'}\Bigg)\Bigg|dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\Bigg|\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k'+n}c_{k'+n}\Bigg(\frac{1}{-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{\sigma}k'}+$$

$$+\frac{k'}{\frac{\pi}{\sigma}+\frac{\pi}{\sigma}k'^2}\Bigg)\Bigg|dx++\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\Bigg|\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{k'+n}c_{k'+n}k'}{\frac{\pi}{\sigma}(1+k'^2)}\Bigg|dx\Bigg)=$$

$$=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}I_1(n)+\sum_{n=1}^{+\infty}I_2(n)+\sum_{n=1}^{+\infty}I_3(n)\right).$$

Розглянемо першу суму. Оскільки ряд

$$\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k'+n}c_{k'+n}\left(\frac{1}{x-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{\sigma}k'}-\frac{1}{-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{\sigma}k'}\right)$$

є рівномірно збіжний за ознакою Вейєрштраса на кожному скінченному відрізку. Тому почленно проінтегрувавши, одержимо

$$\sum_{n=1}^{+\infty}I_1(n)\le\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}|c_{k'+n}|\left|\frac{-x}{\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{\sigma}k'\right)\left(-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{\sigma}k'\right)}\right|dx\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}|c_{k'+n}|\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\frac{-x}{\left(x-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{\sigma}k'\right)\left(-\frac{i\pi}{2\sigma}-\frac{\pi}{\sigma}k'\right)}\right|dx.$$

Тоді, застосувавши теорему про середнє, отримаємо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \left| \frac{-x}{\left(x - \frac{i\pi}{2\sigma} - \frac{\pi}{\sigma}k'\right)\left(-\frac{i\pi}{2\sigma} - \frac{\pi}{\sigma}k'\right)} \right| dx =$$

$$= \frac{\alpha\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2}{\left|\left(\frac{\alpha\pi}{\sigma} - \frac{i\pi}{2\sigma} - \frac{\pi}{\sigma}k'\right)\left(-\frac{i\pi}{2\sigma} - \frac{\pi}{\sigma}k'\right)\right|},$$

де $\alpha \in [0;1]$. Отже,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} I_1(n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} |c_{k'+n}| \frac{\alpha}{\left|\left(\alpha - \frac{i}{2} - k'\right)\left(-\frac{i}{2} - k'\right)\right|}.$$

Змінивши порядок сумування абсолютно збіжного подвійного ряду отримаємо

$$\sum_{n=1}^{+\infty} I_1(n) \leq \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(\alpha - k')^2 + \frac{1}{4}}\sqrt{k'^2 + \frac{1}{4}}} \sum_{n=1}^{+\infty} |c_{k'+n}|,$$

Оскільки

$$\sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(\alpha - k')^2 + \frac{1}{4}}\sqrt{k'^2 + \frac{1}{4}}} \leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{k'^2 + \frac{1}{4}} +$$

$$+b + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k'-1)^2 + \frac{1}{4}} < +\infty$$

і $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{k'+n}| \leq M < +\infty$, де стала M від k' не залежить, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} I_1(n) < +\infty$.

Оцінимо $I_2(n)$. Врахувавши, що підінтегральна функція

$$\left| \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k'+n} c_{k'+n} \left(\frac{1}{-\frac{i\pi}{2\sigma} - \frac{\pi}{\sigma}k'} + \frac{k'}{\frac{\pi}{\sigma} + \frac{\pi}{\sigma}k'^2} \right) \right|$$

не залежить від x, маємо

$$\sum_{n=1}^{+\infty} I_2(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \left| \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k'+n} \left|c_{k'+n}\right| \frac{1-\frac{i}{2}k'}{\frac{\pi}{\sigma}\left(-\frac{i}{2}-k'\right)\left(1+k'^2\right)} \right| dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{\sigma} \left| \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k'+n} \left|c_{k'+n}\right| \frac{1-\frac{i}{2}k'}{\frac{\pi}{\sigma}\left(-\frac{i}{2}-k'\right)\left(1+k'^2\right)} \right|.$$

Змінивши порядок сумування, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{+\infty} I_2(n) = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}}{\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} \frac{1}{(1+k'^2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_{k'+n}\right|.$$

Оскільки

$$\frac{\sqrt{1+\frac{k^2}{4}}}{\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2+4}{k^2+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{3\frac{3}{4}}{k^2+\frac{1}{4}}} \leq 2,$$

то

$$\sum_{n=1}^{+\infty} I_2(n) \leq 2 \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+k'^2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_{k'+n}\right| < +\infty.$$

Тепер розглянемо $I_3(n)$. Оскільки внутрішній ряд не залежить від x, то

$$\sum_{n=1}^{+\infty} I_3(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{k'+n} c_{k'+n} k'}{(1+k'^2)} \right|.$$

Тому, використовуючи теорему Бера, маємо

$$\sum_{n=1}^{+\infty} I_3(n) < +\infty.$$

Отже,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} |T_1(x)|dx < +\infty.$$

Відзначимо, що

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|c_k|}{\left|x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)\right|} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{\pi}{2\sigma} + \frac{\pi k}{\sigma}\right)^2}} \leq \frac{1}{x} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|,$$

тоді

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} |T_2(x)|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k i e^{-\sigma x + \frac{\pi i}{2}}}{x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)} \right| dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| \frac{e^{-\sigma x}}{\left|x - i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)\right|} dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| \int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma x}}{x} dx < +\infty.$$

З умови (4.6) випливає, що

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} |T_3(x)|dx < +\infty.$$

Достатність доведена.

