Національний університет «Львівська політехніка»

На правах рукопису

Кунинець Андрій Володимирович

УДК 519.6

ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ СТАЦІОНАРНИХ РІВНЯНЬ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ТА СФЕРИЧНІЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

01.01.07 — обчислювальна математика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Кутнів Мирослав Володимирович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Львів — 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Сингулярні задачі (крайові задачі та задачі Коші) для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь виникають при дослідженні задач квантової механіки та астрофізики [86, 136, 145], хімії [140], механіки [97], а також в інших областях науки (див., напр., [137, 80, 63]). До таких задач зводяться також стаціонарні нелінійні рівняння дифузії та теплопровідності в циліндричній та сферичній системах координат у випадку коли має місце відповідно осьова або центральна симетрія. Крім того, такі крайові задачі виникають при застосуванні методу розділення змінних. Знайти аналітичні розв'язки нелінійних крайових задач здебільшого неможливо, а тому для їх розв'язування використовують чисельні методи, зокрема, метод скінченних різниць.

Серед різницевих схем розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь слід виділити компактні різницеві схеми, тобто схеми, які у випадку диференціального рівняння m-го порядку є $m+1$-точковими. Відомо, що такі схеми стійкі, їх реалізація вимагає невеликої кількості арифметичних дій, крім того у випадку схем високого порядку точності за допомогою цих схем можна знайти розв'язок вихідної задачі на сітках з великими кроками.

У працях А. М. Тіхонова, О. А. Самарського та їх учнів для чисельного розв'язування крайових задач для лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з кусково-гладкими коефіцієнтами та загальними двоточковими крайовими умовами побудовано точні триточкові (компактні) різницеві схеми та триточкові різницеві схеми довільного (наперед заданого) порядку точності.

Вперше підхід до побудови точних триточкових різницевих схем та триточкових різницевих схем високого порядку для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами першого роду був запропонований О. А. Самарським та В. Л. Макаровим. Надалі ці результати були розвинуті та узагальнені на випадок крайових умов третього роду та систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, а також крайових задач на півпрямій в працях О. А. Самарського, В. Л. Макарова, М. В. Кутніва, І. П. Гаврилюка, M.Hermann, Л. Б. Гнатіва, О.І. Паздрій тощо. Крім того, розроблено і обгрунтовано точні та усічені двоточкові різницеві схеми для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Однак, застосовувати класичні різницеві схеми у випадку сингулярних крайових задач не можна, а запропоновані у працях F. Hoog, R. Weiss, M. Kummar, R. Russel, F. Shampine, О.А. Самарського тощо, спеціальні різницеві схеми розв'язування таких задач мають низький порядок точності.

Отже, побудова та обґрунтування нових точних триточкових різницевих схем та триточкокових різницевих схем високого порядку точності розв'язування сингулярних крайових задач першого роду для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку є однією з актуальних задач обчислювальної математики.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертаційної роботи відповідає напрямку досліджень, що проводяться на кафедрі прикладної математики Національного університету «Львівська політехніка», зокрема, темах зареєстрованих в УкрІНТЕІ «Розробка ефективних чисельних методів розв'язування задач Коші, крайових задач та задач на власні числа для звичайних диференціальних рівнянь» (0107U009513), «Побудова і дослідження методів розв'язування задач прикладної математики та інформатики» (0113U005296). В рамках виконання дисертаційної роботи проводилися дослідження у Віденському Технічному Університеті (по австрійському гранту) з двох науково-дослідних проектів «Побудова та обгрунтування точної триточкової різницевої схеми. Порівняння з результатами альтернативних методів», «Порівняння методу корекції дефекту з модифікованим методом Ньютона. Точна триточкова різницева схема для чисельного розв'язування нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку в сферичній системі координат».

Мета і завдання дослідження. *Метою дослідження* є побудова та обґрунтування точних триточкових різницевих схем та триточкових різницевих схем довільного порядку точності на нерівномірних сітках для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з сингулярністю першого роду.

Для досягнення мети дисертаційної роботи необхідно реалізувати такі *завдання*:

- побудувати методи типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності для чисельного розв'язування сингулярних задач Коші
- побудувати та обґрунтувати точні триточкові різницеві схеми розв'язування крайових задач для нелінійних стаціонарних рівнянь в циліндричній та сферичній системах координат;
- розробити алгоритмічну реалізацію точних триточкових різницевих схем через усічені триточкові різницеві схеми довільного порядку точності;
- дослідити існування та єдиність розв'язку усічених триточкових різницевих схем;
- довести збіжність та отримати оцінку похибки усічених триточкових різницевих схем;
- довести збіжність та отримати оцінку похибки ітераційних методів розв'язування різницевих схем;
- перевірити різницеві схеми на тестових прикладах та підтвердити теоретичні висновки шляхом проведення чисельних експериментів.

Об'єктом дослідження є сингулярні крайові задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Предмет дослідження — точні триточкові різницеві схеми та триточкові різницеві схеми довільного порядку точності розв'язування сингулярних крайових задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Методи дослідження. У процесі виконання дисертаційної роботи використано методи теорії різницевих схем, звичайних диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

1. Побудовано нові методи типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності чисельного розв'язування сингулярних задач Коші.

2. Побудовано точні триточкові різницеві схеми на нерівномірній сітці для розв'язування нелінійних крайових задач з сингулярністю першого роду.

3. Отримано умови існування та єдиності розв'язку цих схем, а також доведено збіжність ітераційного методу послідовних наближень для його знаходження.

4. Розроблено ефективну реалізацію точних триточкових різницевих схем через усічені триточкові різницеві схеми високого порядку точності.

5. Доведено існування та єдиність розв'язку усічених триточкових різницевих схем та отримано оцінку точності, а також доведено збіжність методу послідовних наближень для розв'язування триточкових різницевих схем.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Одержані результати можуть бути використані при розв'язуванні практичних задач, математичні моделі яких зводяться до крайових задач (або задач Коші) для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з сингулярністю першого роду, а також при розробці програмних пакетів для розв'язування таких задач.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, що складають основний зміст дисертаційної роботи, одержані автором самостійно. У роботах, виконаних у співавторстві, науковому керівнику професору М. В. Кутніву належать постановка задачі та обговорення теоретичних і практичних результатів. У роботі, виконаній у співавторстві з М. Круль та М.В. Кутнівом автору належить розробка точних триточкових різницевих схем для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь у сферичній системі координат.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах: Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробагатька, 19–23 вересня 2011 р., Дрогобич; Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача, 2013 р., Львів; Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки», 23-24 квітня 2014 р., Київ; П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 15-17 травня 2014 р., Київ; VI міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» – 2014 р., Кам'янець-Подільський; наукові конференції професорсько-викладацького складу Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка»; науковий семінар «Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики» відділів динаміки та стійкості багатовимірних систем і обчислювальної математики Інституту математики НАН України (керівники академік І. О. Луковський та академік В. Л. Макаров); наукові семінари кафедр прикладної математики та обчислювальної математики (Національний університет «Львівська політехніка», 2011–2016 р.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 13 друкованих працях, серед них: 1 праця — у журналі, який входить до наукометричних баз (Scopus, Web of Science) [126], 4 статті — у фахових наукових виданнях за спеціальністю «Обчислювальна математика» [13, 15, 16, 130], 8 праць — тези доповідей чи матеріали наукових конференцій [12, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

Структура та обсяг роботи. Робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи — 158 сторінки, список використаних джерел охоплює 154 найменувань.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Для чисельного розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь найчастіше використовують такі методи: метод стрільби ([2, 3, 9, 11, 38, 39, 37, 65, 82, 83, 92, 93]), колокації ([70, 151, 71, 69, 8, 57, 68, 67, 94, 142, 115, 118, 141, 142]), скінченних різниць [1, 4, 7, 36, 41, 43, 44, 45, 49, 50, 51, 66, 76, 87, 90, 95, 103, 104, 129]), скінченних елементів [35, 36, 146, 61, 72, 78], рядів Тейлора [113], декомпозиції Адомяна ([99, 117, 111]), диференціальних перетворень ([91, 144]), гомотопічних збурень [147] тощо.

1.1 Точні та усічені різницеві схеми розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

Теорію точних триточкових різницевих схем (ТТРС) та усічених триточкових різницевих схем (ТРС) довільного порядку точності для лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з загальними крайовими умовами розробили А.М. Тихонов, О.А. Самарський та їх учні (див. [52, 53, 32, 31, 48, 29, 47, 34]).

Досліджувалася лінійна крайова задача

$$\begin{gathered} L^{(k,q)}u \equiv \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2 \end{gathered} \tag{1.1}$$

за умов

$$0 < c_1 \leq k(x), \quad |q(x)| \leq c_2, \quad k(x), q(x), f(x) \in Q^{(0)}[0,1], \tag{1.2}$$

де $Q^{(0)}[0,1]$ — клас кусково-неперевних функцій із скінченною кількістю точок розриву першого роду. Для задачі (1.1), (1.2), так звана ТТРС на рівномірній сітці $\bar{\omega}_h = \{x_j = jh, j = 0, 1, ..., N, h = 1/N\}$, тобто схема, розв'язок якої збігається з проекцією точного розв'язку задачі на сітку, була побудована в роботі [52]. Крім того у цій роботі було розроблено та обгрунтовано алгоритмічну реалізацію ТТРС через усічені ТРС рангу n. Ці результати в [53] були узагальнені для нерівномірної сітки $\hat{\bar{\omega}}_h = \{x_j \in [0, 1] : j = 0, 1, ..., N, h_j = x_j - x_{j-1}\}$ і крайових умов третього роду, а в [48] на випадок, коли $k(x), q(x), f(x)$ є узагальненими функціями. Запропоновані в [52, 53, 48] дозволяють досягти будь-який порядок точності для довільних кусково-неперервних функцій $k(x), q(x)$ та $f(x)$. Однак, суттєвим недоліком таких схем було те, що у випадку змінних коефіцієнтів задачі (1.1), (1.2) практичне застосування таких схем, вимагає обчислення багатократних інтегралів на кожному інтервалі $[x_j, x_{j+1}]$ сітки.

У працях [29, 47] було показано, що коефіцієнти і права частина ТТРС розв'язування задачі (1.1), (1.2) в довільному вузлі x_j сітки $\hat{\omega}_h$ виражаються через розв'язки чотирьох допоміжних задач Коші з гладкими коефіцієнтами. Такі задачі Коші можна наближено розв'язати за один крок за допомогою будь-яких однокрокових методів (рядів Тейлора чи методу Рунге-Кутта) порядку точності $\bar{n} = 2[(n + 1)/2]$, де $n \in \mathbb{N}$, $[\cdot]$ — ціла частина аргументу в дужках. Тоді замість ТТРС отримаємо усічену ТРС порядку точності n.

ТТРС і її алгоритмічну реалізацію через усічені ТРС довільного порядку точності для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{du}{dx}\right) - Q(x)u(x) = -f(x), \quad x \in (0, 1) \tag{1.3}$$

з крайовими умовами Діріхле

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u, f, \mu_1 \in \mathbb{R}^d \tag{1.4}$$

розроблено в працях [32, 34]. Матриці $K(x) = [k_{ij}(x)]_{i,j=1}^d$ і $Q(x) = [q_{ij}(x)]_{i,j=1}^d$ та вектор $f(x) = \{f_i(x)\}_{i=1}^d$ задовольняють умови

$$C_1 \|v\|^2 \leq (K(x)v, v), \quad C_1 > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^d \quad \forall x \in [0, 1], \tag{1.5}$$

$$k_{ij}(x) \in Q^{n+1}[0, 1], \quad q_{ij}(x) \in Q^n[0, 1], \quad f_i(x) \in Q^n[0, 1], \tag{1.6}$$

де $\mathbb{R}^d$ — простір d-вимірних векторів, (u,v) — скалярний добуток в $\mathbb{R}^d$, Q^n — клас функцій з кусково-неперервними похідними до n-го порядку включно зі скінченною кількістю точок розриву першого роду.

Вперше, підхід до побудови точних та усічених ТРС на рівномірній сітці $\bar{\omega}_h$ для нелінійних крайових задач

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2,$$

був запропонований в [33]. Надалі, ці результати були розвинуті та повністю обгрунтовані в [26], а для монотонних нелінійних звичайних диференціальних рівнянь в праці [23]. Нова алгоритмічна реалізація ТТРС для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на нерівномірній сітці $\hat{\bar{\omega}}_h$ через ТРС порядку точності $\bar{n}$ запропонована в [133].

Основи теорії компактних точних та усічених різницевих схем для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь розроблено в праці [109].

Точні двоточкові різницеві схеми (ТДРС) та двоточкові різницеві схеми (ДРС) довільного порядку точності для нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з нероздільними крайовими умовами:

$$u'(x) + A(x)u = f(x,u), \quad x \in (0,1), \quad B_0u(0) + B_1u(1) = d, \tag{1.7}$$

$$A(x), B_0, B_1, \in \mathbb{R}^{d\times d}, \quad \operatorname{rank}[B_0, B_1] = d, \quad f(x,u), d, u(x) \in \mathbb{R}^d,$$

були вперше побудовані та обгрунтовані в [135, 106]. Крім того, в [108] розроблено новий адаптивний алгоритм чисельного розв'язування крайових задач (1.7) за допомогою ДРС високого порядку точності із заданою точністю та автоматичним вибором вузлів сітки.

В праці [5] побудовано ТТРС та усічені ТРС на нерівномірній сітці $\hat{\omega}_h$ для нелінійної крайової задачі

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f\left(x, u, \frac{du}{dx}\right), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \tag{1.8}$$

при виконанні умов

$$0 < c_1 \le k(x) \le c_2 \quad \forall x \in [0,1] \quad k(x) \in Q^1[0,1], \tag{1.9}$$

$$f_{u\xi}(x) \equiv f(x,u,\xi) \in Q^0[0,1] \quad \forall u,\xi \in \mathbb{R}^1,$$
$$f_x(u,\xi) \equiv f(x,u,\xi) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^2) \quad \forall x \in [0,1], \tag{1.10}$$

$$|f(x,u,\xi) - f_0(x)| \le c(|u|)[g(x) + |\xi|] \quad \forall x \in [0,1],\ u,\xi \in \mathbb{R}^1, \tag{1.11}$$

$$[f(x,u,\xi) - f(x,v,\eta)](u-v)$$
$$\le c_3\left(|u-v|^2 + |\xi-\eta|^2\right) \quad \forall x \in [0,1],\ u,v,\xi,\eta \in \mathbb{R}^1, \tag{1.12}$$

$$0 \le c_3 < \frac{\pi^2}{\pi^2+1}c_1, \tag{1.13}$$

де $c(t)$ — неперервна функція, $f_0(x) \in L_2(0,1)$, $g(x) \in L_1(0,1), Q^p[0,1]$ — клас функцій, що мають p кусково-неперервних похідних зі скінченною кількістю точок розриву першого роду, а c_1, c_2, c_3 — деякі константи.

Виберемо на інтервал $(0,1)$ нерівномірну сітку $\hat{\omega}_h$, яка включатиме точки розриву (відносно x) функцій $k(x)$, $f(x,u,\xi)$. Позначимо множину точок розриву через ρ і припустимо, що N таке, що $\rho \subseteq \hat{\omega}_h$. В точках розриву розв'язок задачі повинен задовольняти умови неперервності

$$u(x_i-0) = u(x_i+0), \quad k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i-0} = k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i+0} \quad \forall x_i \in \rho.$$

ТТРС для (1.8) має вигляд

$$(au_{\bar{x}})_{\hat{x}} = -\varphi(x,u) \quad x \in \hat{\omega}_h, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \tag{1.14}$$

де

$$u_{\bar{x},j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j},\ u_{x,j} = \frac{u_{j+1}-u_j}{h_{j+1}},\ u_{\hat{x},j} = \frac{u_{j+1}-u_j}{\hbar_j},\ \hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2},$$

$$a(x_j) = \left[\frac{1}{h_j}V_1^j(x_j)\right]^{-1}, \quad j = 1,2,...,N,$$
$$\varphi(x_j,u) = \hbar_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^j(x_j,u) + (-1)^\alpha\frac{Y_\alpha^j(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^j(x_j)}\right],$$
$$j = 1,2,...,N-1. \tag{1.15}$$

Функції $Y_\alpha^j(x,u), Z_\alpha^j(x,u), \alpha=1,2$ є розв'язками задач Коші

$$\begin{aligned}
&\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx}=\frac{Z_\alpha^j(x,u)}{k(x)}, \quad \frac{dZ_\alpha^j(x,u)}{dx}=-f\left(x, Y_\alpha^j(x,u), \frac{Z_\alpha^j(x,u)}{k(x)}\right),\\
&\qquad\qquad x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha},\\
&Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)=u_{j+(-1)^\alpha}, \quad Z_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)=k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},\\
&\qquad\qquad j=2-\alpha,\ 3-\alpha,...,N+1-\alpha, \quad \alpha=1,2,
\end{aligned} \tag{1.16}$$

а $V_\alpha^j(x)$ — розв'язками задач Коші

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_\alpha^j(x)}{dx}=\frac{(-1)^{\alpha+1}}{k(x)}, \quad x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha},\\
&V_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})=0, \quad j=2-\alpha, 3-\alpha,...,N+1-\alpha, \quad \alpha=1,2.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Для того, щоб побудувати ТТРС (1.14), (1.15) для $j=2-\alpha,3-\alpha,...,N+1-\alpha$ необхідно розв'язати задачі Коші (1.16), (1.17) вперед ($\alpha=1$) і назад ($\alpha=2$). Ці задачі розв'язуються чисельно використовуючи будь-який однокроковий метод, наприклад метод Рунге-Кутта порядку точності $\bar{n}$. Нехай $Y_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j,u), V_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j)$ наближає $Y_\alpha^j(x_j,u), V_\alpha^j(x_j)$ відповідно, з порядком $\bar{n}$, а $Z_\alpha^{(n)j}(x_j,u)$ наближає $Z_\alpha^j(x_j,u)$ з порядком n.

Підставляючи в ТТРС замість точних розв'язків задач Коші відповідні чисельні розв'язки одержимо ТРС рангу $\bar{n}$

$$\begin{aligned}
&(a^{(\bar{n})}y_{\bar{x}}^{(\bar{n})})_{\hat{x},j}=-\varphi^{(\bar{n})}(x_j,y^{(\bar{n})}), \quad j=1,2,\ldots N-1,\\
&y_0^{(\bar{n})}=\mu_1, \quad y_N^{(\bar{n})}=\mu_2,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

де

$$a^{(\bar{n})}(x_j)=\left[\frac{1}{h_j}V_1^{(\bar{n})j}(x_j)\right]^{-1},$$

$$\varphi^{(\bar{n})}(x_j,u)=\hbar_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^{(n)j}(x_j,u)+(-1)^\alpha\frac{Y_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j)}\right].$$

Наступна теорема характеризує точність усіченої ТРС (1.18).

Теорема 1.1 . *Нехай виконуються припущення (1.9)–(1.13) та*

$$k(x) \in Q^{n+1}[0,1], \quad f(x,u,\xi) \in \bigcup_{j=1}^{N} \mathbb{C}^n \left([x_{j-1}, x_j] \times \mathbb{R}^2 \right),$$

тоді $\exists h_0 > 0$ *такі, що* $\forall \{h_j\}_{j=1}^{N} : |h| = \max\limits_{1 \le j \le N} h_j \le h_0$ *ТРС (1.18) має єдиний розв'язок з оцінкою похибки*

$$\left\| y^{(\bar{n})} - u \right\|_{1,2,\hat{\omega}_h}^{*} = \left[\left\| y^{(\bar{n})} - u \right\|_{0,2,\hat{\omega}_h}^{2} + \left\| k \frac{dy^{(\bar{n})}}{dx} - k \frac{du}{dx} \right\|_{0,2,\hat{\hat{\omega}}_h}^{2} \right]^{1/2} \le M \left| h \right|^{\bar{n}},$$

де

$$\|y\|_{0,2,\hat{\omega}_h}^2 = \sum_{\xi \in \hat{\omega}_h} \hbar(\xi) u^2(\xi), \quad \|y\|_{0,2,\hat{\hat{\omega}}_h}^2 = \sum_{\xi \in \hat{\hat{\omega}}_h} \hbar(\xi) u^2(\xi),$$

$$\begin{aligned} k(x) \frac{dy^{(\bar{n})}}{dx} \bigg|_{x=x_0} &= Z_2^{(n)0} \left(x_0, y^{(\bar{n})} \right) + \frac{Y_2^{(\bar{n})0} \left(x_0, y^{(\bar{n})} \right) - y_0^{(\bar{n})}}{V_1^{(\bar{n})1}(x_1)}, \\ k(x) \frac{dy^{(\bar{n})}}{dx} \bigg|_{x=x_j} &= Z_1^{(n)j} \left(x_j, y^{(\bar{n})} \right) + \frac{y_j^{(\bar{n})} - Y_1^{(\bar{n})j} \left(x_j, y^{(\bar{n})} \right)}{V_1^{(\bar{n})j}(x_j)}, \\ j &= 1, 2, ..., N, \end{aligned} \tag{1.19}$$

та константа M *не залежить від* $|h|$.

Отже, ТТРС реалізується через усічені ТРС рангу $\bar{n}$, для яких доведено, що їх порядок точності є $\bar{n}$. Побудовано також наближення потоку (1.19) у вузлах сітки, порядок точності якого такий самий як і розв'язку усіченої ТРС, тобто рівний $\bar{n}$.

З практичної точки зору, для знаходження розв'язку ТРС (1.18) доцільно застосувати модифікований метод Ньютона

$$\begin{aligned} &\left(a^{(\bar{n})} \nabla y_{\bar{x}}^{(\bar{n},m)} \right)_{\hat{x},j} + \frac{\partial f \left(x_j, y_j^{(\bar{n},m-1)}, \frac{dy^{(\bar{n},m-1)}}{dx} \Big|_{x=x_j} \right)}{\partial u} \nabla y_j^{(\bar{n},m)} \\ &\quad + \frac{\partial f \left(x_j, y_j^{(\bar{n},m-1)}, \frac{dy^{(\bar{n},m-1)}}{dx} \Big|_{x=x_j} \right)}{\partial \xi} \nabla y_{\bar{x},j}^{(\bar{n},m)} \\ &= -\varphi^{(\bar{n})} \left(x_j, y^{(\bar{n},m-1)} \right) - \left(a^{(\bar{n})} y_{\bar{x}}^{(\bar{n},m-1)} \right)_{\hat{x},j}, \quad j = 1, 2, ..., N-1, \end{aligned}$$

$$\nabla y_0^{(\bar{n},m)} = 0, \quad \nabla y_N^{(\bar{n},m)} = 0,$$
$$y_j^{(\bar{n},m)} = y_j^{(\bar{n},m-1)} + \nabla y_j^{(\bar{n},m)}, \quad j = 0, 1, ..., N, \quad m = 1, 2, ...$$

Для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f\left(x, u, \frac{du}{dx}\right), \quad x \in (0,1),$$

з крайовими умовами третього роду

$$k(0)\frac{du(0)}{dx} - \beta_1 u(0) = -\mu_1, \quad -k(1)\frac{du(1)}{dx} - \beta_2 u(1) = -\mu_2,$$

ТРС порядку точності $\bar{n}$ побудовано в [110, 127].

В [24, 25, 6] було розроблено точну триточкову різницеву схему та її алгоритмічну реалізацію через триточкові різницеві схеми високого порядку точності для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами Діріхле

$$\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{du}{dx}\right] = -f\left(x, u, \frac{du}{dx}\right), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \quad (1.20)$$

де $K(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}, f\left(x, u, \xi\right), \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^d$ є заданими та $u(x) \in \mathbb{R}^d$ є невідомими векторами.

Розглянемо нелінійну крайову задачу на півпрямій

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2} - m^2 u = -f(x,u), \quad x \in (0,\infty), \\ &u(0) = \mu_1, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0, \end{aligned} \quad (1.21)$$

де $m \neq 0$ є дійсною константою. Для цієї задачі в працях [105, 107] побудовано ТТРС на скінченній нерівномірній сітці $\hat{\omega}_h$ з точною нелінійною крайовою умовою в останньому вузлі сітки та її алгоритмічну реалізацію через ТРС порядку точності $\bar{n}$, а також розроблено новий адаптивний алгоритм чисельного розв'язування задачі (1.21) із заданою точністю.

Для нелінійних крайових задач на півпрямій вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2} + m^2\frac{du}{dx} = -f(x,u), \quad x \in (0,\infty), \quad m \neq 0, \\ &u(0) = \mu_1, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

точна та усічена триточкові різницеві схеми на скінченній нерівномірній сітці побудовано в працях [132], [27].

1.2 Чисельні методи розв'язування сингулярних задач

Застосування класичних багатокрокових методів та методів Рунге-Кутта високого порядку точності до розв'язування сингулярних задач Коші призводить до пониження порядку точності цих методів [120], [121]. Так при застосуванні будь-яких s-ступеневих явних методів Рунге-Кутта до розв'язування сингулярних задач Коші для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь в загальному випадку порядок точності цих методів не може бути вище ніж 2. Екстраполяційні методи підвищення точності, які грунтуються на методах низького порядку точності не працюють ефективно, тому що у випадку сингулярних задач не існує правильного асимптотичного розкладу похибки цих методів (див. [102]).

У роботах [124], [125] використовується ітераційний метод дефекту корекції (див.,напр., [81, 83, 85]) прискорення швидкості збіжності неявного методу Ейлера, який грунтується на запропонованій в [154] оцінці глобальної похибки методів Рунге-Кутта. Ідея ітераційного методу дефекту корекції полягає в наступному. Розглянемо нелінійну сингулярну задачу Коші першого порядку

$$\begin{aligned} &z'(t) = \frac{M(t)}{t} z(t) + f(t, z(t)), \quad t \in (0,1], \\ &z(0) = \beta, \quad z \in C[0,1], \end{aligned} \tag{1.23}$$

де z, f вектор-функції розміром n, $M(t)$ – матриця розміром $n \times n$, β вектор розміром $r \leqslant n$. Визначимо рівномірну сітку $\omega_h = \{t_i = ih, i = 1, 2, ..., N, h = 1/N\}$. Припустимо, що відомо наближений розв'язок $z_h^{[0]} := z_h$, отриманий за допомогою неявної схеми Ейлера на сітці ω_h з $N = mN_1, m, N_1 \in \mathbb{N}$ та $h = \frac{1}{mN_1} = \frac{1}{N}$, і позначимо через $p^{[0]}(t) = p_i^{[0]}(t),\ i = 0, ..., N_1 - 1$ кусковий поліном степеня m що інтерпулює значення $z_h^{[0]}$,

$$p_i^{[0]}(t_j) = z_j^{[0]}, \quad j = im, ..., (i+1)m, \quad i = 0, ..., N_1 - 1.$$

Використовуючи інтерполяційну функцію, будується суміжна задача пов'язана з (1.23) і розв'язується для $p^{[0]}(t)$,

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{M(t)}{t} z(t) + f(t, z(t)) + d^{[0]}(t), \quad t \in (0,1], \\ z(0) &= p^{[0]}(0) = \beta, \end{aligned} \tag{1.24}$$

де

$$d^{[0]}(t) := p^{[0]\prime}(t) - \frac{M(t)}{t} p^{[0]}(t) - f(t, p^{[0]}(t)).$$

Зауважимо, що в точках $t_i = t_{im}, i = 1, ..., N_1 - 1$ похідна $p^{[0]\prime}$ не є неперервною і має скачки. Розклавши в ряд Тейлора $p^{[0]}(t)$ в точці $t = 0$ можна показати, що $d^{[0]}(t)$ є обмежена та інтегрована.

Задачу (1.24) розв'язують за допомогою неявної схеми Ейлера і одержують наближений розв'язок $p_h^{[0]}$ для $p^{[0]}(t)$. Це означає, що для розв'язку суміжної задачі (1.24) відома глобальна похибка, яку використовують для оцінки невідомої похибки задачі (1.23),

$$\varepsilon_h = R_h(z) - z_h \approx \delta_h^{[0]} := R_h\left(p^{[0]}\right) - p_h^{[0]} = z_h^{[0]} - p_h^{[0]}, \tag{1.25}$$

де $R_h(z) = (z(t_0), z(t_1), ...z(t_N))$, — проекція функції $z(t)$ на простір сіткових векторів. Якщо значення z_h є добрим наближенням для значень розв'язку $R_h(z)$ в точках сітки, то функція $p^{[0]}(t)$ є добрим наближенням для розв'язку $z(t)$. Отже, дефект $d^{[0]}(t)$ є малим і тому суміжна задача (1.24) та задача (1.23) є близькими, тобто глобальна похибка розв'язку (1.24) добре наближає глобальну похибку розв'язку (1.23), і крім того, оцінка (1.25) дає надійну величину цієї похибки.

Оскільки відома оцінка для глобальної похибки розв'язку $z_h^{[0]}$, то можна покращити цей розв'язок за допомогою формули

$$z_h^{[1]} := z_h^{[0]} + \delta_h^{[0]} = z_h^{[0]} + \left(R_h\left(p^{[0]}\right) - p_h^{[0]}\right).$$

Ці значення використовуються для визначення нової інтерполяційної функції $p^{[1]}(t)$ через залежність $p_i^{[1]}(t_j) = z_j^{[1]},\ j = im, ..., (i+1)m,\ i = 0, ..., N_1 - 1$, і асоційований дефект матиме вигляд

$$d^{[1]}(t) := p^{[1]\prime}(t) - \frac{M(t)}{t} p^{[1]}(t) - f(t, p^{[1]}(t)).$$

Наступна суміжна задача записується так

$$\begin{aligned} &z'(t) = \frac{M(t)}{t} z(t) + f(t, z(t)) + d^{[1]}(t), \quad t \in (0, 1], \\ &z(0) = \beta, \end{aligned}$$

яку розв'язують знову за схемою Ейлера, щоб одержати наближення $p_h^{[1]}$ для корекції основного розв'язку,

$$z_h^{[2]} := z_h^{[0]} + \delta_h^{[1]} = z_h^{[0]} + \left(R_h \left(p^{[1]} \right) - p_h^{[1]} \right).$$

Таку процедуру повторюють ітераційно.

Доведено (див. [124], [125]), що для достатньо гладких f та M для наближеного розв'язку $z_h^{[j]}, j = 0, 1, ..., m - 1$ задачі (1.23) справджується оцінка $\|z_h^{[j]} - R_h(z)\|_h = O(h^{j+1})$, тобто методу дефекту корекції за одну ітерацію дозволяє підвищити точность розв'язку на одиницю.

Розглянемо більш детально методи розв'язування сингулярних крайових задач першого роду.

У [44] розглядалося рівняння вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^n} \frac{d}{dx} \left(x^n k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad n = 1, 2, \\ &0 < c_1 \leqslant k(x) \leqslant c_2, \quad q(x) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

До таких рівнянь зводяться стаціонарні задачі дифузії або теплопровідності з осьовою симетрією ($n = 1$) та з центральною симетрією ($n = 2$).

При $x = 0$ ставиться умова обмеження $|u(0)| < \infty$, яка еквівалентна умові

$$\lim_{x \to 0} x^n k(x) \frac{du}{dx} = 0, \tag{1.27}$$

а при $x = 1$ — звичайна крайова умова, наприклад,

$$u(1) = \mu_2. \tag{1.28}$$

Припустимо, що $k(x), q(x), f(x)$ — розривні функції. Введемо нерівномірну сітку $\widehat{\overline{\omega}}_h = \{x_i \in [0,1], \ i = 0,1,\dots,N, \ x_0 = 0, \ x_N = 1\}$, з величиною кроку $h_i = x_i - x_{i-1} > 0, \ i = 1,2,\dots,N$ так, щоб точки розриву функцій $k(x), q(x), f(x)$ були вузловими точками сітки. Різницева схема для задачі (1.26)–(1.28) виглядатиме так

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^n}\left(\bar{x}^n a y_{\bar{x}}\right)_{\hat{x}} - dy = -\varphi(x), \quad x = x_i, \quad i = 1,2,...,N-1, \\ &\frac{a_1 y_{x,0}}{h_1/(2(n+1))} - q_0 y_0 = -f_0, \quad y_N = \mu_2, \end{aligned} \tag{1.29}$$

де

$$\begin{aligned} &\bar{x}_i = x_i - 0,5h_i, \quad \hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}, \\ &y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}, \quad y_{\hat{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\hbar_i}. \end{aligned}$$

Коефіцєнт $a_i = \left(\dfrac{1}{h_i}\displaystyle\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\right)^{-1}$ (з практичного погляду зручно мати простіші формули для обчислення a_i, наприклад $a_i = k_{i-1/2}$), а φ_i та d_i визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{h_i}{2\hbar_i}\left(1 - \frac{nh_i}{4x_i} + \frac{n(n-1)h_i^2}{24x_i^2}\right) f_{i-0} + \\ &+ \frac{h_{i+1}}{2\hbar_i}\left(1 + \frac{nh_{i+1}}{4x_i} + \frac{n(n-1)h_{i+1}^2}{24x_i^2}\right) f_{i+0}, \\ d_i &= \frac{h_i}{2\hbar_i}\left(1 - \frac{nh_i}{4x_i} + \frac{n(n-1)h_i^2}{24x_i^2}\right) q_{i-0} + \\ &+ \frac{h_{i+1}}{2\hbar_i}\left(1 + \frac{nh_{i+1}}{4x_i} + \frac{n(n-1)h_{i+1}^2}{24x_i^2}\right) q_{i+0}, \end{aligned} \tag{1.30}$$

де $f_{i\pm0} = f(x_i \pm 0), \quad q_{i\pm0} = q(x_i \pm 0)$.

Доведено (див. [44, с.160]), що різницева схема (1.29), (1.30) має другий порядок точності.

У роботі [146] розглядається задача

$$
\begin{aligned}
&u''(x) + \frac{k}{x}u'(x) + f(x, u(x)) = 0, \quad 0 < x < b, \quad k = 0, 1, 2,\\
&u'(0) = 0, \quad u(b) = B,
\end{aligned} \tag{1.31}
$$

яку розв'язують трьома способами:

- колокаційним методом другого порядку;
- різницевою схемою другого порядку;
- методом скінченних елементів (другого порядку точності).

Автори F. R. de Hoog та R. Weiss (див. [119]) вивчали задачу

$$
\begin{aligned}
&y' - \frac{M}{t}y = f(t, y), \quad 0 < t \leqslant 1,\\
&b(y(0), y(1)) = 1,
\end{aligned}
$$

де y, f є векторні функції розміром n, b є векторна функція розміром $m \leqslant n$, $M-$ матриця-константа розміром $n \times n$. Припускається, що розв'язок цієї задачі є неперервним на $[0, 1]$ і диференційовним на $(0, 1]$.

Для дослідження задачі будувалися центральна схема Ейлера (перший порядок точності)

$$
\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{M}{t_{i+1/2}}\left(\frac{y_{i+1} + y_i}{2}\right) = f\left(t_{i+1/2}, \frac{y_{i+1} + y_i}{2}\right), \quad i = 0, ..., I-1,
$$

$$
b(y_0, y_I) = 0, \; Qy_0 = 0,
$$

та метод трапецій (другий порядок точності)

$$
\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{M}{2}\left(\frac{y_{i+1}}{t_{i+1}} + \frac{y_i}{t_i}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(t_{i+1}, y_{i+1}\right) + f\left(t_i, y_i\right)\right), \quad i = 0, ..., I-1,
$$

$$
b(y_0, y_I) = 0, \; Qy_0 = 0.
$$

M. Kumar (див., [129]) досліджував сингулярну двоточкову крайову задачу

$$
\begin{aligned}
&y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + f(x, y) = 0, \quad 0 < x \leqslant 1,\\
&y'(0) = 0, \quad y(1) = a,
\end{aligned}
$$

за допомогою триточкової різницевої схеми, що будується на рівномірній сітці з другим порядком точності вигляду

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{J_{k-1}} - \frac{y_{k+1} - y_k}{J_k} = \frac{I_k^+}{J_k} + \frac{I_k^-}{J_{k-1}},$$

де

$$I^{\pm} = \int_{t=x_k}^{x_{k\pm1}} \log(x_{k\pm1}/t) t f(t, y(t)) dt, \quad J_k = \log(x_{k+1}/x_k).$$

У роботах (див. [68, 70, 150, 151, 71, 69]) досліджувався метод колокацій розв'язування задачі

$$\begin{aligned} &z'(t) = \frac{M(t)}{t} z(t) + f(t, z(t)), \quad t \in (0,1], \\ &B_a z(0) + B_b z(1) = \beta, \quad z \in C[0,1], \end{aligned} \tag{1.32}$$

де z є n-вимірною дійсною функцією, M – гладка матриця $n \times n$, f – n-вимірна гладка функція, B_a, B_b – матриці-константи розміром $r \times n, r < n$.

Для побудови чисельного методу введемо нерівномірну сітку $\hat{\omega}_h = (t_0, t_1, \ldots, t_N)$ з кроком $h_i = t_{i+1} - t_i,\ i = 0, \ldots, N-1,\ t_0 = 0,\ t_N = 1$, на кожному підінтервал $J_i = [t_i, t_{i+1}]$ виберемо m точок розташованих на віддалях $\delta_{i,j},\ j = 1, \ldots, m,$. Отже, сітка матиме вигляд

$$\hat{\omega}_h^m = \left\{ t_{i,j} : t_{i,j} = \tau_i + \sum_{k=0}^{j} \delta_{i,k}, \quad i = 0, \ldots, N-1, \quad j = 0, \ldots, m+1 \right\},$$

причому $t_i \equiv t_{i,0} \equiv t_{i-1,m+1},\ i = 1, \ldots, N-1\ \delta_{i,0} = 0,\ \delta_{i,m+1} := t_{i,m+1} - t_{i,m}$. Для точок колокації на кожному підінтервалі J_i справджуються рівності $\sum\limits_{j=0}^{m+1} \delta_{i,j} = h_i$, $i = 0, \ldots, N-1$.

Позначимо через B банаховий простір неперервних кусково-поліноміальних функцій $q \in \mathbb{P}_m$ степеня $\leqslant m,\ m \in \mathbb{N}$ з нормою $\|\cdot\|_{[0,1]}$. Наближення точного розв'язку z задачі будемо шукати серед елементів простору B, яке задовольняє диференціальне рівняння задачі (1.32) в скінченній кількості точок та крайові умови цієї задачі. Оскільки вимагається, щоб чисельний розв'язок був неперервним на проміжку $[0,1]$, то введемо простір $B_1 \subset B$, такий, що $M(0)q(0) = 0, \forall q \in$

B_1. Отже, будемо шукати таку функцію $p(t) = p_i(t), t \in J_i,\ i = 0, \dots, N-1$ з простору B_1, яка задовольняє рівності

$$p_i'(t_{i,j}) = \frac{M(t_{i,j})}{t_{i,j}} p_i(t_{i,j}) + f(t_{i,j}, p_i(t_{i,j})), \quad i = 0, \dots, N-1,\ j = 1, \dots, m,$$
$$B_a p(0) + B_b p(1) = \beta.$$

Доведено, що швидкість збіжності цього чисельного методу є величиною $O\left(|\ln(h)|^{n_0-1} h^{m+1}\right) C$, де n_0-додатнє ціле.

Автор Kamel Al-Khaled (див., [61]) вивчав задачу виду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p(x)} \left(p(x) y'\right)' - q(x) y = f(x), \quad x \in (0,1), \\ &\lim_{x \to 0^+} p(x) y'(x) = 0, \quad y(1) = 0, \end{aligned} \tag{1.33}$$

враховуючи наступні припущення

- $p(x) \geqslant 0, \ \ p(0) = 0, \ \ p(x)$ зростає в околі точки 0;
- $p^{-1}(x) \in L^1_{loc}(0,1]$;
- $q(x),\ f(x) \in C[0,1],\ q(x) \geqslant 0$

застосовуючи метод Сінк-Гальоркіна (Sinc-Galerkin) з методом гомотопічних збурень. Метод Сінк-Гальоркіна забезпечує наближення розв'язку з абсолютною похибкою виду $O(\exp(-c/h))$, де c є константою і $h > 0$ є розмір кроку.

1.3 Висновки до розділу 1

1. Питання побудови чисельних методів високого порядку точності розв'язування задач Коші для сингулярних звичайних диференціальних рівнянь залишилося відкритим.

2. Питання побудови та обґрунтування точних триточкових різницевих схем та триточкових різницевих схем високого порядку точності (вище другого) розв'язування крайових для звичайних диференціальних рівнянь другого

порядку у циліндричній та сферичній системах координат в літературі не розглядалися.

РОЗДІЛ 2

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ СИНГУЛЯРНІСТЮ ПЕРШОГО РОДУ

Розв'язування крайових задач для стаціонарних нелінійних рівнянь в циліндричній та сферичній системах координат триточковими різницевими схемами високого порядку точності грунтується на ефективному чисельному розв'язуванні асоційованих сингулярних задач Коші (див. Розділ 3, Розділ 4). Оскільки порядок точності класичних явних s-ступеневих методів Рунге-Кутта при розв'язуванні задач Коші для нелінійних ЗДР з сингулярністю першого роду в загальному випадку не може бути вищий ніж 2 (див. [121]), то метою дослідження в цьому розділі є побудова чисельних методів рядів Тейлора та типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності розв'язування сингулярних задач Коші.

2.1 Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку

Розглянемо задачу Коші для нелінійних ЗДР вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^\lambda}\frac{d}{dx}\left[x^\lambda k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x \in (0,a], \\ &u(0) = u_0, \quad \frac{du(0)}{dx} = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де $k(x)$, $f(x,u)$ — задані функції, $\lambda = 1, 2$. Характерною особливістю цієї задачі є те, що вона має сингулярність в точці $x = 0$.

Введемо множину функцій вигляду

$$\Omega_\lambda([0,a],r_\lambda) = \left\{ u(x) : u(x) \in W^1_\infty[0,a],\ u(x), x^\lambda k(x)\frac{du}{dx} \in C[0,a], \right.$$

$$\left. \|u-u_0\|^*_{1,\infty,[0,a]} \leqslant r_\lambda \right\}, \quad \|u\|_{0,\infty,[0,a]} = \max_{x\in[0,a]} |u(x)|,$$

$$\|u\|^*_{1,\infty,[0,a]} = \max\left\{ \|u\|_{0,\infty,[0,a]},\ \left\| x^\lambda k(x)\frac{du}{dx} \right\|_{0,\infty,[0,a]} \right\}.$$

Достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі, які випливають з принципу стискувальних відображень дає теорема.

Теорема 2.1 *Нехай виконується умови*

$$0 < c_1 \leqslant k(x) \quad \forall x \in [0,a],\ k(x) \in Q^1[0,a],$$

$$f_u(x) \equiv f(x,u) \in Q^0[0,a], \quad |f(x,u)| \leqslant K \quad \forall x \in [0,a],\ u \in \Omega_\lambda([0,a],r_\lambda),$$

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leqslant L|u-v| \quad \forall x \in [0,a],\ u,v \in \Omega_\lambda([0,a],r_\lambda).$$

Тоді на множині $\Omega_\lambda([0,x^*],r_\lambda), \lambda = 1,2,$ *де*

$$x^* = \min\left\{ \left[\frac{2c_1(\lambda+1)r_\lambda}{K}\right]^{1/2}, \left[\frac{(\lambda+1)r_\lambda}{K}\right]^{1/(\lambda+1)}, \right.$$

$$\left. \left[\frac{2c_1(\lambda+1)}{L}\right]^{1/2}, \left[\frac{\lambda+1}{L}\right]^{1/(\lambda+1)}, a \right\},$$

існує єдиний розв'язок задачі (2.1).

Тут $Q^p[0,a]$ — клас функцій з кусково - неперервними похідними до p - го порядку включно із скінченною кількістю точок розриву першого роду.
Доведення. Задача (2.1) еквівалентна операторному рівнянню

$$u(x) = \mathfrak{R}(x,u) = \int\limits_0^x \left[V_2(x) - V_2(\xi)\right] \xi^\lambda f(\xi, u(\xi))d\xi + u_0, \quad x \in [0,a],$$

де
$$V_2(x) = \int\limits_x^a \frac{dt}{t^\lambda k(t)}.$$
Зауважимо, що виконується нерівність
$$V_2(x) - V_2(\xi) \leqslant 0 \quad \forall \xi \in [0, x].$$

Дослідимо властивості оператора $\mathfrak{R}(x, u)$. Нехай $u(x) \in \Omega_\lambda([0, x^*], r_\lambda)$, тоді
$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}(x, u) - u_0| &\leqslant K \int\limits_0^x \left[V_2(\xi) - V_2(x)\right] \xi^\lambda d\xi = \\ &= K \left[V_2(\xi) - V_2(x)\right] \frac{\xi^{\lambda+1}}{\lambda+1}\bigg|_0^x + \frac{K}{\lambda+1} \int\limits_0^x \frac{\xi d\xi}{k(\xi)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{Kx^2}{2c_1(\lambda+1)} < r_\lambda, \end{aligned}$$
$$\left| x^\lambda k(x) \frac{\partial \mathfrak{R}(x, u)}{\partial x} \right| \leqslant K \int\limits_0^x \xi^\lambda d\xi = \frac{Kx^{\lambda+1}}{\lambda+1} < r_\lambda.$$
Звідси
$$\|\mathfrak{R}(x, u) - u_0\|^*_{1,\infty,[0,x^*]} \leqslant r_\lambda,$$
тобто оператор $\mathfrak{R}(x, u)$, переводить множину $\Omega_\lambda([0, x^*], r_\lambda)$ в себе. Крім того,
$$\begin{aligned} &|\mathfrak{R}(x, u) - \mathfrak{R}(x, v)| \leqslant \\ &\quad \leqslant L \left\|u - v\right\|_{0,\infty,[0,x^*]} \int\limits_0^x \left[V_2(\xi) - V_2(x)\right] \xi^\lambda d\xi \leqslant \\ &\quad \leqslant L \left\|u - v\right\|_{0,\infty,[0,x^*]} \frac{x^2}{2(\lambda+1)c_1} \leqslant q_\lambda \left\|u - v\right\|^*_{1,\infty,[0,x^*]}, \end{aligned}$$

$$\left| x^\lambda k(x) \left(\frac{\partial \mathfrak{R}(x,u)}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{R}(x,v)}{\partial x} \right) \right| \leqslant$$
$$\leqslant L \left\| u - v \right\|_{0,\infty,[0,x^*]} \int\limits_0^x \xi^\lambda d\xi = L \left\| u - v \right\|_{0,\infty,[0,x^*]} \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \leqslant$$
$$\leqslant q_\lambda \left\| u - v \right\|^*_{1,\infty,[0,x^*]}.$$

Тому

$$\left\| \mathfrak{R}(x,u) - \mathfrak{R}(x,v) \right\|^*_{1,\infty,[0,x^*]} \leqslant q_\lambda \left\| u - v \right\|^*_{1,\infty,[0,x^*]}.$$

Оскільки $q_\lambda = L \max\left\{ \frac{(x^*)^2}{2(\lambda+1)c_1}, \frac{(x^*)^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right\} < 1$, то оператор $\mathfrak{R}(x,u)$ здійснює стискувальне відображення. Таким чином (див., напр., [58, 60, 59, 54]), задача (2.1) має єдиний розв'язок. ■

2.2 Розклад розв'язку задачі в ряд Тейлора на проміжку $[0, x_1]$

Задачу (2.1) зведемо до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{w(x)}{k(x)}, \tag{2.2}$$
$$\frac{dw(x)}{dx} = -f(x,u) - \frac{\lambda w(x)}{x}, \quad 0 < x \leqslant a, \tag{2.3}$$
$$u(0) = u_0, \quad w(0) = 0.$$

Надалі будемо припускати, що розв'язок задачі (2.2), (2.3) існує, єдиний і має необхідні властивості гладкості.

На відрізку $[0, a]$ виберемо нерівномірну сітку $\widehat{\widehat{\omega}}_h = \{x_n \in [0,a], n = 0,1,\ldots,n_0, x_0 = 0, x_{n_0} = a\}$ з кроком $h = h_{n+1} = x_{n+1} - x_n$. Задачу (2.2), (2.3) будемо розв'язувати наступним чином. На відрізках $[x_n, x_{n+1}],\ n = 1,2,\ldots,n_0 - 1$ застосуємо класичні однокрокові методи (рядів Тейлора, або Рунге-Кутта) розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. На відрізку $[0, x_1]$ побудуємо нові методи, які будуть враховувати сингулярність цієї задачі в точці $x = 0$.

Розв'язок задачі (2.2), (2.3) $u_1 = u(x_1)$, $w_1 = w(x_1)$ розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $x = 0$

$$u(x_1) = u_0 + h\frac{du(0)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u(0)}{dx^2} + \frac{h^3}{6}\frac{d^3u(0)}{dx^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4u(0)}{dx^4} + O(h^5), \tag{2.4}$$

$$w(x_1) = w_0 + h\frac{dw(0)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2w(0)}{dx^2} + \frac{h^3}{6}\frac{d^3w(0)}{dx^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4w(0)}{dx^4} + O(h^5), \tag{2.5}$$

Знайдемо спочатку похідні функції $w(x)$ в точці $x = 0$. Рівняння (2.3) запишемо у вигляді

$$\frac{dw(x)}{dx} = -f(x,u) - \frac{\lambda}{x}\left(w(x) - w(0)\right)$$

і перейдемо до границі при $x \to 0$. Тоді отримаємо

$$\frac{dw(0)}{dx} = -\frac{1}{1+\lambda}f(0,u_0). \tag{2.6}$$

Продиференціювавши рівність (2.3), матимемо

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{df(x,u)}{dx} + \frac{\lambda w(x)}{x^2} - \frac{\lambda}{x}\frac{dw(x)}{dx}. \tag{2.7}$$

З рівняння (2.3) знаходимо $\dfrac{\lambda w(x)}{x^2}$ і підставимо в (2.7), тоді

$$\begin{aligned}\frac{d^2w(x)}{dx^2} = &-\frac{df(x,u)}{dx} - \frac{1}{x}f(x,u) - \frac{1+\lambda}{x}\frac{dw(x)}{dx} = -\frac{df(x,u)}{dx} - \\ &- \frac{1}{x}\left(f(x,u) - f(0,u_0)\right) - \frac{1+\lambda}{x}\left(\frac{dw(x)}{dx} - \frac{dw(0)}{dx}\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Перейшовши до границі при $x \to 0$, отримаємо

$$\frac{d^2w(0)}{dx^2} = -\frac{2}{2+\lambda}\frac{df(0,u_0)}{dx}. \tag{2.9}$$

Продиференціюємо рівняння (2.7), тоді матимемо

$$\begin{aligned}\frac{d^3w(x)}{dx^3} = &-\frac{d^2f(x,u)}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{df(x,u)}{dx} + \frac{f(x,u)}{x^2} + \\ &+ \frac{1+\lambda}{x^2}\frac{dw(x)}{dx} - \frac{1+\lambda}{x}\frac{d^2w(x)}{dx^2}.\end{aligned}$$

З (2.8) визначимо $\dfrac{1+\lambda}{x}\dfrac{dw(x)}{dx}$ і підставивши в останню рівність, отримаємо

$$\frac{d^3w(x)}{dx^3} = -\frac{d^2f(x,u)}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{df(x,u)}{dx} - \frac{2+\lambda}{x}\frac{d^2w(x)}{dx^2}.$$

Звідси згідно з (2.9)

$$\begin{aligned}\frac{d^3w(x)}{dx^3} = &-\frac{d^2f(x,u)}{dx^2} - \frac{2}{x}\left(\frac{df(x,u)}{dx} - \frac{df(0,u_0)}{dx}\right) - \\ &- \frac{2+\lambda}{x}\left(\frac{d^2w(x)}{dx^2} - \frac{d^2w(0)}{dx^2}\right).\end{aligned}$$

Перейшовши до границі при $x \to 0$, отримаємо

$$\frac{d^3w(0)}{dx^3} = -\frac{3}{3+\lambda}\frac{d^2f(0,u_0)}{dx^2}. \tag{2.10}$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{d^4w(0)}{dx^4} = -\frac{4}{4+\lambda}\frac{d^3f(0,u_0)}{dx^3}. \tag{2.11}$$

Диференціюючи послідовно рівняння (2.2), знайдемо похідні функції $u(x)$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u(x)}{dx^2} =& \frac{1}{k(x)}\frac{dw(x)}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)w(x),\\ \frac{d^3u(x)}{dx^3} =& \frac{1}{k(x)}\frac{d^2w(x)}{dx^2} + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\frac{dw(x)}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{k(x)}\right)w(x),\\ \frac{d^4u(x)}{dx^4} =& \frac{1}{k(x)}\frac{d^3w(x)}{dx^3} + 3\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\frac{d^2w(x)}{dx^2} + 3\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\frac{dw(x)}{dx} + \\ &+ \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{k(x)}\right)w(x).\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи початкову умову $w(0)$, рівності (2.6), (2.9)—(2.11), отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{d^2u(0)}{dx^2} &= -\frac{1}{1+\lambda}\frac{f(0,u_0)}{k(0)},\\
\frac{d^3u(0)}{dx^3} &= -\frac{2}{2+\lambda}\frac{1}{k(0)}\frac{df(0,u_0)}{dx} - \frac{2}{1+\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\Bigg|_{x=0} f(0,u_0),\\
\frac{d^4u(0)}{dx^4} &= -\frac{3}{3+\lambda}\frac{1}{k(0)}\frac{d^2f(0,u_0)}{dx^2} - \frac{6}{2+\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\Bigg|_{x=0}\frac{df(0,u_0)}{dx}-\\
&\quad - \frac{3}{1+\lambda}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\Bigg|_{x=0} f(0,u_0).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
u_1 =& u_0 - \frac{h^2}{2(1+\lambda)}\frac{f(0,u_0)}{k(0)}-\\
&- \frac{h^3}{6}\left[\frac{2}{2+\lambda}\frac{1}{k(0)}\frac{df(0,u_0)}{dx} + \frac{2}{1+\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\Bigg|_{x=0} f(0,u_0)\right]-\\
&- \frac{h^4}{24}\left[\frac{3}{3+\lambda}\frac{1}{k(0)}\frac{d^2f(0,u_0)}{dx^2} + \frac{6}{2+\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\Bigg|_{x=0}\frac{df(0,u_0)}{dx}+\right.\\
&\left.+\frac{3}{1+\lambda}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\Bigg|_{x=0} f(0,u_0)\right] + O(h^5),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
w_1 =& -\frac{h}{1+\lambda}f(0,u_0) - \frac{h^2}{2+\lambda}\frac{df(0,u_0)}{dx}-\\
&- \frac{h^3}{2(3+\lambda)}\frac{d^2f(0,u_0)}{dx^2} - \frac{h^4}{6(4+\lambda)}\frac{d^3f(0,u_0)}{dx^3} + O(h^5).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Знайдемо похідні функції $f(x,u)$

$$\begin{aligned}
\frac{df(x,u)}{dx} =& \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx},\\
\frac{d^2f(x,u)}{dx^2} =& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2},\\
\frac{d^3f(x,u)}{dx^3} =& \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial u}\frac{du}{dx} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3+\\
&+ 3\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^3u}{dx^3}.
\end{aligned}$$

Враховуючи (2.12), отримаємо

$$
\begin{aligned}
&\frac{df(0,u_0)}{dx} = \frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x},\\
&\frac{d^2 f(0,u_0)}{dx^2} = \frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x^2} - \frac{1}{1+\lambda}\frac{f(0,u_0)}{k(0)}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u},\\
&\frac{d^3 f(0,u_0)}{dx^3} = \frac{\partial^3 f(0,u_0)}{\partial x^3} - \frac{3}{1+\lambda}\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial u \partial x}\frac{f(0,u_0)}{k(0)} -\\
&-\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\left[\frac{2}{2+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}\frac{1}{k(0)} + \frac{2}{1+\lambda}f(0,u_0)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}\right].
\end{aligned}
$$

З рівностей (2.13), (2.14) матимемо

$$
\begin{aligned}
u_1 =& u_0 - \frac{h^2}{2(1+\lambda)}\frac{f(0,u_0)}{k(0)} -\\
&-\frac{h^3}{3}\left[\frac{1}{2+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}\frac{1}{k(0)} + \frac{1}{1+\lambda}f(0,u_0)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}\right] -\\
&-\frac{h^4}{8}\left[\frac{1}{3+\lambda}\left(\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x^2} - \frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\frac{f(0,u_0)}{k(0)}\right)\frac{1}{k(0)} +\right.\\
&+\frac{2}{2+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0} +\\
&\left.+\frac{1}{1+\lambda}f(0,u_0)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}\right] + O(h^5),
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

$$
\begin{aligned}
w_1 =& -\frac{h}{1+\lambda}f(0,u_0) - \frac{h^2}{2+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x} - \frac{h^3}{2(3+\lambda)}\left(\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x^2} -\right.\\
&\left.-\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\frac{f(0,u_0)}{k(0)}\right) - \frac{h^4}{6(4+\lambda)}\left[\frac{\partial^3 f(0,u_0)}{\partial x^3} -\right.\\
&-\frac{3}{1+\lambda}\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x \partial u}\frac{f(0,u_0)}{k(0)} - \frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\left(\frac{2}{2+\lambda}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}\frac{1}{k(0)} +\right.\\
&\left.\left.+\frac{2}{1+\lambda}f(0,u_0)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}\right)\right] + O(h^5).
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Отже, згідно з (2.13), (2.14) метод рядів Тейлора розв'язування задачі (2.1) на інтервалі $[0, x_1]$ буде мати вигляд

$$\begin{aligned} y_1 =& u_0 - \frac{h^2}{2(1+\lambda)}\frac{f(0,u_0)}{k(0)} - \\ &- \sum_{p=3}^{m} \frac{h^p}{p!}\left[\sum_{j=0}^{p-2}\binom{p-1}{j}\frac{p-j-1}{p-j-1+\lambda}\frac{d^{p-j-2}f(0,u_0)}{dx^{p-j-2}}\frac{d^j}{dx^j}\frac{1}{k(x)}\bigg|_{x=0}\right], \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$v_1 = -\frac{h}{1+\lambda}f(0,u_0) - \sum_{p=2}^{m}\frac{h^p}{(p-1)!(p+\lambda)}\frac{d^{p-1}f(0,u_0)}{dx^{p-1}}, \tag{2.18}$$

де $y_1 \approx u_1, v_1 \approx w_1$, $\binom{p-1}{j}$—біноміальні коефіцієнти.

2.3 Побудова методів типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності на проміжку $[0, x_1]$

Явні чотириступеневі методи типу Рунге-Кутта для задачі (2.2), (2.3) будемо будувати у вигляді

$$\begin{aligned} g_1 &= -f(0,u_0), \\ g_2 &= -f\left(c_2h, u_0 + h^2\frac{a_{21}g_1}{k(0)}\right), \\ g_3 &= -f\left(c_3h, u_0 + h^2\left[\left(\frac{a_{31}}{k(0)} + \frac{a_{32}}{k(c_2h)}\right)g_1 + \frac{\tilde{a}_{32}}{k(c_2h)}g_2\right]\right), \\ g_4 &= -f\left(c_4h, u_0 + h^2\left[\left(\frac{a_{41}}{k(0)} + \frac{a_{42}}{k(c_2h)} + \frac{a_{43}}{k(c_3h)}\right)g_1 + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \left(\frac{\tilde{a}_{42}}{k(c_2h)} + \frac{\tilde{a}_{43}}{k(c_3h)}\right)g_2 + \frac{\bar{a}_{43}}{k(c_3h)}g_3\right]\right), \\ y_1 &= u_0 + h^2\left[\left(\frac{d_{12}}{k(0)} + \frac{d_{13}}{k(c_2h)} + \frac{d_{14}}{k(c_3h)}\right)g_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{d_{23}}{k(c_2h)} + \frac{d_{24}}{k(c_3h)}\right)g_2 + \frac{d_{34}}{k(c_3h)}g_3\right], \\ v_1 &= h(b_1g_1 + b_2g_2 + b_3g_3 + b_4g_4), \end{aligned} \tag{2.19}$$

де $y_1 \approx u_1, v_1 \approx w_1$.

Дійсні коефіцієнти $c_2, c_3, c_4, a_{21}, a_{31}, a_{32}, \tilde{a}_{32},\ a_{41}, a_{42}, \tilde{a}_{42}, \tilde{a}_{43},\ \bar{a}_{43}, d_{12},\ d_{13}, d_{14}$, $d_{23},\ d_{24}, d_{34},\ b_1,\ b_2,\ b_3, b_4$ виберемо так, щоб похибка методу (2.19) задовольняла умови

$$\begin{aligned} y_1 - u_1 =& u_0 + h^2\left[\left(\frac{d_{12}}{k(0)} + \frac{d_{13}}{k(c_2h)} + \frac{d_{14}}{k(c_3h)}\right)g_1 + \right.\\ &\left. + \left(\frac{d_{23}}{k(c_2h)} + \frac{d_{24}}{k(c_3h)}\right)g_2 + \frac{d_{34}}{k(c_3h)}g_3\right] - u_1 = O(h^5), \\ v_1 - w_1 =& h(b_1g_1 + b_2g_2 + b_3g_3 + b_4g_4) - w_1 = O(h^5). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Розклавши $g_i, i = \overline{1,4}, k(c_2h), k(c_3h)$ як функції від h за формулою Тейлора та підставивши в (2.20) з урахуванням (2.15),(2.16) матимемо

$$\begin{aligned} y_1 - u_1 = & -h^2\left(d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{23} + d_{24} + d_{34} - \frac{1}{2(1+\lambda)}\right)\frac{f(0,u_0)}{k(0)} - \\ & - h^3\left[\left(c_2(d_{23} + d_{24}) + c_3d_{34} - \frac{1}{3(2+\lambda)}\right)\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}\frac{1}{k(0)} + \right.\\ & + ((d_{13} + d_{23})c_2 + (d_{14} + d_{24} + d_{34})c_3 - \\ & \left. - \frac{1}{3(1+\lambda)}\right) f(0,u_0)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}\Bigg] + \\ & + h^4\left[-\frac{1}{2}\left(c_2^2(d_{23} + d_{24}) + c_3^2d_{34} - \frac{1}{4(3+\lambda)}\right)\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x^2}\frac{1}{k(0)}\right.\\ & + (d_{34}(a_{31} + a_{32} + \tilde{a}_{32}) + (d_{23} + d_{24})a_{21} - \\ & - \frac{1}{8(3+\lambda)(1+\lambda)}\right)\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\frac{f(0,u_0)}{k^2(0)} - \\ & - \left(c_2(d_{23}c_2 + d_{24}c_3) + c_3^2d_{34} - \frac{1}{4(2+\lambda)}\right)\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0} - \\ & -\frac{1}{2}\left((d_{13} + d_{23})c_2^2 + (d_{14} + d_{24} + d_{34})c_3^2 - \right.\\ & \left.\left. - \frac{1}{4(1+\lambda)}\right) f(0,u_0)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{k(x)}\right)\bigg|_{x=0}\right] + O(h^5), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_1 - w_1 = &- h\left(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - \frac{1}{1+\lambda}\right) f(0,u_0) - \\
&- h^2\left(b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 - \frac{1}{2+\lambda}\right)\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x} + \\
&+ h^3\left[-\frac{1}{2}\left(b_2c_2^2 + b_3c_3^2 + b_4c_4^2 - \frac{1}{3+\lambda}\right)\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial x^2} + \right.\\
&\quad + (b_2a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32} + \tilde{a}_{32}) + b_4(a_{41} + a_{42} + a_{43} + \tilde{a}_{42} + \\
&\quad \left. + \tilde{a}_{43} + \bar{a}_{43}) - \frac{1}{2(3+\lambda)(1+\lambda)}\right)\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\frac{f(0,u_0)}{k(0)}\Bigg] + \\
&+ h^4\left[-\frac{1}{6}\left(b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 - \frac{1}{4+\lambda}\right)\frac{\partial^3 f(0,u_0)}{\partial x^3} + \right.\\
&+ (b_2c_2a_{21} + b_3c_3(a_{31} + a_{32} + \tilde{a}_{32}) + \\
&+ b_4c_4(a_{41} + a_{42} + a_{43} + \tilde{a}_{42} + \tilde{a}_{43} + \bar{a}_{43}) - \\
&- \left.\frac{1}{2(4+\lambda)(1+\lambda)}\right)\frac{\partial^2 f(0,u_0)}{\partial u \partial x}\frac{f(0,u_0)}{k(0)} + \\
&+ (b_3\tilde{a}_{32}c_2 + b_4(\tilde{a}_{42}c_2 + \tilde{a}_{43}c_2 + \bar{a}_{43}c_3) - \\
&- \left.\frac{1}{3(4+\lambda)(2+\lambda)}\right)\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u}\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial x}\frac{1}{k(0)} + \\
&+ (b_3(a_{32} + \tilde{a}_{32})c_2 + b_4((a_{42} + \tilde{a}_{42})c_2 + (a_{43} + \tilde{a}_{43} + \bar{a}_{43})c_3) - \\
&- \left.\left.\frac{1}{3(4+\lambda)(1+\lambda)}\right)\frac{\partial f(0,u_0)}{\partial u} f(0,u_0)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{k(x)}\right]\right|_{x=0}\Bigg] + O(h^5).
\end{aligned}
$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при h, h^2, h^3, h^4 отримаємо систему рівнянь, яку мають задовольняти коефіцієнти методу для того, щоб цей метод мав четвертий порядок апроксимації.

$$d_{12}+d_{13}+d_{14}+d_{23}+d_{24}+d_{34}=\frac{1}{2(1+\lambda)},$$

$$c_2(d_{23}+d_{24})+c_3d_{34}=\frac{1}{3(2+\lambda)},$$

$$(d_{13}+d_{23})c_2+(d_{14}+d_{24}+d_{34})c_3=\frac{1}{3(1+\lambda)},$$

$$c_2^2(d_{23}+d_{24})+c_3^2d_{34}=\frac{1}{4(3+\lambda)},$$

$$d_{34}(a_{31}+a_{32}+\tilde{a}_{32})+(d_{23}+d_{24})a_{21}=\frac{1}{8(3+\lambda)(1+\lambda)},$$

$$c_2(d_{23}c_2+d_{24}c_3)+c_3^2d_{34}=\frac{1}{4(2+\lambda)},$$

$$(d_{13}+d_{23})c_2^2+(d_{14}+d_{24}+d_{34})c_3^2=\frac{1}{4(1+\lambda)},$$

$$b_1+b_2+b_3+b_4=\frac{1}{1+\lambda},$$

$$b_2c_2+b_3c_3+b_4c_4=\frac{1}{2+\lambda},$$

$$b_2c_2^2+b_3c_3^2+b_4c_4^2=\frac{1}{3+\lambda},$$

$$b_2a_{21}+b_3(a_{31}+a_{32}+\tilde{a}_{32})+$$

$$+b_4(a_{41}+a_{42}+a_{43}+\tilde{a}_{42}+\tilde{a}_{43}+\bar{a}_{43})=\frac{1}{2(3+\lambda)(1+\lambda)},$$

$$b_2c_2^3+b_3c_3^3+b_4c_4^3=\frac{1}{4+\lambda},$$

$$b_2c_2a_{21}+b_3c_3(a_{31}+a_{32}+\tilde{a}_{32})+$$

$$+b_4c_4(a_{41}+a_{42}+a_{43}+\tilde{a}_{42}+\tilde{a}_{43}+\bar{a}_{43})=\frac{1}{2(4+\lambda)(1+\lambda)},$$

$$b_3\tilde{a}_{32}c_2 + b_4(\tilde{a}_{42}c_2 + \tilde{a}_{43}c_2 + \bar{a}_{43}c_3) = \frac{1}{3(4+\lambda)(2+\lambda)},$$

$$b_3(a_{32}+\tilde{a}_{32})c_2 + b_4((a_{42}+\tilde{a}_{42})c_2 + (a_{43}+\tilde{a}_{43}+\bar{a}_{43})c_3) = \frac{1}{3(4+\lambda)(1+\lambda)}.$$

Одні з методів (2.19), які задовольняють ці вимоги

а) при $\lambda = 1$

$$\begin{aligned}
g_1 &= -f(0, u_0),\\
g_2 &= -f\left(\frac{h}{4}, u_0 + h^2\frac{g_1}{64k(0)}\right),\\
g_3 &= -f\left(\frac{h}{2}, u_0 + h^2\left[\left(\frac{37}{504k(0)} + \frac{1}{4k(h/4)}\right)g_1 - \frac{263}{1008k(h/4)}g_2\right]\right),\\
g_4 &= -f\left(h, u_0 + h^2\left[\left(\frac{5}{12k(0)} - \frac{13}{8k(h/4)} + \frac{1}{2k(h/2)}\right)g_1 + \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + \left(\frac{1}{3k(h/4)} + \frac{1}{8k(h/2)}\right)g_2 + \frac{1}{2k(h/2)}g_3\right]\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= u_0 + h^2\left[\left(\frac{1}{4k(0)} - \frac{2}{9k(h/4)} + \frac{1}{18k(h/2)}\right)g_1 + \right.\\
&\qquad \left. + \left(-\frac{4}{9k(h/4)} + \frac{1}{3k(h/2)}\right)g_2 + \frac{5}{18k(h/2)}g_3\right], \qquad (2.21)\\
v_1 &= h\left(\frac{1}{15}g_1 - \frac{8}{45}g_2 + \frac{7}{15}g_3 + \frac{13}{90}g_4\right),
\end{aligned}$$

б) при $\lambda = 2$

$$\begin{aligned}
g_1 &= -f(0, u_0),\\
g_2 &= -f\left(\frac{h}{4}, u_0 + h^2\frac{g_1}{96k(0)}\right),\\
g_3 &= -f\left(\frac{h}{2}, u_0 + h^2\left[\left(\frac{53}{288k(0)} + \frac{1}{4k(h/4)}\right)g_1 - \frac{113}{288k(h/4)}g_2\right]\right),\\
g_4 &= -f\left(h, u_0 + h^2\left[\left(\frac{47}{138k(0)} - \frac{901}{552k(h/4)} + \frac{1}{2k(h/2)}\right)g_1 + \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + \left(\frac{1}{3k(h/4)} + \frac{1}{8k(h/2)}\right)g_2 + \frac{1}{2k(h/2)}g_3\right]\right),
\end{aligned}$$

$$y_1 = u_0 + h^2 \left[\left(\frac{1}{6k(0)} - \frac{1}{9k(h/4)} + \frac{1}{90k(h/2)} \right) g_1 + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{1}{3k(h/4)} + \frac{1}{5k(h/2)} \right) g_2 + \frac{7}{30k(h/2)} g_3 \right],$$
$$v_1 = h \left(\frac{1}{20} g_1 - \frac{8}{45} g_2 + \frac{1}{3} g_3 + \frac{23}{180} g_4 \right).$$

2.4 Чисельний експеримент

Приклад 2.1 *Розглянемо задачу* ($\lambda = 1$)

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \frac{du}{dx} \right] = u^3 - 3u^5, \; x \in (0;1], \quad u(0) = 1, \quad \frac{du(0)}{dx} = 0, \tag{2.22}$$

з відомим точним розв'язком $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \dfrac{du}{dx} = -\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

Результати розв'язування задачі за допомогою методу типу Рунге-Кутта (2.21) на інтервлі $[0, x_1]$ *та класичного методу Рунге-Кутта (див., напр., [55, с.144]) на інтервалах* $[x_n, x_{n+1}], \; n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$ *наведено в таблиці 4.1. де*

Табл. 2.1. Результати розв'язування задачі (2.22)

N	$Error$	p
10	$0.1628 \cdot 10^{-4}$	
20	$0.1283 \cdot 10^{-5}$	3.7
40	$0.9536 \cdot 10^{-7}$	3.7
80	$0.6856 \cdot 10^{-8}$	3.8
160	$0.4835 \cdot 10^{-9}$	3.8
320	$0.3364 \cdot 10^{-10}$	3.8
640	$0.2317 \cdot 10^{-11}$	3.9
1280	$0.1595 \cdot 10^{-12}$	3.9
2560	$0.9659 \cdot 10^{-14}$	4.0

$$Error = \left\| y^{(4)} - u \right\|^*_{1,\infty,\bar{\omega}_h} = \max \left\{ \left\| y^{(4)} - u \right\|_{0,\infty,\bar{\omega}_h}, \left\| x \frac{dy^{(4)}}{dx} - x \frac{du}{dx} \right\|_{0,\infty,\bar{\omega}_h} \right\},$$

$$p = \log_2 \frac{\left\| y^{(4)} - u \right\|^*_{1,\infty,\bar{\omega}_h}}{\left\| y^{(4)} - u \right\|^*_{1,\infty,\bar{\omega}_{h/2}}}, \quad \bar{\omega}_h = \left\{ x_j = jh,\ j = \overline{0,N},\ h = 1/N \right\}.$$

Отже, результати чисельного експерименту підтверджують висновок про четвертий порядок точності запропонованого методу Рунге-Кутта.

2.5 Висновки до розділу 2

Розроблено новий метод чисельного розв'язування сингулярних задач Коші, згідно якого відрізок $[0,a]$ точками сітки $\widehat{\widehat{\omega}}_h = \{x_n \in [0,a],\ n = 0,1,\ldots,n_0, x_0 = 0, x_{n_0} = a\}$ розбито на частини, на кожному відрізку $[x_n, x_{n+1}], n = 1,2,\ldots,n_0-1$ застосовуються класичні однокрокові методи (рядів Тейлора, або Рунге-Кутта) розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, а на відрізку $[0, x_1]$ побудовано нові методи, які враховують сингулярність цієї задачі в точці $x = 0$.

Розв'язок сингулярної задачі Коші розкладено в ряд Тейлора в околі точки $x = 0$, причому похідні обчислено як границю при $x \to 0$. На основі цього розкладу побудовано новий метод типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності для чисельного розв'язування сингулярної задачі на першому підінтервалі $[0, x_1]$. Проведено чисельні експерименти, які підтверджують теоретичні висновки.

РОЗДІЛ 3

ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

У цьому розділі для нелінійних крайових задач

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x \in [0,R], \\ &\lim_{x\to 0} xk(x)\frac{du}{dx} = 0, \quad u(R) = \mu_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

на нерівномірній сітці $\widehat{\overline{\omega}}_h = \{x_j \in [0,R], j = 0,1,\ldots,N, x_0 = 0, x_N = R\}$ побудовано та обгрунтовано точну триточкову різницеву схему та розроблено її алгоритмічну реалізацію через усічені триточкові різницеві схеми.

3.1 Існування та єдиність розв'язку

Достатні умови існування і єдиності розв'язку задачі (3.1) дає теорема, яка грунтується на методі лінеаризації та принципі стискувальних відображень (див., напр., [28, 54, 59]).

Теорема 3.1 *Нехай виконуються умови*

$$0 < c_1 \leqslant k(x) \quad \forall x \in [0,R],\ k(x) \in Q^1[0,R], \tag{3.2}$$

$$f_u(x) \equiv f(x,u) \in Q^0[0,R], \quad |f(x,u)| \leqslant K \quad \forall x \in [0,R],\ u \in \Omega([0,R],r), \tag{3.3}$$

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leqslant L|u-v| \quad \forall x \in [0,R],\ u,v \in \Omega([0,R],r), \tag{3.4}$$

$$q = \frac{LR^2}{4c_1}\max(1, 2c_1) < 1, \tag{3.5}$$

тоді задача (3.1) в $\Omega([0,R],r)$ *має єдиний розв'язок* $u(x)$*, який можна знайти за допомогою методу послідовних наближень*

$$\begin{gathered}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{du^{(n)}}{dx}\right]=-f(x,u^{(n-1)}(x)),\quad x\in(0,R),\\ \lim_{x\to 0}xk(x)\frac{du^{(n)}(x)}{dx}=0,\quad u^{(n)}(R)=\mu_2,\quad n=1,2,\ldots,\quad u^{(0)}(x)=\mu_2\end{gathered}\tag{3.6}$$

з оцінкою похибки

$$\left\|u^{(n)}-u\right\|^*_{1,\infty,[0,R]}\leqslant\frac{q^n}{1-q}r.\tag{3.7}$$

Тут $Q^p[0,R]$ — клас функцій з кусково - неперервними похідними до p - го порядку включно із скінченною кількістю точок розриву першого роду, а $\Omega([0,R],r)$ — множина функцій вигляду

$$\begin{aligned}\Omega([0,R],r)=\Big\{&u(x):u(x)\in W^1_\infty[0,R],\ u(x),xk(x)\frac{du}{dx}\in C[0,R],\\ &\left\|u-u^{(0)}\right\|^*_{1,\infty,[0,R]}\leqslant r\Big\},\quad r=\frac{KR^2}{4c_1}\max(1,2c_1)\\ &\|u\|_{0,\infty,[0,R]}=\max_{x\in[0,R]}|u(x)|,\\ &\|u\|^*_{1,\infty,[0,R]}=\max\left\{\|u\|_{0,\infty,[0,R]},\ \left\|xk(x)\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,[0,R]}\right\}.\end{aligned}$$

Доведення. Задачу (3.1) запишемо в еквівалентній інтегральній формі

$$u(x)=\mathfrak{R}(x,u(\cdot))=\int\limits_0^R G(x,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\mu_2,\quad 0\leqslant x\leqslant R,\tag{3.8}$$

де

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\xi V(\xi), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ \xi V(x), & \xi\leqslant x\leqslant R,\end{cases}\quad V(x)=\int\limits_x^R\frac{dt}{tk(t)}\,.$$

Зазначимо, що крайова умова при $x\to 0$ задовольняється, оскільки

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{xk(x)}\int\limits_0^x\xi f(\xi,u(\xi))d\xi.$$

З рівності (3.8) випливає, що розв'язок задачі (3.1)

$$u(x) = \int_x^R \xi V(\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + V(x) \int_0^x \xi f(\xi, u(\xi)) d\xi + \mu_2$$

має логарифмічну особливість в точці $x = 0$.