Нехай тепер функція f належить до простору W_σ^1, χ належить до $L^1(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty)$. Покажемо, що тоді виконується умова (4.6). З рівності (4.8) випливає, що

$$T_3(x) = \chi\left(x - \frac{i\pi}{2\sigma}\right) + T_1(x) - T_2(x).$$

При доведенні першої частини леми показано, що $T_1 \in L^1(\frac{\pi}{\sigma};+\infty)$ і $T_2 \in L^1(\frac{\pi}{\sigma};+\infty)$. Тому, $T_3 \in L^1(\frac{\pi}{\sigma};+\infty)$. Це означає, що виконується умова (4.6). □

Лема 4.2. *Нехай функція f належить до W^1_σ. Тоді функція $\chi(iy-\frac{\pi}{2\sigma})$, де χ визначається формулою* (4.3)*, належить до $L^1(\frac{\pi}{\sigma};+\infty)$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(y+i\frac{\pi}{\sigma}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}-k\right)\right)}\right| dy < +\infty, \quad (4.9)$$

де коефіцієнти c_k визначаються рівністю (4.2)*.*

Доведення. Оскільки $f \in W^1_\sigma$, тоді для функції χ справедливе зображення (4.7). Тоді для $z = iy - \frac{\pi}{2\sigma}$ одержимо

$$\chi\left(iy-\frac{\pi}{2\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k i e^{-\sigma y}}{y+i\frac{\pi}{\sigma}\left(k+\frac{1}{2}\right)} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k e^{-\sigma i y+\frac{\pi}{2}}}{y+\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}-k\right)} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\pi k(-1-i)}{\sigma\left(y+i\frac{\pi}{\sigma}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}-k\right)\right)}.$$

Якщо отримані рядів позначити через F_1, F_2 і F_3 відповідно, то має місце рівність

$$\chi\left(iy-\frac{\pi}{2\sigma}\right) = F_1(y)+F_2(y)+F_3(y). \quad (4.10)$$

Легко бачити, що

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|c_k|}{\left|y+i\frac{\pi}{\sigma}(k+\frac{1}{2})\right|} \le \frac{1}{y}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|,$$

тому

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} |F_1(y)|dy < +\infty.$$

Розглянемо інтеграл по $y \in [\frac{\pi}{\sigma}; +\infty)$ від модуля F_2

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} |F_2(y)|dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}} \left| F_2\left(y + \frac{\pi n}{\sigma}\right) \right| dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}} \left| e^{-i\sigma\left(y+\frac{\pi n}{\sigma}\right)+\frac{\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k c_k}{y + \frac{\pi n}{\sigma} + \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2} - k\right)} \right| dy \leq$$

$$\leq \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k c_k}{y + \frac{\pi n}{\sigma} + \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2} - k\right)} \right| dy.$$

Тоді, як і при отриманні оцінки T_1 в леми 4.1, одержимо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} |F_2(y)|dy < +\infty.$$

З умови (4.9) випливає, що

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} |F_3(y)|dy < +\infty.$$

Нехай тепер $\chi(iy - \frac{\pi}{2\sigma}) \in L^1(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty)$. Доведемо, що виконується умова (4.9). З рівності (4.10) отримаємо

$$F_3(y) = \chi\left(y - \frac{\pi}{2\sigma}\right) + F_1(y) - F_2(y).$$

При доведенні першої частини леми показано, що $F_1 \in L^1(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty)$ і $F_2 \in L^1(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty)$ без використання умови (4.9). Тому $F_3 \in L^1(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty)$. Це означає, що виконується умова (4.9). $\square$

4.2 Доведення теореми 4.1

Лема 4.3. *Нехай* $f \in W^1_\sigma$. *Тоді умова* (4.6) *еквівалентна до умови* (4.4).

Доведення. Нехай виконується умова (4.4). Тоді,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(x - \frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+k\right)\right)\left(x - i\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)} \right| dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(x + \frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - k\right)\right)\left(x + \frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - ik\right)\right)} \right| dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(x + \frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - k\right)\right)\left(x + \frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - ik\right)\right)} - \right.$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - k\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - ik\right)} +$$

$$\left. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - k\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - ik\right)} \right| dx \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left(\frac{k}{\left(x + \frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - k\right)\right)\left(x + \frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - ik\right)\right)} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - k\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - ik\right)} \right) \right| dx +$$

$$\left. + \frac{\pi}{\sigma} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - k\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m - \frac{i}{2} - ik\right)} \right| \right).$$

Покажемо, що

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\theta(m;x)dx<+\infty,$$

де

$$\theta(m;x)=\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\left(\frac{k}{\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\right)\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)\right)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)}\right)\right|.$$

Оскільки

$$\frac{k}{\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\right)\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)\right)}=$$

$$=\frac{\sigma}{\pi(1-i)}\left(\frac{1}{x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}-\frac{1}{(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)}\right)$$

і

$$\frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)}=$$

$$=\frac{\sigma}{\pi(1-i)}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}-\frac{1}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)}\right),$$