Покажемо, що оператор (3.8) переводить множину $\Omega([0,R], r)$ в себе. Враховуючи умову (3.3), отримаємо

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{R}(x, v(\cdot)) - u^{(0)}\|^*_{1,\infty,[0,R]} &\leqslant \int_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]} \left| f(\xi, v(\xi)) \right| d\xi \leqslant \\ &\leqslant K \int_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]} d\xi \quad \forall v \in \Omega([0,R], r). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Оскільки згідно з (3.2)

$$\begin{aligned} \int_0^R |G(x,\xi)| d\xi = \int_x^R \xi V(\xi) d\xi + V(x) \int_0^x \xi d\xi = V(\xi) \frac{\xi^2}{2} \bigg|_x^R + \frac{1}{2} \int_x^R \frac{\xi}{k(\xi)} d\xi + \\ + V(x) \frac{\xi^2}{2} \bigg|_0^x = \frac{1}{2} \int_x^R \frac{\xi d\xi}{k(\xi)} \leqslant \frac{1}{2c_1} \int_x^R \xi d\xi = \frac{R^2 - x^2}{4c_1} \leqslant \frac{R^2}{4c_1}, \end{aligned}$$

$$\int_0^R \left| x k(x) \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x} \right| d\xi = \int_0^x \xi d\xi = \frac{x^2}{2} \leqslant \frac{R^2}{2},$$

то

$$\int_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]} d\xi \leqslant \frac{R^2}{4c_1} \max(1, 2c_1). \tag{3.10}$$

З нерівностей (3.9), (3.10) випливає

$$\left\| \mathfrak{R}(x, v(\cdot)) - u^{(0)} \right\|^*_{1,\infty,[0,R]} \leqslant \frac{KR^2}{4c_1} \max(1, 2c_1) = r \quad \forall v \in \Omega([0,R], r),$$

яка означає, що оператор (3.8) переводить множину $\Omega([0,R], r)$ в себе.

Крім того покажемо, що $\mathfrak{R}(x,u(\cdot))$ на $\Omega([0,R],r)$ є стискувальним оператором. Використовуючи умову (3.4), нерівність (3.10) будемо мати

$$\begin{aligned}
&\|\mathfrak{R}(x,u(\cdot))- \mathfrak{R}(x,v(\cdot))\|^*_{1,\infty,[0,R]} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]} \left|f(\xi,u(\xi)) - f(\xi,v(\xi))\right| d\xi \leqslant \\
&\qquad \leqslant L\int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]} \left|u(\xi) - v(\xi)\right| d\xi \leqslant \\
&\qquad \leqslant L\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,R]} \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]} d\xi \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{LR^2}{4c_1}\max\left(1,2c_1\right)\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,R]} = \\
&\qquad = q\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,R]} \quad \forall u,v\in\Omega([0,R],r),
\end{aligned}$$

яка означає, що згідно з (3.5) $\mathfrak{R}(x,u(\cdot))$ на $\Omega([0,R],r)$ є стискувальним оператором.

Отже, для оператора $\mathfrak{R}(x,u(\cdot))$ виконані всі умови принципу стискувальних відображень, а тому задача (3.1) має єдиний розв'язок, який може бути отриманий методом послідовних наближень (3.6) з оцінкою похибки (3.7). Спосіб отримання такої оцінки (3.7) є стандартний (див., напр., [54]), а тому ми його не наводимо. ■

3.2 Існування точної триточкової різницевої схеми

На відрізку $[0,R]$ введемо нерівномірну сітку

$$\begin{aligned}
&\widehat{\overline{\omega}}_h = \{x_j\in[0,R],\quad j=0,1,\dots,N,\quad x_0=0,\ x_N=R\},\\
&h_j = x_j - x_{j-1} > 0,\quad j=1,2,\dots,N,\quad |h| = \max_{1\leqslant j\leqslant N} h_j
\end{aligned}$$

так, щоб точки розриву функцій $k(x), f(x,u)$ збігалися з вузлами сітки $\widehat{\omega}_h = \{x_j,\ j=1,2,\dots,N-1\}$. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і припустимо, що N таке, що $\rho \subseteq \widehat{\omega}_h$. Будемо вважати, що в точках розриву розв'язок задачі (3.1) задовольняє умови неперервності

$$u(x_i - 0) = u(x_i + 0), \quad xk(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i-0} = xk(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i+0} \quad \forall x_i \in \rho.$$

Розглянемо крайові задачі

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{dY_1^1(x,u)}{dx}\right] = -f(x, Y_1^1(x,u)), \quad 0 < x < x_1, \\ &\lim_{x\to 0} xk(x)\frac{dY_1^1(x,u)}{dx} = 0, \quad Y_1^1(x_1,u) = u_1, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx}\right] = -f(x, Y_\alpha^j(x,u)), \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \\ &Y_\alpha^j(x_{j-2+\alpha},u) = u(x_{j-2+\alpha}), \quad Y_\alpha^j(x_{j-1+\alpha},u) = u(x_{j-1+\alpha}), \\ &j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Лема 3.2 *Нехай виконуються умови теореми* 3.1, *тоді задачі (3.11), (3.12) мають єдиний розв'язок* $Y_1^1(x,u)$, $Y_\alpha^j(x,u)$, $j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1,2$, *причому розв'язок задачі (3.1) зображається у вигляді*

$$\begin{aligned} &u(x) = Y_1^1(x,u), \quad x \in [0, x_1], \\ &u(x) = Y_\alpha^j(x,u), \quad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \\ &j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Доведення. Крайові задачі (3.11), (3.12) запишемо в еквівалентній інтегральній формі

$$\begin{aligned} &Y_1^1(x,u) = \int\limits_0^{x_1} \widetilde{G}^1(x,\xi) f(\xi, Y_1^1(\xi,u))d\xi + u_1, \quad x \in [0, x_1], \\ &Y_\alpha^j(x,u) = \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi) f(\xi, Y_\alpha^j(\xi,u))d\xi + \hat{u}(x), \\ &x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \quad j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2, \\ &\hat{u}(x) = \frac{u(x_j)V_1^j(x) + u(x_{j-1})V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}, \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \end{aligned} \tag{3.14}$$

де

$$V_1^j(x) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x} \frac{dt}{tk(t)}, \quad V_2^j(x) = \int\limits_{x}^{x_{j+1}} \frac{dt}{tk(t)},$$

$$\widetilde{G}^1(x,\xi) = \begin{cases} \xi V_2^0(\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \xi V_2^0(x), & \xi \leqslant x \leqslant x_1, \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{V_1^{j-1+\alpha}(x)V_2^{j-2+\alpha}(\xi)\xi}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}, & x_{j-2+\alpha} \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{V_1^{j-1+\alpha}(\xi)V_2^{j-2+\alpha}(x)\xi}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}, & \xi \leqslant x \leqslant x_{j-1+\alpha}. \end{cases} \tag{3.16}$$

При $\alpha = 1$ з урахуванням (3.8), отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) =& \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \left[\int\limits_0^R G(x_j,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \mu_2 \right] + \\ &+ \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \left[\int\limits_0^R G(x_{j-1},\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \mu_2 \right], \quad x \in [x_{j-1}, x_j]. \end{aligned}$$

Оскільки $V_1^j(x) + V_2^{j-1}(x) = V_1^j(x_j)$, то

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) =& \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_j,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \\ &+ \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_{j-1},\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \mu_2, \quad x \in [x_{j-1}, x_j]. \end{aligned}$$

Тоді рівність (3.14) при $\alpha = 1$ запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} Y_1^1(x,u) =& \int\limits_0^R G(x_1,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \int\limits_0^{x_1} \widetilde{G}^1(x,\xi) f(\xi, Y_1^1(\xi,u)) d\xi + \\ &+ u^{(0)}(x), \quad x \in [0, x_1], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y_1^j(x,u) =&\frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_0^R G(x_j,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\\
&+\frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_0^R G(x_{j-1},\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\\
&+\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\widetilde{G}^j(x,\xi)f(\xi,Y_1^j(\xi,u))d\xi+u^{(0)}(x),\quad x\in[x_{j-1},x_j].
\end{aligned}
$$

На підставі рівності $Y_2^j(x,u)=Y_1^{j+1}(x,u)$ маємо

$$
\begin{aligned}
Y_2^j(x,u) =&\frac{V_1^{j+1}(x)}{V_2^j(x_j)}\int\limits_0^R G(x_{j+1},\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\\
&+\frac{V_2^j(x)}{V_2^j(x_j)}\int\limits_0^R G(x_j,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\\
&+\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\widetilde{G}^{j+1}(x,\xi)f(\xi,Y_2^j(\xi,u))d\xi+u^{(0)}(x),\quad x\in[x_j,x_{j+1}].
\end{aligned}
$$

Таким чином, питання існування та єдиності розв'язку задач (3.11), (3.12) еквівалентне до аналогічної проблеми для рівнянь

$$
\begin{aligned}
U_1^1(x) =&\mathfrak{F}_1^1(x,u,U_1^1)=\int\limits_0^R G(x_1,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\\
&+\int\limits_0^{x_1}\widetilde{G}^1(x,\xi)f(\xi,U_1^1(\xi,u))d\xi+u^{(0)}(x),\quad x\in[0,x_1],
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

$$
\begin{gathered}
U_\alpha^j(x) = \mathfrak{F}_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j) = \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_\alpha^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_{j-1+\alpha},\xi) f(\xi,u(\xi))d\xi + \\
+ \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_\alpha^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_{j-2+\alpha},\xi) f(\xi,u(\xi))d\xi + \\
+ \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi) f(\xi,U_\alpha^j(\xi,u))d\xi + u^{(0)}(x), \\
x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}],\ j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha,\ \alpha = 1,2.
\end{gathered}
\tag{3.18}
$$

Покажемо, що оператори $\mathfrak{F}_1^1(x,u,U_1^1), \mathfrak{F}_1^j(x,u,U_1^j)$ переводять відповідно множини $\Omega([0,x_1],r)$, $\Omega([x_{j-1},x_j],r)$ в себе. Нехай $U_1^1(x) \in \Omega([0,x_1],r), U_1^j(x) \in \Omega([x_{j-1},x_j],r)$, тоді

$$
\begin{gathered}
\left|\mathfrak{F}_1^1(x,u,U_1^1) - u^{(0)}(x)\right| \leqslant K \left\{ \int\limits_x^{x_1} \xi V_2^0(\xi)d\xi + V_2^0(x) \int\limits_0^x \xi d\xi + \right. \\
\left. + \int\limits_{x_1}^R \xi V(\xi)d\xi + V(x_1) \int\limits_0^{x_1} \xi d\xi \right\} = \\
= K \left\{ \left[V_2^0(x) + V(x_1)\right] \int\limits_0^x \xi d\xi + \int\limits_x^R \xi V(\xi)d\xi + \right. \\
\left. + \int\limits_x^{x_1} \xi \left[V_2^0(\xi) + V(x_1) - V(\xi)\right] d\xi \right\},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\left|\mathfrak{F}_1^j(x,u,U_1^j) - u^{(0)}(x)\right| \leqslant K \left\{ \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_{j-1},\xi)d\xi + \right. \\
\left. + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_j,\xi)d\xi + \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \widetilde{G}^j(x,\xi)d\xi \right\} =
\end{gathered}
$$

$$= K\left\{\frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_{x_{j-1}}^{R}\xi V(\xi)d\xi + V(x_{j-1})\int\limits_0^{x_{j-1}}\xi d\xi\right] + \right.$$

$$+ \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_{x_j}^{R}\xi V(\xi)d\xi + V(x_j)\int\limits_0^{x_j}\xi d\xi\right] +$$

$$\left. + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_x^{x_j}V_2^{j-1}(\xi)\xi d\xi + \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_{x_{j-1}}^{x}V_1^j(\xi)\xi d\xi\right\} =$$

$$= K\left\{\frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_{x}^{R}\xi V(\xi)d\xi + V(x_{j-1})\int\limits_0^{x}\xi d\xi\right] + \right.$$

$$+ \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_{x}^{R}\xi V(\xi)d\xi + V(x_j)\int\limits_0^{x}\xi d\xi\right] +$$

$$+ \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_x^{x_j}V_2^{j-1}(\xi)\xi d\xi + V(x_j)\int\limits_x^{x_j}\xi d\xi - \int\limits_x^{x_j}\xi V(\xi)d\xi\right] +$$

$$\left. + \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_{x_{j-1}}^{x}V_1^j(\xi)\xi d\xi - V(x_{j-1})\int\limits_{x_{j-1}}^{x}\xi d\xi + \int\limits_{x_{j-1}}^{x}\xi V(\xi)d\xi\right]\right\} =$$

$$= K\left\{\left[\frac{V_2^{j-1}(x)V(x_{j-1}) + V_1^j(x)V(x_j)}{V_1^j(x_j)}\right]\int\limits_0^{x}\xi d\xi + \right.$$

$$+ \int\limits_x^{R}\xi V(\xi)d\xi + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_x^{x_j}\left[V_2^{j-1}(\xi) + V(x_j) - V(\xi)\right]\xi d\xi +$$

$$\left. + \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_{x_{j-1}}^{x}\left[V_1^j(\xi) - V(x_{j-1}) + V(\xi)\right]\xi d\xi\right\}.$$

Враховуючи рівності

$$V_2^{j-1}(\xi)+V(x_j)-V(\xi)=\int\limits_{\xi}^{x_j}\frac{dt}{tk(t)}+\int\limits_{x_j}^{R}\frac{dt}{tk(t)}-\int\limits_{\xi}^{R}\frac{dt}{tk(t)}=0,$$

$$V_1^{j}(\xi)-V(x_{j-1})+V(\xi)=\int\limits_{x_{j-1}}^{\xi}\frac{dt}{tk(t)}-\int\limits_{x_{j-1}}^{R}\frac{dt}{tk(t)}+\int\limits_{\xi}^{R}\frac{dt}{tk(t)}=0,$$

$$\frac{V_2^{j-1}(x)V(x_{j-1})+V_1^{j}(x)V(x_j)}{V_1^{j}(x_j)}=$$
$$=\frac{V_2^{j-1}(x)[V_1^{j}(x)+V(x)]+V_1^{j}(x)[V(x)-V_2^{j-1}(x)]}{V_1^{j}(x_j)}=V(x)$$

отримаємо

$$\left|\mathfrak{F}_1^{j}(x,u,U_1^{j})-u^{(0)}(x)\right|\leqslant K\left\{V(x)\int\limits_{0}^{x}\xi d\xi+\int\limits_{x}^{R}\xi V(\xi)d\xi\right\}=$$
$$=K\int\limits_{0}^{R}G(x,\xi)d\xi,\quad j=1,2,\ldots,N.$$

Таким чином

$$\|\mathfrak{F}_1^{j}(x,u,U_1^{j})-u^{(0)}(x)\|^{*}_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{KR^2}{4c_1}\max\left(1,2c_1\right)=r,\quad j=1,2,\ldots,N,$$

тобто оператори $\mathfrak{F}_1^{1}(x,u,U_1^{1}),\mathfrak{F}_1^{j}(x,u,U_1^{j})$ переводять відповідно множини $\Omega([0,x_1],r)$ і $\Omega([x_{j-1},x_j],r)$ в себе.

Аналогічно можна показати, що якщо $U_2^{j}(x)\in\Omega([x_j,x_{j+1}],r)$, то

$$\|\mathfrak{F}_2^{j}(x,u,U_2^{j})-u^{(0)}(x)\|^{*}_{1,\infty,[x_j,x_{j+1}]}\leqslant r.$$

Крім того, для $\forall$ $U_1^{1}(x)$, $\widetilde{U}_1^{1}(x)\in\Omega([0,x_1],r)$ і $\forall$ $U_\alpha^{j}(x)$, $\widetilde{U}_\alpha^{j}(x)\in$

$\Omega([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r)$ маємо оцінки

$$\|\mathfrak{F}_1^1(x,u,U_1^1) - \mathfrak{F}_1^1(x,u,\widetilde{U}_1^1)\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^{x_1} \left\|\widetilde{G}^1(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \left|f(\xi,U_1^1) - f(\xi,\widetilde{U}_1^1)\right| d\xi \leqslant$$
$$\leqslant L\|U_1^1 - \widetilde{U}_1^1\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \int\limits_0^{x_1} \left\|\widetilde{G}^1(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} d\xi, \tag{3.19}$$

$$\|\mathfrak{F}_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j) - \mathfrak{F}_\alpha^j(x,u,\widetilde{U}_\alpha^j)\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left\|\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \left|f(\xi,U_\alpha^j) - f(\xi,\widetilde{U}_\alpha^j)\right| d\xi \leqslant$$
$$\leqslant L\|U_\alpha^j - \widetilde{U}_\alpha^j\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left\|\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} d\xi. \tag{3.20}$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{x_1} |\widetilde{G}^1(x,\xi)| d\xi = V_2^0(x)\int\limits_0^{x} \xi d\xi + \int\limits_x^{x_1} \xi V_2^0(\xi) d\xi =$$
$$= V_2^0(x)\frac{\xi^2}{2}\bigg|_0^x + V_2^0(\xi)\frac{\xi^2}{2}\bigg|_x^{x_1} + \frac{1}{2}\int\limits_x^{x_1} \frac{\xi^2}{\xi k(\xi)} d\xi =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_x^{x_1} \frac{\xi d\xi}{k(\xi)} \leqslant \frac{1}{2c_1}\int\limits_x^{x_1} \xi d\xi = \frac{{x_1}^2 - x^2}{4c_1} \leqslant \frac{R^2}{4c_1},$$

$$\int\limits_0^{x_1} \left| x k(x) \frac{\partial \widetilde{G}^1(x,\xi)}{\partial x} \right| d\xi = \int\limits_0^{x} \xi d\xi = \frac{x^2}{2} \leqslant \frac{R^2}{2},$$

$$\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left|\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)\right| d\xi = \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \int\limits_{x}^{x_{j-1+\alpha}} V_2^{j-2+\alpha}(\xi)\xi d\xi +$$
$$+ \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x} V_1^{j-1+\alpha}(\xi)\xi d\xi =$$
$$= \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \left[V_2^{j-2+\alpha}(\xi)\frac{\xi^2}{2}\bigg|_x^{x_{j-1+\alpha}} + \int\limits_{x}^{x_{j-1+\alpha}} \frac{\xi^2}{2}\frac{1}{\xi k(\xi)} d\xi \right] +$$
$$+ \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \left[V_1^{j-1+\alpha}(\xi)\frac{\xi^2}{2}\bigg|_{x_{j-2+\alpha}}^{x} - \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x} \frac{\xi^2}{2}\frac{1}{\xi k(\xi)} d\xi \right] =$$
$$= \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \left[-V_2^{j-2+\alpha}(x)\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x_{j-1+\alpha}} \frac{\xi}{k(\xi)} d\xi \right] +$$
$$+ \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \left[V_1^{j-1+\alpha}(x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x} \frac{\xi}{k(\xi)} d\xi \right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{2V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})c_1}\frac{\xi^2}{2}\bigg|_x^{x_{j-1+\alpha}} = \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{4V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})c_1}(x_{j-1+\alpha}^2 - x^2) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(R^2 - x^2)}{4c_1} \leqslant \frac{R^2}{4c_1},$$

$$\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left| xk(x)\frac{\partial \widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)}{\partial x} \right| d\xi = \frac{1}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \int\limits_{x}^{x_{j-1+\alpha}} \xi V_2^{j-2+\alpha}(\xi) d\xi +$$
$$+ \frac{1}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x} \xi V_1^{j-1+\alpha}(\xi) d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}\frac{\xi^2}{2}\bigg|_x^{x_{j-1+\alpha}} + \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}\frac{\xi^2}{2}\bigg|_{x_{j-2+\alpha}}^{x} =$$
$$= \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{2V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}(x_{j-1+\alpha}^2 - x^2) + \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{2V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}(x^2 - x_{j-2+\alpha}^2) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)+V_1^{j-1+\alpha}(x)}{2V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}R^2=\frac{R^2}{2},$$

то

$$\int\limits_0^{x_1}\|\widetilde{G}^1(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,x_1]}d\xi \leqslant \frac{R^2}{4c_1}\max(1,2c_1), \tag{3.21}$$

$$\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}}\|\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}d\xi \leqslant \frac{R^2}{4c_1}\max(1,2c_1). \tag{3.22}$$

Отже, згідно з (3.19)—(3.22) отримаємо

$$\|\mathfrak{F}_1^1(x,u,U_1^1)-\mathfrak{F}_1^1(x,u,\widetilde{U}_1^1)\|^*_{1,\infty,[0,x_1]}\leqslant$$
$$\leqslant \frac{LR^2}{4c_1}\max(1,2c_1)\|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\|^*_{1,\infty,[0,x_1]}=q\|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\|^*_{1,\infty,[0,x_1]},$$

$$\|\mathfrak{F}_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j)-\mathfrak{F}_\alpha^j(x,u,\widetilde{U}_\alpha^j)\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\leqslant$$
$$\leqslant \frac{LR^2}{4c_1}\max(1,2c_1)\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}=$$
$$=q\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}.$$

Тобто для операторів (3.17), (3.18) в областях $\Omega([0,x_1],r)$ і $\Omega([x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],r)$ відповідно виконані всі умови принципу стискувальних відображень, а тому задачі (3.11), (3.12) мають єдиний розв'язок.

З того, що функції $Y_1^1(x,u)$, $Y_\alpha^j(x,u)$, $j=3-\alpha,4-\alpha,\ldots,N+1-\alpha$, $\alpha=1,2$ є розв'язками задач (3.11), (3.12) і з однозначної розв'язності цих задач випливає, що якщо розв'язок задачі (3.1) існує та єдиний, то цей розв'язок зображається у вигляді (3.13), а умови (3.2)—(3.5) це гарантують. Лема доведена. ■

Теорема 3.3 *Нехай виконуються умови теореми* 3.1, *тоді для задачі (3.1) існує точна триточкова різницева схема*

$$\begin{aligned}&u_{x,0}=-\hat{T}^{x_0}(f(\xi,u(\xi))),\quad a_2u_{x,1}/(\hbar_1x_1)=-\hat{T}^{x_1}(f(\xi,u(\xi))),\\ &\frac{1}{x_j}(au_{\bar{x}})_{\hat{x},j}=-\hat{T}^{x_j}(f(\xi,u(\xi))),\quad j=2,3,\ldots,N-1,\quad u_N=\mu_2,\end{aligned} \tag{3.23}$$

тобто схема, розв'язок якої є проекцією на сітку $\hat{\bar{\omega}}_h$ розв'язку задачі (3.1), де

$$u_{\bar{x},j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j},\ u_{x,j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h_{j+1}},\ u_{\hat{x},j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\hbar_j},\ \hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2},$$

$$a_j = a(x_j) = \left[\frac{1}{h_j} V_1^j(x_j)\right]^{-1}, \quad j = 2, 3, \ldots, N-1, \tag{3.24}$$

$$\hat{T}^{x_0}(w(\xi)) = -\, h_1^{-1} V_2^1(x_1) \int\limits_0^{x_1} \xi w(\xi) d\xi + h_1^{-1} \int\limits_0^{x_1} \xi V_2^1(\xi) w(\xi) d\xi,$$

$$\begin{aligned}\hat{T}^{x_1}(w(\xi)) =& (\hbar_1 x_1)^{-1} \int\limits_0^{x_1} \xi w(\xi) d\xi + \\ &+ \left[\hbar_1 x_1 V_2^1(x_1)\right]^{-1} \int\limits_{x_1}^{x_2} \xi V_2^1(\xi) w(\xi) d\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{T}^{x_j}(w(\xi)) =& \left[\hbar_j x_j V_1^j(x_j)\right]^{-1} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \xi V_1^j(\xi) w(\xi) d\xi + \\ &+ \left[\hbar_j x_j V_2^j(x_j)\right]^{-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \xi V_2^j(\xi) w(\xi) d\xi,\end{aligned}$$

$$V_1^j(x) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x} \frac{dt}{tk(t)}, \quad j = 2, 3, \ldots, N-1,$$

$$V_2^j(x) = \int\limits_{x}^{x_{j+1}} \frac{dt}{tk(t)}, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1,$$

функція $u(x)$ в правій частині (3.23) визначається згідно з формулою (3.13) і залежить тільки від $u(x_j),\ j = 0, 1, \ldots, N$.

Доведення. На інтервалах $(0, x_2), (x_{j-1}, x_{j+1}), j = 2, 3, \ldots, N-1$ відповідно розглянемо такі крайові задачі

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x \in (0, x_2),\\
&\lim_{x\to 0} xk(x)\frac{du}{dx} = 0, \quad u(x_2) = u_2,
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x \in (x_{j-1}, x_{j+1}),\\
&u(x_{j-1}) = u_{j-1}, \quad u(x_{j+1}) = u_{j+1}.
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

Функції Гріна для задач (3.25),(3.26) відповідно мають вигляд

$$
G^1(x,\xi) = \begin{cases} \xi V_2^1(\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi,\\ \xi V_2^1(x), & \xi \leqslant x \leqslant x_2, \end{cases}
$$

$$
G^j(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{V_1^j(x)V_2^j(\xi)\xi}{V_1^j(x_{j+1})}, & x_{j-1} \leqslant x \leqslant \xi,\\ \dfrac{V_1^j(\xi)V_2^j(x)\xi}{V_1^j(x_{j+1})}, & \xi \leqslant x \leqslant x_{j+1}, \end{cases} \qquad j = 2, 3, \ldots, N-1.
$$

Побудуємо точну триточкову різницеву схему. Для цього запишемо очевидні інтегральні наслідки (3.25), (3.26). Тоді будемо мати

$$
\int\limits_0^{x_2} G^1(x,\xi)\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\xi k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi = -\int\limits_0^{x_2} G^1(x,\xi)f(\xi,u)d\xi, \tag{3.27}
$$

$$
\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\xi k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi = -\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)f(\xi,u)d\xi. \tag{3.28}
$$

Якщо інтеграли, які входять в ліві частини (3.27), (3.28) проінтегрувати за частинами, то з урахуванням крайових умов (3.25), (3.26), отримаємо

$$
\int\limits_0^{x_2} G^1(x,\xi)\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\xi k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi =
$$

$$
= V_2^1(x)\int\limits_0^{x}\frac{d}{d\xi}\left[\xi k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi + \int\limits_x^{x_2} V_2^1(\xi)\frac{d}{d\xi}\left[\xi k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi =
$$

$$= V_2^1(x)xk(x)\frac{du}{dx} + V_2^1(\xi)\xi k(\xi)\frac{du}{d\xi}\bigg|_x^{x_2} + \int\limits_x^{x_2} \frac{du}{d\xi}d\xi =$$

$$= u(x_2) - u(x),$$

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\xi k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi =$$

$$= \frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\int\limits_{x_{j-1}}^{x} \xi V_1^j(\xi)\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\xi k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi +$$

$$+ \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\int\limits_{x}^{x_{j+1}} \xi V_2^j(\xi)\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[\xi k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi =$$

$$= \frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\left[V_1^j(\xi)\xi k(\xi)\frac{du}{d\xi}\bigg|_{x_{j-1}}^{x} - \int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{du}{d\xi}d\xi\right] +$$

$$+ \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\left[V_2^j(\xi)\xi k(\xi)\frac{du}{d\xi}\bigg|_{x}^{x_{j+1}} + \int\limits_{x}^{x_{j+1}}\frac{du}{d\xi}d\xi\right] =$$

$$= \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}u(x_{j+1}) - u(x) + \frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}u(x_{j-1}).$$

Отже,

$$u(x_2) - u(x) = -\int\limits_x^{x_2} \xi V_2^1(\xi)f(\xi,u)d\xi - V_2^1(x)\int\limits_0^x \xi f(\xi,u)d\xi, \qquad (3.29)$$

$$\begin{gathered}\frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}u(x_{j+1}) - u(x) + \frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}u(x_{j-1}) = \\ = -\frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\int\limits_{x_{j-1}}^{x} \xi V_1^j(\xi)f(\xi,u)d\xi - \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\int\limits_{x}^{x_{j+1}} \xi V_2^j(\xi)f(\xi,u)d\xi.\end{gathered} \qquad (3.30)$$

Запишемо рівність (3.29) при $x = x_0 = 0$ і $x = x_1$

$$u_2 - u_0 = -\int\limits_0^{x_2} \xi V_2^1(\xi) f(\xi, u) d\xi,$$

$$u_2 - u_1 = -\int\limits_{x_1}^{x_2} \xi V_2^1(\xi) f(\xi, u) d\xi - V_2^1(x_1) \int\limits_0^{x_1} \xi f(\xi, u) d\xi. \tag{3.31}$$

Від першої рівності віднімемо другу, тоді отримаємо

$$u_1 - u_0 = -\int\limits_0^{x_1} \xi V_2^1(\xi) f(\xi, u) d\xi + V_2^1(x_1) \int\limits_0^{x_1} \xi f(\xi, u) d\xi.$$

Рівність (3.31) помножимо на $\dfrac{1}{\hbar_1 x_1 V_2^1(x_1)}$, а (3.30) при $x = x_j$ на $\dfrac{V_1^j(x_{j+1})}{\hbar_j x_j V_1^j(x_j) V_2^j(x_j)}$. Звідси отримаємо

$$\begin{aligned} &\frac{u_2 - u_1}{\hbar_1 x_1 V_2^1(x_1)} = -\hat{T}^{x_1}(f(\xi, u(\xi))), \\ &\frac{1}{\hbar_j x_j}\left[\frac{u_{j+1} - u_j}{V_2^j(x_j)} - \frac{u_j - u_{j-1}}{V_1^j(x_j)}\right] = \\ &\qquad\qquad = -\hat{T}^{x_j}(f(\xi, u(\xi))),\ j = 2, 3, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Тоді з урахуванням рівності $V_2^j(x_j) = V_1^{j+1}(x_{j+1})$ із (3.32) випливає (3.23). ∎

Введемо множину

$$\Omega(\widehat{\widehat{\omega}}_h, r) = \left\{ (v_j)_{j=0}^N : \left\| v - u^{(0)} \right\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} \leqslant r \right\},$$

де

$$\|v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} = \max\left\{ \|v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-}, \left\| xk(x)\frac{dv}{dx} \right\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} \right\}, \quad \widehat{\omega}_h^- = x_0 \cup \widehat{\omega}_h,$$

$$\|v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-} = \max_{\xi \in \widehat{\omega}_h^-} |v(\xi)|, \quad \widehat{\omega}_h^+ = \widehat{\omega}_h \cup x_N, \quad \|v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} = \max_{\xi \in \widehat{\omega}_h^+} |v(\xi)|,$$

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=x_j} = \left.\frac{dY_\alpha^j(x, v)}{dx}\right|_{x=x_j}, \quad \|v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h} = \max_{\xi \in \widehat{\omega}_h} |v(\xi)|.$$

Існування ТТРС (3.23) доведено в теоремі 3.3, а єдиність встановлює

Лема 3.4 *Нехай виконуються умови теореми* 3.1. *Тоді існує таке* $h_0 > 0$, *що при* $|h| \leqslant h_0$ *ТТРС (3.23) буде мати єдиний розв'язок* $(u_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\widehat{\omega}}_h, r)$, *який може бути отриманий методом послідовних наближень:*

$$\begin{gathered} u_{x,0}^{(n)} = -\hat{T}^{x_0}(f(\xi, u^{(n-1)}(\xi))), \quad a_2 u_{x,1}^{(n)}/(\hbar_1 x_1) = -\hat{T}^{x_1}(f(\xi, u^{(n-1)}(\xi))), \\ \frac{1}{x_j}(a u_{\bar{x}}^{(n)})_{\hat{x},j} = -\hat{T}^{x_j}(f(\xi, u^{(n-1)}(\xi))), \quad j = 2, 3, \ldots, N-1, \quad u_N^{(n)} = \mu_2, \end{gathered} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} & u^{(n)}(x) = Y_1^1(x, u^{(n)}), \quad x \in [0, x_1], \\ & u^{(n)}(x) = Y_\alpha^j(x, u^{(n)}), \quad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \\ & j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad u^{(0)}(x) = \mu_2 \end{aligned}$$

з оцінкою похибки

$$\begin{aligned} & \left\| u^{(n)} - u \right\|_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h}^* = \\ & \quad = \max\left\{ \left\| u^{(n)} - u \right\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-}, \left\| xk(x)\frac{du^{(n)}}{dx} - xk(x)\frac{du}{dx} \right\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} \right\} \leqslant \\ & \quad \leqslant M q_1^n, \end{aligned} \tag{3.34}$$

де $q_1 = q + M_1|h| < 1, M, M_1$ *– сталі.*

Доведення. Оскільки схема (3.23) є точною, то її розв'язок для $\forall x \in \widehat{\widehat{\omega}}_h$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} u(x) = \mathfrak{R}_h(x, (u_j)_{j=0}^N) = \int_0^R G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + u^{(0)}(x) = \\ = \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + u^{(0)}(x), \end{aligned} \tag{3.35}$$

де

$$\begin{aligned} & u(\xi) = Y_1^1(\xi, u), \quad \xi \in [0, x_1], \\ & u(\xi) = Y_\alpha^j(\xi, u), \quad \xi \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \\ & j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Дослідимо властивості оператора $\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N)$. Оператор (3.35) переводить множину $\Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r)$ в себе. Дійсно, нехай $(v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r)$, тоді отримаємо

$$\left\|\mathfrak{R}_h(x,(v_j)_{j=0}^N) - u^{(0)}(x)\right\|_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}^* \leqslant K\int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}^* d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{KR^2}{4c_1}\max(1,2c_1) = r \quad \forall (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r).$$

Крім того,

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N) - \mathfrak{R}_h(x,(v_j)_{j=0}^N)\right\|_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}^* \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|_{1,\infty,[0,R]}^* \left|f(\xi,u(\xi)) - f(\xi,v(\xi))\right| d\xi \leqslant \\
&\leqslant L\int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|_{1,\infty,[0,R]}^* \left|u(\xi) - v(\xi)\right| d\xi \leqslant \\
&\leqslant L\|u-v\|_{1,\infty,[0,R]}^* \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|_{1,\infty,[0,R]}^* d\xi \leqslant \\
&\leqslant \frac{LR^2}{4c_1}\max(1,2c_1)\,\|u-v\|_{1,\infty,[0,R]}^* = \\
&= q\|u-v\|_{1,\infty,[0,R]}^* \quad \forall (u_j)_{j=0}^N, (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Покажемо, що

$$\|u-v\|_{1,\infty,[0,R]}^* \leqslant (1+M|h|)\,\|u-v\|_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}^*. \tag{3.37}$$

Для цього розглянемо крайові задачі

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad 0 < x < x_1,$$

$$\lim_{x\to 0} xk(x)\frac{du}{dx} = 0, \quad u(x_1) = u_1,$$

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x_{j-1} < x < x_j,$$

$$u(x_{j-1}) = u_{j-1}, \quad u(x_j) = u_j, \quad j = 2,3,\ldots,N,$$

розв'язки яких запишемо у вигляді

$$u(x)=\int\limits_0^{x_1}\widetilde{G}^1(x,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+u_1,\quad x\in[0,x_1],$$

$$u(x)=\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\widetilde{G}^j(x,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\hat{u}(x),$$

$$\hat{u}(x)=\frac{u(x_j)V_1^j(x)+u(x_{j-1})V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)},\ x\in[x_{j-1},x_j],\ j=2,3,\ldots,N,$$

де функції Гріна $\widetilde{G}^1(x,\xi),\widetilde{G}^j(x,\xi)$ визначаються формулами (3.15), (3.16). В силу умови Ліпшиця

$$\begin{aligned}\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,x_1]}\leqslant{}&|u_1-v_1|+\\&+L\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,x_1]}\int\limits_0^{x_1}\left\|\widetilde{G}^1(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]}d\xi\leqslant\\&\leqslant\|u-v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-}+M_2|h|\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,x_1]},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u-v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]}\leqslant{}&\|\hat{u}-\hat{v}\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]}+\\&+L\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\left\|\widetilde{G}^j(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]}d\xi\leqslant\\&\leqslant\|\hat{u}-\hat{v}\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]}+M_3|h|\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]},\quad j=2,3,\ldots,N.\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\|\hat{u}-\hat{v}\|_{0,\infty,[x_{j-1},x_j]}={}&\max_{x\in[x_{j-1},x_j]}\left\{\frac{|u_j-v_j|V_1^j(x)+|u_{j-1}-v_{j-1}|V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\right\}\leqslant\\&\leqslant\|u-v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-},\quad j=2,3,\ldots,N,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|xk(x)\frac{d\hat{u}}{dx}-xk(x)\frac{d\hat{v}}{dx}\right\|_{0,\infty,[x_{j-1},x_j]}={}&\max_{x\in[x_{j-1},x_j]}\frac{h_j\,|u_{\overline{x},j}-v_{\overline{x},j}|}{V_1^j(x_j)}\leqslant\\&\leqslant(1+M_4|h|)\left\|xk(x)\frac{du}{dx}-xk(x)\frac{dv}{dx}\right\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+},\quad j=2,3,\ldots,N,\end{aligned}$$

то отримаємо оцінки

$$\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \leqslant \|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} + M_2|h|\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{1-M_2|h|}\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} \leqslant (1+M|h|)\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h},$$

$$\|u-v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \leqslant (1+M_4|h|)\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} + M_3|h|\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+M_4|h|}{1-M_3|h|}\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} \leqslant$$
$$\leqslant (1+M|h|)\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h},\ j=2,3,\ldots,N,$$

з яких випливає нерівність (3.37).

Враховуючи (3.37), з оцінки (3.36) отримаємо

$$\left\|\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N) - \mathfrak{R}_h(x,(v_j)_{j=0}^N)\right\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} \leqslant (q+M_1|h|)\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} =$$
$$= q_1\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h}.$$

Оскільки на підставі (3.5) $q_1 = q + M_1|h| < 1$ при достатньо малому h_0, оператор (3.35) для $\forall (u_j)_{j=0}^N, (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\widehat{\omega}}_h, r)$, то здійснює стискувальне відображення.

Таким чином, згідно з принципом стискувальних відображень при достатньо малому h_0 ТТРС (3.23) має єдиний розв'язок, який може бути отриманий методом послідовних наближень (3.33) з оцінкою похибки (3.34). ∎

Існування та єдиність розв'язку допоміжних задач Коші доводяться в твердженні

Лема 3.5 *Нехай виконується умова (3.2) та існує стала* $\Delta > 0$ *така, що умови (3.3), (3.4) справджуються в області* $\Omega([0,R], r+\Delta)$. *Тоді* $\exists h_0 > 0$, *що при* $|h| \leqslant h_0$ *і* $\forall (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\widehat{\omega}}_h, r)$ *задачі*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{dY_1^1(x,v)}{dx}\right] = -f(x, Y_1^1(x,v)), \quad 0 < x < x_1, \\ &Y_1^1(0,v) = v_0, \quad \lim_{x\to 0} xk(x)\frac{dY_1^1(x,v)}{dx} = 0, \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xk(x)\frac{dY_\alpha^j(x,v)}{dx}\right] = -f(x, Y_\alpha^j(x,v)), \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},\\
&Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, v) = v(x_{j+(-1)^\alpha}),\\
&xk(x)\frac{dY_\alpha^j(x,v)}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = xk(x)\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},\\
&j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

будуть мати єдиний розв'язок.

Доведення. Оскільки задачі (3.38), (3.39) еквівалентні операторним рівнянням

$$
\begin{aligned}
&U_1^1(x) = \mathfrak{R}_1^1(x, v, U_1^1) =\\
&\quad = \int\limits_0^x \left[V_2^0(x) - V_2^0(\xi)\right]\xi f(\xi, U_1^1(\xi))d\xi + v_0, \quad x \in [0, x_1],\\
&U_\alpha^j(x) = \mathfrak{R}_\alpha^j(x, v, U_\alpha^j) =\\
&\quad = (-1)^{\alpha+1}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \left[V_\alpha^j(\xi) - V_\alpha^j(x)\right]\xi f(\xi, U_\alpha^j(\xi))d\xi +\\
&\quad + v_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1}V_\alpha^j(x)xk(x)\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}, \ x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}],\\
&\quad j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2,
\end{aligned}
$$

то дослідимо властивості операторів $\mathfrak{R}_1^1(x, v, U_1^1)$, $\mathfrak{R}_\alpha^j(x, v, U_\alpha^j)$, $j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1,2$. Врахуємо те, що

$$
u^{(0)}(x) = \mu_2 = u_0^{(0)} = u_{j+(-1)^\alpha}^{(0)}, \quad xk(x)\frac{du^{(0)}}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = 0.
$$

Зауважимо, що виконуються нерівності

$$
V_\alpha^j(x) - V_\alpha^j(\xi) \geqslant 0, \quad \forall \xi \in [x_{j+(-1)^\alpha}, x], \quad \alpha = 1,2.
$$

Нехай $U_1^1(x) \in \Omega([0,x_1], r+\Delta)$, $U_\alpha^j(x) \in \Omega([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r+\Delta)$, тоді

$$\left|\mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1) - u^{(0)}\right| \leqslant r + K\int\limits_0^x \left[V_2^0(x) - V_2^0(\xi)\right]\xi d\xi =$$

$$= r + K\left[V_2^0(x) - V_2^0(\xi)\right]\frac{\xi^2}{2}\bigg|_0^x - \frac{K}{2}\int\limits_0^x \frac{\xi d\xi}{k(\xi)} \leqslant r,$$

$$\left|xk(x)\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1)}{\partial x} - \frac{du^{(0)}}{dx}\right)\right| \leqslant r + K\int\limits_0^x \xi d\xi \leqslant r + M_4|h|,$$

$$\left|\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j) - u^{(0)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant r + M|h| + (-1)^{\alpha+1}K\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \left[V_\alpha^j(x) - V_\alpha^j(\xi)\right]\xi d\xi =$$

$$= r + M|h| - (-1)^{\alpha+1}KV_\alpha^j(x)\frac{x_{j+(-1)^\alpha}^2}{2} + \frac{K}{2}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \frac{\xi d\xi}{k(\xi)} \leqslant$$

$$\leqslant r + M_5|h|,$$

$$\left|xk(x)\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)}{\partial x} - \frac{du^{(0)}}{dx}\right)\right| \leqslant r + (-1)^{\alpha+1}K\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x \xi d\xi \leqslant r + M_6|h|.$$

Звідси

$$\left\|\mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1) - u^{(0)}\right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \leqslant r + \Delta,$$

$$\left\|\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j) - u^{(0)}\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}^* \leqslant r + \Delta,$$

тобто оператори $\mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1)$, $\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)$, $j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1,2$ при достатньо малому $|h| \leqslant h_0$, і $\forall (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r)$ переводить відповідно множини $\Omega([0,x_1], r+\Delta), \Omega([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r+\Delta)$ в себе. Крім того, для $\forall\ U_1^1(x), \widetilde{U}_1^1(x) \in \Omega([0,x_1], r+\Delta)$, $\forall\ U_\alpha^j(x), \widetilde{U}_\alpha^j(x) \in \Omega([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r+\Delta)$

маємо оцінки

$$\left|\mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1)-\mathfrak{R}_1^1(x,v,\widetilde{U}_1^1)\right|\leqslant$$

$$\leqslant L\left|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right|\int\limits_0^x\left[V_2^0(x)-V_2^0(\xi)\right]\xi d\xi=$$

$$=L\left|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right|\left[\left(V_2^0(x)-V_2^0(\xi)\right)\frac{\xi^2}{2}\bigg|_0^x-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\frac{\xi d\xi}{k(\xi)}\right]\leqslant$$

$$\leqslant L\left|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right|\frac{x^2}{4c_1}\leqslant q\left\|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]},$$

$$\left|xk(x)\left(\frac{\partial\mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1)}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{R}_1^1(x,v,\widetilde{U}_1^1)}{\partial x}\right)\right|\leqslant L\left|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right|\int\limits_0^x\xi d\xi=$$

$$=L\left|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right|\frac{x^2}{2}\leqslant q\left\|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]},$$

$$\left|\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)-\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,\widetilde{U}_\alpha^j)\right|\leqslant$$

$$\leqslant(-1)^{\alpha+1}L\left|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right|\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x\left[V_\alpha^j(x)-V_\alpha^j(\xi)\right]\xi d\xi=$$

$$=L\left|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right|\left[(-1)^\alpha V_\alpha^j(x)\frac{x_{j+(-1)^\alpha}^2}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x\frac{\xi d\xi}{k(\xi)}\right]\leqslant$$

$$\leqslant(q+M|h|)\left\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]},$$

$$\left|xk(x)\left(\frac{\partial\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,\widetilde{U}_\alpha^j)}{\partial x}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant(-1)^{\alpha+1}L\left|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right|\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x\xi d\xi=$$

$$=(-1)^{\alpha+1}L\left|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right|\frac{x^2-x_{j+(-1)^\alpha}^2}{2}\leqslant q\left\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]},$$

Отже,

$$\left\|\mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1)-\mathfrak{R}_1^1(x,v,\widetilde{U}_1^1)\right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^* \leqslant q\left\|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right\|_{1,\infty,[0,x_1]}^*,$$

$$\left\|\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)-\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,\widetilde{U}_\alpha^j)\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}^* \leqslant$$
$$\leqslant (q+M|h|)\left\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}^*.$$

В результаті приходимо до висновку, що оператори $\mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1), \mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)$, $j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1,2$ при достатньо малому h_0 здійснюють стискувальне відображення на $\Omega([0,x_1], r+\Delta)$, $\Omega([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r+\Delta)$ відповідно. Таким чином, для $\forall (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r)$ задачі (3.38), (3.39) мають єдиний розв'язок. ■

3.3 Алгоритмічна реалізація точної триточкової різницевої схеми

Насамперед врахуємо, що

$$\int_0^{x_1} \xi f(\xi,u)d\xi = -x_1 Z_1^1(x_1,u),$$

$$\int_0^{x_1} \xi V_2^1(\xi) f(\xi,u)d\xi = -x_1 V_2^1(x_1) Z_1^1(x_1,u) - Y_1^1(x_1,u) + u_0,$$

$$(-1)^{\alpha+1} \int_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j} \xi V_\alpha^j(\xi) f(\xi,u)d\xi = (-1)^\alpha x_j V_\alpha^j(x_j) Z_\alpha^j(x_j,u) +$$
$$+ Y_\alpha^j(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha},$$

де $Y_1^1(x_1,u), Z_1^1(x_1,u),\ Y_\alpha^j(x_j,u), Z_\alpha^j(x_j,u),\ \alpha = 1,2$ —розв'язки задач Коші

$$\begin{aligned}
&\frac{dY_1^1(x,u)}{dx} = \frac{Z_1^1(x,u)}{k(x)},\\
&\frac{dZ_1^1(x,u)}{dx} = -f(x,Y_1^1(x,u)) - \frac{Z_1^1(x,u)}{x}, \quad 0 < x < x_1,\\
&Y_1^1(0,u) = u_0, \quad \lim_{x\to 0} Z_1^1(x,u) = 0,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx} = \frac{Z_\alpha^j(x,u)}{k(x)},\\
&\frac{dZ_\alpha^j(x,u)}{dx} = -f(x, Y_\alpha^j(x,u)) - \frac{Z_\alpha^j(x,u)}{x}, \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},\\
&Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = u_{j+(-1)^\alpha}, \quad Z_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},\\
&\quad j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

а $\bar{V}_\alpha^j(x) = (-1)^{\alpha+1} V_\alpha^j(x)$ — розв'язки задач Коші

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{V}_\alpha^j(x)}{dx} = \frac{1}{xk(x)}, \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},\\
&\bar{V}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}) = 0, \quad j = 3-\alpha, 4-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Тоді праву частину ТТРС (3.23) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_0, u) = \hat{T}^{x_0}(f(\xi, u(\xi))) = \frac{u_0 - Y_1^1(x_1, u)}{h_1},\\
&\varphi(x_1, u) = \hat{T}^{x_1}(f(\xi, u(\xi))) =\\
&\qquad = \frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^1(x_1, u) - Z_1^1(x_1, u) + \frac{Y_2^1(x_1, u) - u_2}{x_1 V_2^1(x_1)}\right],\\
&\varphi(x_j, u) = \hat{T}^{x_j}(f(\xi, u(\xi))) =\\
&\qquad = \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^j(x_j, u) + (-1)^\alpha \frac{Y_\alpha^j(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j V_\alpha^j(x_j)}\right],\\
&\qquad j = 2, 3, \ldots, N-1.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Отже, для побудови ТТРС (3.23), (3.24), (3.43) необхідно для $\forall x_j \in \hat{\omega}_h$ розв'язати чотири задачі Коші (3.40) або (3.41) і (3.42). Якщо задачі (3.40)–(3.42) розв'язати чисельно, то отримаємо усічену ТРС.

Задачі Коші (3.40)–(3.42) будемо розв'язувати чисельно за допомогою будь-яких однокрокових методів (див., напр., [55])

$$\begin{aligned}
&Y_1^{(\bar{m})1}(x_1, u) = u_0 + h_1 \widetilde{\Phi}_1(x_0, u_0, 0, h_1),\\
&Z_1^{(m)1}(x_1, u) = h_1 \widetilde{\Phi}_2(x_0, u_0, 0, h_1),
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$
\begin{aligned}
&Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u) = u_{j+(-1)^\alpha}+\\
&\quad + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku^{'})_{j+(-1)^\alpha}, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right),\\
&Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u) = (ku^{'})_{j+(-1)^\alpha}+\\
&\quad + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku^{'})_{j+(-1)^\alpha}, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right),\\
&\bar V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j) = (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right),\\
&j = 3-\alpha, 4-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2.
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

де $\widetilde\Phi_1(x,u,y,h)$, $\widetilde\Phi_2(x,u,y,h)$, $\Phi_1(x,u,y,h)$, $\Phi_2(x,u,y,h)$, $\Phi_3(x,u,h)$ — функції приросту, $(ku')_{j+(-1)^\alpha} = k(x)\frac{du}{dx}\Big|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}$, $Z_1^{(m)1}(x_1,u), Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)$ апроксимують відповідно значення $Z_1^1(x_1,u), Z_\alpha^j(x_j,u)$ з порядком точності m (m – ціле додатне), $Y_1^{(\bar m)1}(x_1,u)$, $Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)$, $V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)$ апроксимують відповідно $Y_1^1(x_1,u)$, $Y_\alpha^j(x_j,u)$, $V_\alpha^j(x_j)$ з порядком точності $\bar m = 2[(m+1)/2]$ ($[\cdot]$ – ціла частина). Якщо $k(x)$ та права частина диференціального рівняння $f(x,u)$ достатньо гладкі, то існують розклади

$$
Y_1^1(x_1,u) = Y_1^{(\bar m)1}(x_1,u) + h_1^{\bar m+1}\psi_1^1(x_0,u) + O(h_1^{\bar m+2}), \tag{3.46}
$$

$$
Z_1^1(x_1,u) = Z_1^{(m)1}(x_1,u) + h_1^{m+1}\tilde\psi_1^1(x_0,u) + O(h_1^{m+2}), \tag{3.47}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_\alpha^j(x_j,u) = &Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)+\\
&+ [(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\bar m+1}\psi_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}),
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_\alpha^j(x_j,u) = &Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)+\\
&+ [(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{m+1}\tilde\psi_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u) + O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}),
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

$$
\bar V_\alpha^j(x_j) = \bar V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j) + [(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\bar m+1}\bar\psi_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}). \tag{3.50}
$$

У випадку методу рядів Тейлора

$$
\begin{aligned}
&\widetilde\Phi_1(x_0,u_0,0,h_1) = -h_1\frac{f(x_0,u_0)}{4k(x_0)}-\\
&\quad -\sum_{p=3}^{\bar m}\frac{h_1^{p-1}}{p!}\left[\sum_{j=0}^{p-2}\binom{p-1}{j}\frac{p-j-1}{p-j}\frac{d^{p-j-2}f(x_0,u_0)}{dx^{p-j-2}}\frac{d^j}{dx^j}\frac{1}{k(x)}\Big|_{x=x_0}\right],
\end{aligned}
$$

$$\widetilde{\Phi}_2\left(x_0, u_0, 0, h_1\right) = -\frac{1}{2} f(x_0, u_0) - \sum_{p=2}^{m} \frac{h_1^{p-1}}{(p-1)!(p+1)} \frac{d^{p-1} f(x_0, u_0)}{dx^{p-1}},$$

$$\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku')_{j+(-1)^\alpha}, (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right) =$$
$$= \left[1 - (-1)^{\alpha+1} \frac{h_{j-1+\alpha}}{2} \left(\frac{1}{x_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right] u'_{j+(-1)^\alpha} -$$
$$- (-1)^{\alpha+1} \frac{h_{j-1+\alpha}}{2} \frac{f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha})}{k_{j+(-1)^\alpha}} +$$
$$+ \sum_{p=3}^{\bar{m}} \frac{[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!} \frac{d^p Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^p},$$

$$\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku')_{j+(-1)^\alpha}, (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right) =$$
$$= -f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}) - \frac{(ku')_{j+(-1)^\alpha}}{x_{j+(-1)^\alpha}} +$$
$$+ \sum_{p=2}^{m} \frac{[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!} \frac{d^p Z_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^p},$$

$$\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right) =$$
$$= \frac{1}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}} + \sum_{p=2}^{\bar{m}} \frac{[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!} \left[\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \frac{1}{xk(x)}\right]\Bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}.$$

Лема 3.6 *Нехай $k(x) \in Q^{m+1}[0, R]$, існує стала $\Delta > 0$ така, що*

$$f(x, u) \in \bigcup_{j=1}^{N} C^m\left([x_{j-1}, x_j] \times \Omega([0, R], r + \triangle)\right),$$

і для чисельних методів (3.45) існують розклади (3.48)–(3.50), тоді справджуються співвідношення

$$\begin{aligned} Y_\alpha^j(x_j, u) = & Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u) + \\ & + (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1} \psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2}), \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} Z_\alpha^j(x_j, u) = & Z_\alpha^{(m)j}(x_j, u) + \\ & + [(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}]^{m+1} \tilde{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u) + O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}), \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$V_\alpha^j(x_j) = V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j) + h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\bar\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}), \qquad (3.53)$$
$$j = 3-\alpha,\ 4-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2.$$

Доведення. З того, що метод (3.45) має порядок точності $\bar m$ та виконуються умови гладкості для функцій $k(x)$ та $f(x,u)$, випливає, що існують розклади (3.48)–(3.50) (див., напр., [55, с.168]). Згідно з (3.48), (3.49)

$$\begin{aligned} Y_1^j(x_j,u) - Y_1^{(\bar m)j}(x_j,u) &= Y_1^j(x_j,u) - u(x_j-h_j) - \\ &- h_j\Phi_1(x_j-h_j, u(x_j-h_j), ku'|_{x=x_j-h_j}, h_j) = \\ &= h_j^{\bar m+1}\psi_1^j(x_j-h_j,u) + O(h_j^{\bar m+2}), \end{aligned} \qquad (3.54)$$

$$\begin{aligned} Z_1^j(x_j,u) - Z_1^{(m)j}(x_j,u) &= Z_1^j(x_j,u) - ku'|_{x=x_j-h_j} - \\ &- h_j\Phi_2(x_j-h_j, u(x_j-h_j), ku'|_{x=x_j-h_j}, h_j) = \\ &= h_j^{m+1}\tilde\psi_1^j(x_j-h_j,u) + O(h_j^{m+2}). \end{aligned} \qquad (3.55)$$

Зазначимо, що

$$\begin{aligned} &Y_2^j(x_j,u) - Y_2^{(\bar m)j}(x_j,u) = \\ &\qquad = Y_2^j(x_j,u) - u_{j+1} + h_{j+1}\Phi_1(x_{j+1}, u_{j+1}, (ku')_{j+1}, -h_{j+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Z_2^j(x_j,u) - Z_2^{(m)j}(x_j,u) = \\ &\qquad = Z_2^j(x_j,u) - (ku')_{j+1} + h_{j+1}\Phi_2(x_{j+1}, u_{j+1}, (ku')_{j+1}, -h_{j+1}). \end{aligned}$$

Підставимо в рівності (3.54), (3.55) замість h_j величину $-h_{j+1}$ і врахуємо, що $Y_1^j(x_j,u) = Y_2^j(x_j,u),\ Z_1^j(x_j,u) = Z_2^j(x_j,u)$, тоді отримаємо

$$\begin{aligned} &Y_2^j(x_j,u) - u_{j+1} + h_{j+1}\Phi_1(x_{j+1}, u_{j+1}, (ku')_{j+1}, -h_{j+1}) = \\ &\qquad = -h_{j+1}^{\bar m+1}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u) + O(h_{j+1}^{\bar m+2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Z_2^j(x_j,u) - (ku')_{j+1} + h_{j+1}\Phi_2(x_{j+1}, u_{j+1}, (ku')_{j+1}, -h_{j+1}) = \\ &\qquad = (-1)^{m+1}h_{j+1}^{m+1}\tilde\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u) + O(h_{j+1}^{m+2}). \end{aligned}$$

Звідси випливають співвідношення (3.51), (3.52). Аналогічно до (3.51) доводиться рівність

$$\bar V_\alpha^j(x_j) = \bar V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j) + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\bar\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}),$$

з якої з урахуванням того, що $\bar{V}_\alpha^j(x) = (-1)^{\alpha+1} V_\alpha^j(x)$, випливає (3.53). ■

Замість ТТРС (3.23), (3.24), (3.43) можна тепер скористатися ТРС рангу $\bar{m}$ вигляду

$$\begin{gathered} y_{x,0}^{(\bar{m})} = -\varphi^{(\bar{m})}(x_0, y^{(\bar{m})}), \quad a_2^{(\bar{m})} y_{x,1}^{(\bar{m})}/(\hbar_1 x_1) = -\varphi^{(\bar{m})}(x_1, y^{(\bar{m})}), \\ \frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar{m})} y_{\bar{x}}^{(\bar{m})}\right)_{\hat{x},j} = -\varphi^{(\bar{m})}(x_j, y^{(\bar{m})}), \quad j = 2, 3, \ldots, N-1, \quad y_N^{(\bar{m})} = \mu_2, \end{gathered} \tag{3.56}$$

де

$$a^{(\bar{m})}(x_j) = \left[\frac{1}{h_j} V_1^{(\bar{m})j}(x_j)\right]^{-1}, \quad \varphi^{(\bar{m})}(x_0, u) = \frac{1}{h_1}\left(u_0 - Y_1^{(\bar{m})1}(x_1, u)\right),$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_1, u) = \frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^{(m)1}(x_1, u) - Z_1^{(m)1}(x_1, u) + \frac{Y_2^{(\bar{m})1}(x_1, u) - u_2}{x_1 V_2^{(\bar{m})1}(x_1)}\right],$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) = \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^{(m)j}(x_j, u) + (-1)^\alpha \frac{Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)}\right].$$

Для доведення існування та єдиності розв'язку ТРС (3.56), а також для встановлення її точності необхідна

Лема 3.7 *Нехай задовольняються умови леми* 3.6*; тоді будуть виконуватися оцінки*

$$\left|a^{(\bar{m})}(x_j) - a(x_j)\right| \leqslant M|h|^{\bar{m}}, \tag{3.57}$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_0, u) - \varphi(x_0, u) = h_1^{\bar{m}} \psi_1^1(x_0, u) + O(h_1^{\bar{m}+1}), \tag{3.58}$$

$$\begin{gathered} \varphi^{(\bar{m})}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = \\ = \left\{h_j^{m+1}\left[k(x)\left(\psi_1^j(x, u) - \bar{\psi}_1^j(x, u) x k(x) \frac{du}{dx}\right) - \tilde{\psi}_1^j(x, u)\right]_{x = x_j + 0}\right\}_{\hat{x}} + \\ + O\left(\frac{h_j^{m+2} + h_{j+1}^{m+2}}{\hbar_j}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \end{gathered} \tag{3.59}$$

якщо m непарне,

$$\begin{aligned}&\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=\\&\qquad=\left\{h_j^m\left[k(x)\left(\psi_1^j(x,u)-\bar{\psi}_1^j(x,u)xk(x)\frac{du}{dx}\right)\right]_{x=x_j+0}\right\}_{\hat{x}}+\\&\qquad+O\left(\frac{h_j^{m+1}+h_{j+1}^{m+1}}{\hbar_j}\right),\quad j=1,2,\dots,N-1,\end{aligned}\tag{3.60}$$

якщо m парне; крім того

$$\begin{aligned}&\left|\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)\right|\leqslant M|h|,\\&\left|\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)\right|\leqslant K+M|h|\ \forall u\in\Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h,r+\triangle),\ j=1,2,\dots,N-1,\end{aligned}\tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}&\left|\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)-\varphi^{(\bar{m})}(x_0,v)\right|\leqslant M|h|\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h},\\&\left|\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi^{(\bar{m})}(x_j,v)\right|\leqslant\\&\quad\leqslant(L+M|h|)\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h}\forall u,v\in\Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h,r+\triangle),\ j=1,2,\dots,N-1.\end{aligned}\tag{3.62}$$

Тут і надалі через M позначатимемо різні сталі, що не залежать від $|h|$, якщо це не буде спричиняти непорозуміння.

Доведення. Нерівність (3.57) випливає з (3.53), а співвідношення (3.58) — з (3.46). Дійсно,

$$a^{(\bar{m})}(x_j)-a(x_j)=\frac{h_j[V_1^j(x_j)-V_1^{(\bar{m})j}(x_j)]}{V_1^j(x_j)V_1^{(\bar{m})j}(x_j)}=O(h_j^{\bar{m}}),$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)-\varphi(x_0,u)&=\frac{1}{h_1}\left(Y_1^1(x_1,u)-Y_1^{(\bar{m})1}(x_1,u)\right)=\\&=h_1^{\bar{m}}\psi_1^1(x_0,u)+O(h_1^{\bar{m}+1}).\end{aligned}\tag{3.63}$$

Доведемо (3.59), (3.60). Зауважимо, що

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar{m})}(x_1,u)-\varphi(x_1,u)&=\frac{1}{\hbar_1}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left(Z_\alpha^{(m)1}(x_1,u)-Z_\alpha^1(x_1,u)\right)+\right.\\&\left.+\frac{1}{x_1}\left(\frac{Y_2^{(\bar{m})1}(x_1,u)-u_2}{V_2^{(\bar{m})1}(x_1)}-\frac{Y_2^1(x_1,u)-u_2}{V_2^1(x_1)}\right)\right],\end{aligned}\tag{3.64}$$

$$\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha}\left[Z_{\alpha}^{(m)j}(x_j,u)-Z_{\alpha}^{j}(x_j,u)+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{\alpha}}{x_j}\left(\frac{Y_{\alpha}^{(\bar m)j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^{\alpha}}}{V_{\alpha}^{(\bar m)j}(x_j)}-\frac{Y_{\alpha}^{j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^{\alpha}}}{V_{\alpha}^{j}(x_j)}\right)\right].\tag{3.65}$$

З леми 3.6 та рівності

$$Y_{\alpha}^{j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^{\alpha}}=(-1)^{\alpha}h_{j-1+\alpha}\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^{\alpha}}}+O(h_{j-1+\alpha}^{2})$$

маємо

$$Z_1^{(m)1}(x_1,u)-Z_1^{1}(x_1,u)=-h_1^{m+1}\tilde\psi_1^{1}(x_0,u)+O(h_1^{m+2}),$$

$$Z_{\alpha}^{(m)j}(x_j,u)-Z_{\alpha}^{j}(x_j,u)=-[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{m+1}\tilde\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^{\alpha}},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}),$$

$$\frac{Y_{\alpha}^{(\bar m)j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^{\alpha}}}{V_{\alpha}^{(\bar m)j}(x_j)}-\frac{Y_{\alpha}^{j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^{\alpha}}}{V_{\alpha}^{j}(x_j)}=$$
$$=\frac{Y_{\alpha}^{j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^{\alpha}}-(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^{\alpha}},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2})}{V_{\alpha}^{j}(x_j)-h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\bar\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^{\alpha}})+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2})}-$$
$$-\frac{Y_{\alpha}^{j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^{\alpha}}}{V_{\alpha}^{j}(x_j)}=-\frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^{\alpha}},u)}{V_{\alpha}^{j}(x_j)}+$$
$$+\frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}\bar\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^{\alpha}})\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^{\alpha}}}}{\left[V_{\alpha}^{j}(x_j)\right]^{2}}+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}).\tag{3.66}$$

З урахуванням (3.66) та співвідношення

$$V_{\alpha}^{j}(x_j)=\frac{h_{j-1+\alpha}}{(xk)_{j+(-1)^{\alpha}}}+O(h_{j-1+\alpha}^{2}),$$

рівності (3.64), (3.65) за непарних m зводяться до

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar m)}(x_1,u)-\varphi(x_1,u)&=\\ =\frac{1}{\hbar_1}\bigg\{\frac{1}{x_1}\Big[&h_2^{m+1}x_2k_2\psi_1^2(x_2,u)-h_1^{m+1}x_0k_0\psi_1^1(x_0,u)-\\ &-h_2^{m+1}x_2k_2\bar\psi_1^2(x_2)(xku')_2+h_1^{m+1}x_0k_0\bar\psi_1^1(x_0)(xku')_0\Big]-\\ &-h_2^{m+1}\tilde\psi_1^2(x_2,u)+h_1^{m+1}\tilde\psi_1^1(x_0,u)\bigg\}+O\left(\frac{h_1^{m+2}+h_2^{m+2}}{\hbar_1}\right),\end{aligned}\tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)&=\\ =\frac{1}{\hbar_j}\bigg\{\frac{1}{x_j}\Big[&h_{j+1}^{m+1}k_{j+1}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u)-h_j^{m+1}k_{j-1}\psi_1^j(x_{j-1},u)-\\ &-h_{j+1}^{m+1}k_{j+1}\bar\psi_1^{j+1}(x_{j+1})(xku')_{j+1}+h_j^{m+1}k_{j-1}\bar\psi_1^j(x_{j-1})(xku')_{j-1}\Big]-\\ &-h_{j+1}^{m+1}\tilde\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u)+h_j^{m+1}\tilde\psi_1^j(x_{j-1},u)\bigg\}+O\left(\frac{h_j^{m+2}+h_{j+1}^{m+2}}{\hbar_j}\right),\end{aligned}\tag{3.68}$$

а за парних m – до виразів

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar m)}(x_1,u)-\varphi(x_1,u)=\frac{1}{x_1\hbar_1}\Big[&h_2^m x_2k_2\psi_1^2(x_2,u)-h_1^m x_0k_0\psi_1^1(x_0,u)-\\ &-h_2^m x_2k_2\bar\psi_1^2(x_2)(xku')_2+h_1^m x_0k_0\bar\psi_1^1(x_0)(xku')_0\Big]+\\ &+O\left(\frac{h_1^{m+1}+h_2^{m+1}}{\hbar_1}\right),\end{aligned}\tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=\frac{1}{x_j\hbar_j}\Big[&h_{j+1}^m k_{j+1}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u)-h_j^m k_{j-1}\psi_1^j(x_{j-1},u)-\\ &-h_{j+1}^m k_{j+1}\bar\psi_1^{j+1}(x_{j+1})(xku')_{j+1}+h_j^m k_{j-1}\bar\psi_1^j(x_{j-1})(xku')_{j-1}\Big]+\\ &+O\left(\frac{h_j^{m+1}+h_{j+1}^{m+1}}{\hbar_j}\right).\end{aligned}\tag{3.70}$$

Оскільки

$$k_{j-1}\psi_1^j(x_{j-1},u)=k_j\psi_1^j(x_j,u)+O(h_j),\ \ \tilde\psi_1^j(x_{j-1},u)=\tilde\psi_1^j(x_j,u)+O(h_j),$$

$$k_{j-1}\bar\psi_1^j(x_{j-1})(xku')_{j-1}=k_j\bar\psi_1^j(x_j)(xku')_j+O(h_j),$$

то з урахуванням $x_j = x_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}$ із (3.67)—(3.70) випливають оцінки (3.59), (3.60).

Доведемо нерівності (3.61), (3.62). Із (3.44), (3.45) випливають співвідношення

$$\widetilde{\Phi}_1(x,u,0,0) = 0, \ \frac{\partial \widetilde{\Phi}_1(x,u,0,0)}{\partial h} = -\frac{f(x,u)}{4k(x)}, \ \widetilde{\Phi}_2(x,u,0,0) = -\frac{f(x,u)}{2},$$

$$\Phi_1(x,u,y,0) = \frac{y}{k(x)}, \ \frac{\partial \Phi_1(x,u,y,0)}{\partial h} = -\frac{1}{2}\left(\frac{f(x,u)}{k(x)} + \frac{y}{k(x)x} + \frac{yk'(x)}{k^2(x)}\right),$$

$$\Phi_2(x,u,y,0) = -f(x,u) - \frac{y}{x}, \ \Phi_3(x,0,0) = \frac{1}{xk(x)},$$

$$\frac{\partial \Phi_3(x,0,0)}{\partial h} = -\frac{1}{2xk(x)}\left(\frac{1}{x} + \frac{k'(x)}{k(x)}\right).$$

Отже, справджуються рівності

$$\begin{aligned} Y_1^{(\bar m)1}(x_1,u) = u_0 + h_1\widetilde{\Phi}_1(x_0,u_0,0,0) + h_1^2\frac{\partial \widetilde{\Phi}_1(x_0,u_0,0,0)}{\partial h} + \\ + \frac{h_1^3}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar h}\right)}{\partial h^2} = \\ = u_0 - h_1^2\frac{f(x_0,u_0)}{4k_0} + \frac{h_1^3}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar h}\right)}{\partial h^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1^{(m)1}(x_1,u) =& h_1\widetilde{\Phi}_2(x_0,u_0,0,0) + h_1^2\frac{\partial \widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,\tilde{\bar h}\right)}{\partial h} = \\ =& - h_1\frac{f(x_0,u_0)}{2} + h_1^2\frac{\partial \widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar h}\right)}{\partial h}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u) = \\ & = u_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{1}{x_{j+(-1)^\alpha}} + \right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right]u'_{j+(-1)^\alpha} - \frac{h_{j-1+\alpha}^2}{2}\frac{f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})}{k_{j+(-1)^\alpha}} + \\ & + (-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}^3}{2}\frac{\partial^2 \Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u) = &\left(1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{x_{j+(-1)^\alpha}}\right)(ku')_{j+(-1)^\alpha} - \\
&- (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha} f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}) + \\
&+ h_{j-1+\alpha}^2 \frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku^{'})_{j+(-1)^\alpha}, \tilde{h}\right)}{\partial h},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) = &\frac{h_{j-1+\alpha}}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}}\left(1 - (-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{1}{x_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right) + \\
&+ h_{j-1+\alpha}^3 \frac{\partial^2\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, \breve{h}\right)}{\partial h^2} = \\
&= \frac{h_{j-1+\alpha}}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}} + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^2 \frac{\partial\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, \breve{h}\right)}{\partial h}.
\end{aligned}
$$

Звідси

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u) &= \frac{1}{h_1}\left(y_0^{(\bar{m})} - Y_1^{(\bar{m})1}(x_1,u)\right) = \\
&= \frac{1}{h_1}\left(h_1^2 \frac{f(x_0,u_0)}{4k_0} + \frac{h_1^3}{2}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar{h}}\right)}{\partial h^2}\right) = \qquad (3.71)\\
&= h_1 \frac{f(x_0,u_0)}{4k_0} + O(h_1^2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{(\bar{m})}(x_1,u) = \\
&\quad = \frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^{(m)1}(x_1,u) - Z_1^{(m)1}(x_1,u) + \frac{Y_2^{(\bar{m})1}(x_1,u) - u_2}{x_1 V_2^{(\bar{m})1}(x_1)}\right] =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\hbar_1}\left\{\frac{h_1}{2}f(x_0,u_0) + \left[1 - \frac{1}{x_1 V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\frac{h_2}{2k_2}\right]h_2 f(x_2,u_2) + \right.\\
&+ \left[1 + \frac{h_2}{x_2} - \frac{h_2}{x_1 V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\left(\frac{1}{k_2} + \frac{h_2}{2}\left(\frac{k_2'}{k_2^2} + \frac{1}{(xk)_2}\right)\right)\right](ku')_2 -\\
&- h_1^2\frac{\partial\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,\hat{\tilde{h}}\right)}{\partial h} + h_2^2\frac{\partial\Phi_2\left(x_2,u_2,(ku')_2,\tilde{h}\right)}{\partial h} -\\
&\left. - \frac{h_2^3}{2x_1 V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_2,u_2,(ku')_2,\bar h\right)}{\partial h^2}\right\} =\\
&= \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{h_1}{2}f(x_0,u_0) + \frac{h_2}{2}f(x_2,u_2)\right) + O\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{\hbar_1}\right),
\end{aligned} \tag{3.72}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(\bar m)}(x_j,u) &= \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u) + (-1)^\alpha\frac{Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\right] =\\
&= \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\left[1 - \frac{1}{x_j V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2k_{j+(-1)^\alpha}}\right]h_{j-1+\alpha}f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha}) + \right.\\
&+ (-1)^\alpha\left[1 - \frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{x_{j+(-1)^\alpha}} - \frac{h_{j-1+\alpha}}{x_j V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\times\right.\\
&\times\left.\left(\frac{1}{k_{j+(-1)^\alpha}} - \frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k^2_{j+(-1)^\alpha}} + \frac{1}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right)\right](ku')_{j+(-1)^\alpha} +\\
&+ (-1)^\alpha h_{j-1+\alpha}^2\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\tilde h\right)}{\partial h} +\\
&\left. + \frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^3}{2x_j V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2}\right\} =\\
&= \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha}) + O\left(\frac{h_j^2+h_{j+1}^2}{\hbar_j}\right).
\end{aligned} \tag{3.73}
$$

Тоді

$$
\left|\varphi^{(\bar m)}(x_0,u)\right| \leqslant M|h|, \quad |\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)| \leqslant K + M|h|.
$$

Доведемо оцінку (3.62). Оскільки

$$|\varphi^{(\bar m)}(x_0,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_0,v)| \leqslant \frac{h_1}{4k_0}|f(x_0,u_0)-f(x_0,v_0)|+ \\ +\frac{h_1^2}{2}\left|\frac{\partial^2\widetilde\Phi_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar h}\right)}{\partial h^2}-\frac{\partial^2\widetilde\Phi_1\left(x_0,v_0,0,\hat{\bar h}\right)}{\partial h^2}\right|,$$

$$|\varphi^{(\bar m)}(x_1,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_1,v)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\hbar_1}\left[\frac{h_1}{2}|f(x_0,u_0)-f(x_0,v_0)|+\right. \\ +\frac{h_2}{2}|f(x_2,u_2)-f(x_2,v_2)|\left[1+\frac{h_2^2}{|V_2^{(\bar m)1}(x_1)|}\left|\frac{\partial\Phi_3\left(x_2,0,\breve h\right)}{\partial h}\right|\right]+ \\ +\frac{h_2^3}{2x_2|V_2^{(\bar m)1}(x_1)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_3\left(x_2,0,\hat h\right)}{\partial h^2}\right|\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+ \\ +h_1^2\left|\frac{\partial\widetilde\Phi_2\left(x_0,u_0,0,\hat{\bar h}\right)}{\partial h}-\frac{\partial\widetilde\Phi_2\left(x_0,v_0,0,\hat{\bar h}\right)}{\partial h}\right|+ \\ +h_2^2\left|\frac{\partial\Phi_2\left(x_2,u_2,(ku')_2,\tilde h\right)}{\partial h}-\frac{\partial\Phi_2\left(x_2,v_2,(kv')_2,\tilde h\right)}{\partial h}\right|+ \\ \left.+\frac{h_2^3}{2x_1|V_2^{(\bar m)1}(x_1)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_2,u_2,(ku')_2,\bar h\right)}{\partial h^2}-\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_2,v_2,(kv')_2,\bar h\right)}{\partial h^2}\right|\right],$$

$$|\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_j,v)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}|f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})-f(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha})|\times\right. \\ \times\left[1+\frac{h_{j-1+\alpha}^2}{|V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)|}\left|\frac{\partial\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,\breve h\right)}{\partial h}\right|\right]+$$

$$+\frac{h^3_{j-1+\alpha}}{2x_j|V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,\tilde h\right)}{\partial h^2}\right|\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+$$

$$+\frac{h^3_{j-1+\alpha}}{2x_j|V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha},(kv')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2}\right|+$$

$$+h^2_{j-1+\alpha}\left|\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\tilde h\right)}{\partial h}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha},(kv')_{j+(-1)^\alpha},\tilde h\right)}{\partial h}\right|\right\},$$