то

$$\theta(m;x)=\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma}{\pi(1-i)}c_k\left(\frac{-x}{\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{x}{\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)}\right)\right|dx\leq$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma}{\sqrt{2}\pi}\left|c_k\right|\left(\left|\frac{-x}{\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)}\right|+\right.$$

$$\left|\frac{x}{\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)}\right|\Bigg)\,dx.$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\theta(m;x)dx \le \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|\,\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha-k+m)^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(-k+m)^2+\frac{1}{4}}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|\,\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha+m)^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{m^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}}, \tag{4.11}$$

де $\alpha\in[0;1]$. В першій сумі змінимо порядок сумування і позначимо $m'=m-k$, тоді

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|\,\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha-k+m)^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(-k+m)^2+\frac{1}{4}}}\le$$

$$\le\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|\sum_{m'=1-k}^{+\infty}\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha+m')^2+\frac{1}{4}}\sqrt{m'^2+\frac{1}{4}}}$$

$$\le\sum_{k=-\infty}^{0}|c_k|\sum_{m'=1-k}^{+\infty}\frac{1}{m'^2+\frac{1}{4}}+\sum_{k=1}^{+\infty}|c_k|\sum_{m'=1-k}^{+\infty}\frac{1}{(1+m')^2+\frac{1}{4}}<+\infty.$$

Оцінимо другу суму в правій частині рівності (4.11). Легко бачити, що

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|\,\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha+m)^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{m^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}}\le$$

$$\le\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|\,\frac{1}{m^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\le\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|\,\frac{1}{m^2}.$$

тоді,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha+m)^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{m^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}}\leq$$

$$\leq\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}<+\infty,$$

Звідси отримаємо, що

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\theta(m;x)dx<+\infty. \tag{4.12}$$

Отже, виконується умова (4.6).

Нехай тепер виконується умова (4.6), тоді

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)}\right|=$$

$$=\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)}-\right.$$

$$-\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{k}{\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\right)\left(x+i\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{1}{2}-k\right)\right)}dx+$$

$$\left.+\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{k}{\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\right)\left(x+i\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{1}{2}-k\right)\right)}dx\right|\leq$$

$$\leq\sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\left(\frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-ik\right)}-\right.\right.$$

$$-\frac{k}{\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\right)\left(x+i\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{1}{2}-k\right)\right)}\Bigg)\Bigg|\,dx+$$

$$+\sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{k}{\left(x+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{i}{2}-k\right)\right)\left(x+i\frac{\pi}{\sigma}\left(m-\frac{1}{2}-k\right)\right)}\right|dx.$$

Як показано вище при доведенні першої частини леми незалежно від умови (4.4) виконується нерівність (4.12), тому виконується умова (4.4).

□

Лема 4.4. *Нехай функція f належить до W^1_σ. Тоді умова* (4.9) *еквівалентна до умови* (4.5).

Доведення. Нехай виконується нерівність (4.5). Тоді

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{k}{\left(y+i\frac{\pi}{\sigma}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}-k\right)\right)}\right|dy=$$

$$=\sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{k}{\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\right)\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)\right)}\right|dy=$$

$$=\sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{k}{\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\right)\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)\right)}-\right.$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)}+$$

$$\left.+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)}\right|dy\leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\left(\frac{k}{\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\right)\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)\right)}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)}\right)\right|dy+$$

$$\left.+\frac{\pi}{\sigma}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)}\right|\right).$$

Доведемо, що

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\vartheta(m;y)dy<+\infty, \tag{4.13}$$

де

$$\vartheta(m;y)=\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\left(\frac{k}{\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\right)\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)\right)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)}\right)\right|.$$

Оскільки

$$\frac{k}{\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\right)\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)\right)}=$$

$$=\frac{\sigma}{\pi(-1-i)}\left(\frac{1}{y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ki\right)}-\frac{1}{y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)}\right)$$

і

$$\frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sigma}{\pi(-1-i)}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ki\right)}-\frac{1}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)}\right),$$

тоді,

$$\vartheta(k;y)=\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma c_k}{\pi(-1-i)}\left(\frac{-y}{\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m+ki+\frac{i}{2}\right)\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{y}{\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)}\right)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma}{\sqrt{2}\pi}\left|c_k\right|\left(\left|\frac{-y}{\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m+ki+\frac{i}{2}\right)\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{y}{\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)}\right|\right).$$

Використавши теорему про середнє, отримаємо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\vartheta(k;y)dy\leq$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|c_k\right|\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha+m)^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\sqrt{m^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|c_k\right|\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha-k+m)^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(m-k)^2+\frac{1}{4}}},$$

де $\alpha\in[0;1]$. Як показано вище при доведенні леми 4.3, отримані ряди є абсолютно збіжними. Тому виконується умова (4.13). Отже, виконується умова (4.9).

Нехай тепер виконується умова (4.9), тоді

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)}\right|=$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)} - \right.$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\right)\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)\right)} dy +$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m+\frac{i}{2}+ik\right)\right)\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(m-k+\frac{i}{2}\right)\right)} dy \right| \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \vartheta(m;y)dy +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{k}{\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}+ik\right)\right)\left(y+\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{i}{2}-k\right)\right)} \right| dy.$$

Як показано вище при доведенні першої частини леми виконується умова (4.13) незалежно від умови (4.5). Тоді нерівність (4.5) доведено. □

Також для доведення теореми 4.1 нам потрібна наступна теорема типу Фрагмена-Ліндельофа (див. [97], [74]).