то за формулою скінченних приростів знайдуться $\hat u,\hat y,\bar u,\bar y,\tilde u,\tilde y$ такі, що

$$|\varphi^{(\bar m)}(x_0,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_0,v)|\leqslant M|h|\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-},$$

$$|\varphi^{(\bar m)}(x_1,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_1,v)|\leqslant$$

$$\leqslant(L+M|h|)\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}+M|h|^2\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+$$

$$+M|h|\left\{\left[\left|\frac{\partial^2\widetilde\Phi_2\left(x_0,\hat u,0,\hat h\right)}{\partial h\partial u}\right|+\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_2,\tilde u,(ku')_2,\tilde h\right)}{\partial h\partial u}\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_2,\bar u,(ku')_2,\bar h\right)}{\partial h^2\partial u}\right|\right]\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}\right\}+$$

$$+M|h|\left\{\left[\left|\frac{\partial^2\widetilde\Phi_2\left(x_0,u_0,\hat y,\hat h\right)}{\partial h\partial y}\right|+\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_2,u_2,\tilde y,\tilde h\right)}{\partial h\partial y}\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_2,u_2,\bar y,\bar h\right)}{\partial h^2\partial y}\right|\right]\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}\right\},$$

$$
\begin{aligned}
&|\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_j,v)| \leqslant \\
&\qquad \leqslant (L+M|h|)\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}+M|h|^2\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+ \\
&\qquad + M|h|\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\left[\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},\tilde u,(ku')_{j+(-1)^\alpha},\tilde h\right)}{\partial h\partial u}\right|+\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left.+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},\bar u,(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2\partial u}\right|\right]\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}\right\}+ \\
&\qquad + M|h|\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\left[\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},\tilde y,\tilde h\right)}{\partial h\partial y}\right|+\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left.+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},\bar y,\bar h\right)}{\partial h^2\partial y}\right|\right]\|xku'-xkv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}\right\}.
\end{aligned}
$$

Звідси отримаємо оцінку (3.62). ■

На основі попереднього твердження доводиться

Теорема 3.8 *Нехай виконуються умови (3.2)–(3.5), леми* 3.6, *тоді* $\exists h_0>0$ *таке, що при* $|h|\leqslant h_0$ *ТРС (3.56) має єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою*

$$
\begin{aligned}
\left\|y^{(\bar m)}-u\right\|^*_{1,\infty,\hat{\hat\omega}_h} &= \max\left\{\left\|y^{(\bar m)}-u\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-},\ \left\|xk\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}-xk\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}\right\}\leqslant \\
&\leqslant M|h|^{\bar m},
\end{aligned}
$$

де

$$
\left[xk\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_1}=x_1Z_1^{(m)1}(x_1,y^{(\bar m)}),
$$

$$
\begin{aligned}
\left[xk\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_j} =& x_jZ_1^{(m)j}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)+ \\
&+\frac{y_j^{(\bar m)}-Y_1^{(\bar m)j}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)},\quad j=2,3,...,N.
\end{aligned}
$$

Доведення. Покажемо, що за умов теореми ТРС рангу $\bar{m}$ (3.56) має єдиний розв'язок $y^{(\bar{m})}(x),\ x \in \hat{\bar{\omega}}_h$. Використаємо принцип стискувальних відображень (див., напр., [54]). Розглянемо операторне рівняння

$$\begin{aligned} y^{(\bar{m})}(x) = \mathfrak{R}_h(x, (y_j^{(\bar{m})})_{j=0}^N) = \sum_{\xi \in \hat{\omega}_h} \hbar(\xi) G^{(\bar{m})}(x,\xi) \varphi^{(\bar{m})}\left(\xi, y^{(\bar{m})}(\xi)\right) + \mu_2 + \\ + h_1 \varphi^{(\bar{m})}\left(x_0, y^{(\bar{m})}(x_0)\right) \delta_{i,0}, \end{aligned} \tag{3.74}$$

де $\delta_{i,j}$ – символ Кронеккера, $G^{(\bar{m})}(x,\xi)$ – функція Гріна задачі (3.56) вигляду (див., напр., [44, с.184])

$$G^{(\bar{m})}(x,\xi) = \begin{cases} \xi V^{(\bar{m})}(\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \xi V^{(\bar{m})}(x), & \xi \leqslant x \leqslant R, \end{cases}$$

$$V^{(\bar{m})}(x_j) = \sum_{k=j+1}^{N} \frac{h_k}{a^{(\bar{m})}(x_k)} = \sum_{k=j+1}^{N} V_1^{(\bar{m})k}(x_k).$$

Зауважимо, що

$$\left[xk \frac{dy^{(\bar{m})}}{dx} \right]_{x=x_1} = O\left(|h|^2\right),$$

$$\left[xk \frac{dy^{(\bar{m})}}{dx} \right]_{x=x_j} = a^{(\bar{m})}(x_j) y_{\bar{x},j}^{(\bar{m})} + O\left(|h|\right),\ j = 2, 3, ..., N.$$

Використовуючи формулу сумування за частинами (див., напр., [46, с.233]), отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} G^{(\bar{m})}(x_i, x_j)\hbar_j = V^{(\bar{m})}(x_i) \sum_{j=1}^{i} x_j \hbar_j + \sum_{j=i+1}^{N-1} V^{(\bar{m})}(x_j) x_j \hbar_j = \\ = \frac{1}{2} V^{(\bar{m})}(x_i) x_{i+1} x_i + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^{N-1} V^{(\bar{m})}(x_j)(x_j x_{j-1})_{\hat{x},j} \hbar_j = \\ = -\frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^{N} \left(V^{(\bar{m})}(x_j) - V^{(\bar{m})}(x_{j-1}) \right) x_j x_{j-1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=i+1}^{N} V_1^{(\bar{m})j}(x_j)x_jx_{j-1} \leqslant \frac{1}{2c_1}\sum_{j=i+1}^{N} x_jh_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4c_1}\sum_{j=i+1}^{N}\left(x_j^2+h_j^2\right) \leqslant \frac{R^2}{4c_1}+M|h|, \tag{3.75}$$

$$\begin{gathered}\left|a^{(\bar{m})}(x_i)\right|\sum_{j=1}^{N-1}\left|\left(G^{(\bar{m})}(x_i,x_j)\right)_{\bar{x},i}\right|\hbar_j = \frac{h_i\left|V_{\bar{x},i}^{(\bar{m})}(x_i)\right|}{\left|V_1^{(\bar{m})i}(x_i)\right|}\sum_{j=1}^{i-1}x_j\hbar_j = \\ = \sum_{j=1}^{i-1}x_j\hbar_j = \frac{1}{2}x_ix_{i-1} \leqslant \frac{R^2}{2}.\end{gathered} \tag{3.76}$$

Отже,

$$\left\|\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N) - u^{(0)}(x)\right\|_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}^* \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{R^2}{4c_1}+M|h|, \frac{R^2}{2}\right\}(K+M|h|) = \frac{KR^2}{4c_1}\max(1,2c_1)+M|h| =$$

$$= r+M|h| \leqslant r+\Delta \quad \forall (u_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\bar{\omega}}_h, r+\Delta), \tag{3.77}$$

тобто оператор $\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N)$ переводить $\Omega(\widehat{\bar{\omega}}_h, r+\Delta)$ в себе.

Крім того, враховуючи нерівності (3.62)

$$\left\|\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N) - \mathfrak{R}_h(x,(v_j)_{j=0}^N)\right\|_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}^* \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{R^2}{4c_1}+M|h|, \frac{R^2}{2}\right\}\max_{j=\overline{1,N-1}}\left|\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi^{(\bar{m})}(x_j,v)\right| +$$

$$+ h_1\left|\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)-\varphi^{(\bar{m})}(x_0,v)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{LR^2}{4c_1}\max(1,2c_1)+M_2|h|\right)\|u-v\|_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}^* =$$

$$= q_2\|u-v\|_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}^* \forall (u_j)_{j=0}^N, (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\bar{\omega}}_h, r+\Delta). \tag{3.78}$$

Якщо вибрати h_0 таким, що $q_2 = q+M_2|h| < 1$, то відображення $\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N)$ стискувальне.

Для похибки $z(x) = y^{(\bar{m})} - u(x),\ x \in \hat{\omega}_h$ отримаємо задачу

$$
\begin{aligned}
&z_{x,0} = \varphi(x_0, u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_0, y^{(\bar{m})}),\\
&a_2^{(\bar{m})} z_{x,1}/(\hbar_1 x_1) = \varphi(x_1, u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_1, y^{(\bar{m})}) + \left(a_2 - a_2^{(\bar{m})}\right) u_{x,1}/(\hbar_1 x_1),\\
&\frac{1}{x_j}(a^{(\bar{m})} z_{\bar{x}})_{\hat{x},j} = \varphi(x_j, u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_j, y^{(\bar{m})}) + \frac{1}{x_j}\left[\left(a - a^{(\bar{m})}\right) u_{\bar{x}}\right]_{\hat{x},j},\\
&j = 2, 3, \ldots, N-1, \quad z_N = 0,
\end{aligned}
$$

розв'язок якої за допомогою функції Гріна можна записати у вигляді

$$
\begin{aligned}
z_i = &\sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G^{(\bar{m})}(x_i, x_j) \left[\varphi^{(\bar{m})}\left(x_j, y^{(\bar{m})}\right) - \varphi\left(x_j, u\right)\right] +\\
&+ \sum_{j=2}^{N-1} \hbar_j \frac{1}{x_j} G^{(\bar{m})}(x_i, x_j) \left[\left(a^{(\bar{m})}(x_j) - a(x_j)\right) u_{\bar{x},j}\right]_{\hat{x},j} +\\
&+ \frac{1}{x_1} G^{(\bar{m})}(x_i, x_1) \left(a_2^{(\bar{m})} - a_2\right) u_{x,1} +\\
&+ h_1 \left\{\varphi^{(\bar{m})}\left(x_0, y^{(\bar{m})}\right) - \varphi\left(x_0, u\right)\right\} \delta_{i,0} =\\
= &\sum_{j=2}^{N} h_j \left[\frac{1}{x_j} G^{(\bar{m})}(x_i, x_j)\right]_{\bar{x},j} \left[a(x_j) - a^{(\bar{m})}(x_j)\right] u_{\bar{x},j} +\\
&+ \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G^{(\bar{m})}(x_i, x_j) \left[\varphi^{(\bar{m})}\left(x_j, y^{(\bar{m})}\right) - \varphi\left(x_j, u\right)\right] +\\
&+ h_1 \left\{\varphi^{(\bar{m})}\left(x_0, y^{(\bar{m})}\right) - \varphi\left(x_0, u\right)\right\} \delta_{i,0}.
\end{aligned}
$$

Для непарного m з урахуванням (3.58)—(3.59), з (3.79) отримаємо

$$
\begin{aligned}
z_i = &\sum_{j=2}^{N} h_j \left\{\frac{1}{x_j} G^{(\bar{m})}(x_i, x_j)\right\}_{\bar{x},j} \left[a(x_j) - a^{(\bar{m})}(x_j)\right] u_{\bar{x},j} -\\
&- \sum_{j=1}^{N} h_j^{m+2} \left\{G^{(\bar{m})}(x_i, x_j)\right\}_{\bar{x},j} \times\\
&\qquad \times \left[k(x)\left(\psi_1^j(x, u) - \bar{\psi}_1^j(x) x k(x) \frac{du}{dx}\right) - \tilde{\psi}_1^j(x, u)\right]_{x = x_j + 0} +
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)-\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,u\right)\right]+$$
$$+h_1\left\{\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,y^{(\bar m)}\right)-\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,u\right)\right\}\delta_{i,0}+O(|h|^{m+1}).$$

Тоді

$$|z_i|\leqslant\left(\frac{1}{c_1x_i}+M|h|\right)\|a-a^{(m+1)}\|_{0,1,\widehat\omega_h^+\setminus x_1}\|u_{\bar x}\|_{0,\infty,\widehat\omega_h^+}+M|h|^{m+1}+$$
$$+q_2\|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}\leqslant M|h|^{m+1}+q_2\|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}.$$

Якщо m – парне, то, враховуючи (3.58), (3.60), рівність (3.79) запишемо у вигляді

$$z_i=\sum_{j=2}^{N}h_j\left\{\frac{1}{x_j}G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\right\}_{\bar x,j}\left[a(x_j)-a^{(\bar m)}(x_j)\right]u_{\bar x,j}-$$
$$-\sum_{j=1}^{N}h_j^{m+1}\left\{G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\right\}_{\bar x,j}\left[k(x)\left(\psi_1^j(x,u)-\bar\psi_1^j(x)xk(x)\frac{du}{dx}\right)\right]_{x=x_j+0}+$$
$$+\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,y^{(\bar m)}\right)-\varphi^{(\bar m)}\left(x_j,u\right)\right]+$$
$$+h_1\left\{\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,y^{(\bar m)}\right)-\varphi^{(\bar m)}\left(x_0,u\right)\right\}\delta_{i,0}+O(|h|^{m}).$$

Звідси

$$|z_i|\leqslant\left(\frac{1}{c_1x_i}+M|h|\right)\|a-a^{(m)}\|_{0,1,\widehat\omega_h^+\setminus x_1}\|u_{\bar x}\|_{0,\infty,\widehat\omega_h^+}+M|h|^{m}+q_2\|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}\leqslant$$
$$\leqslant M|h|^{m}+q_2\|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}.$$

Отже,

$$|z_i|\leqslant M|h|^{m}+q_2\|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}.$$

Враховуючи рівність $y_j^{(\bar m)}=Y_1^j(x_j,y_j^{(\bar m)})$ (див. лему 3.2), отримаємо

$$\left|\left[xk\frac{dz}{dx}\right]_{x=x_1}\right|\leqslant x_1\left|Z_1^{(m)1}(x_1,y^{(\bar m)})-Z_1^1(x_1,y^{(\bar m)})\right|+$$
$$+\left|x_1Z_1^1(x_1,y^{(\bar m)})-x_1Z_1^1(x_1,u)\right|,$$

$$\left|\left[xk\frac{dz}{dx}\right]_{x=x_j}\right| \leqslant x_j\left|Z_1^{(m)j}(x_j,y^{(\bar{m})}) - Z_1^j(x_j,y^{(\bar{m})})\right| +$$
$$+\left|x_jZ_1^j(x_j,y^{(\bar{m})}) - x_jZ_1^j\,(x_j,u)\right| +$$
$$+\frac{1}{\left|V_1^{(\bar{m})j}(x_j)\right|}\left|Y_1^j(x_j,y^{(\bar{m})}) - Y_1^{(\bar{m})j}(x_j,y^{(\bar{m})})\right|,\ j=2,3,...,N.$$

Зауважимо, що розв'язок ТТРС (3.23) можна записати у вигляді

$$u(x) = \mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N) = \sum_{j=1}^N \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} G(x,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi + \mu_2, \tag{3.79}$$

де $G(x,\xi)$ — функція Гріна задачі (3.1), функція $u(x)$ в правій частині(3.79) визначається формулою

$$u(x) = Y_1^j(x,u), \quad x\in[x_{j-1},x_j], \quad j=1,2,...,N.$$

Оскільки згідно з лемою 3.4 оператор $\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N)$ є стискувальний, то

$$\left|x_jZ_1^j(x_j,y^{(\bar{m})}) - x_jZ_1^j\,(x_j,u)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\mathfrak{R}_h(x,(y_j^{\bar{m}})_{j=0}^N) - \mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N)\right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^* \leqslant$$
$$\leqslant (q+M_1|h|)\|y^{(\bar{m})}-u\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^* = q_1\|y^{(\bar{m})}-u\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^*, \quad j=1,2,...,N.$$

Тоді

$$\left|\left[xk\frac{dz}{dx}\right]_{x=x_j}\right| \leqslant M|h|^{\bar{m}} + q_1\|z\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^*, \quad j=1,2,...,N.$$

Отже,

$$\|z\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^* \leqslant \frac{M|h|^{\bar{m}}}{1-\max(q_1,q_2)},$$

з якої в силу того, що $\max(q_1,q_2)<1$ при $|h|\leqslant h_0$ випливає

$$\|z\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^* \leqslant M|h|^{\bar{m}}.$$

Теорема доведена. ■

Розв'язок нелінійної ТРС (3.56) може бути знайдено методом послідовних наближень.

Теорема 3.9 *Нехай виконуються умови теореми 3.8, тоді розв'язок задачі (3.56) може бути знайдено за допомогою методу послідовних наближень*

$$\begin{aligned}
&y_{x,0}^{(\bar m,n)} = -\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n-1)}), \quad a_2^{(\bar m)} y_{x,1}^{(\bar m,n)}/(\hbar_1 x_1) = -\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n-1)}),\\
&\frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar m)} y_{\bar x}^{(\bar m,n)}\right)_{\hat x,j} = -\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n-1)}), \quad j = 2,3,\ldots,N-1,\\
&y_N^{(\bar m,n)} = \mu_2, \quad n = 1,2,\ldots\ , \quad y_j^{(\bar m,0)} = \mu_2, \quad j = 0,1,\ldots,N
\end{aligned} \tag{3.80}$$

і справджується оцінка

$$\left\| y^{(\bar m,n)} - u \right\|^*_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_h} \leqslant M(|h|^{\bar m} + q_2^n),$$

де

$$\left[xk \frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx} \right]_{x=x_1} = x_1 Z_1^{(m)1}(x_1, y^{(\bar m,n)}),$$

$$\begin{aligned}
\left[xk \frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx} \right]_{x=x_j} =& x_j Z_1^{(m)j}\left(x_j, y^{(\bar m,n)}\right) +\\
&+ \frac{y_j^{(\bar m)} - Y_1^{(\bar m)j}\left(x_j, y^{(\bar m,n)}\right)}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)}, \quad j = 2,3,...,N,
\end{aligned}$$

стала M не залежить від $|h|, m, n$, а величина $q_2 = q + M_2|h| < 1$.

Доведення. В силу теореми 3.8 маємо

$$\begin{aligned}
\left\| y^{(\bar m,n)} - u \right\|^*_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_h} \leqslant \left\| y^{(\bar m)} - u \right\|^*_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_h} + \left\| y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)} \right\|^*_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_h} \leqslant\\
\leqslant M|h|^{\bar m} + \left\| y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)} \right\|^*_{1,\infty,\hat{\bar\omega}_h}.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Послідовність наближень

$$y^{(\bar m,n)}(x) = \mathfrak{R}_h(x, (y^{(\bar m,n-1)})_{j=0}^N), \quad x \in \hat{\bar\omega}_h, \quad , n = 1,2,\ldots\ .$$

збігається (див. доведення теореми 3.8) і має місце оцінка швидкості збіжності (див., напр., [54, с.391])

$$\left\| y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)} \right\|^*_{0,\infty,\hat{\bar\omega}_h} \leqslant \frac{q_2^n}{1-q_2}(r + \Delta). \tag{3.82}$$

З нерівностей (3.81), (3.82) випливає оцінка (3.80). ■

З практичної точки зору для обчислення розв'язку ТРС (3.56) доцільніше використовувати ітераційний метод Ньютона. Лінеаризуємо (3.56) з урахуванням рівностей

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n)}) &= \varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{h_1}{4k_0}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} + O(h_1^2),\\
\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n)}) &= \varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{h_1}{2\hbar_1}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} +\\
&\quad + \frac{h_2}{2\hbar_1}\frac{x_2}{x_1}\frac{\partial f(x_2, y_2^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_2^{(\bar m,n)} + O\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{\hbar_1}\right),\\
\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n)}) &= \varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{h_j}{2\hbar_j}\frac{x_{j-1}}{x_j}\frac{\partial f(x_{j-1}, y_{j-1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j-1}^{(\bar m,n)} +\\
&\quad + \frac{h_{j+1}}{2\hbar_1}\frac{x_{j+1}}{x_j}\frac{\partial f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j+1}^{(\bar m,n)} + O\left(\frac{h_j^2+h_{j+1}^2}{\hbar_j}\right),
\end{aligned}
$$

тоді модифікований ітераційний метод Ньютона буде мати вигляд

$$
\begin{aligned}
&\nabla y_{x,0}^{(\bar m,n)} + \frac{h_1}{4k_0}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} = -\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n-1)}) - y_{x,0}^{(\bar m,n-1)},\\
&\frac{a_2^{(\bar m)}\nabla y_{x,1}^{(\bar m,n)}}{\hbar_1 x_1} + \frac{h_1}{2\hbar_1}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} +\\
&\qquad + \frac{h_2}{2\hbar_1}\frac{x_2}{x_1}\frac{\partial f(x_2, y_2^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_2^{(\bar m,n)} =\\
&\qquad = -\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n-1)}) - \frac{a_2^{(\bar m)} y_{x,1}^{(\bar m,n-1)}}{\hbar_1 x_1},
\end{aligned}
\tag{3.83}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar m)}\nabla y_{\bar x}^{(\bar m,n)}\right)_{\hat x,j} + \frac{h_j}{2\hbar_j}\frac{x_{j-1}}{x_j}\frac{\partial f(x_{j-1}, y_{j-1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j-1}^{(\bar m,n)} +\\
&\qquad + \frac{h_{j+1}}{2\hbar_j}\frac{x_{j+1}}{x_j}\frac{\partial f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j+1}^{(\bar m,n)} =\\
&\qquad = -\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n-1)}) - \frac{1}{x_j}\left(a^{(\bar m)} y_{\bar x}^{(\bar m,n-1)}\right)_{\hat x,j}, \quad \nabla y_N^{(\bar m,n)} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

$$y_j^{(\bar{m},n)} = y_j^{(\bar{m},n-1)} + \nabla y_j^{(\bar{m},n)}, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

3.4 Чисельні експерименти

Приклад 3.1 *Розглянемо крайову задачу*

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right] = u^3 - 3u^5, \quad x \in (0,1), \quad \lim_{x\to 0} x\frac{du}{dx} = 0, \quad u(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{3.85}$$

точний розв'язок якої $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Задачу будемо розв'язувати чисельно на рівномірній сітці $\overline{\omega}_h = \{x_j = jh, j = 0, 1, \ldots, N, \ h = 1/N\}$ *за допомогою ТРС (3.56) четвертого порядку точності* $m = \bar{m} = 4$*:*

$$\begin{aligned} &y_{x,0}^{(4)} = -\varphi^{(4)}(x_0, y^{(4)}), \quad y_{x,1}^{(4)}/(hx_1) = -\varphi^{(4)}(x_1, y^{(4)}), \\ &\frac{1}{x_j} y_{\bar{x}x,j}^{(4)} = -\varphi^{(4)}(x_j, y^{(4)}), \quad j = 2, 3, \ldots, N-1, \quad y_N^{(4)} = \mu_2, \end{aligned} \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(4)}(x_0, u) &= \frac{1}{h}\left(Y_2^{(4)0}(x_0, u) - u_1\right), \\ \varphi^{(4)}(x_1, u) &= \frac{1}{h}\left[Z_2^{(4)1}(x_1, u) - Z_1^{(4)1}(x_1, u) + \frac{Y_2^{(4)1}(x_1, u) - u_2}{x_1 \ln \frac{x_2}{x_1}}\right], \\ \varphi^{(4)}(x_j, u) &= \frac{1}{h}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha \left[Z_\alpha^{(4)j}(x_j, u) + \frac{Y_\alpha^{(4)j}(x_j, u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j \ln \frac{x_{j+(-1)^\alpha}}{x_j}}\right]. \end{aligned}$$

де $Y_\alpha^{(4)j}(x_j, u), Z_\alpha^{(4)j}(x_j, u)$ *—чисельний розв'язок допоміжних задач Коші (3.40), (3.41). Для розв'язування задачі Коші (3.40) застосуємо метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності (2.21), а для задач Коші (3.41) класичний метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності (див., напр., [55, с.144]). Розв'язок* $y_j^{(4)}$, $j = 0, 1, \ldots, N$ *різницевої схеми (3.86) шукатимемо за допомогою модифікованого ітераційного методу Ньютона (3.83),(3.84), а розв'язок відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею — методом прогонки. Результати чисельного розв'язування задачі наведено в* *таблиці 3.1, де*

$$Error = \left\| y^{(4)} - u \right\|^{*}_{1,\infty,\bar{\omega}_h} = \max\left\{ \left\| y^{(4)} - u \right\|_{0,\infty,\omega_h^-}, \left\| x\frac{dy^{(4)}}{dx} - x\frac{du}{dx} \right\|_{0,\infty,\omega_h^+} \right\},$$

$$p = \log_2 \frac{\left\| z^{(4)} \right\|^{*}_{1,\infty,\overline{\omega}_h}}{\left\| z^{(4)} \right\|^{*}_{1,\infty,\overline{\omega}_{h/2}}}.$$

Табл. 3.1. Результати розв'язування задачі (3.85) за допомогою схеми (3.86)

N	$Error$	p
20	$0.6075 \cdot 10^{-5}$	
40	$0.4896 \cdot 10^{-6}$	3.6
80	$0.3748 \cdot 10^{-7}$	3.7
160	$0.2773 \cdot 10^{-8}$	3.8
320	$0.2013 \cdot 10^{-9}$	3.8
640	$0.1302 \cdot 10^{-10}$	4.0

Результати розв'язування задачі за допомогою ТРС 6-го порядку точності (допоміжні задачі Коші розв'язувалися методом рядів Тейлора) наведено в таблиці 3.2.

Приклад 3.2 *Розглянемо крайову задачу*

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right] = -e^u, \quad x \in (0,1), \quad \lim_{x\to 0} x\frac{du}{dx} = 0, \quad u(1) = 0 \tag{3.87}$$

з точним розв'язком $u(x) = 2\ln\dfrac{4-2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})x^2+1}$. *Розв'язок задачі будемо обчислювати за допомогою різницевої схеми четвертого порядку точності (3.86).*

Табл. 3.2. Результати розв'язування задачі (3.85) за допомогою ТРС 6-го порядку

N	$Error$	p
20	$0.1607 \cdot 10^{-7}$	
40	$0.2454 \cdot 10^{-9}$	6.0
80	$0.3605 \cdot 10^{-11}$	6.1

Табл. 3.3. Результати розв'язування задачі

EPS	N	$Error$
10^{-2}	20	$0.1935 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	160	$0.4388 \cdot 10^{-4}$
10^{-6}	10240	$0.1736 \cdot 10^{-7}$

Для практичної оцінки точності використаємо правило Рунге. Результати розв'язування задачі з заданою точністю EPS наведено в таблиці 3.3

3.5 Висновки до розділу 3

У розділі 3 побудовано ТТРС на нерівномірній сітці для нелінійних стаціонарних рівнянь в циліндричній системі координат. За допомогою методу лінеаризації та принципу стискувальних відображень доведено існування та єдиність їх розв'язку. Доведена збіжність методу послідовних наближень розв'язування нелінійної ТТРС. Розроблена ефективна алгоритмічна реалізація ТТРС на нерівномірній сітці через усічені ТРС рангу $\bar{m} = [(m+1)/2]$ (m-ціле додатне, $[\cdot]$-ціла частина). Запропоновані ТРС рангу $\bar{m}$ для своєї побудови вимагають для кожного вузла сітки розв'язування двох нелінійних та двох лінійних задач Коші на відрізках $[x_{j-1}, x_j]$ (вперед) та $[x_j, x_{j+1}]$ (назад), що здійснюється за один крок за допомогою будь-якого однокрокового методу: розкладу в ряд Тейлора або Рунге-Кутта порядку точності $\bar{m}$. Використовуючи принцип стискувальних відображень доведено існування та єдиність розв'язку ТРС рангу $\bar{m}$. Крім того, показано, що ці схеми мають порядок точності $\bar{m}$ як по відношенню до функції u, так і її потоку $xk(x)du/dx$ у вузлах сітки. Доведено також збіжність методу послідовних наближень розв'язування усічених ТРС порядку. Розроблені ТРС високого порядку точності апробовані на прикладах. Отримані результати підтверджують теоретичні обґрунтування і показують високу ефективність цих схем для чисельного розв'язування сингулярних крайових задач для нелінійних ЗДР другого порядку.

РОЗДІЛ 4

ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В СФЕРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

В цьому розділі побудовано ТТРС та усічені ТРС довільного порядку на нерівномірній сітці для нелінійних крайових задач вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f(x,u), \quad x\in[0,R], \\ &\lim_{x\to 0} x^2k(x)\frac{du}{dx} = 0, \quad u(R)=\mu_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1 Існування та єдиність розв'язку

Достатні умови існування і єдиності розв'язку задачі (4.1) дає теорема.

Теорема 4.1 *Нехай виконуються умови*

$$0 < c_1 \leqslant k(x) \quad \forall x\in[0,R],\ k(x)\in Q^1[0,R], \tag{4.2}$$

$$f_u(x)\equiv f(x,u)\in Q^0[0,R], \quad |f(x,u)|\leqslant K \quad \forall x\in[0,R],\ u\in\Omega([0,R],r), \tag{4.3}$$

$$|f(x,u)-f(x,v)|\leqslant L|u-v| \quad \forall x\in[0,R],\ u,v\in\Omega([0,R],r), \tag{4.4}$$

$$q=\frac{LR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1)<1, \tag{4.5}$$

тоді задача (4.1) в $\Omega([0,R],r)$ *має єдиний розв'язок* $u(x)$*, який можна знайти* *за допомогою методу послідовних наближень*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{du^{(n)}}{dx}\right] = -f(x, u^{(n-1)}(x)), \quad x \in (0, R), \\ &\lim_{x\to 0} x^2k(x)\frac{du^{(n)}(x)}{dx} = 0, \quad u^{(n)}(R) = \mu_2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad u^{(0)}(x) = \mu_2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

з оцінкою похибки

$$\left\| u^{(n)} - u \right\|^*_{1,\infty,[0,R]} \leqslant \frac{q^n}{1-q} r. \tag{4.7}$$

Тут $Q^p[0,R]$ — клас функцій з кусково - неперервними похідними до p - го порядку включно із скінченною кількістю точок розриву першого роду, а $\Omega([0,R],r)$ — множина функцій вигляду

$$\begin{aligned} \Omega([0,R],r) = \Bigg\{ &u(x) : u(x) \in W^1_\infty[0,R],\ u(x), x^2k(x)\frac{du}{dx} \in C[0,R], \\ &\left\| u - u^{(0)} \right\|^*_{1,\infty,[0,R]} \leqslant r \Bigg\}, \quad r = \frac{KR^2}{6c_1}\max(1, 2Rc_1), \\ &\|u\|_{0,\infty,[0,R]} = \max_{x\in[0,R]} |u(x)|, \\ &\|u\|^*_{1,\infty,[0,R]} = \max\left\{ \|u\|_{0,\infty,[0,R]},\ \left\| x^2k(x)\frac{du}{dx} \right\|_{0,\infty,[0,R]} \right\}. \end{aligned}$$

Доведення. Задачу (4.1) запишемо в еквівалентному інтегральному вигляді

$$u(x) = \mathfrak{R}(x, u(\cdot)) = \int\limits_0^R G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \mu_2, \quad 0 \leqslant x \leqslant R, \tag{4.8}$$

де функція Гріна $G(x,\xi)$ цієї задачі має вигляд:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \xi^2 V(\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \xi^2 V(x), & \xi \leqslant x \leqslant R, \end{cases} \quad V(x) = \int\limits_x^R \frac{dt}{t^2k(t)}.$$

Зазначимо, що крайова умова при $x \to 0$ задовольняється, оскільки

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2k(x)} \int\limits_0^x \xi^2 f(\xi, u(\xi)) d\xi.$$

Покажемо, що оператор (4.8) переводить множину $\Omega([0,R],r)$ в себе.

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{R}(x,v(\cdot))-u^{(0)}\|^*_{1,\infty,[0,R]} \leqslant \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]}\,|f(\xi,v(\xi))|\,d\xi \leqslant \\ \leqslant K\int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]}d\xi \quad \forall v\in\Omega([0,R],r). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Оскільки згідно з (4.2)

$$\begin{aligned} \int\limits_0^R |G(x,\xi)|d\xi = \int\limits_x^R \xi^2V(\xi)d\xi + V(x)\int\limits_0^x \xi^2 d\xi = V(\xi)\frac{\xi^3}{3}\bigg|_x^R + \frac{1}{3}\int\limits_x^R \frac{\xi}{k(\xi)}d\xi + \\ + V(x)\frac{\xi^3}{3}\bigg|_0^x = \frac{1}{3}\int\limits_x^R \frac{\xi d\xi}{k(\xi)} \leqslant \frac{1}{3c_1}\int\limits_x^R \xi d\xi = \frac{R^2-x^2}{6c_1} \leqslant \frac{R^2}{6c_1}, \end{aligned}$$

$$\int\limits_0^R \left|x^2k(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|d\xi = \int\limits_0^x \xi^2 d\xi = \frac{x^3}{3} \leqslant \frac{R^3}{3},$$

то

$$\int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]}d\xi \leqslant \frac{R^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1). \tag{4.10}$$

З нерівностей (4.9), (4.10) випливає

$$\left\|\mathfrak{R}(x,v(\cdot))-u^{(0)}\right\|^*_{1,\infty,[0,R]} \leqslant \frac{KR^2}{6c_1}\max\left(1,2Rc_1\right) = r \quad \forall v\in\Omega([0,R],r),$$

яка означає, що оператор (4.8) переводить множину $\Omega([0,R],r)$ в себе.

Крім того, $\mathfrak{R}(x,u(\cdot))$ на $\Omega([0,R],r)$ — стискувальний оператор, оскільки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{R}(x,u(\cdot)) - \mathfrak{R}(x,v(\cdot))\|^*_{1,\infty,[0,R]} \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]}\,|f(\xi,u(\xi))-f(\xi,v(\xi))|\,d\xi \leqslant \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant L\int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]}\,|u(\xi)-v(\xi)|\,d\xi \leqslant\\
&\leqslant L\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,R]}\int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]}d\xi \leqslant\\
&\leqslant \frac{LR^2}{6c_1}\max\left(1,2Rc_1\right)\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,R]} =\\
&= q\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,R]} \quad \forall u,v\in\Omega([0,R],r).
\end{aligned}
$$

Звідси, згідно з (4.5) $\mathfrak{R}(x,u(\cdot))$ на $\Omega([0,R],r)$ є стискувальним оператором.