Лема 4.5. *Якщо функція χ є аналітичною в $\mathbb{C}(\alpha;\beta)$, має кутові граничні значення майже скрізь на $\partial\mathbb{C}(\alpha;\beta)$, $\chi \in L^p(\partial\mathbb{C}(\alpha;\beta))$, і для деякого $\gamma \in (0;\pi/(\alpha-\beta))$*

$$(\forall \varepsilon > 0) : \sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int_0^{+\infty} |\chi(re^{i\varphi})|^p e^{-\varepsilon r^\gamma} dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

то $\chi \in E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)]$.

Доведення теореми 4.1. *Необхідність.* Нехай функція f належить до W_σ^1 і справедливий її розклад на суму двох функцій $f = \chi + \mu$, де χ і μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+$. Тому, $\chi \in E^1\left[\mathbb{C}\left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right]$, $\mu \in E^1\left[\mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)\right]$. Оскільки $\chi \in E^1\left[\mathbb{C}\left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right]$, то і $\chi(z - \frac{i\pi}{2\sigma}) \in E^1\left[\mathbb{C}\left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right]$ [49]. Тому $\chi(x - \frac{i\pi}{2\sigma}) \in L^1\left(\partial\mathbb{C}\left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Отже, ми отримаємо $\chi(x - \frac{i\pi}{2\sigma}) \in L^1\left(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty\right)$. Тому за лемами 4.1 і 4.3 виконуються умови (4.4). Аналогічно можна показати, що $\chi(iy - \frac{\pi}{2\sigma}) \in L^1\left(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty\right)$. Тому за лемами 4.2 і 4.4 виконується умова (4.5). Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $f \in W_\sigma^1$ і виконуються умови (4.4) і (4.5). Тоді за лемами 4.1 – 4.4, ми отримаємо наступне $\chi(x - \frac{i\pi}{2\sigma}) \in L^1\left(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty\right)$ і $\chi(iy - \frac{\pi}{2\sigma}) \in L^1\left(\frac{\pi}{\sigma}; +\infty\right)$. Оскільки χ є цілою функцією, то $\chi(z - \frac{i\pi}{2\sigma} - \frac{\pi}{2\sigma}) \in L^1\left(\partial\mathbb{C}\left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Оскільки χ належить простору W_σ^2 за теоремою Пелі-Вінера, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ отримаємо

$$\int\limits_0^{+\infty} |\chi(re^{i\varphi} - \frac{i\pi}{2\sigma} - \frac{\pi}{2\sigma})| e^{-\varepsilon r^{\frac{3}{2}}} dr =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} |\chi(re^{i\varphi} - \frac{i\pi}{2\sigma} - \frac{\pi}{2\sigma})| e^{-r\sigma|\sin\varphi|} e^{-\varepsilon r^{\frac{3}{2}} + r\sigma\sin\varphi} dr \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_0^{+\infty} |\chi(re^{i\varphi} - \frac{i\pi}{2\sigma} - \frac{\pi}{2\sigma})|^2 e^{-2r\sigma|\sin\varphi|} dr \int\limits_0^{+\infty} e^{-\varepsilon r^{\frac{3}{2}} + r\sigma} dr \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq b < +\infty,$$

де b не залежить від φ. Тому за лемою 4.5
$\chi(z - \frac{i\pi}{2\sigma} - \frac{\pi}{2\sigma}) \in E^1\left[\mathbb{C}\left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Для доведення теореми розглянемо простір $\tilde{E}^p\left[\mathbb{C}\left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right]$,

$1 \le p < +\infty$, аналітичних функцій в $\mathbb{C}_+$ таких що

$$\max\left\{\sup_{y\in\mathbb{R}}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|}dx\right\};\right.$$

$$\left.\sup_{x>0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|}dy\right\}\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

В [49] встановлено, що якщо $f \in E^p\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$, $1 \le p < +\infty$, то $f \in \tilde{E}^p\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$ і

$$\| f \|_{\tilde{E}^p} \le c_1 \| f \|_{E^p\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]},$$

де стала c_1 не залежить від f.

Звідси випливає, що $\chi(z - \frac{i\pi}{2\sigma} - \frac{\pi}{2\sigma}) \in \tilde{E}^1\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$. Отже, $\chi \in \tilde{E}^1\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Використаємо наступне твердження з [49].

Якщо $f \in \tilde{E}^p\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$, $1 \le p < +\infty$, то $f \in E^p\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$ і

$$\| f \|_{E^p\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]} \le c_2 \| f \|_{\tilde{E}^p},$$

де стала c_2 не залежить від f.

Тому $\chi \in E^1\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Розглянемо функцію

$$\mu(z) = f(z) - \chi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{0}\varphi(t)e^{itz}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\sigma}\varphi(t)e^{itz}dt -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\sigma}\varphi(t)e^{itz}dt + i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{0}\varphi(t)e^{tz}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{0}\varphi(t)e^{itz}dt + i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{0}\varphi(t)e^{tz}dt.$$

Тоді,

$$\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{-ik\pi t}{\sigma}} e^{itz} dt + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{-ik\pi t}{\sigma}} e^{tz} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left(\frac{1 - e^{ik\pi - i\sigma z}}{i\left(z - \frac{k\pi}{\sigma}\right)} + i \frac{1 - e^{ik\pi - \sigma z}}{z - i\frac{k\pi}{\sigma}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k i e^{-i\sigma z}}{z - \frac{k\pi}{\sigma}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k i e^{-\sigma z}}{z - i\frac{k\pi}{\sigma}} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(1+i)\pi k}{\sigma\left(z - \frac{k\pi}{\sigma}\right)\left(z - i\frac{k\pi}{\sigma}\right)}.$$

Отже, функція μ дорівнює

$$\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k i e^{-i\sigma z}}{z - \frac{k\pi}{\sigma}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k i e^{-\sigma z}}{z - i\frac{k\pi}{\sigma}} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(1+i)\pi k}{\sigma\left(z - \frac{k\pi}{\sigma}\right)\left(z - i\frac{k\pi}{\sigma}\right)}.$$

Аналізуючи останню формулу подібно до формули 4.7 одержимо, що $\mu \in E^1\left[\mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)\right]$.

$\square$

4.3 Висновки до розділу 4

Розділ 4 дисертаційної роботи присвячений дослідженню проблеми розщеплення функцій з просторів Пелі-Вінера W_σ^1 на суму двох функцій з простору $H_\sigma^1(\mathbb{C}_+)$, одна з яких є "великою" тільки у першому координатному куті, а інша — тільки в четвертому.

Отримано новий спосіб такого розщеплення та встановлено необхідні і достатні умови розв'язності ним задачі розщеплення. Наведено приклад використання цього способу.

Висновки

У дисертаційній роботі об'єктом дослідження є простори типу Гарді.

Зміст основних результатів дисертації полягає в наступному:

- отримано теореми єдиності для функцій, які належать до просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $1 \leq p < +\infty$;
- одержано теорему єдиності для функцій, аналітичних та обмежених в правій півплощині з вагою $e^{-\sigma|z|}$;
- встановлено для функцій із простору $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, еквівалентність швидкого зростання у деякому сенсі по уявній осі та швидкого спадання по уявній осі;
- знайдено новий спосіб розщеплення функцій із простору W^1_σ, встановлено необхідні та достатні умови, при яких він розв'язує проблему зображення;
- отримано опис нулів та інтегральних функцій, які належать до простору $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, показано, що він не співпадає з класичним простором Гарді.

Результати отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть знайти застосування як у подальших дослідженнях з теорії функцій, теорії інтерполяції, теорії ймовірності та і у інших розділах математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Аветисян К. Л. Весовые пространства гармонических и голоморфных функций : дисс. ... доктора. физ.-мат. наук / К. Л. Аветисян. – Ереван, 2009.– 226 с.

[2] Бер Г. О явлении интерференции в интегральной метрике и аппроксимация целыми функциями экспоненциального типа / Г. Бер// Теор. функц., функц. анал. и прил. –1980. –Т.34, №1. –С.11–24.

[3] Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций / С. Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. – 1989. – V.41, № 6. – С. 686-689.

[4] Винницький Б. В. Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки / Б. В. Винницький, В. М. Дільний // Мат. Студії. –2001. –Т.16, №1. –С.61–70.

[5] Винницький Б. В. Про узагальнення теореми Пелі-Вінера / Б. В. Винницький // Мат. Студії. –1995. –Т.4. –С.37–44.

[6] Винницький Б. В. О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент/ Б. В. Винницький // Укр. мат. журн.– 1994. – Т.46, №5. – С.484-500.

[7] Винницький Б. В. Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних в півсмузі / Б. В. Винницький // Матем. студії. – 1997. – Т.7, №1. – С. 41–52.

[8] Волковыский Л. И. Сборник задач по теории функций комплесного переменного / Л. И. Волковыский, Лунц Г. Л., Араманович И. Г. – М.: Физматлит, 2002. –312 с.

[9] Власов В. И. О весовых пространствах типа Харди / В. И. Власов, А. В. Рачков // Докл. акад. наук. – 1993. – Т.328. – С. 281–284.

[10] Власов В. И. Весовые пространства типа Харди / В. И. Власов, А. В. Рачков. М. : ВЦ РАН, 1991. – 61 с.

[11] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнетт. – М.: Мир, 1984. –470 с.

[12] Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом / Н. В. Говоров. – М.: Наука, 1986. –240 с.

[13] Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций /К. Гофман – М.: ИЛ., 1963. –306 с.

[14] Гурарий В. П. Гармонический анализ в пространствах с весом/ В. П. Гурарий // Труды Моск. математ. общества.– 1976. – Т.35 – С.21-76.

[15] Джрбашян М. М. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости / М. М. Джрбашян // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1978. – Т.42,№ 6. – С. 1322–1384.

[16] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области/М. М. Джрбашян – М.: Наука, 1966. –672 с.

[17] Дільний В. М. Про еквівалентність деяких умов для вагових просторів Гарді/ В. М. Дільний // Укр. мат. журн.– 2006. – Т.58, №9. – С.1257-1263.

[18] Дільний В. Про поведінку на дійсній півосі функцій із вагових просторів Гарді / В. Дільний // Укр. мат. вісн. – 2012. – Т.10, № 4. – С. 455–468.

[19] Дільний В. Про циклічність функцій в одному ваговому просторі Гарді в крузі / В. Дільний // Буковинський мат. журн. – 2014. – Т.2, № 2-3. – С. 86–89.