Таким чином, для оператора $\mathfrak{R}(x,u(\cdot))$ при $q<1$ виконані всі умови принципу стискувальних відображень, а тому рівняння (4.8) має єдиний розв'язок, який можна одержати методом послідовних наближень (4.6) з оцінкою похибки (4.7). ■

4.2 Існування точної триточкової різницевої схеми

На відрізку $[0,R]$ введемо нерівномірну сітку

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\overline{\omega}}_h = \{x_j\in[0,R], \quad j=0,1,\ldots,N, \quad x_0=0,\ x_N=R\},\\
&h_j = x_j - x_{j-1} > 0, \quad j=1,2,\ldots,N, \quad |h| = \max_{1\leqslant j\leqslant N} h_j
\end{aligned}
$$

так, щоб точки розриву функцій $k(x), f(x,u)$ збігалися з вузлами сітки. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і припустимо, що N таке, що $\rho\subseteq\widehat{\omega}_h = \{x_j,\ j=1,2,\ldots,N-1\}$. Будемо вважати, що в точках розриву розв'язок задачі (4.1) задовольняє умови неперервності

$$
u(x_i-0)=u(x_i+0), \quad x^2k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i-0} = x^2k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_i+0} \quad \forall x_i\in\rho.
$$

Розглянемо крайові задачі

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{dY_1^1(x,u)}{dx}\right] = -f(x,Y_1^1(x,u)), \quad 0<x<x_1,\\
&\lim_{x\to 0} x^2k(x)\frac{dY_1^1(x,u)}{dx}=0, \quad Y_1^1(x_1,u)=u_1,
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx}\right] = -f(x,Y_\alpha^j(x,u)), \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},\\
&Y_\alpha^j(x_{j-2+\alpha},u) = u(x_{j-2+\alpha}), \quad Y_\alpha^j(x_{j-1+\alpha},u) = u(x_{j-1+\alpha}),\\
&j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2.
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Лема 4.2 . *Нехай виконані умови (4.2)–(4.5), тоді задачі (4.11), (4.12) матимуть єдиний розв'язок* $Y_1^1(x,u)$, $Y_\alpha^j(x,u)$, $j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1,2$, *причому для розв'язку задачі (4.1) справджується*

$$
\begin{aligned}
&u(x) = Y_1^1(x,u), \quad x \in [0,x_1],\\
&u(x) = Y_\alpha^j(x,u), \quad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}],\\
&j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2.
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

Доведення. Крайові задачі (4.11), (4.12) запишемо в еквівалентній інтегральній формі

$$
\begin{aligned}
&Y_1^1(x,u) = \int\limits_0^{x_1} \widetilde{G}^1(x,\xi) f(\xi, Y_1^1(\xi,u))d\xi + u_1, \quad x \in [0,x_1],\\
&Y_\alpha^j(x,u) = \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi) f(\xi, Y_\alpha^j(\xi,u))d\xi + \hat{u}(x),\\
&x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], \quad j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2,\\
&\hat{u}(x) = \frac{u(x_j)V_1^j(x) + u(x_{j-1})V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}, \quad x \in [x_{j-1}, x_j],
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

де

$$
V_1^j(x) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x} \frac{dt}{t^2k(t)}, \quad V_2^j(x) = \int\limits_{x}^{x_{j+1}} \frac{dt}{t^2k(t)},
$$

$$
\widetilde{G}^1(x,\xi) = \begin{cases} \xi^2 V_2^0(\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi,\\ \xi^2 V_2^0(x), & \xi \leqslant x \leqslant x_1, \end{cases} \tag{4.15}
$$

$$\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{V_1^{j-1+\alpha}(x)V_2^{j-2+\alpha}(\xi)\xi^2}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}, & x_{j-2+\alpha} \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{V_1^{j-1+\alpha}(\xi)V_2^{j-2+\alpha}(x)\xi^2}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}, & \xi \leqslant x \leqslant x_{j-1+\alpha}. \end{cases} \tag{4.16}$$

При $\alpha = 1$ отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) =& \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \left[\int_0^R G(x_j,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \mu_2 \right] + \\ &+ \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \left[\int_0^R G(x_{j-1},\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \mu_2 \right], \quad x \in [x_{j-1}, x_j]. \end{aligned}$$

Оскільки $V_1^j(x) + V_2^{j-1}(x) = V_1^j(x_j)$, то

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) =& \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \int_0^R G(x_j,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \\ &+ \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \int_0^R G(x_{j-1},\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \mu_2, \quad x \in [x_{j-1}, x_j]. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} Y_1^1(x,u) =& \int_0^R G(x_1,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \int_0^{x_1} \widetilde{G}^1(x,\xi) f(\xi, Y_1^1(\xi,u)) d\xi + \\ &+ u^{(0)}(x), \quad x \in [0, x_1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1^j(x,u) =& \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \int_0^R G(x_j,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \\ &+ \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \int_0^R G(x_{j-1},\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \\ &+ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \widetilde{G}^j(x,\xi) f(\xi, Y_1^j(\xi,u)) d\xi + u^{(0)}(x), \quad x \in [x_{j-1}, x_j]. \end{aligned}$$

На підставі рівності $Y_2^j(x,u)=Y_1^{j+1}(x,u)$ матимемо

$$\begin{aligned}
Y_2^j(x,u)=&\frac{V_1^{j+1}(x)}{V_2^j(x_j)}\int\limits_0^R G(x_{j+1},\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\\
&+\frac{V_2^j(x)}{V_2^j(x_j)}\int\limits_0^R G(x_j,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\\
&+\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\widetilde{G}^{j+1}(x,\xi)f(\xi,Y_2^j(\xi,u))d\xi+u^{(0)}(x),\quad x\in[x_j,x_{j+1}].
\end{aligned}$$

Таким чином, питання існування та єдиності розв'язку задач (4.11), (4.12) еквівалентне до аналогічної проблеми для рівнянь

$$\begin{aligned}
U_1^1(x)=&\mathfrak{F}_1^1(x,u,U_1^1)=\int\limits_0^R G(x_1,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\\
&+\int\limits_0^{x_1}\widetilde{G}^1(x,\xi)f(\xi,U_1^1(\xi,u))d\xi+u^{(0)}(x),\quad x\in[0,x_1],
\end{aligned}\tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
U_\alpha^j(x)=&\mathfrak{F}_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j)=\frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_\alpha^j(x_j)}\int\limits_0^R G(x_{j-1+\alpha},\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\\
&+\frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_\alpha^j(x_j)}\int\limits_0^R G(x_{j-2+\alpha},\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\\
&+\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}}\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)f(\xi,U_\alpha^j(\xi,u))d\xi+u^{(0)}(x),\\
&x\in[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],\quad j=3-\alpha,4-\alpha,\ldots,N+1-\alpha,\\
&\alpha=1,2.
\end{aligned}\tag{4.18}$$

Покажемо, що оператори $\mathfrak{F}_1^1(x,u,U_1^1),\mathfrak{F}_1^j(x,u,U_1^j)$ переводять відповідно множини $\Omega([0,x_1],r)$, $\Omega([x_{j-1},x_j],r)$ в себе. Нехай $U_1^1(x)\in\Omega([0,x_1],r)$, $U_1^j(x)\in$

$\Omega([x_{j-1}, x_j], r)$. Тоді

$$\left|\mathfrak{F}_1^1(x, u, U_1^1) - u^{(0)}(x)\right| \leqslant K \left\{ \int\limits_x^{x_1} \xi^2 V_2^0(\xi) d\xi + V_2^0(x) \int\limits_0^x \xi^2 d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_1}^R \xi^2 V(\xi) d\xi + V(x_1) \int\limits_0^{x_1} \xi^2 d\xi \right\} =$$

$$= K \left\{ \left[V_2^0(x) + V(x_1)\right] \int\limits_0^x \xi^2 d\xi + \int\limits_x^R \xi^2 V(\xi) d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^{x_1} \xi^2 \left[V_2^0(\xi) + V(x_1) - V(\xi)\right] d\xi \right\},$$

$$\left|\mathfrak{F}_1^j(x, u, U_1^j) - u^{(0)}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant K \left\{ \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_{j-1}, \xi) d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \int\limits_0^R G(x_j, \xi) d\xi + \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \widetilde{G}^j(x, \xi) d\xi \right\} =$$

$$= K \left\{ \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \left[\int\limits_{x_{j-1}}^R \xi^2 V(\xi) d\xi + V(x_{j-1}) \int\limits_0^{x_{j-1}} \xi^2 d\xi \right] + \right.$$

$$+ \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \left[\int\limits_{x_j}^R \xi^2 V(\xi) d\xi + V(x_j) \int\limits_0^{x_j} \xi^2 d\xi \right] +$$

$$\left. + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)} \int\limits_x^{x_j} V_2^{j-1}(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \int\limits_{x_{j-1}}^x V_1^j(\xi) \xi^2 d\xi \right\} =$$

$$= K\left\{\frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_x^R \xi^2 V(\xi)d\xi + V(x_{j-1})\int\limits_0^x \xi^2 d\xi\right] + \right.$$

$$+ \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_x^R \xi^2 V(\xi)d\xi + V(x_j)\int\limits_0^x \xi^2 d\xi\right] +$$

$$+ \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_x^{x_j} V_2^{j-1}(\xi)\xi^2 d\xi + V(x_j)\int\limits_x^{x_j} \xi^2 d\xi - \int\limits_x^{x_j} \xi^2 V(\xi)d\xi\right] +$$

$$\left. + \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\left[\int\limits_{x_{j-1}}^{x} V_1^j(\xi)\xi^2 d\xi - V(x_{j-1})\int\limits_{x_{j-1}}^{x} \xi^2 d\xi + \int\limits_{x_{j-1}}^{x} \xi^2 V(\xi)d\xi\right]\right\} =$$

$$= K\left\{\left[\frac{V_2^{j-1}(x)V(x_{j-1}) + V_1^j(x)V(x_j)}{V_1^j(x_j)}\right]\int\limits_0^x \xi^2 d\xi + \right.$$

$$+ \int\limits_x^R \xi^2 V(\xi)d\xi + \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_x^{x_j}\left[V_2^{j-1}(\xi) + V(x_j) - V(\xi)\right]\xi^2 d\xi +$$

$$\left. + \frac{V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}\int\limits_{x_{j-1}}^{x}\left[V_1^j(\xi) - V(x_{j-1}) + V(\xi)\right]\xi^2 d\xi\right\}.$$

Враховуючи рівності

$$V_2^{j-1}(\xi) + V(x_j) - V(\xi) = \int\limits_\xi^{x_j}\frac{dt}{t^2 k(t)} + \int\limits_{x_j}^{R}\frac{dt}{t^2 k(t)} - \int\limits_\xi^{R}\frac{dt}{t^2 k(t)} = 0,$$

$$V_1^j(\xi) - V(x_{j-1}) + V(\xi) = \int\limits_{x_{j-1}}^{\xi}\frac{dt}{t^2 k(t)} - \int\limits_{x_{j-1}}^{R}\frac{dt}{t^2 k(t)} + \int\limits_\xi^{R}\frac{dt}{t^2 k(t)} = 0,$$

$$\frac{V_2^{j-1}(x)V(x_{j-1}) + V_1^j(x)V(x_j)}{V_1^j(x_j)} =$$

$$= \frac{V_2^{j-1}(x)[V_1^j(x) + V(x)] + V_1^j(x)[V(x) - V_2^{j-1}(x)]}{V_1^j(x_j)} = V(x)$$

отримаємо

$$\left|\mathfrak{F}_1^j(x,u,U_1^j)-u^{(0)}(x)\right| \leqslant K\left\{V(x)\int\limits_0^x \xi^2 d\xi+\int\limits_x^R \xi^2 V(\xi)d\xi\right\} = \\ = K\int\limits_0^R G(x,\xi)d\xi, \quad j=1,2,\ldots,N.$$

Таким чином

$$\|\mathfrak{F}_1^j(x,u,U_1^j)-u^{(0)}(x)\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \leqslant \frac{KR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1)=r, \quad j=1,2,\ldots,N,$$

тобто оператори $\mathfrak{F}_1^1(x,u,U_1^1), \mathfrak{F}_1^j(x,u,U_1^j)$ переводять відповідно множини $\Omega([0,x_1],r)$ і $\Omega([x_{j-1},x_j],r)$ в себе.

Аналогічно можна показати, що якщо $U_2^j(x)\in\Omega([x_j,x_{j+1}],r)$, то

$$\|\mathfrak{F}_2^j(x,u,U_2^j)-u^{(0)}(x)\|^*_{1,\infty,[x_j,x_{j+1}]} \leqslant r.$$

Крім того

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{F}_1^1(x,u,U_1^1)-\mathfrak{F}_1^1(x,u,\widetilde{U}_1^1)\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} &\leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^{x_1}\left\|\widetilde{G}^1(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]}\left|f(\xi,U_1^1)-f(\xi,\widetilde{U}_1^1)\right|d\xi &\leqslant \\ \leqslant L\|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\|^*_{1,\infty,[0,x_1]}\int\limits_0^{x_1}\left\|\widetilde{G}^1(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]}d\xi,\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}&\|\mathfrak{F}_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j)-\mathfrak{F}_\alpha^j(x,u,\widetilde{U}_\alpha^j)\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}}\left\|\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\left|f(\xi,U_\alpha^j)-f(\xi,\widetilde{U}_\alpha^j)\right|d\xi \leqslant \\ &\leqslant L\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}}\left\|\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}d\xi.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{x_1} |\widetilde{G}^1(x,\xi)| d\xi = V_2^0(x) \int\limits_0^{x} \xi^2 d\xi + \int\limits_x^{x_1} \xi^2 V_2^0(\xi) d\xi =$$

$$= V_2^0(x)\frac{\xi^3}{3}\bigg|_0^x + V_2^0(\xi)\frac{\xi^3}{3}\bigg|_x^{x_1} + \frac{1}{3}\int\limits_x^{x_1} \frac{\xi^3}{\xi^2 k(\xi)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_x^{x_1} \frac{\xi d\xi}{k(\xi)} \leqslant \frac{1}{3c_1}\int\limits_x^{x_1} \xi d\xi = \frac{x_1^2 - x^2}{6c_1} \leqslant \frac{R^2}{6c_1},$$

$$\int\limits_0^{x_1} \left| x^2 k(x) \frac{\partial \widetilde{G}^1(x,\xi)}{\partial x} \right| d\xi = \int\limits_0^{x} \xi^2 d\xi = \frac{x^3}{3} \leqslant \frac{R^3}{3},$$

$$\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left| \widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi) \right| d\xi = \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \int\limits_x^{x_{j-1+\alpha}} V_2^{j-2+\alpha}(\xi)\xi^2 d\xi +$$

$$+ \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x} V_1^{j-1+\alpha}(\xi)\xi^2 d\xi =$$

$$= \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \left[V_2^{j-2+\alpha}(\xi)\frac{\xi^3}{3}\bigg|_x^{x_{j-1+\alpha}} + \int\limits_x^{x_{j-1+\alpha}} \frac{\xi^3}{3}\frac{1}{\xi^2 k(\xi)} d\xi \right] +$$

$$+ \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \left[V_1^{j-1+\alpha}(\xi)\frac{\xi^3}{3}\bigg|_{x_{j-2+\alpha}}^{x} - \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x} \frac{\xi^3}{3}\frac{1}{\xi^2 k(\xi)} d\xi \right] =$$

$$= \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \left[-V_2^{j-2+\alpha}(x)\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\int\limits_x^{x_{j-1+\alpha}} \frac{\xi}{k(\xi)} d\xi \right] +$$

$$+ \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \left[V_1^{j-1+\alpha}(x)\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x} \frac{\xi}{k(\xi)} d\xi \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{3V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})c_1}\frac{\xi^2}{2}\Big|_x^{x_{j-1+\alpha}} = \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{6V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})c_1}(x_{j-1+\alpha}^2 - x^2) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(R^2 - x^2)}{6c_1} \leqslant \frac{R^2}{6c_1},$$

$$\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \left| x^2 k(x) \frac{\partial \widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)}{\partial x} \right| d\xi =$$

$$= \frac{1}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \int\limits_x^{x_{j-1+\alpha}} \xi^2 V_2^{j-2+\alpha}(\xi) d\xi +$$
$$+ \frac{1}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} \int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x} \xi^2 V_1^{j-1+\alpha}(\xi) d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}\frac{\xi^3}{3}\Big|_x^{x_{j-1+\alpha}} + \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}\frac{\xi^3}{3}\Big|_{x_{j-2+\alpha}}^{x} =$$
$$= \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x)}{3V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}(x_{j-1+\alpha}^3 - x^3) + \frac{V_1^{j-1+\alpha}(x)}{3V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})}(x^3 - x_{j-2+\alpha}^3) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{V_2^{j-2+\alpha}(x) + V_1^{j-1+\alpha}(x)}{3V_1^{j-1+\alpha}(x_{j-1+\alpha})} R^3 = \frac{R^3}{3},$$

то

$$\int\limits_0^{x_1} \|\widetilde{G}^1(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} d\xi \leqslant \frac{R^2}{6c_1}\max(1, 2Rc_1), \tag{4.21}$$

$$\int\limits_{x_{j-2+\alpha}}^{x_{j-1+\alpha}} \|\widetilde{G}^{j-1+\alpha}(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} d\xi \leqslant \frac{R^2}{6c_1}\max(1, 2Rc_1). \tag{4.22}$$

Отже, згідно з (4.19)—(4.22) отримаємо

$$\|\mathfrak{F}_1^1(x,u,U_1^1) - \mathfrak{F}_1^1(x,u,\widetilde{U}_1^1)\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{LR^2}{6c_1}\max(1, 2Rc_1)\|U_1^1 - \widetilde{U}_1^1\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} =$$
$$= q\|U_1^1 - \widetilde{U}_1^1\|^*_{1,\infty,[0,x_1]},$$

$$\|\mathfrak{F}_\alpha^j(x,u,U_\alpha^j)-\mathfrak{F}_\alpha^j(x,u,\widetilde{U}_\alpha^j)\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}^* \leqslant$$
$$\leqslant \frac{LR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1)\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}^* =$$
$$= q\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\|_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}^*.$$

Таким чином, для операторів (4.17), (4.18) на множинах $\Omega([0,x_1],r)$ і $\Omega([x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],r)$ відповідно виконані всі умови принципу стискувальних відображень, а тому задачі (4.11), (4.12) мають єдиний розв'язок. ■

Теорема 4.3 *Нехай виконуються умови теореми* 4.1. *Тоді для задачі (4.1) існує ТТРС вигляду*

$$\begin{aligned}&u_{x,0}=-\hat{T}^{x_0}(f(\xi,u(\xi))),\quad a_2u_{x,1}/(\hbar_1x_1^2)=-\hat{T}^{x_1}(f(\xi,u(\xi))),\\&\frac{1}{x_j^2}(au_{\bar{x}})_{\hat{x},j}=-\hat{T}^{x_j}(f(\xi,u(\xi))),\quad j=2,3,\dots,N-1,\quad u_N=\mu_2,\end{aligned}\tag{4.23}$$

де

$$u_{\bar{x},j}=\frac{u_j-u_{j-1}}{h_j},\quad u_{x,j}=\frac{u_{j+1}-u_j}{h_{j+1}},\quad u_{\hat{x},j}=\frac{u_{j+1}-u_j}{\hbar_j},\quad \hbar_j=\frac{h_j+h_{j+1}}{2},$$

$$a_j=a(x_j)=\left[\frac{1}{h_j}V_1^j(x_j)\right]^{-1},\quad j=2,3,\dots,N-1,\tag{4.24}$$

$$\hat{T}^{x_0}(w(\xi))=h_1^{-1}\int\limits_0^{x_1}\xi^2V_2^0(\xi)w(\xi)d\xi,$$

$$\hat{T}^{x_1}(w(\xi))=(\hbar_1x_1^2)^{-1}\int\limits_0^{x_1}\xi^2w(\xi)d\xi+\left[\hbar_1x_1^2V_2^1(x_1)\right]^{-1}\int\limits_{x_1}^{x_2}\xi^2V_2^1(\xi)w(\xi)d\xi,$$

$$\hat{T}^{x_j}(w(\xi))=\left[\hbar_jx_j^2V_1^j(x_j)\right]^{-1}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\xi^2V_1^j(\xi)w(\xi)d\xi+$$
$$+\left[\hbar_jx_j^2V_2^j(x_j)\right]^{-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\xi^2V_2^j(\xi)w(\xi)d\xi,$$

$$V_1^j(x)=\int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{dt}{t^2k(t)},\ j=2,3,\dots,N-1,$$

$$V_2^j(x)=\int\limits_{x}^{x_{j+1}}\frac{dt}{t^2k(t)},\ j=0,1,\dots,N-1,$$

функція $u(x)$ в правій частині (4.23) визначається за формулою (4.13) і залежить тільки від $u(x_j),\ j=0,1,\dots,N$.

Доведення. Розглянемо крайові задачі

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{du}{dx}\right]=-f(x,u),\quad x\in(0,x_{j+1}),\\&\lim_{x\to0}x^2k(x)\frac{du}{dx}=0,\quad u(x_{j+1})=u_{j+1},\quad j=0,1,\end{aligned}\tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{du}{dx}\right]=-f(x,u),\quad x\in(x_{j-1},x_{j+1}),\\&u(x_{j-1})=u_{j-1},\quad u(x_{j+1})=u_{j+1},\quad j=2,3,\dots,N-1,\end{aligned}\tag{4.26}$$

функції Гріна для яких відповідно мають вигляд

$$G^j(x,\xi)\ =\ \begin{cases}\xi^2V_2^j(\xi), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ \xi^2V_2^j(x), & \xi\leqslant x\leqslant x_{j+1},\end{cases}\qquad j=0,1,$$

$$G^j(x,\xi)\ =\ \begin{cases}\dfrac{V_1^j(x)V_2^j(\xi)\xi^2}{V_1^j(x_{j+1})}, & x_{j-1}\leqslant x\leqslant\xi,\\[2ex] \dfrac{V_1^j(\xi)V_2^j(x)\xi^2}{V_1^j(x_{j+1})}, & \xi\leqslant x\leqslant x_{j+1},\end{cases}\qquad j=2,3,\dots,N-1.$$

Побудуємо ТТРС. Для цього запишемо очевидні інтегральні наслідки (4.25), (4.26). Отримаємо

$$\int\limits_0^{x_{j+1}}G^j(x,\xi)\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi=-\int\limits_0^{x_{j+1}}G^j(x,\xi)f(\xi,u)d\xi,\quad j=0,1,\tag{4.27}$$

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi = -\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)f(\xi,u)d\xi, \tag{4.28}$$

$$j = 2,3,\dots,N-1.$$

Якщо інтеграли, які входять в ліві частини (4.27), (4.28) проінтегрувати за частинами, то з урахуванням крайових умов (4.25), (4.26), отримаємо

$$\int\limits_{0}^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi =$$

$$= V_2^j(x)\int\limits_0^x \frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi + \int\limits_x^{x_{j+1}} V_2^j(\xi)\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi =$$

$$= V_2^j(x)x^2k(x)\frac{du}{dx} + V_2^j(\xi)\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\Big|_x^{x_{j+1}} + \int\limits_x^{x_{j+1}}\frac{du}{d\xi}d\xi =$$

$$= u(x_{j+1}) - u(x), \quad j = 0,1,$$

$$\int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} G^j(x,\xi)\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi =$$

$$= \frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\int\limits_{x_{j-1}}^{x} \xi^2 V_1^j(\xi)\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi +$$

$$+ \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\int\limits_{x}^{x_{j+1}} \xi^2 V_2^j(\xi)\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\right]d\xi =$$

$$= \frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\left[V_1^j(\xi)\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\Big|_{x_{j-1}}^{x} - \int\limits_{x_{j-1}}^{x}\frac{du}{d\xi}d\xi\right] +$$

$$+ \frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\left[V_2^j(\xi)\xi^2 k(\xi)\frac{du}{d\xi}\Big|_{x}^{x_{j+1}} + \int\limits_{x}^{x_{j+1}}\frac{du}{d\xi}d\xi\right] =$$

$$=\frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}u(x_{j+1})-u(x)+\frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}u(x_{j-1}),\quad j=2,3,\ldots,N-1.$$

Отже,

$$\begin{aligned}u(x_{j+1})-u(x)=&-\int\limits_x^{x_{j+1}}\xi^2V_2^j(\xi)f(\xi,u)d\xi-\\&-V_2^j(x)\int\limits_0^x\xi^2f(\xi,u)d\xi,\quad j=0,1,\end{aligned}\tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}&\frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}u(x_{j+1})-u(x)+\frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}u(x_{j-1})=\\&\qquad=-\frac{V_2^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\int\limits_{x_{j-1}}^{x}\xi^2V_1^j(\xi)f(\xi,u)d\xi-\\&\qquad-\frac{V_1^j(x)}{V_1^j(x_{j+1})}\int\limits_{x}^{x_{j+1}}\xi^2V_2^j(\xi)f(\xi,u)d\xi,\ j=2,3,\ldots,N-1.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Запишемо рівність (4.29) для $j=1$ при $x=x_1$

$$u_2-u_1=-\int\limits_{x_1}^{x_2}\xi^2V_2^1(\xi)f(\xi,u)d\xi-V_2^1(x_1)\int\limits_0^{x_1}\xi^2f(\xi,u)d\xi.\tag{4.31}$$

В рівності (4.29) для $j=0$ перейдемо до границі при $x\to 0$, тоді отримаємо

$$u_1-u_0=-\int\limits_0^{x_1}\xi^2V_2^0(\xi)f(\xi,u)d\xi.\tag{4.32}$$

Рівність (4.32) помножимо на $\dfrac{1}{h_1}$, (4.31) — $\dfrac{1}{\hbar_1x_1^2V_2^1(x_1)}$, а (4.30) при $x=x_j$ на

$\dfrac{V_1^j(x_{j+1})}{\hbar_j x_j^2 V_1^j(x_j) V_2^j(x_j)}$. Звідси отримаємо

$$
\begin{aligned}
& u_{x,0} = -\frac{1}{h_1}\int\limits_0^{x_1} \xi^2 V_2^0(\xi) f(\xi,u)d\xi, \\
& \frac{u_2-u_1}{\hbar_1 x_1^2 V_2^1(x_1)} = -\hat{T}^{x_1}(f(\xi,u(\xi))), \\
& \frac{1}{\hbar_j x_j^2}\left[\frac{u_{j+1}-u_j}{V_2^j(x_j)} - \frac{u_j-u_{j-1}}{V_1^j(x_j)}\right] = \\
& \qquad\qquad = -\hat{T}^{x_j}(f(\xi,u(\xi))), \quad j=2,3,\ldots,N-1.
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

Тоді з (4.33) і урахуванням рівності $V_2^j(x_j) = V_1^{j+1}(x_{j+1})$ випливає (4.23). ■

Введемо множину сіткових функцій

$$
\Omega(\widehat{\widehat{\omega}}_h, r) = \left\{ (v_j)_{j=0}^N : \left\| v - u^{(0)} \right\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} \leqslant r \right\},
$$

де

$$
\begin{aligned}
& \|v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} = \max\left\{ \|v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-}, \left\| x^2 k(x)\frac{dv}{dx} \right\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} \right\}, \quad \widehat{\omega}_h^- = x_0 \cup \widehat{\omega}_h, \\
& \|v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-} = \max_{\xi\in\widehat{\omega}_h^-}|v(\xi)|, \quad \widehat{\omega}_h^+ = \widehat{\omega}_h \cup x_N, \quad \|v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} = \max_{\xi\in\widehat{\omega}_h^+}|v(\xi)|, \\
& \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=x_j} = \left.\frac{dY_\alpha^j(x,v)}{dx}\right|_{x=x_j}, \quad \|v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h} = \max_{\xi\in\widehat{\omega}_h}|v(\xi)|.
\end{aligned}
$$

Існування ТТРС (4.23) доведено в Теоремі 4.3, а єдиність встановлює

Лема 4.4 *Нехай виконані умови теореми* 4.1. *Тоді існує таке число* $h_0 > 0$*, що при* $|h| \leqslant h_0$ *ТТРС (4.23) матиме єдиний розв'язок* $(u_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\widehat{\omega}}_h, r)$*, який можна одержати методом послідовних наближень:*

$$
\begin{aligned}
& u_{x,0}^{(n)} = -\hat{T}^{x_0}(f(\xi,u^{(n-1)}(\xi))), \quad a_2 u_{x,1}^{(n)}/(\hbar_1 x_1^2) = -\hat{T}^{x_1}(f(\xi,u^{(n-1)}(\xi))), \\
& \frac{1}{x_j^2}(a u_{\bar{x}}^{(n)})_{\hat{x},j} = -\hat{T}^{x_j}(f(\xi,u^{(n-1)}(\xi))), \quad j=2,3,\ldots,N-1, \quad u_N^{(n)} = \mu_2,
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

$$
\begin{aligned}
&u^{(n)}(x) = Y_1^1(x, u^{(n)}), \quad x \in [0, x_1],\\
&u^{(n)}(x) = Y_\alpha^j(x, u^{(n)}), \quad x \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}],\\
&j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2,\\
&u^{(0)}(x) = \mu_2
\end{aligned}
$$

з оцінкою похибки

$$
\begin{aligned}
&\left\| u^{(n)} - u \right\|^*_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h} =\\
&= \max\left\{ \left\| u^{(n)} - u \right\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-}, \left\| x^2 k(x)\frac{du^{(n)}}{dx} - x^2 k(x)\frac{du}{dx} \right\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} \right\} \leqslant \\
&\leqslant M q_1^n,
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

де $q_1 = q + M_1|h| < 1, M, M_1$ *— константи.*

Доведення. Оскільки різницева схема (4.23) є точною, тобто її розв'язок є проекцією точного розв'язку задачі на сітку, то цей розв'язок для $\forall x \in \widehat{\overline{\omega}}_h$ можна записати у вигляді

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \mathfrak{R}_h(x, (u_j)_{j=0}^N) = \int\limits_0^R G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + u^{(0)}(x) =\\
&= \sum_{j=1}^N \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + u^{(0)}(x),
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&u(\xi) = Y_1^1(\xi, u), \quad \xi \in [0, x_1],\\
&u(\xi) = Y_\alpha^j(\xi, u), \quad \xi \in [x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}],\\
&j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Дослідимо властивості оператора $\mathfrak{R}_h(x, (u_j)_{j=0}^N)$. Оператор (4.36) переводить множину $\Omega(\widehat{\widehat{\omega}}_h, r)$ в себе. Нехай $(v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\widehat{\omega}}_h, r)$, тоді

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathfrak{R}_h(x, (v_j)_{j=0}^N) - u^{(0)}(x) \right\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} \leqslant \\
&\qquad \leqslant K \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} d\xi \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{KR^2}{6c_1} \max(1, 2Rc_1) = r, \quad \forall (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\widehat{\omega}}_h, r).
\end{aligned}$$

Крім того,

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathfrak{R}_h(x, (u_j)_{j=0}^N) - \mathfrak{R}_h(x, (v_j)_{j=0}^N) \right\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h} \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]} \left| f(\xi, u(\xi)) - f(\xi, v(\xi)) \right| d\xi \leqslant \\
&\leqslant L \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]} \left| u(\xi) - v(\xi) \right| d\xi \leqslant \\
&\leqslant L \|u - v\|^*_{1,\infty,[0,R]} \int\limits_0^R \|G(x,\xi)\|^*_{1,\infty,[0,R]} d\xi \leqslant \\
&\leqslant \frac{LR^2}{6c_1} \max(1, 2Rc_1) \|u - v\|^*_{1,\infty,[0,R]} = \\
&= q \|u - v\|^*_{1,\infty,[0,R]} \quad \forall (u_j)_{j=0}^N, (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\widehat{\omega}}_h, r).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Покажемо, що

$$\|u - v\|^*_{1,\infty,[0,R]} \leqslant (1 + M|h|) \|u - v\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h}. \tag{4.38}$$

Для цього розглянемо крайові задачі

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^2 k(x) \frac{du}{dx} \right] = -f(x, u), \quad 0 < x < x_1, \\
&\lim_{x \to 0} x^2 k(x) \frac{du}{dx} = 0, \quad u(x_1) = u_1, \\
&\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^2 k(x) \frac{du}{dx} \right] = -f(x, u), \quad x_{j-1} < x < x_j, \\
&u(x_{j-1}) = u_{j-1}, \quad u(x_j) = u_j, \quad j = 2, 3, \ldots, N,
\end{aligned}$$

розв'язки яких запишемо у вигляді

$$u(x) = \int_0^{x_1} \widetilde{G}^1(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + u_1, \quad x \in [0, x_1],$$

$$u(x) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \widetilde{G}^j(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi + \hat{u}(x),$$

$$\hat{u}(x) = \frac{u(x_j) V_1^j(x) + u(x_{j-1}) V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)}, \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j = 2, 3, \ldots, N,$$

де функції Гріна $\widetilde{G}^1(x,\xi), \widetilde{G}^j(x,\xi)$ задаються формулами (4.15), (4.16).

На підставі умови Ліпшиця

$$\begin{aligned} &\|u - v\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \leqslant \\ &\quad\leqslant |u_1 - v_1| + L \|u - v\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \int_0^{x_1} \left\| \widetilde{G}^1(x,\xi) \right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} d\xi \leqslant \\ &\quad\leqslant \|u - v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-} + M_2 |h| \, \|u - v\|^*_{1,\infty,[0,x_1]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|u - v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \leqslant \\ &\quad\leqslant \|\hat{u} - \hat{v}\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} + L \|u - v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\| \widetilde{G}^j(x,\xi) \right\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} d\xi \leqslant \\ &\quad\leqslant \|\hat{u} - \hat{v}\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} + M_3 |h| \, \|u - v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]}, \quad j = 2, 3, \ldots, N. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \|\hat{u} - \hat{v}\|_{0,\infty,[x_{j-1},x_j]} &= \max_{x \in [x_{j-1},x_j]} \left\{ \frac{|u_j - v_j| V_1^j(x) + |u_{j-1} - v_{j-1}| V_2^{j-1}(x)}{V_1^j(x_j)} \right\} \leqslant \\ &\leqslant \|u - v\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^-}, \quad j = 2, 3, \ldots, N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\| x^2 k(x) \frac{d\hat{u}}{dx} - x^2 k(x) \frac{d\hat{v}}{dx} \right\|_{0,\infty,[x_{j-1},x_j]} = \max_{x \in [x_{j-1},x_j]} \frac{h_j \, |u_{\overline{x},j} - v_{\overline{x},j}|}{V_1^j(x_j)} \leqslant \\ &\quad\leqslant (1 + M_4 |h|) \left\| x^2 k(x) \frac{du}{dx} - x^2 k(x) \frac{dv}{dx} \right\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+}, \quad j = 2, 3, \ldots, N, \end{aligned}$$

то

$$\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \leqslant \|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h} + M_2|h|\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{1-M_2|h|}\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h} \leqslant (1+M|h|)\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h},$$

$$\|u-v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \leqslant (1+M_4|h|)\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h} + M_3|h|\,\|u-v\|^*_{1,\infty,[x_{j-1},x_j]} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+M_4|h|}{1-M_3|h|}\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h} \leqslant$$
$$\leqslant (1+M|h|)\,\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h},\ j=2,3,\ldots,N$$

з яких випливає нерівність (4.38).

Враховуючи (4.38), з оцінки (4.37) отримаємо

$$\left\|\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N) - \mathfrak{R}_h(x,(v_j)_{j=0}^N)\right\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h} \leqslant (q+M_1|h|)\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h} =$$
$$= q_1\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\omega}_h}.$$

Оскільки на підставі (4.5) $q_1 = q + M_1|h| < 1$ при достатньо малому h_0 і оператор (4.36) для $\forall (u_j)_{j=0}^N, (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r)$ здійснює стискувальне відображення.

Таким чином, згідно з принципом стискувальних відображень при достатньо малому h_0 ТТРС (4.23) має єдиний розв'язок, який може бути отриманий методом послідовних наближень (4.34) з оцінкою похибки (4.35). ■

Лема 4.5 *Нехай виконується умова (4.2) та існує стала* $\Delta > 0$ *така, що умови (4.3), (4.4) справджуються в області* $\Omega([0,R], r+\Delta)$. *Тоді існує таке* $h_0 > 0$, *що при* $|h| \leqslant h_0$ *і* $\forall (v_j)_{j=0}^N \in \Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r)$ *задачі*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{dY_2^0(x,v)}{dx}\right] = -f(x, Y_2^0(x,v)), \quad 0<x<x_1,\\ &Y_2^0(x_1,v) = v_1, \quad x^2k(x)\frac{dY_2^0(x,v)}{dx}\bigg|_{x=x_1} = x^2k(x)\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=x_1}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{dY_1^1(x,v)}{dx}\right] = -f(x, Y_1^1(x,v)), \quad 0<x<x_1,\\ &Y_1^1(0,v) = v_0, \quad \lim_{x\to 0} x^2k(x)\frac{dY_1^1(x,v)}{dx} = 0, \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2k(x)\frac{dY_\alpha^j(x,v)}{dx}\right] = -f(x,Y_\alpha^j(x,v)), \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha},\\
&Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},v) = v(x_{j+(-1)^\alpha}),\\
&x^2k(x)\frac{dY_\alpha^j(x,v)}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = x^2k(x)\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},\\
&j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

матимуть єдиний розв'язок.