[20] Дільний В. Про інваріантні підпростори у вагових просторах Гарді / В. Дільний // Укр. мат. журн. – 2014. – Т.66, № 6. – С. 853–857.

[21] Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции / М.А. Евграфов. – М.: Наука, 1979. –320 с.

[22] Капустин В. В. Вещественные пространства в весовых пространствах Харди / В. В. Капустин // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 1999. – № 262. – С. 138–146.

[23] Кондратюк А. А. Отделимость нулей целых функций експоненциального типа и полнота характеров/ А. А. Кондратюк, Ю. Ф. Коробейник // Матем. замет.– 1992. – Т.52, №2. – С.83-91.

[24] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p / П. Кусис. – М.: Наука, 1984. –368 с.

[25] Левин Б. Я. Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов/ Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский // Изв. АН СССР. Сер. матем.– 1975. – Т.39, №3. – С.657-702.

[26] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. – М. : Наука. – 1976. – 538 с.

[27] Любарский Ю. И. Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов/ Ю. И. Любарський // Изв. АН СССР. Сер. матем .– 1988. – Т.52, №3. – С.559-580.

[28] Любарский Ю. И. Представление функций из H^p в полуплоскости и некоторые его приложения / Ю. И. Любарский // Теория функций, функциональный анализ и их приложения : Респ. межвед. науч. сб. / Харьковский государственный университет им. А.М. Горького. – Вып. 38. – Х. : Вища школа, 1982. – С. 76–84

[29] Мартиросян В. М. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях/ В. М. Мартиросян // Изв. АН Армянской ССР. Матем.– 1978. – Т.12, №5-6. – С.559-580.

[30] Романюк А. С. Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Известия РАН. Сер. матем. – 2003. – Т.67, № 2. – С. 61–100.

[31] Седлецький А. М. Классы аналитических преобразований Фурье / А. М. Седлецький. – М. : Физматлит, 2005.–504 с.

[32] Седлецький А. М. Негармонический анализ / А. М. Седлецький. – Итоги науки и техники – 2006. – Т.96, – С. 106-211.

[33] Седлецький А. Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения / А. Седлецький// Матем. сб. – 1975. – Т.96, №1. – С. 75-82.

[34] Скаскив О. Б. К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции / О. Б. Скаскив // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1989. – Т.53, № 3.4. – С. 833–850

[35] Скаскив О. Б. Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле / О. Б. Скаскив, М. Н. Шеремета // Матем. сб. – 1986. – Т.131(173), № 3(11). – С. 385–402.

[36] Шабозов М. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H^2 / М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов //Мат. замет. – 2000. – V.68, № 5. – С. 796–800.

[37] Шеремета М. М. Цілі ряди Діріхле / М. М. Шеремета. – К. : ІСДО. – 1993. – 168 с.

[38] Юлмухаметов Р. С. Расщепление целых функций с нулями в полосе / Р. С. Юлмухаметов // Мат. сб. – 1995. – Т.186, № 7. – С. 147–160.

[39] Юлмухаметов Р. С. Решение проблемы Л. Эренпрайса о факторизации/ Р. С. Юлмухаметов // Мат. сб.– 1999. – Т.190, №4. – С.123-157.

[40] Anderson J. M. Muntz-Szasz type approximation and the angular growth of lacunary integral functions / J. M. Anderson // Trans. Amer. Math. Soc. –1972. –V.169.–P.237–248.

[41] Bakan A. Hardy spaces for the strip / A. Bakan, St. Kaijser // J. Math. Anal. and Appl. – 2007. – V.333, № 3. – P. 347-364.

[42] Beurling A. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space / A. Beurling // Acta Math. – 1949. – V.81. – P. 239-255.

[43] Beurling A. The collected works of Arne Beurling / A. Beurling. – V.2 : Harmonic analysis. – Birkhauser ; Boston, 1989.– 389p.

[44] Benedetto J. Weighted Hardy spaces and the Laplace transform / J. Benedetto, H. Heinig // Lect. Notes. Math. – 1983. – V.992. – P. 240–277.

[45] Boas R. Entire functions/ R. Boas. – N. Y.: Academic Press, 1954. – 276 p.

[46] Bohm A. The Marvelous Consequences of Hardy Spaces in Quantum Physics / A. Bohm, H. Bui, // Geometric Methods in Physics. – 2013. – V.30, № 1. – P. 211-228.

[47] Chyzhykov I. Growth of p-th means of analytic and subharmonic functions in the unit disc and angular distribution of zeros / I. Chyzhykov // 1509.02141.v2/arXiv.org – 2015. – 20 Sep. – P. 1–19.

[48] Dallard T. 2-D walevet transforms: generalisation of the Hardy space and application to experimental studies / T. Dallard, Spedding G. // Eur. J. Mech. B Fluids – 1993. – V.12, № 1. – P. 107–134.

[49] Dilnyi V. M. Equivalent definition of some weighted Hardy spaces / V. M. Dilnyi // Ukr. Math. J. –2008. –V.60,№9. –P.1477–1482.

[50] Dilnyi V. M. On Cyclic Functions In Weighted Hardy Spaces / V. M. Dilnyi // Journ. of Math. Phys., Anal. Geom.. –2011. –V.7,№1. –P.19–33.

[51] Dilnyi V. M. Splitting of some spaces of analytic functions / V. M. Dilnyi // Ufa Mathematical Journal. –2014. –V.6,№2. –P.25–34.

[52] Duren O. Theory of H^p space/ O. Duren – N. Y.: Academic Press, 1970. –251 p.

[53] Eoff C. The discrete nature of the Paley-Wiener spaces / C. Eoff // Proc. of the AMS. – 1995. – V.123, № 2. – P. 505–512.

[54] Fedorov M. A. Some questions of the Nevanlinna theory for the complex Half-Plane / M. A. Fedorov, A. F. Grishin // Math. Phys. Anal. Geom.– 1998. –V.1, №3. –P.223–271.

[55] Fedorov S. I. On a recent result on the intersection of weighted Hardy spaces / S. I. Fedorov // New Zealand Journal of Mathematics–2001. –V.30, №2. –P.119–130.

[56] Folland G., Stein E. Hardy spaces and gomogeneous grups / G. Folland, E. Stein. – Princeton : Princeton Univ. Press, 1982. – 284 p.

[57] Fuchs W. H. J. A generalization of Carlson's Theorem / W. H. J. Fuchs // J. London Math. Soc.–1946. –V.21, №2. –P.106–110.

[58] Garsia-Cuerva J. Weighted H^p spaces / J. Garsia-Cuerva // Rozpr. Matem. – 1979. – V.162. –P. 1–58.

[59] Gavrilov V. I. On a certain theorem of A. L. Shaginyan / V. I. Gavrilov // Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Math. Mekh. – 1966. – V.2. –P. 3–10.

[60] Heins M. Hardy Classes on Riemann Surfaces / M. Heins. – Springer ; Berlin, 1969. – 106 p.

[61] Heitokangas J. Linear Differential Equations with Coefficients in Weighted Bergman and Hardy Spaces / J. Heitokangas, R. Korhonen, J. Rattya // Trans. AMS. – 2008. – V.260, № 2. – P. 1035-1055.

[62] Hedenmalm H. Theory of Bergman Spaces / H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu. – Springer, 2000–286 p.

[63] Hwang J. Uniqueness theorems for bounded holomorphic functions / J. Hwang, F. Schnitzer, W. Seidel // Math. Z.–1971. –V.122, №4. –P.366–370.

[64] Hwang J. A uniqueness theorem for functions of exponential type / J. Hwang// J . Math. Anal. and Appl.–1972. –V.37, №2. –P.452–456.

[65] Hwang J. An extension of Heins and Shaginian's uniqueness theorem for functions holomorphic in a half-plane / J. Hwang// Tamkang J . Math.–1974. –V.5, №1. –P.125–131.

[66] Hwang J. A generalization of Mergelian's uniqueness theorem / J. Hwang// M ic h . Math. J .–1973. –V.20, №2. –P.137–143.

[67] Hwang J. A uniqueness theorem for functions holomorphic in a half–plane / J. Hwang// J. Math. Kyoto Univ.–1982. –V.22, №2. –P.285–292.

[68] Jones P. W. Recent advances in the theory of Hardy Spaces / P. W. Jones // Proceedings of the International Congress of Mathematicians–1983. –V.1, №7. –P.829–839.

[69] Kisliakov S. Partial retractions of weighted Hardy spaces / S. Kisliakov, X. Quanxua // Stud. Math. – 2000. – V.138, № 3. – P. 251-264.

[70] Krasichkov-Ternovskii I. F. An estimate for the subharmonic difference of subharmonic functions. I / I. F. Krasichkov-Ternovskii // Mat.Sb. –1977. –V.102, №2. –P.216–247.

[71] Krasichkov-Ternovskii I. F. An estimate for the subharmonic difference of subharmonic functions. II / I. F. Krasichkov-Ternovskii // Mat.Sb. –1977. –V.103, №1. –P.69–111.

[72] Lax P. Translation invariant subspaces / P. Lax // Acta Math. – 1959. – V.101. – P. 163-178.

[73] Levin B.Ya. Lectures on entire functions /B. Ya. Levin. – Providence, RI: AMS, 1996. –248 p.

[74] Martirosian V. M. On a Theorem of Djrbasian of the Phraugmen-Lindelof Type / V. M. Martirosian // Math. Nachr.–1989. –V.144, №1. –P.21–27.

[75] Matsaev V. I. Adivision theorem for analytic functions with a given majorant,and some of its applications / V.I.Matsaev, E.Z.Mogulskii // J. Soviet Math.–1980. –V.14, №2. –P.1078–1091.

[76] Mashreghi J. Representation Theorems in Hardy Spaces / J. Mashreghi. – Oxford : Oxford Univ. Press, 2009. – 372 p.

[77] Mergelyan S. N. Uniform approximations to functions of a complex variable / S. N. Mergelyan // Uspekhi Mat. Nauk.–1952. –V.7, №2. – P.31–122.

[78] Muller P. F. X. Isomorphisms between H^1 spaces / P. F. X. Muller. – Monografie Matematyczne. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk; Birkhauser Verlag, 2005. –455 p.

[79] Nikol'skii N. K. Selected Problems of the Weighted Approximation and of Spectral Analysis / N. K. Nikol'skii – Trudy Mat. Inst.Steklov, 1974. –276 p.

[80] Nikolski N. K. Operators, functions and systems : an easy reading. Hardy, Hankel, and Toeplitz.V.1. / N. K. Nikolski. – AMS, 2002. –396 p.