Доведення. Задачі (4.39)—(4.41) еквівалентні операторним рівнянням

$$
\begin{aligned}
U_2^0(x) &= \mathfrak{R}_2^0(x,v,U_2^0) =\\
&= \int\limits_{x_1}^{x}\left[V_2^0(x)-V_2^0(\xi)\right]\xi^2 f(\xi,U_2^0(\xi))d\xi + v_1 - V_2^0(x)x^2k(x)\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=x_1} =\\
&= \int\limits_{x}^{x_1} V_2^0(\xi)\xi^2 f(\xi,U_2^0(\xi))d\xi + V_2^0(x)\int\limits_0^x \xi^2 f(\xi,U_2^0(\xi))d\xi + v_1, \quad x\in[0,x_1],\\
U_1^1(x) &= \mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1) =\\
&= \int\limits_0^x\left[V_2^0(x)-V_2^0(\xi)\right]\xi^2 f(\xi,U_1^1(\xi))d\xi + v_0, \quad x\in[0,x_1],\\
U_\alpha^j(x) &= \mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j) =\\
&= (-1)^{\alpha+1}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x}\left[V_\alpha^j(\xi)-V_\alpha^j(x)\right]\xi^2 f(\xi,U_\alpha^j(\xi))d\xi +\\
&+ v_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1}x^2k(x)\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} V_\alpha^j(x), \quad x\in[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}],\\
&\quad j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2.
\end{aligned}
$$

Дослідимо властивості операторів $\mathfrak{R}_2^0(x,v,U_2^0)$, $\mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1)$, $\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)$, $j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1,2$. Врахуємо те, що

$$
u^{(0)}(x) = \mu_2 = u_0^{(0)} = u_{j+(-1)^\alpha}^{(0)}, \quad x^2k(x)\frac{du^{(0)}}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = 0.
$$

Зауважимо, що виконуються нерівності

$$V_{\alpha}^{j}(x) - V_{\alpha}^{j}(\xi) \geqslant 0, \quad \forall \xi \in [x_{j+(-1)^{\alpha}}, x], \quad \alpha = 1, 2.$$

Нехай $U_2^0(x), U_1^1(x) \in \Omega([0, x_1], r+\Delta)$, $U_{\alpha}^j(x) \in \Omega([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r+\Delta)$, тоді

$$\left|\mathfrak{R}_2^0(x, v, U_2^0) - u^{(0)}\right| \leqslant r + K \int\limits_{x}^{x_1} V_2^0(\xi)\xi^2 d\xi + K V_2^0(x) \int\limits_{0}^{x} \xi^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant r + \frac{K}{3}\left[-x^3 V_2^0(x) + \int\limits_{x}^{x_1} \frac{\xi d\xi}{k(\xi)}\right] + K V_2^0(x)\frac{x^3}{3} \leqslant$$

$$\leqslant r + \frac{K(x_1^2 - x^2)}{6c_1} \leqslant r + M_1|h|,$$

$$\left|x^2 k(x)\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_2^0(x, v, U_2^0)}{\partial x} - \frac{du^{(0)}}{dx}\right)\right| \leqslant K \int\limits_{0}^{x} \xi^2 d\xi = K\frac{x^3}{3} \leqslant r,$$

$$\left|\mathfrak{R}_1^1(x, v, U_1^1) - u^{(0)}\right| \leqslant r + K \int\limits_{0}^{x} \left[V_2^0(x) - V_2^0(\xi)\right] \xi^2 d\xi =$$

$$= r + K\left[V_2^0(x) - V_2^0(\xi)\right] \frac{\xi^3}{3}\bigg|_0^x - \frac{K}{3}\int\limits_{0}^{x} \frac{\xi d\xi}{k(\xi)} \leqslant r,$$

$$\left|x^2 k(x)\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_1^1(x, v, U_1^1)}{\partial x} - \frac{du^{(0)}}{dx}\right)\right| \leqslant r + K \int\limits_{0}^{x} \xi^2 d\xi \leqslant r + M_4|h|,$$

$$\left|\mathfrak{R}_{\alpha}^j(x, v, U_{\alpha}^j) - u^{(0)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant r + M|h| + (-1)^{\alpha+1} K \int\limits_{x_{j+(-1)^{\alpha}}}^{x} \left[V_{\alpha}^j(x) - V_{\alpha}^j(\xi)\right] \xi^2 d\xi =$$

$$= r + M|h| - (-1)^{\alpha+1} K V_{\alpha}^j(x) \frac{x_{j+(-1)^{\alpha}}^3}{3} + \frac{K}{3} \int\limits_{x_{j+(-1)^{\alpha}}}^{x} \frac{\xi d\xi}{k(\xi)} \leqslant$$

$$\leqslant r + M_5|h|,$$

$$\left|x^2 k(x)\left(\frac{\partial \mathfrak{R}^j_\alpha(x,v,U^j_\alpha)}{\partial x}-\frac{du^{(0)}}{dx}\right)\right| \leqslant r+(-1)^{\alpha+1}K\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x}\xi^2 d\xi \leqslant r+M_6|h|,$$

Звідси

$$\left\|\mathfrak{R}^0_2(x,v,U^0_2)-u^{(0)}\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \leqslant r+\Delta,$$

$$\left\|\mathfrak{R}^1_1(x,v,U^1_1)-u^{(0)}\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]} \leqslant r+\Delta,$$

$$\left\|\mathfrak{R}^j_\alpha(x,v,U^j_\alpha)-u^{(0)}\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]} \leqslant r+\Delta,$$

тобто оператори $\mathfrak{R}^0_2(x,v,U^0_2)$, $\mathfrak{R}^1_1(x,v,U^1_1)$, $\mathfrak{R}^j_\alpha(x,v,U^j_\alpha)$, $j = 3-\alpha, 4-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1,2$ переводить відповідно множини $\Omega([0,x_1], r+\Delta), \Omega([x_{j-2+\alpha}, x_{j-1+\alpha}], r+\Delta)$ в себе. Крім того,

$$\begin{aligned}
&\left|\mathfrak{R}^0_2(x,v,U^0_2)-\mathfrak{R}^0_2(x,v,\widetilde{U}^0_2)\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant L\left|U^0_2-\widetilde{U}^0_2\right|\int\limits_x^{x_1} V^0_2(\xi)\xi^2 d\xi + V^0_2(x) L\left|U^0_2-\widetilde{U}^0_2\right|\int\limits_0^x \xi^2 d\xi \leqslant \\
&\quad \leqslant L\left|U^0_2-\widetilde{U}^0_2\right|\left[-\frac{x^3 V^0_2(x)}{3}+\frac{1}{3}\int\limits_x^{x_1}\frac{\xi d\xi}{k(\xi)}\right]+L\left|U^0_2-\widetilde{U}^0_2\right|\frac{x^3 V^0_2(x)}{3} \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{L(x_1^2-x^2)}{6c_1}\left|U^0_2-\widetilde{U}^0_2\right| \leqslant q\left\|U^0_2-\widetilde{U}^0_2\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|x^2 k(x)\left(\frac{\partial \mathfrak{R}^0_2(x,v,U^0_2)}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{R}^0_2(x,v,\widetilde{U}^0_2)}{\partial x}\right)\right| \leqslant L\left|U^0_2-\widetilde{U}^0_2\right|\int\limits_0^x \xi^2 d\xi = \\
&\qquad = L\left|U^0_2-\widetilde{U}^0_2\right|\frac{x^3}{3} \leqslant q\left\|U^0_2-\widetilde{U}^0_2\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]},
\end{aligned}$$

$$\left|\mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1)-\mathfrak{R}_1^1(x,v,\widetilde{U}_1^1)\right| \leqslant$$

$$\leqslant L\left|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right|\int\limits_0^x\left[V_2^0(x)-V_2^0(\xi)\right]\xi^2 d\xi =$$

$$= L\left|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right|\left[\left(V_2^0(x)-V_2^0(\xi)\right)\frac{\xi^3}{3}\Big|_0^x-\frac{1}{3}\int\limits_0^x\frac{\xi d\xi}{k(\xi)}\right]\leqslant$$

$$\leqslant L\left|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right|\frac{x^2}{6c_1}\leqslant q\left\|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]},$$

$$\left|x^2k(x)\left(\frac{\partial\mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1)}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{R}_1^1(x,v,\widetilde{U}_1^1)}{\partial x}\right)\right|\leqslant L\left|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right|\int\limits_0^x\xi^2 d\xi =$$

$$= L\left|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right|\frac{x^3}{3}\leqslant q\left\|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]},$$

$$\left|\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)-\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,\widetilde{U}_\alpha^j)\right|\leqslant$$

$$\leqslant(-1)^{\alpha+1}L\left|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right|\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x\left[V_\alpha^j(x)-V_\alpha^j(\xi)\right]\xi^2 d\xi =$$

$$= L\left|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right|\left[(-1)^\alpha V_\alpha^j(x)\frac{x^3_{j+(-1)^\alpha}}{3}+\frac{1}{3}\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x\frac{\xi d\xi}{k(\xi)}\right]\leqslant$$

$$\leqslant(q+M|h|)\left\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]},$$

$$\left|x^2k(x)\left(\frac{\partial\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,\widetilde{U}_\alpha^j)}{\partial x}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant(-1)^{\alpha+1}L\left|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right|\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^x\xi^2 d\xi =$$

$$=(-1)^{\alpha+1}L\left|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right|\frac{x^3-x^3_{j+(-1)^\alpha}}{3}\leqslant$$

$$\leqslant q\left\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]},$$

Таким чином,

$$\left\|\mathfrak{R}_2^0(x,v,U_2^0)-\mathfrak{R}_2^0(x,v,\tilde{U}_2^0)\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]}\leqslant q\left\|U_2^0-\widetilde{U}_2^0\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]},$$

$$\left\|\mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1)-\mathfrak{R}_1^1(x,v,\tilde{U}_1^1)\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]}\leqslant q\left\|U_1^1-\widetilde{U}_1^1\right\|^*_{1,\infty,[0,x_1]},$$

$$\left\|\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j)-\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,\widetilde{U}_\alpha^j)\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}\leqslant$$
$$\leqslant(q+M|h|)\left\|U_\alpha^j-\widetilde{U}_\alpha^j\right\|^*_{1,\infty,[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]}.$$

Оскільки на підставі (4.5) $q_1=q+M|h|<1$ при достатньо малому h_0, то оператори $\mathfrak{R}_2^0(x,v,U_2^0),\mathfrak{R}_1^1(x,v,U_1^1),\mathfrak{R}_\alpha^j(x,v,U_\alpha^j),\ j=3-\alpha,4-\alpha,\ldots,N+1-\alpha,\ \alpha=1,2$ здійснюють стискувальне відображення. Таким чином, згідно з принципом стискувальних відображень, при достатньо малому h_0 задачі (4.40), (4.41) матимуть єдиний розв'язок. ■

4.3 Алгоритмічна реалізація точної триточкової різницевої схеми

Оскільки

$$\int_0^{x_1}\xi^2V_2^0(\xi)f(\xi,u)d\xi=Y_2^0(0,u)-u_1,$$

$$\int_0^{x_1}\xi^2f(\xi,u)d\xi=-x_1^2Z_1^1(x_1,u),$$

$$\int_0^{x_1}\xi^2V_2^1(\xi)f(\xi,u)d\xi=-x_1^2V_2^1(x_1)Z_1^1(x_1,u)-Y_1^1(x_1,u)+u_0,$$

$$(-1)^{\alpha+1}\int_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j}\xi^2V_\alpha^j(\xi)f(\xi,u)d\xi=(-1)^\alpha x_j^2V_\alpha^j(x_j)Z_\alpha^j(x_j,u)+$$
$$+Y_\alpha^j(x_j,u)-u_{j+(-1)^\alpha},$$

де $Y_2^0(0,u), Y_1^1(x_1,u), Z_1^1(x_1,u),\ Y_\alpha^j(x_j,u), Z_\alpha^j(x_j,u),\ \alpha=1,2$ —розв'язки задач Коші

$$\begin{aligned}
&\frac{dY_2^0(x,u)}{dx}=\frac{Z_2^0(x,u)}{k(x)},\\
&\frac{dZ_2^0(x,u)}{dx}=-f(x,Y_2^0(x,u))-\frac{2Z_2^0(x,u)}{x},\quad 0<x<x_1,\\
&Y_2^0(x_1,u)=u_1,\quad Z_2^0(x_1,u)=k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_1},
\end{aligned}\tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dY_1^1(x,u)}{dx}=\frac{Z_1^1(x,u)}{k(x)},\\
&\frac{dZ_1^1(x,u)}{dx}=-f(x,Y_1^1(x,u))-\frac{2Z_1^1(x,u)}{x},\quad 0<x<x_1,\\
&Y_1^1(0,u)=u_0,\quad \lim_{x\to 0}Z_1^1(x,u)=0,
\end{aligned}\tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx}=\frac{Z_\alpha^j(x,u)}{k(x)},\\
&\frac{dZ_\alpha^j(x,u)}{dx}=-f(x,Y_\alpha^j(x,u))-\frac{2Z_\alpha^j(x,u)}{x},\quad x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha},\\
&Y_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)=u_{j+(-1)^\alpha},\quad Z_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)=k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},\\
&j=3-\alpha,4-\alpha,\ldots,N+1-\alpha,\quad \alpha=1,2,
\end{aligned}\tag{4.44}$$

а $\bar V_\alpha^j(x)=(-1)^{\alpha+1}V_\alpha^j(x)$ — розв'язки задач Коші

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar V_\alpha^j(x)}{dx}=\frac{1}{x^2k(x)},\quad x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha},\\
&\bar V_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha})=0,\quad j=3-\alpha,4-\alpha,...,N+1-\alpha,\quad \alpha=1,2.
\end{aligned}\tag{4.45}$$

Тоді праву частину ТТРС (4.23) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_0,u)=\hat{T}^{x_0}(f(\xi,u(\xi)))=\frac{Y_2^0(0,u)-u_1}{h_1},\\
&\varphi(x_1,u)=\hat{T}^{x_1}(f(\xi,u(\xi)))=\\
&\qquad=\frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^1(x_1,u)-Z_1^1(x_1,u)+\frac{Y_2^1(x_1,u)-u_2}{x_1^2V_2^1(x_1)}\right],\\
&\varphi(x_j,u)=\hat{T}^{x_j}(f(\xi,u(\xi)))=\\
&\qquad=\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha}\left[Z_\alpha^j(x_j,u)+(-1)^{\alpha}\frac{Y_\alpha^j(x_j,u)-u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j^2V_\alpha^j(x_j)}\right],\\
&\qquad j=2,3,\dots,N-1.
\end{aligned}\tag{4.46}$$

Отже, для побудови ТТРС (4.23), (4.24), (4.46) необхідно для $\forall x_j\in\hat{\omega}_h$ розв'язати чотири задачі Коші (4.42) або(4.43) або (4.44) і (4.45). Якщо задачі (4.42)–(4.45) розв'язувати чисельно, то можна побудувати усічені ТРС.

Задачі Коші (4.43)–(4.45) будемо розв'язувати чисельно за допомогою будь-яких однокрокових методів (див., напр., [55], Розділ 2)

$$\begin{aligned}
&Y_1^{(\bar{m})1}(x_1,u)=u_0+h_1\widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,h_1\right),\\
&Z_1^{(m)1}(x_1,u)=h_1\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,h_1\right),
\end{aligned}\tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
&Y_2^{(\bar{m})0}(x_0,u)=u_1-h_1\Phi_1\Big(x_1,u_1,(ku')_1,-h_1\Big),\\
&Z_2^{(m)0}(x_0,u)=(ku')_1-h_1\Phi_2\Big(x_1,u_1,(ku')_1,-h_1\Big),
\end{aligned}\tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
&Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u)=u_{j+(-1)^\alpha}+\\
&\qquad+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_1\Big(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Big),\\
&Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)=(ku')_{j+(-1)^\alpha}+\\
&\qquad+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_2\Big(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Big),\\
&\bar{V}_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)=(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right),\\
&j=3-\alpha,4-\alpha,...,N+1-\alpha,\quad \alpha=1,2.
\end{aligned}\tag{4.49}$$

де $\widetilde{\Phi}_1(x,u,y,h)$, $\widetilde{\Phi}_2(x,u,y,h)$, $\Phi_1(x,u,y,h)$, $\Phi_2(x,u,y,h)$, $\Phi_3(x,u,h)$ — функції приросту, $(ku')_{j+(-1)^\alpha} = k(x)\dfrac{du}{dx}\Big|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}$, $Z_1^{(m)1}(x_1,u), Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)$ апроксимує значення $Z_1^1(x_1,u), Z_\alpha^j(x_j,u)$ з порядком точності m (m – ціле додатне), $Y_1^{(\bar{m})1}(x_1,u)$, $Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u)$, $V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)$ апроксимують відповідно $Y_1^1(x_1,u)$, $Y_\alpha^j(x_j,u)$, $V_\alpha^j(x_j)$ з порядком точності $\bar{m}=2[(m+1)/2]$ ($[\cdot]$ – ціла частина). Якщо $k(x)$ та права частина диференціального рівняння $f(x,u)$ достатньо гладкі, то існують розклади

$$Y_1^1(x_1,u) = Y_1^{(\bar{m})1}(x_1,u) + h_1^{\bar{m}+1}\psi_1^1(x_0,u) + O(h_1^{\bar{m}+2}), \tag{4.50}$$

$$Z_1^1(x_1,u) = Z_1^{(m)1}(x_1,u) + h_1^{m+1}\tilde{\psi}_1^1(x_0,u) + O(h_1^{m+2}), \tag{4.51}$$

$$Y_2^0(x_0,u) = Y_2^{(\bar{m})0}(x_0,u) - h_1^{\bar{m}+1}\psi_2^0(x_1,u) + O(h_1^{\bar{m}+2}), \tag{4.52}$$

$$Z_2^0(x_0,u) = Z_2^{(m)0}(x_0,u) + [-h_1]^{m+1}\tilde{\psi}_2^0(x_1,u) + O(h_1^{m+2}), \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned} Y_\alpha^j(x_j,u) =& Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u) + \\ &+ [(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\bar{m}+1}\psi_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2}), \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned} Z_\alpha^j(x_j,u) =& Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u) + \\ &+ [(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{m+1}\tilde{\psi}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u) + O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}), \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\bar{V}_\alpha^j(x_j) = \bar{V}_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) + [(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\bar{m}+1}\bar{\psi}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2}). \tag{4.56}$$

У випадку методу рядів Тейлора

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}_1(x_0,u_0,0,h_1) =& -h_1\frac{f(x_0,u_0)}{6k(x_0)} - \\ &- \sum_{p=3}^{\bar{m}}\frac{h_1^{p-1}}{p!}\left[\sum_{j=0}^{p-2}\binom{p-1}{j}\frac{p-j-1}{p-j+1}\frac{d^{p-j-2}f(x_0,u_0)}{dx^{p-j-2}}\frac{d^j}{dx^j}\frac{1}{k(x)}\Big|_{x=x_0}\right], \end{aligned}$$

$$\widetilde{\Phi}_2(x_0,u_0,0,h_1) = -\frac{1}{3}f(x_0,u_0) - \sum_{p=2}^{m}\frac{h_1^{p-1}}{(p-1)!(p+2)}\frac{d^{p-1}f(x_0,u_0)}{dx^{p-1}},$$

$$\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku')_{j+(-1)^\alpha}, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right) =$$
$$= \left[1-(-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{2}{x_{j+(-1)^\alpha}}+\frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right]u'_{j+(-1)^\alpha}-$$
$$-(-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\frac{f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha})}{k_{j+(-1)^\alpha}}+$$
$$+\sum_{p=3}^{\bar{m}}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!}\frac{d^pY_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^p},$$

$$\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, (ku')_{j+(-1)^\alpha}, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right) =$$
$$= -f(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}) - \frac{2(ku')_{j+(-1)^\alpha}}{x_{j+(-1)^\alpha}}+$$
$$+\sum_{p=2}^{m}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!}\frac{d^pZ_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx^p},$$

$$\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha}, 0, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right) =$$
$$= \frac{1}{(x^2k)_{j+(-1)^\alpha}}+\sum_{p=2}^{\bar{m}}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!}\left.\left[\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\frac{1}{x^2k(x)}\right]\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}.$$

Лема 4.6 . *Нехай $k(x) \in Q^{m+1}[0,R]$, існує стала $\Delta > 0$ така, що*

$$f(x,u) \in \bigcup_{j=1}^{N} C^m\left([x_{j-1}, x_j] \times \Omega([0,R], r+\triangle)\right),$$

і для чисельних методів (4.49) існують розклади (4.54)—(4.56), тоді справджуються співвідношення

$$\begin{aligned} Y_\alpha^j(x_j,u) =& Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u)+ \\ &+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2}), \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned} Z_\alpha^j(x_j,u) =& Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)+ \\ &+[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{m+1}\tilde{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}), \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$V_\alpha^j(x_j) = V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)+h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}\bar{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha})+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2}), \tag{4.59}$$

$$j = 3-\alpha,\ 4-\alpha, ..., N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2.$$

Доведення. З того, що метод (4.49) має порядок точності $\bar{m}$ та виконуються умови гладкості, випливає, що існують розклади (4.54)–(4.56) (див., напр., [55, с.168]). Згідно з (4.54), (4.55)

$$\begin{aligned} Y_1^j(x_j,u) - Y_1^{(\bar{m})j}(x_j,u) &= Y_1^j(x_j,u) - u(x_j-h_j)- \\ &- h_j\Phi_1(x_j-h_j, u(x_j-h_j), ku'|_{x=x_j-h_j}, h_j) = \\ &= h_j^{\bar{m}+1}\psi_1^j(x_j-h_j,u) + O(h_j^{\bar{m}+2}), \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned} Z_1^j(x_j,u) - Z_1^{(m)j}(x_j,u) &= Z_1^j(x_j,u) - ku'|_{x=x_j-h_j} - \\ &- h_j\Phi_2(x_j-h_j, u(x_j-h_j), ku'|_{x=x_j-h_j}, h_j) = \\ &= h_j^{m+1}\tilde{\psi}_1^j(x_j-h_j,u) + O(h_j^{m+2}). \end{aligned} \tag{4.61}$$

Зазначимо, що

$$\begin{aligned} &Y_2^j(x_j,u) - Y_2^{(\bar{m})j}(x_j,u) = \\ &\qquad = Y_2^j(x_j,u) - u_{j+1} + h_{j+1}\Phi_1(x_{j+1}, u_{j+1}, (ku')_{j+1}, -h_{j+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Z_2^j(x_j,u) - Z_2^{(m)j}(x_j,u) = \\ &\qquad = Z_2^j(x_j,u) - (ku')_{j+1} + h_{j+1}\Phi_2(x_{j+1}, u_{j+1}, (ku')_{j+1}, -h_{j+1}). \end{aligned}$$

Підставимо в рівності (4.60), (4.61) замість h_j величину $-h_{j+1}$ і врахуємо, що $Y_1^j(x_j,u) = Y_2^j(x_j,u)$, $Z_1^j(x_j,u) = Z_2^j(x_j,u)$, тоді отримаємо

$$\begin{aligned} Y_2^j(x_j,u) - u_{j+1} + h_{j+1}\Phi_1(x_{j+1}, u_{j+1}, (ku')_{j+1}, -h_{j+1}) &= \\ = -h_{j+1}^{\bar{m}+1}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u) + O(h_{j+1}^{\bar{m}+2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2^j(x_j,u) - (ku')_{j+1} + h_{j+1}\Phi_2(x_{j+1}, u_{j+1}, (ku')_{j+1}, -h_{j+1}) &= \\ = (-1)^{m+1}h_{j+1}^{m+1}\tilde{\psi}_1^{j+1}(x_{j+1},u) + O(h_{j+1}^{m+2}). \end{aligned}$$

Звідси випливають співвідношення (4.57), (4.58). Аналогічно до (4.57) доводиться рівність

$$\bar{V}_\alpha^j(x_j) = \bar{V}_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j) + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+1}\bar{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{m}+2}),$$

з якої з урахуванням того, що $\bar{V}_\alpha^j(x) = (-1)^{\alpha+1}V_\alpha^j(x)$, випливає (4.59). ∎

Замість ТТРС (4.23), (4.24), (4.46) можна тепер скористатися усіченою ТРС рангу $\bar{m}$ вигляду

$$\begin{gathered}
y_{x,0}^{(\bar{m})}=-\varphi^{(\bar{m})}(x_0,y^{(\bar{m})}),\quad a_2^{(\bar{m})}y_{x,1}^{(\bar{m})}/(\hbar_1x_1^2)=-\varphi^{(\bar{m})}(x_1,y^{(\bar{m})}),\\
\frac{1}{x_j^2}\left(a^{(\bar{m})}y_{\bar{x}}^{(\bar{m})}\right)_{\hat{x},j}=-\varphi^{(\bar{m})}(x_j,y^{(\bar{m})}),\quad j=2,3,\ldots,N-1,\quad y_N^{(\bar{m})}=\mu_2,
\end{gathered}\tag{4.62}$$

де

$$a^{(\bar{m})}(x_j)=\left[\frac{1}{h_j}V_1^{(\bar{m})j}(x_j)\right]^{-1},\quad \varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)=\frac{1}{h_1}\left(Y_2^{(\bar{m})0}(x_0,u)-u_1\right),$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_1,u)=\frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^{(m)1}(x_1,u)-Z_1^{(m)1}(x_1,u)+\frac{Y_2^{(\bar{m})1}(x_1,u)-u_2}{x_1^2V_2^{(\bar{m})1}(x_1)}\right],$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)=\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)+(-1)^\alpha\frac{Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j^2V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)}\right].$$

Для доведення існування та єдиності розв'язку ТРС (4.62), а також для встановлення її точності необхідна

Лема 4.7 *Нехай виконані умови леми* 4.6*; тоді будуть виконуватися оцінки*

$$\left|a^{(\bar{m})}(x_j)-a(x_j)\right|\leqslant M|h|^{\bar{m}},\tag{4.63}$$

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)-\varphi(x_0,u)=h_1^{\bar{m}}\psi_2^0(x_1,u)+O(h_1^{\bar{m}+1}),\tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=\\
&=\left\{h_j^{m+1}\left[k(x)\left(\psi_1^j(x,u)-\bar{\psi}_1^j(x,u)x^2k(x)\frac{du}{dx}\right)-\tilde{\psi}_1^j(x,u)\right]_{x=x_j+0}\right\}_{\hat{x}}+\\
&+O\left(\frac{h_j^{m+2}+h_{j+1}^{m+2}}{\hbar_j}\right),\quad j=1,2,\ldots,N-1,
\end{aligned}\tag{4.65}$$

якщо m непарне,

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=\\
&=\left\{h_j^{m}\left[k(x)\left(\psi_1^j(x,u)-\bar{\psi}_1^j(x,u)x^2k(x)\frac{du}{dx}\right)\right]_{x=x_j+0}\right\}_{\hat{x}}+\\
&+O\left(\frac{h_j^{m+1}+h_{j+1}^{m+1}}{\hbar_j}\right),\quad j=1,2,\ldots,N-1,
\end{aligned}\tag{4.66}$$

якщо m парне; крім того

$$\begin{gathered}\left|\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)\right| \leqslant M|h|,\\ \left|\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)\right| \leqslant K+M|h| \\ \forall u\in\Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r+\triangle),\quad j=1,2,\ldots,N-1,\end{gathered} \tag{4.67}$$

$$\begin{gathered}\left|\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)-\varphi^{(\bar{m})}(x_0,v)\right| \leqslant M|h|\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h},\\ \left|\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi^{(\bar{m})}(x_j,v)\right| \leqslant (L+M|h|)\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\overline{\omega}}_h} \\ \forall u,v\in\Omega(\widehat{\overline{\omega}}_h, r+\triangle),\quad j=1,2,\ldots,N-1,\end{gathered} \tag{4.68}$$

де через M позначатимемо сталі, які не залежать від |h|.

Доведення. Нерівність (4.63) випливає з (4.59), а співвідношення (4.64) — з (4.50). Дійсно,

$$a^{(\bar{m})}(x_j)-a(x_j)=\frac{h_j[V_1^j(x_j)-V_1^{(\bar{m})j}(x_j)]}{V_1^j(x_j)V_1^{(\bar{m})j}(x_j)}=O(h_j^{\bar{m}}),$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar{m})}(x_0,u)-\varphi(x_0,u)&=\frac{1}{h_1}\left(Y_2^0(x_0,u)-Y_2^{(\bar{m})0}(x_0,u)\right)=\\ &=h_1^{\bar{m}}\psi_2^0(x_1,u)+O(h_1^{\bar{m}+1}).\end{aligned} \tag{4.69}$$

Доведемо (4.65), (4.66). Зауважимо, що

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar{m})}(x_1,u)-\varphi(x_1,u)&=\frac{1}{\hbar_1}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left(Z_\alpha^{(m)1}(x_1,u)-Z_\alpha^1(x_1,u)\right)+\right.\\ &\left.+\frac{1}{x_1^2}\left(\frac{Y_2^{(\bar{m})1}(x_1,u)-u_2}{V_2^{(\bar{m})1}(x_1)}-\frac{Y_2^1(x_1,u)-u_2}{V_2^1(x_1)}\right)\right],\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)&=\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)-Z_\alpha^j(x_j,u)+\right.\\ &\left.+\frac{(-1)^\alpha}{x_j^2}\left(\frac{Y_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j)}-\frac{Y_\alpha^j(x_j,u)-u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^j(x_j)}\right)\right].\end{aligned} \tag{4.71}$$

З леми 4.6 та рівності

$$Y_\alpha^j(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha} = (-1)^\alpha h_{j-1+\alpha} \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} + O(h_{j-1+\alpha}^2)$$

маємо

$$Z_1^{(m)1}(x_1,u) - Z_1^1(x_1,u) = -h_1^{m+1}\tilde{\psi}_1^1(x_0,u) + O(h_1^{m+2}),$$

$$Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u) - Z_\alpha^j(x_j,u) = -[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{m+1}\tilde{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha},u) + O(h_{j-1+\alpha}^{m+2}),$$

$$\begin{aligned}
&\frac{Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)} - \frac{Y_\alpha^j(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^j(x_j)} = \\
&\quad = \frac{Y_\alpha^j(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha} - (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha},u) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2})}{V_\alpha^j(x_j) - h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\bar{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2})} - \\
&\quad - \frac{Y_\alpha^j(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{V_\alpha^j(x_j)} = -\frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha},u)}{V_\alpha^j(x_j)} + \\
&\quad + \frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}\bar{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha})\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}}{\left[V_\alpha^j(x_j)\right]^2} + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}).
\end{aligned} \tag{4.72}$$

З урахуванням (4.72) та співвідношення

$$V_\alpha^j(x_j) = \frac{h_{j-1+\alpha}}{(x^2k)_{j+(-1)^\alpha}} + O(h_{j-1+\alpha}^2),$$

рівності (4.70), (4.71) за непарних m зводяться до

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(\bar m)}(x_1,u) - \varphi(x_1,u) = \\
&\quad = \frac{1}{\hbar_1}\left\{\frac{1}{x_1^2}\left[h_2^{m+1}x_2^2k_2\psi_1^2(x_2,u) - h_1^{m+1}x_0^2k_0\psi_1^1(x_0,u) - \right.\right. \\
&\quad \left. - h_2^{m+1}x_2^2k_2\bar{\psi}_1^2(x_2)(x^2ku')_2 + h_1^{m+1}x_0^2k_0\bar{\psi}_1^1(x_0)(x^2ku')_0\right] - \\
&\quad \left. - h_2^{m+1}\tilde{\psi}_1^2(x_2,u) + h_1^{m+1}\tilde{\psi}_1^1(x_0,u)\right\} + \\
&\quad + O\left(\frac{h_1^{m+2} + h_2^{m+2}}{\hbar_1}\right),
\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=\\
&\quad=\frac{1}{\hbar_j}\left\{\frac{1}{x_j^2}\left[h_{j+1}^{m+1}k_{j+1}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u)-h_j^{m+1}k_{j-1}\psi_1^j(x_{j-1},u)-\right.\right.\\
&\quad\left.-h_{j+1}^{m+1}k_{j+1}\bar{\psi}_1^{j+1}(x_{j+1})(x^2ku')_{j+1}+h_j^{m+1}k_{j-1}\bar{\psi}_1^j(x_{j-1})(x^2ku')_{j-1}\right]-\\
&\quad\left.-\,h_{j+1}^{m+1}\tilde{\psi}_1^{j+1}(x_{j+1},u)+h_j^{m+1}\tilde{\psi}_1^j(x_{j-1},u)\right\}+\\
&\quad+O\left(\frac{h_j^{m+2}+h_{j+1}^{m+2}}{\hbar_j}\right),
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

а за парних m – до виразів

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{(\bar{m})}(x_1,u)-\varphi(x_1,u)=\\
&\quad=\frac{1}{x_1^2\hbar_1}\left[h_2^m x_2^2k_2\psi_1^2(x_2,u)-h_1^m x_0^2k_0\psi_1^1(x_0,u)-\right.\\
&\quad\left.-h_2^m x_2^2k_2\bar{\psi}_1^2(x_2)(x^2ku')_2+h_1^m x_0^2k_0\bar{\psi}_1^1(x_0)(x^2ku')_0\right]+\\
&\quad+O\left(\frac{h_1^{m+1}+h_2^{m+1}}{\hbar_1}\right),
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi(x_j,u)=\\
&\quad=\frac{1}{x_j^2\hbar_j}\left[h_{j+1}^m k_{j+1}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u)-h_j^m k_{j-1}\psi_1^j(x_{j-1},u)-\right.\\
&\quad\left.-\,h_{j+1}^m k_{j+1}\bar{\psi}_1^{j+1}(x_{j+1})(x^2ku')_{j+1}+h_j^m k_{j-1}\bar{\psi}_1^j(x_{j-1})(x^2ku')_{j-1}\right]+\\
&\quad+O\left(\frac{h_j^{m+1}+h_{j+1}^{m+1}}{\hbar_j}\right).
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

Оскільки

$$
k_{j-1}\psi_1^j(x_{j-1},u)=k_j\psi_1^j(x_j,u)+O(h_j),\ \tilde{\psi}_1^j(x_{j-1},u)=\tilde{\psi}_1^j(x_j,u)+O(h_j),
$$

$$
k_{j-1}\bar{\psi}_1^j(x_{j-1})(x^2ku')_{j-1}=k_j\bar{\psi}_1^j(x_j)(x^2ku')_j+O(h_j),
$$

то з урахуванням $x_j=x_{j+(-1)^\alpha}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}$ із (4.73)—(4.76) випливають оцінки (4.65), (4.66).

Доведемо нерівності (4.67), (4.68). Із (4.47), (4.49) випливають співвідношення

$$\widetilde{\Phi}_1(x,u,0,0)=0,\ \frac{\partial\widetilde{\Phi}_1(x,u,0,0)}{\partial h}=-\frac{f(x,u)}{6k(x)},\ \widetilde{\Phi}_2(x,u,0,0)=-\frac{f(x,u)}{3},$$

$$\Phi_1(x,u,y,0)=\frac{y}{k(x)},\ \frac{\partial\Phi_1(x,u,y,0)}{\partial h}=-\frac{1}{2}\left(\frac{f(x,u)}{k(x)}+\frac{2y}{xk(x)}+\frac{yk'(x)}{k^2(x)}\right),$$

$$\Phi_2(x,u,y,0)=-f(x,u)-\frac{2y}{x},\ \Phi_3(x,0,0)=\frac{1}{x^2k(x)},$$

$$\frac{\partial\Phi_3(x,0,0)}{\partial h}=-\frac{1}{2x^2k(x)}\left(\frac{2}{x}+\frac{k'(x)}{k(x)}\right).$$

Отже, справджуються рівності

$$\begin{aligned}
Y_1^{(\bar m)1}&(x_1,u)=\\
&=u_0+h_1\widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,0\right)+h_1^2\frac{\partial\widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,0\right)}{\partial h}+\\
&\quad+\frac{h_1^3}{2}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\hat{h}}\right)}{\partial h^2}=\\
&=u_0-h_1^2\frac{f(x_0,u_0)}{6k_0}+\frac{h_1^3}{2}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\hat{h}}\right)}{\partial h^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_1^{(m)1}(x_1,u)=&h_1\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,0\right)+h_1^2\frac{\partial\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,\tilde{\tilde{h}}\right)}{\partial h}=\\
&=-h_1\frac{f(x_0,u_0)}{3}+h_1^2\frac{\partial\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,\hat{\hat{h}}\right)}{\partial h},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_2^{(\bar m)0}(x_0,u)=&u_1-h_1\left[1+\frac{h_1}{2}\left(\frac{2}{x_1}+\frac{k_1'}{k_1}\right)\right]u_1'-\frac{h_1^2}{2}\frac{f(x_1,u_1)}{k_1}-\\
&-\frac{h_1^3}{2}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_1,u_1,(ku')_1,\bar h\right)}{\partial h^2},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)=\\
&\quad= u_{j+(-1)^\alpha}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\left[1-\frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{2}{x_{j+(-1)^\alpha}}+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\ \frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right]u'_{j+(-1)^\alpha}-\frac{h_{j-1+\alpha}^2}{2}\frac{f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})}{k_{j+(-1)^\alpha}}+\\
&\quad+(-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}^3}{2}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)=&\left(1-\frac{(-1)^{\alpha+1}2h_{j-1+\alpha}}{x_{j+(-1)^\alpha}}\right)(ku')_{j+(-1)^\alpha}-\\
&-(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})+\\
&+h_{j-1+\alpha}^2\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\tilde h\right)}{\partial h},
\end{aligned}
$$

$$
V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)=\frac{h_{j-1+\alpha}}{(x^2k)_{j+(-1)^\alpha}}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^2\frac{\partial\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,\breve h\right)}{\partial h},
$$

$$
\begin{aligned}
V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)=&\frac{h_{j-1+\alpha}}{(x^2k)_{j+(-1)^\alpha}}\left(1-(-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{2}{x_{j+(-1)^\alpha}}+\frac{k'_{j+(-1)^\alpha}}{k_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right)+\\
&+\frac{h_{j-1+\alpha}^3}{2}\frac{\partial^2\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,\breve h\right)}{\partial h^2}.
\end{aligned}
$$

Звідси

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(\bar m)}(x_0,u)&=\frac{1}{h_1}\left(Y_2^{(\bar m)0}(x_0,u)-u_1^{(\bar m)}\right)=\\
&=\frac{1}{h_1}\left(-h_1\left[1+\frac{h_1}{2}\left(\frac{2}{x_1}+\frac{k'_1}{k_1}\right)\right]u'_1-\frac{h_1^2}{2}\frac{f(x_1,u_1)}{k_1}-\right.\\
&\left.-\frac{h_1^3}{2}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_1,u_1,(ku')_1,\bar h\right)}{\partial h^2}\right)=\\
&=-\left[1+\frac{h_1}{2}\left(\frac{2}{x_1}+\frac{k'_1}{k_1}\right)\right]u'_1-\frac{h_1}{2}\frac{f(x_1,u_1)}{k_1}+O(h_1^2),
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

$$\varphi^{(\bar m)}(x_1,u)=\frac{1}{\hbar_1}\left[Z_2^{(m)1}(x_1,u)-Z_1^{(m)1}(x_1,u)+\frac{Y_2^{(\bar m)1}(x_1,u)-u_2}{x_1^2V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\right]=$$
$$=\frac{1}{\hbar_1}\left\{\frac{h_1}{3}f(x_0,u_0)+\left[1-\frac{1}{x_1V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\frac{h_2}{2k_2}\right]h_2f(x_2,u_2)+\right.$$
$$+\left[1+\frac{2h_2}{x_2}-\frac{h_2}{x_1^2V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\left(\frac{1}{k_2}+\frac{h_2}{2}\left(\frac{k_2^{'}}{k_2^2}+\frac{2}{(xk)_2}\right)\right)\right](ku')_2-$$
$$-h_1^2\frac{\partial\widetilde\Phi_2\left(x_0,u_0,0,\hat{\tilde h}\right)}{\partial h}+h_2^2\frac{\partial\Phi_2\left(x_2,u_2,(ku')_2,\tilde h\right)}{\partial h}-$$
$$\left.-\frac{h_2^3}{2x_1^2V_2^{(\bar m)1}(x_1)}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_2,u_2,(ku')_2,\bar h\right)}{\partial h^2}\right\}=$$
$$=\frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{h_1}{3}f(x_0,u_0)+\frac{h_2}{2}f(x_2,u_2)\right)+O\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{\hbar_1}\right),\tag{4.78}$$

$$\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)=$$
$$=\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^{(m)j}(x_j,u)+(-1)^\alpha\frac{Y_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)-u_{j+(-1)^\alpha}}{x_j^2V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\right]=$$
$$=\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\left[1-\frac{1}{x_j^2V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2k_{j+(-1)^\alpha}}\right]h_{j-1+\alpha}f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})+\right.$$
$$+(-1)^\alpha\left[1-\frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{x_{j+(-1)^\alpha}}-\frac{h_{j-1+\alpha}}{x_j^2V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{k_{j+(-1)^\alpha}}-\frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{2}\left(\frac{k_{j+(-1)^\alpha}^{'}}{k_{j+(-1)^\alpha}^2}+\frac{1}{(xk)_{j+(-1)^\alpha}}\right)\right)\right](ku')_{j+(-1)^\alpha}+$$
$$+(-1)^\alpha h_{j-1+\alpha}^2\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\tilde h\right)}{\partial h}+$$
$$\left.+\frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^3}{2x_j^2V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2}\right\}=$$
$$=\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})+O\left(\frac{h_j^2+h_{j+1}^2}{\hbar_j}\right).\tag{4.79}$$

Оскільки $u_1' = hu_0'' + O(h^2)$, то $|u_1'| \leqslant M|h|$. Тоді

$$\left|\varphi^{(\bar m)}(x_0,u)\right| \leqslant M|h|, \quad |\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)| \leqslant K + M|h|.$$