[81] Nikolski N. K. Operators, functions and systems : an easy reading. Model Operators and Systems. V.2. / N. K. Nikolski. – AMS, 2002.– 439 p.

[82] Petersen K. Brownian Motion, Hardy Spaces and Bounded Mean Oscillation / K. Petersen. – Cambridge: Cambridge University Press, 1977.– 105 p.

[83] Rooney P. A generalization of the Hardy spaces / P. Rooney // Can. J. Math. – 1964. – V.16. – P. 358–369.

[84] Rosenblum M. Hardy classes and operator theory / M. Rosenblum, J. Rovnyak. – New York: Oxford Univ. Press and Oxford :Clarendon Press , 1985.–161 p.

[85] Rung D. Behavior of holomorphic functions in the until disk on arcs of positive hyperbolic diameter / D. Rung// J. Math. Kyoto Univ.–1968. –V.8, №3. –P.417–464.

[86] Savchuk V. V. Approximation of some classes of holomorphic functions and properties of generating kernels / V. V. Savchuk// Azerb. J. Math. – 2011. – V.1, №2. – 1-6p.

[87] Savchuk V. V. Best linear methods for the approximation of bounded harmonic functions/ V. V. Savchuk// Neliniini Koliv. – 2008. – V.11, №2. –P. 255-264.

[88] Savchuk V. V. Best linear approximation methods and optimal orthonormal systems in the Hardy space./ V. V. Savchuk// Ukr. Math. J. – 2008. – V.60, №5. –P. 730-743.

[89] Savchuk V. M. Best Approximations for the Cauchy Kernel on the Real Axis / V. M. Savchuk, S. O. Chaichenko // Ukr. Math. J. – 2015. – V.66, №11. – P. 1731-1741.

[90] Soldatov A. P. Weighted Hardy classes of analytic functions / A. P. Soldatov // Diff. Uravn. – 2002. – T.38, №6. – P. 809–817.

[91] Strömberg J.-O. Weighted Hardy spaces / J.-O. Strömberg, V. Torchinsky // Lecture Notes in Mathematics. – V. 1381. – Springer, 1989. – 193 p.

[92] Tsutsui Y. An application of weighted Hardy spaces to the Navier-Stokes equations / Y. Tsutsui // J. Funct. Anal. – 2014. – V.266. – P. 1395–1420.

[93] Van Spaendonck R. Seismic applications of complex walevet transforms / Van Spaendonck R. L. C. // Thesis for the degree of Ph. D. – Nijmegen, 2002. – 229 p.

[94] Vinnitskii B. V. On zeros of functions analytic in a half plane / B. V. Vinnitskii, // Matematychni Studii. –1996. –V.16, №1. –P.67-72.

[95] Vynnytskyi B. V. On the factorization of one class of functions analytic in the half-plane / B. V. Vynnytskyi, V. L. Sharan // Matematychni Studii. –2000. –V.14, №1. –P.41–48.

[96] Vynnytskyi B. V. On an analogue of Paley-Wiener's theorem for weighted Hardy spaces / B. V. Vynnytskyi, V. M. Dilnyi // Matematychni Studii. –2000. –V.14, №2. –P.35–40.

[97] Vynnytskyi B. V. On solutions of homogeneous convolution equation generated by singularity / B. V. Vynnytskyi, V. M. Dilnyi // Matematychni Studii. –2003. –V.19, №2. –P.149–155.

[98] Zhang Y. H. On the lower bound for a class of harmonic functions in the half space / Y. H.Zhang, G.T. Deng, K. I. Kou // Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. .–2012. –V.32, №4. –P.1487–1494.

[99] Гіщак Т. Про еквівалентність деяких умов для класу функцій, аналітичних у півплощині / Т. Гіщак // Буковинський мат. журн. – 2014. – Т.2, № 4. – С. 28–33.

[100] Гіщак Т. Про одну теорему єдиності для вагового простору Гарді / Т. Гіщак // Укр. мат. журн. – 2015. – Т.67, № 3. – С. 326–332.

[101] Гищак Т. О теореме единственности для класса функций, аналитических в полуплоскости / Т. И. Гищак, Б. В. Винницкий // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 4. – С. 3–7.

[102] Hishchak T. On splitting functions in Paley-Wiener space / T. Hishchak, V. Dilnyi // Mat. Stud. – 2016. – V.45, № 2. – P. 137 –148.

[103] Hishchak T. On the intersection of weighted Hardy spaces / T. Hishchak, V. Dilnyi // Carpathian Mathematical Publications. – 2016. – V.8, № 2. – P.1–6.

[104] Гіщак Т. Теорема єдиності для вагового простору Гарді / Т. Гіщак // IV міжн. ганська конф, присв. 135 річн. Ганса Гана: Тези доп. – Чернівці, 30 червня–5 липня, 2014. – С. 29.

[105] Hishchak T. On upper-lower splitting in the Paley-Wiener spaces / V. Dilnyi, T. Hishchak, I. Hordienko // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька: Тези доп. – Дрогобич, 25–28 серпня, 2015. – С. 55.

[106] Hishchak T. On decomposition of functions in Paley-Wiener space / T. Hishchak // International conference “Complex Analysis and Related Topics” : Abstracts. – Lviv, Ukraine, May 30 - June 4, 2016.– P. 34-35.