Доведемо оцінку (4.68). Оскільки

$$|\varphi^{(\bar m)}(x_0,u) - \varphi^{(\bar m)}(x_0,v)| \leqslant \frac{h_1}{6k_0}|f(x_0,u_0) - f(x_0,v_0)| +$$
$$+ \frac{h_1^2}{2}\left|\frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}_1\left(x_0,u_0,0,\hat{\tilde{h}}\right)}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}_1\left(x_0,v_0,0,\hat{\tilde{h}}\right)}{\partial h^2}\right|,$$

$$|\varphi^{(\bar m)}(x_1,u) - \varphi^{(\bar m)}(x_1,v)| \leqslant \frac{1}{\hbar_1}\left[\frac{h_1}{3}|f(x_0,u_0) - f(x_0,v_0)| +\right.$$
$$+\frac{h_2}{2}|f(x_2,u_2) - f(x_2,v_2)| \left[1 + \frac{h_2^2}{|V_2^{(\bar m)1}(x_1)|}\left|\frac{\partial \Phi_3\left(x_2,0,\breve{h}\right)}{\partial h}\right|\right] +$$
$$+ \frac{h_2^3}{2x_2^2|V_2^{(\bar m)1}(x_1)|}\left|\frac{\partial^2 \Phi_3\left(x_2,0,\hat{h}\right)}{\partial h^2}\right| \|x^2ku' - x^2kv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+} +$$
$$+ h_1^2\left|\frac{\partial \widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,0,\hat{\tilde{h}}\right)}{\partial h} - \frac{\partial \widetilde{\Phi}_2\left(x_0,v_0,0,\hat{\tilde{h}}\right)}{\partial h}\right| +$$
$$+ h_2^2\left|\frac{\partial \Phi_2\left(x_2,u_2,(ku')_2,\tilde{h}\right)}{\partial h} - \frac{\partial \Phi_2\left(x_2,v_2,(kv')_2,\tilde{h}\right)}{\partial h}\right| +$$
$$\left.+\frac{h_2^3}{2x_1^2|V_2^{(\bar m)1}(x_1)|}\left|\frac{\partial^2 \Phi_1\left(x_2,u_2,(ku')_2,\bar{h}\right)}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 \Phi_1\left(x_2,v_2,(kv')_2,\bar{h}\right)}{\partial h^2}\right|\right],$$

$$
\begin{aligned}
&|\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_j,v)|\leqslant\\
&\quad\leqslant\frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}|f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha})-f(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha})|\times\right.\\
&\qquad\qquad\times\left[1+\frac{h^2_{j-1+\alpha}}{|V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)|}\left|\frac{\partial\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,\breve h\right)}{\partial h}\right|\right]+\\
&\quad+\frac{h^3_{j-1+\alpha}}{2x_j^2|V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_3\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,\tilde h\right)}{\partial h^2}\right|\|x^2ku'-x^2kv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+\\
&\quad+\frac{h^3_{j-1+\alpha}}{2x_j^2|V_\alpha^{(\bar m)j}(x_j)|}\left|\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2}-\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha},(kv')_{j+(-1)^\alpha},\bar h\right)}{\partial h^2}\right|+\\
&\quad+h^2_{j-1+\alpha}\left|\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\tilde h\right)}{\partial h}-\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.-\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha},(kv')_{j+(-1)^\alpha},\tilde h\right)}{\partial h}\right|\right\},
\end{aligned}
$$

то за формулою скінченних приростів знайдуться $\hat u,\hat y,\bar u,\bar y,\tilde u,\tilde y$ такі, що

$$
|\varphi^{(\bar m)}(x_0,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_0,v)|\leqslant M|h|\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-},
$$

$$
\begin{aligned}
&|\varphi^{(\bar m)}(x_1,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_1,v)|\leqslant\\
&\quad\leqslant(L+M|h|)\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}+M|h|^2\|x^2ku'-x^2kv'\|_{0,\infty,\hat\omega_h^+}+\\
&\quad+M|h|\left\{\left[\left|\frac{\partial^2\widetilde\Phi_2\left(x_0,\hat u,0,\hat h\right)}{\partial h\partial u}\right|+\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_2,\tilde u,(ku')_2,\tilde h\right)}{\partial h\partial u}\right|+\right.\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_2,\bar u,(ku')_2,\bar h\right)}{\partial h^2\partial u}\right|\right]\|u-v\|_{0,\infty,\hat\omega_h^-}\right\}+
\end{aligned}
$$

$$+M|h|\left\{\left[\left|\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_2\left(x_0,u_0,\hat{y},\hat{h}\right)}{\partial h\partial y}\right|+\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_2,u_2,\tilde{y},\tilde{h}\right)}{\partial h\partial y}\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_2,u_2,\bar{y},\bar{h}\right)}{\partial h^2\partial y}\right|\right]\|x^2ku'-x^2kv'\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^+}\right\},$$

$$|\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u)-\varphi^{(\bar{m})}(x_j,v)|\leqslant$$

$$\leqslant(L+M|h|)\|u-v\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^-}+M|h|^2\|x^2ku'-x^2kv'\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^+}+$$

$$+M|h|\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\left[\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},\tilde{u},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\tilde{h}\right)}{\partial h\partial u}\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},\bar{u},(ku')_{j+(-1)^\alpha},\bar{h}\right)}{\partial h^2\partial u}\right|\right]\|u-v\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^-}\right\}+$$

$$+M|h|\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\left[\left|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},\tilde{y},\tilde{h}\right)}{\partial h\partial y}\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},\bar{y},\bar{h}\right)}{\partial h^2\partial y}\right|\right]\|x^2ku'-x^2kv'\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^+}\right\}.$$

Звідси отримаємо оцінку (4.68). ■

Теорема 4.8 *Нехай виконуються умови теореми* 4.1, *леми* 4.6, *тоді* $\exists h_0 > 0$ *таке, що при* $|h| \leqslant h_0$ *TPC (4.62) має єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою*

$$\left\|y^{(\bar{m})}-u\right\|^*_{1,\infty,\widehat{\widehat{\omega}}_h}=\max\left\{\left\|y^{(\bar{m})}-u\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^-},\ \left\|x^2k\frac{dy^{(\bar{m})}}{dx}-x^2k\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_h^+}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant M|h|^{\bar{m}},$$

де

$$\left[x^2k\frac{dy^{(\bar{m})}}{dx}\right]_{x=x_1}=x_1^2Z_1^{(m)1}(x_1,y^{(\bar{m})}),$$

$$\left[x^2k\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_j} = x_j^2 Z_1^{(m)j}\left(x_j, y^{(\bar m)}\right) + \\ + \frac{y_j^{(\bar m)} - Y_1^{(\bar m)j}\left(x_j, y^{(\bar m)}\right)}{V_1^{(\bar m)j}(x_j)},\ j = 2, 3, ..., N.$$

Доведення. Покажемо, що за умов теореми ТРС рангу $\bar m$ (4.62) має єдиний розв'язок $y^{(\bar m)}(x),\ x \in \hat{\bar\omega}_h$. Використаємо принцип стискувальних відображень (див., напр., [54]). Розглянемо операторне рівняння

$$y^{(\bar m)}(x) = \mathfrak{R}_h(x, (y_j^{(\bar m)})_{j=0}^N) = \sum_{\xi\in\hat\omega_h} \hbar(\xi) G^{(\bar m)}(x,\xi)\varphi^{(\bar m)}\left(\xi, y^{(\bar m)}(\xi)\right) + \mu_2 + \\ + h_1\varphi^{(\bar m)}\left(x_0, y^{(\bar m)}(x_0)\right)\delta_{i,0}, \tag{4.80}$$

де $\delta_{i,j}$ – символ Кронеккера, $G^{(\bar m)}(x,\xi)$ – функція Гріна задачі (4.62) вигляду (див., напр., [44, с.184])

$$G^{(\bar m)}(x,\xi) = \begin{cases} \xi^2 V^{(\bar m)}(\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \xi^2 V^{(\bar m)}(x), & \xi \leqslant x \leqslant R, \end{cases}$$

$$V^{(\bar m)}(x_j) = \sum_{k=j+1}^{N} \frac{h_k}{a^{(\bar m)}(x_k)} = \sum_{k=j+1}^{N} V_1^{(\bar m)k}(x_k).$$

Зауважимо, що

$$\left[x^2k\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_1} = O\left(|h|^3\right),$$

$$\left[x^2k\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_j} = a^{(\bar m)}(x_j)y_{\bar x,j}^{(\bar m)} + O\left(|h|\right), \quad j = 2, 3, ..., N.$$

Враховуючи формулу підсумовування за частинами (див., напр., [46, с.233]), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{N-1} G^{(\bar m)}(x_i, x_j)\hbar_j = V^{(\bar m)}(x_i)\sum_{j=1}^{i} x_j^2\hbar_j + \sum_{j=i+1}^{N-1} V^{(\bar m)}(x_j)x_j^2\hbar_j \leqslant \\ \leqslant \frac{R^3}{6c_1} + M|h|, \tag{4.81}$$

$$\left|a^{(\bar m)}(x_i)\right|\sum_{j=1}^{N-1}\left|\left(G^{(\bar m)}(x_i,x_j)\right)_{\bar x,i}\right|\hbar_j=\frac{h_i\left|V^{(\bar m)}_{\bar x,i}(x_i)\right|}{\left|V^{(\bar m)i}_1(x_i)\right|}\sum_{j=1}^{i-1}x_j^2\hbar_j= \\ =\sum_{j=1}^{i-1}x_j^2\hbar_j\leqslant\frac{R^3}{3}+M|h|. \tag{4.82}$$

Отже,

$$\left\|\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N)-u^{(0)}(x)\right\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}\leqslant \\ \leqslant\max\left\{\frac{R^2}{6c_1}+M|h|,\frac{R^3}{3}+M|h|\right\}(K+M|h|)= \\ =\frac{KR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1)+M|h|= \\ =r+M|h|\leqslant r+\Delta\quad\forall(u_j)_{j=0}^N\in\Omega(\widehat{\bar\omega}_h,r+\Delta), \tag{4.83}$$

тобто оператор $\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N)$ переводить $\Omega(\widehat{\bar\omega}_h,r+\Delta)$ в себе.

Крім того, враховуючи нерівності (4.68)

$$\left\|\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N)-\mathfrak{R}_h(x,(v_j)_{j=0}^N)\right\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}\leqslant \\ \leqslant\max\left\{\frac{R^2}{6c_1}+M|h|,\frac{R^2}{3}+M|h|\right\}\max_{j=\overline{1,N-1}}\left|\varphi^{(\bar m)}(x_j,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_j,v)\right|+ \\ +h_1\left|\varphi^{(\bar m)}(x_0,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_0,v)\right|\leqslant \\ \leqslant\left(\frac{LR^2}{6c_1}\max(1,2Rc_1)+M_2|h|\right)\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}= \\ =q_2\|u-v\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}\quad\forall(u_j)_{j=0}^N,(v_j)_{j=0}^N\in\Omega(\widehat{\bar\omega}_h,r+\Delta). \tag{4.84}$$

Якщо вибрати h_0 таким, що $q_2=q+M_2|h|<1$, то відображення $\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N)$ стискувальне.

Для похибки $z(x)=y^{(\bar m)}-u(x),\ x\in\hat\omega_h$ отримаємо задачу

$$z_{x,0}=\varphi(x_0,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_0,y^{(\bar m)}), \\ a_2^{(\bar m)}z_{x,1}/(\hbar_1x_1^2)=\varphi(x_1,u)-\varphi^{(\bar m)}(x_1,y^{(\bar m)})+\left(a_2-a_2^{(\bar m)}\right)u_{x,1}/(\hbar_1x_1^2),$$

$$\frac{1}{x_j^2}(a^{(\bar{m})}z_{\bar{x}})_{\hat{x},j} = \varphi(x_j,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x_j,y^{(\bar{m})}) + \frac{1}{x_j^2}\left[\left(a - a^{(\bar{m})}\right)u_{\bar{x}}\right]_{\hat{x},j},$$
$$j = 2,3,\ldots,N-1, \quad z_N = 0,$$

розв'язок якої за допомогою функції Гріна можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} z_i = &\sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G^{(\bar{m})}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar{m})}\left(x_j,y^{(\bar{m})}\right) - \varphi\left(x_j,u\right)\right] + \\ &+ \sum_{j=2}^{N-1} \hbar_j \frac{1}{x_j^2} G^{(\bar{m})}(x_i,x_j)\left[\left(a^{(\bar{m})}(x_j) - a(x_j)\right)u_{\bar{x},j}\right]_{\hat{x},j} + \\ &+ \frac{1}{x_1^2}G^{(\bar{m})}(x_i,x_1)\left(a_2^{(\bar{m})} - a_2\right)u_{x,1} + \\ &+ h_1\left\{\varphi^{(\bar{m})}\left(x_0,y^{(\bar{m})}\right) - \varphi\left(x_0,u\right)\right\}\delta_{i,0} = \\ = &\sum_{j=2}^{N} h_j\left[\frac{1}{x_j^2}G^{(\bar{m})}(x_i,x_j)\right]_{\bar{x},j}\left[a(x_j) - a^{(\bar{m})}(x_j)\right]u_{\bar{x},j} + \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G^{(\bar{m})}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar{m})}\left(x_j,y^{(\bar{m})}\right) - \varphi\left(x_j,u\right)\right] + \\ &+ h_1\left\{\varphi^{(\bar{m})}\left(x_0,y^{(\bar{m})}\right) - \varphi\left(x_0,u\right)\right\}\delta_{i,0}. \end{aligned} \tag{4.85}$$

Для непарного m з урахуванням (4.64)—(4.65), з (4.85) отримаємо

$$\begin{aligned} z_i = &\sum_{j=2}^{N} h_j\left\{\frac{1}{x_j^2}G^{(\bar{m})}(x_i,x_j)\right\}_{\bar{x},j}\left[a(x_j) - a^{(\bar{m})}(x_j)\right]u_{\bar{x},j} - \\ &- \sum_{j=1}^{N} h_j^{m+2}\left\{G^{(\bar{m})}(x_i,x_j)\right\}_{\bar{x},j} \times \\ &\qquad \times \left[k(x)\left(\psi_1^j(x,u) - \bar{\psi}_1^j(x)x^2k(x)\frac{du}{dx}\right) - \tilde{\psi}_1^j(x,u)\right]_{x=x_j+0} + \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G^{(\bar{m})}(x_i,x_j)\left[\varphi^{(\bar{m})}\left(x_j,y^{(\bar{m})}\right) - \varphi^{(\bar{m})}\left(x_j,u\right)\right] + \\ &+ h_1\left\{\varphi^{(\bar{m})}\left(x_0,y^{(\bar{m})}\right) - \varphi^{(\bar{m})}\left(x_0,u\right)\right\}\delta_{i,0} + O(|h|^{m+1}). \end{aligned}$$

Тоді

$$|z_i| \leqslant \left(\frac{1}{c_1 x_i} + M|h|\right) \|a - a^{(m+1)}\|_{0,1,\hat{\omega}_h^+ \setminus x_1} \|u_{\bar{x}}\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} + \\ + M|h|^{m+1} + q_2 \|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h} \leqslant \\ \leqslant M|h|^{m+1} + q_2 \|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}.$$

Якщо m – парне, то, враховуючи (4.64), (4.66), рівність (4.85) запишемо у вигляді

$$z_i = \sum_{j=2}^{N} h_j \left\{ \frac{1}{x_j^2} G^{(\bar{m})}(x_i, x_j) \right\}_{\bar{x},j} \left[a(x_j) - a^{(\bar{m})}(x_j) \right] u_{\bar{x},j} - \\ - \sum_{j=1}^{N} h_j^{m+1} \left\{ G^{(\bar{m})}(x_i, x_j) \right\}_{\bar{x},j} \left[k(x) \left(\psi_1^j(x,u) - \bar{\psi}_1^j(x) x^2 k(x) \frac{du}{dx} \right) \right]_{x=x_j+0} + \\ + \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G^{(\bar{m})}(x_i, x_j) \left[\varphi^{(\bar{m})} \left(x_j, y^{(\bar{m})} \right) - \varphi^{(\bar{m})} (x_j, u) \right] + \\ + h_1 \left\{ \varphi^{(\bar{m})} \left(x_0, y^{(\bar{m})} \right) - \varphi^{(\bar{m})} (x_0, u) \right\} \delta_{i,0} + O(|h|^m).$$

Звідси

$$|z_i| \leqslant \left(\frac{1}{c_1 x_i} + M|h|\right) \|a - a^{(m)}\|_{0,1,\hat{\omega}_h^+ \setminus x_1} \|u_{\bar{x}}\|_{0,\infty,\widehat{\omega}_h^+} + M|h|^m + q_2 \|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h} \leqslant \\ \leqslant M|h|^m + q_2 \|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}.$$

Отже,

$$|z_i| \leqslant M|h|^{\bar{m}} + q_2 \|z\|^*_{1,\infty,\widehat{\bar{\omega}}_h}.$$

З врахуванням рівності $y_j^{(\bar{m})} = Y_1^j(x_j, y_j^{(\bar{m})})$ (див. Лемма 4.6), отримаємо

$$\left| \left[x^2 k \frac{dz}{dx} \right]_{x=x_1} \right| \leqslant x_1^2 \left| Z_1^{(m)1}(x_1, y^{(\bar{m})}) - Z_1^1(x_1, y^{(\bar{m})}) \right| + \\ + \left| x_1^2 Z_1^1(x_1, y^{(\bar{m})}) - x_1^2 Z_1^1(x_1, u) \right|,$$

$$\left|\left[x^2k\frac{dz}{dx}\right]_{x=x_j}\right| \leqslant x_j^2\left|Z_1^{(m)j}(x_j,y^{(\bar m)})-Z_1^j(x_j,y^{(\bar m)})\right|+$$
$$+\left|x_j^2Z_1^j(x_j,y^{(\bar m)})-x_j^2Z_1^j\,(x_j,u)\right|+$$
$$+\frac{1}{\left|V_1^{(\bar m)j}(x_j)\right|}\left|Y_1^j(x_j,y^{(\bar m)})-Y_1^{(\bar m)j}(x_j,y^{(\bar m)})\right|,\ j=2,3,...,N.$$

Слід зазначити, що розв'язок ТТРС (4.23) записується у вигляді

$$u(x)=\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}G(x,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi+\mu_2, \tag{4.86}$$

де $G(x,\xi)$— функція Гріна задачі (4.1), функція $u(x)$ в правій частині(4.86) визначається формулою

$$u(x)=Y_1^j(x,u),\quad x\in[x_{j-1},x_j],\quad j=1,2,...,N.$$

Оскільки оператор $\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N)$ є стискувальний, то

$$\left|x_j^2Z_1^j(x_j,y^{(\bar m)})-x_j^2Z_1^j\,(x_j,u)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left\|\mathfrak{R}_h(x,(y_j^{\bar m})_{j=0}^N)-\mathfrak{R}_h(x,(u_j)_{j=0}^N)\right\|_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}^*\leqslant$$
$$\leqslant(q+M_1|h|)\|y^{\bar m}-u\|_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}^*=q_1\|y^{\bar m}-u\|_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}^*,\quad j=1,2,...,N.$$

Тоді

$$\left|\left[x^2k\frac{dz}{dx}\right]_{x=x_j}\right|\leqslant M|h|^{\bar m}+q_1\|z\|_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}^*,\quad j=1,2,...,N.$$

Отже,

$$\|z\|_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}^*\leqslant\frac{M|h|^{\bar m}}{1-\max(q_1,q_2)},$$

з якої в силу того, що $\max(q_1,q_2)<1$ при $|h|\leqslant h_0$ випливає

$$\|z\|_{1,\infty,\widehat{\bar\omega}_h}^*\leqslant M|h|^{\bar m}.$$

Теорема доведена. ■

Розв'язок нелінійної ТРС (4.62) може бути знайдено методом послідовних наближень.

Теорема 4.9 *Нехай виконуються умови теореми 4.8, тоді розв'язок задачі (4.62) може бути знайдено за допомогою методу послідовних наближень*

$$\begin{aligned}
&y_{x,0}^{(\bar{m},n)} = -\varphi^{(\bar{m})}(x_0, y^{(\bar{m},n-1)}), \quad a_2^{(\bar{m})} y_{x,1}^{(\bar{m},n)}/(\hbar_1 x_1^2) = -\varphi^{(\bar{m})}(x_1, y^{(\bar{m},n-1)}),\\
&\frac{1}{x_j^2}\left(a^{(\bar{m})} y_{\bar{x}}^{(\bar{m},n)}\right)_{\hat{x},j} = -\varphi^{(\bar{m})}(x_j, y^{(\bar{m},n-1)}), \quad j = 2, 3, \dots, N-1,\\
&y_N^{(\bar{m},n)} = \mu_2, \quad n = 1, 2, \dots \;, \quad y_j^{(\bar{m},0)} = \mu_2, \quad j = 0, 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{4.87}$$

і справджується оцінка

$$\left\| y^{(\bar{m},n)} - u \right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^{*} \leqslant M(|h|^{\bar{m}} + q_2^n),$$

де

$$\left[x^2 k \frac{dy^{(\bar{m},n)}}{dx} \right]_{x=x_1} = x_1^2 Z_1^{(m)1}(x_1, y^{(\bar{m},n)}),$$

$$\begin{aligned}
\left[x^2 k \frac{dy^{(\bar{m},n)}}{dx} \right]_{x=x_j} =& x_j^2 Z_1^{(m)j}\left(x_j, y^{(\bar{m},n)}\right) + \\
&+ \frac{y_j^{(\bar{m})} - Y_1^{(\bar{m})j}\left(x_j, y^{(\bar{m},n)}\right)}{V_1^{(\bar{m})j}(x_j)}, \quad j = 2, 3, ..., N,
\end{aligned}$$

стала M не залежить від $|h|, m, n$, а величина $q_2 = q + M_2|h| < 1$.

Доведення. В силу теореми 4.8 маємо

$$\begin{aligned}
\left\| y^{(\bar{m},n)} - u \right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^{*} &\leqslant \left\| y^{(\bar{m})} - u \right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^{*} + \left\| y^{(\bar{m},n)} - y^{(\bar{m})} \right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^{*} \leqslant \\
&\leqslant M|h|^{\bar{m}} + \left\| y^{(\bar{m},n)} - y^{(\bar{m})} \right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^{*}.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Послідовність наближень

$$y^{(\bar{m},n)}(x) = \mathfrak{R}_h(x, (y^{(\bar{m},n-1)})_{j=0}^{N}), \quad x \in \hat{\bar{\omega}}_h, \quad , n = 1, 2, \dots .$$

збігається (див. доведення теореми 4.8) і має місце оцінка швидкості збіжності (див., напр., [54, с.391])

$$\left\| y^{(\bar{m},n)} - y^{(\bar{m})} \right\|_{0,\infty,\hat{\bar{\omega}}_h}^{*} \leqslant \frac{q_2^n}{1 - q_2}(r + \Delta). \tag{4.89}$$

З нерівностей (4.88), (4.89) випливає оцінка (4.87). ■

З практичної точки зору для обчислення розв'язку ТРС (4.62) доцільніше використовувати ітераційний метод Ньютона. Лінеаризуємо (4.62) з урахуванням рівностей

$$\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n)}) = \varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{h_1}{6k_0}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} + O(h_1^2),$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n)}) =&\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{h_1}{2\hbar_1}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} + \\ &+ \frac{h_2}{2\hbar_1}\frac{\partial f(x_2, y_2^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_2^{(\bar m,n)} + O\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{\hbar_1}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n)}) =&\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n-1)}) + \frac{h_j}{2\hbar_j}\frac{\partial f(x_{j-1}, y_{j-1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j-1}^{(\bar m,n)} + \\ &+ \frac{h_{j+1}}{2\hbar_1}\frac{\partial f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j+1}^{(\bar m,n)} + O\left(\frac{h_j^2+h_{j+1}^2}{\hbar_j}\right),\end{aligned}$$

тоді модифікований ітераційний метод Ньютона (див., напр., [42]) буде мати вигляд

$$\begin{aligned}&\nabla y_{x,0}^{(\bar m,n)} + \frac{h_1}{6k_0}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} = -\varphi^{(\bar m)}(x_0, y^{(\bar m,n-1)}) - y_{x,0}^{(\bar m,n-1)},\\ &\frac{a_2^{(\bar m)}\nabla y_{x,1}^{(\bar m,n)}}{\hbar_1 x_1^2} + \frac{h_1}{2\hbar_1}\frac{\partial f(x_0, y_0^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_0^{(\bar m,n)} + \frac{h_2}{2\hbar_1}\frac{\partial f(x_2, y_2^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_2^{(\bar m,n)} = \\ &\qquad = -\varphi^{(\bar m)}(x_1, y^{(\bar m,n-1)}) - \frac{a_2^{(\bar m)} y_{x,1}^{(\bar m,n-1)}}{\hbar_1 x_1^2},\end{aligned} \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x_j^2}\left(a^{(\bar m)}\nabla y_{\bar x}^{(\bar m,n)}\right)_{\hat x,j} + \frac{h_j}{2\hbar_j}\frac{\partial f(x_{j-1}, y_{j-1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j-1}^{(\bar m,n)} + \\ &\qquad + \frac{h_{j+1}}{2\hbar_1}\frac{\partial f(x_{j+1}, y_{j+1}^{(\bar m,n-1)})}{\partial u}\nabla y_{j+1}^{(\bar m,n)} = \\ &\qquad = -\varphi^{(\bar m)}(x_j, y^{(\bar m,n-1)}) - \frac{1}{x_j^2}\left(a^{(\bar m)} y_{\bar x}^{(\bar m,n-1)}\right)_{\hat x,j}, \quad \nabla y_N^{(\bar m,n)} = 0,\\ &\quad y_j^{(\bar m,n)} = y_j^{(\bar m,n-1)} + \nabla y_j^{(\bar m,n)}, \quad j = 0,1,\ldots,N, \quad n = 1,2,\ldots\end{aligned} \tag{4.91}$$

4.4 Чисельні експерименти

Приклад 4.1 *Розглянемо крайову задачу, яка виникає в астрономії і описує рівновагу ізотермічних сфер газу [146]*

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2\frac{du}{dx}\right] = -u^5,\ x \in (0;1), \quad \lim_{x\to 0} x^2\frac{du}{dx} = 0, \quad u(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{4.92}$$

з відомим точним розв'язком $u(x) = (1 + x^2/3)^{-1/2}$.

Для чисельного розв'язування задачі використаємо TPC 4-го порядку точності на рівномірній сітці $\bar{\omega}_h = \left\{x_j = jh, j = \overline{0,N}, h = 1/N\right\}$, *вигляду*

$$\begin{aligned} &y^{(4)}_{x,0} = -\varphi^{(4)}(x_0, y^{(4)}), \quad y^{(4)}_{x,1}/(hx_1^2) = -\varphi^{(4)}(x_1, y^{(4)}), \\ &\frac{1}{x_j^2} y^{(4)}_{\bar{x}x,j} = -\varphi^{(4)}(x_j, y^{(4)}), \quad j = 2,3,\ldots,N-1, \quad y^{(4)}_N = \mu_2, \end{aligned} \tag{4.93}$$

$$\varphi^{(4)}(x_0,u) = \frac{1}{h}\left(Y_2^{(4)0}(x_0,u) - u_1\right),$$

$$\varphi^{(4)}(x_1,u) = \frac{1}{h}\left[Z_2^{(4)1}(x_1,u) - Z_1^{(4)1}(x_1,u) + \frac{x_2}{x_1}\frac{Y_2^{(4)1}(x_1,u) - u_2}{h}\right],$$

$$\varphi^{(4)}(x_j,u) = \frac{1}{h}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha\left[Z_\alpha^{(4)j}(x_j,u) + (-1)^\alpha \frac{x_{j+(-1)^\alpha}}{x_j}\frac{Y_\alpha^{(4)j}(x_j,u) - u_{j+(-1)^\alpha}}{h}\right].$$

де $Y_\alpha^{(4)j}(x_j,u), Z_\alpha^{(4)j}(x_j,u)$*—чисельний розв'язок допоміжних задач Коші (4.42)—(4.44).*

Зауважимо, що задача Коші (4.43) є сингулярною, а тому для її чисельного розв'язування будемо використовувати, наприклад, метод рядів Тейлора четвертого порядку точності вигляду

$$Y_1^{(4)1}(x_1,u) = u_0 - \frac{h^2}{6}f(0,u_0) - \frac{h^3}{12}\frac{df(0,u_0)}{dx} - \frac{h^4}{40}\frac{d^2f(0,u_0)}{dx^2},$$

$$Z_1^{(4)1}(x_1,u) = -\frac{h}{3}f(0,u_0) - \frac{h^2}{4}\frac{df(0,u_0)}{dx} - \frac{h^3}{10}\frac{d^2f(0,u_0)}{dx^2} - \frac{h^4}{36}\frac{d^3f(0,u_0)}{dx^3},$$

де $f(x,u) = u^5$.

Для знаходження розв'язку різницевої схеми (4.93) будемо використовувати модифікований ітераційний метод Ньютона (4.90),(4.91), а для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею — метод прогонки. Результати розв'язування задачі (4.92) наведено в таблиці 4.1. Тут

$$E_1 = \left\| y^{(4)} - u \right\|^*_{1,\infty,\bar{\omega}_h}, \quad p = \log_2 \frac{\left\| y^{(4)} - u \right\|^*_{1,\infty,\bar{\omega}_h}}{\left\| y^{(4)} - u \right\|^*_{1,\infty,\bar{\omega}_{h/2}}}.$$

Отже, ця різницева схема має четвертий порядок точності.

Табл. 4.1. Результати чисельного розв'язування задачі (4.92)

N	E_1	p
10	$0.3955 \cdot 10^{-5}$	
20	$0.1477 \cdot 10^{-6}$	4.7
40	$0.9432 \cdot 10^{-8}$	4.0
80	$0.5915 \cdot 10^{-9}$	4.0
160	$0.3699 \cdot 10^{-10}$	4.0

Чисельні результати розв'язування задачі (4.92) отримані різними чисельними методами наведено в таблиці 4.2, де $E_2 = \|y - u\|_{0,\infty,\omega_h^-} = \max\limits_{0 \le j \le N-1} |y_j - u_j|$, y_j*—чисельний розв'язок і* $\bar{\omega}_h = \left\{ x_j = jh, j = \overline{0,8}, h = 1/8 \right\}$.

Табл. 4.2. Порівняння чисельних методів

Чисельні методи	E_2
різницева схема [146]	$0.18 \cdot 10^{-3}$
метод колокації [146]	$0.60 \cdot 10^{-4}$
різницева схема (4.93)	$0.57 \cdot 10^{-5}$

Зауважимо, що чисельний розв'язок отриманий за допомогою різницевої схеми (4.23),(4.24),(4.46) є точніший. Крім того запропонований тут підхід дозволяє апроксимувати не лише розв'язок, але і потік $x^2 k(x) du/dx$ *в точках сітки з одним і тим самим порядком точності.*

Приклад 4.2 *Розглянемо крайову задачу*

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2\frac{du}{dx}\right] = -4(2\exp(u) + \exp(u/2)), \quad x \in (0,1),$$
$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{du}{dx} = 0, \quad u(1) = -2\ln 2, \tag{4.94}$$

із заданим точним розв'язком $u(x) = -2\ln(1+x^2)$. *Задачу будемо розв'язувати чисельно на рівномірній сітці* $\overline{\omega}_h = \{x_j = jh,\ j = 0, 1, \ldots, N,\ h = 1/N\}$ *за допомогою схеми (4.93). Результати розрахунків наведені в таблиці 4.3.*

Табл. 4.3. Результати чисельного розв'язування задачі (4.94)

N	E_1	p
20	0.1381E-04	
40	0.9075E-06	3.9
80	0.5718E-07	4
160	0.3578E-08	4
320	0.2237E-09	4

4.5 Висновки до розділу 4

За умов існування та єдиності розв'язку крайової задачі для нелінійних стаціонарних рівнянь в сферичній системі координат доведено існування ТТРС, існування та єдиність її розв'язку, а також збіжність методу послідовних наближень. Розроблена ефективна алгоритмічна реалізація ТТРС через усічені ТРС рангу $\bar{m}$, які для своєї побудови вимагають для кожного вузла сітки розв'язування двох лінійних та двох нелінійних задач Коші на відрізках $[x_{j-1}, x_j]$ (вперед) і $[x_j, x_{j+1}]$ (назад) та сингулярної задачі Коші на інтервалі $[0, x_1]$, що здійснюється за один крок за допомогою будь-якого однокрокового методу - розкладу в ряд Тейлора або Рунге-Кутта. Доведено існування та єдиність розв'язку ТРС рангу $\bar{m}$, а також показано, що вона має порядок точності $\bar{m}$. Для знаходження розв'язку ТРС нелінійної різницевої схеми використовувався метод послідовних наближень або Ньютона. Проведено чисельні експерименти, а також порівняння з іншими чисельними методами, які підтверджують ефективність запропонованих різницевих схем.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі побудовано та обгрунтовано точні триточкові різницеві схеми та триточкові різницеві схеми високого порядку точності для розв'язування крайових задач для нелінійних стаціонарних рівнянь в циліндричній та сферичній системах координат.

Основні результати:

1. Побудовано методи рядів Тейлора та типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності для чисельного розв'язування сингулярних задач Коші для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь.

2. Побудовано точні триточкові різницеві схеми розв'язування крайових задач для нелінійних стаціонарних рівнянь у циліндричній та сферичній системах координат. Встановлено достатні умови існування та єдиності розв'язку цих схем, доведено збіжність методу послідовних наближень для його знаходження.

3. Розроблено ефективну алгоритмічну реалізацію точних триточкових різницевих схем через усічені триточкові різницеві схеми довільного порядку точності.

4. Досліджено існування та єдиність розв'язку усічених триточкових різницевих схем.

5. Доведено збіжність та отримано оцінку похибки усічених триточкових різницевих схем.

6. Доведено збіжність та отримано оцінку похибки ітераційного методу послідовних наближень розв'язування різницевих схем.

7. Перевірено різницеві схеми на тестових прикладах та підтверджено теоретичні висновки шляхом проведення чисельних експериментів. Наведено результати порівняння розроблених різницевих схем з іншими методами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. – М.: Наука, 1986. – 744 с.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
3. Беллман Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Р. Беллман, Р. Калаба. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
4. Гаврилюк І. П. Методи обчислень: Підручник. У 2 ч. / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К.: Вища школа, 1995. – Ч. 1. – 367 с.; Ч. 2. – 431 с.
5. Гнатів Л.Б. Узагальнені триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку /Л.Б. Гнатів , М.В. Кутнів, А.І. Чухрай // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 59 – 69.
6. Гнатив Л.Б. Обобщенные трехточечные разностные схемы высокого порядка точности для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка /Л.Б. Гнатив, М.В. Кутнив, В.Л. Макаров // Дифференц. уравн. – 2009. – Т. 45, № 7. – С. 980 – 1000.
7. Годунов С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
8. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие / В. В. Иванов. – Киев: Наук. Думка, 1986. – 584 с.
9. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
10. Каханер Д. Численные методы и програмное обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. – М.: Мир, 2001. – 575 с.
11. Колев Л. В. О численном решении нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. В. Колев // Журн. вычисл.

матем. и матем. физ. – 1986. – Т. 26, № 12. – С. 1890–1895.

12. Кунинець А. В. Методи Рунге-Кутта для нелінійних сингулярних задач Коші / А. В. Кунинець // Тези доповідей дванадцятої відкритої наукової конференції Інституту прикладної математики та фундаментальних наук. – Львів, 2016. – С. 75 – 77.
13. Кунинець А. Методи Рунге-Кутта четвертого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з сингулярністю першого роду / А. Кунинець, М. Кутнів // Вісник Львівського університету. Серія прикл. матем. інформ. – 2015. – Вип. 23. – С. 28–36.
14. Кунинець А. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності для сингулярних задач Коші / А. Кунинець // Матеріали конференції молодих учених «Підстригачівські читання – 2015». – Львів, 2015. – Available online at: http://iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Kunynets.pdf
15. Кунинець А. В. Триточкова різницева схема високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку в циліндричних координатах / А. В. Кунинець, М. В. Кутнів // Вісник національного університету "Львівська політехніка"(Фіз.-мат. науки). – 2013.– Вип. 768. – С. 85–99.
16. Кунинець А. В. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних диференціальних рівнянь в сферичній системі координат / А. В. Кунинець, М. В. Кутнів // Вісник національного університету "Львівська політехніка"(Фіз.-мат. науки). – 2014. – Вип. 804. – С. 141–165.
17. Кунинець А. В. Точна триточкова різницева схема для нелінійного стаціонарного рівняння у циліндричній системі координат / А. В. Кунинець, М. В. Кутнів // Тези доповідей дев'ятої відкритої наукової конференції професорсько-викладацького складу Інституту прикладної математики та фундаментальних наук. – Львів, 2010. – С. 47.
18. Кунинець А. Точна триточкова різницева схема для нелінійного стаціонарного рівняння в циліндричній системі координат / А. Кунинець, М. Кутнів // Матеріали міжнародної математичної конференції ім. В. Я. Скоробога-

тька. – Дрогобич, 2011. – С. 111.
19. Кунинець А. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь в циліндричних координатах / А. Кунинець, М. Кутнів // Матеріали міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми механіки та математики". – Львів, 2013. – С. 29–32.
20. Кунинець А. В. Точна триточкова різницева схема для нелінійного стаціонарного рівняння в сферичній системі координат / А. В. Кунинець, М. В. Кутнів // Матеріали міжнародної математичної конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки". – Київ, 2014. – С. 78.
21. Кунинець А. В. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь у сферичній системі координат / А. В. Кунинець // Матеріали XV міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. Т.1 Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – Київ, 2014. – С. 178–180.
22. Кунинець А. В. Чисельне дослідження стаціонарних процесів теплопровідності або дифузії в циліндричній системі координат / А. В. Кунинець // Тези доповідей VI міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації". – Кам'янець-Подільський, 2014. – С. 93–94.
23. Кутнив М. В. Точные трехточечные разностные схемы для монотонных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и их реализация./ М. В. Кутнив // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40, № 6. – С. 387 – 401.
24. Кутнив М. В. Трехточечные разностные схемы высокого порядка точности для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. / М. В. Кутнив // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41, № 6. – С. 909–921.
25. Кутнив М. В. Трехточечные разностные схемы высокого порядка точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

с монотонным оператором / М. В. Кутнив // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42, № 5. – С. 754–768.

26. Кутнив М. В. Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация / М. В. Кутнив, В. Л. Макаров, А. А. Самарский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39, № 1. – С. 45–60.
27. Кутнів М. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку на півосі / М. Кутнів, О. Паздрій // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2011. – Вип. 17. – С. 10 – 21.
28. Куфнер А. Нелинейные дифференциальные уравнения / А. Куфнер, С. Фучик. – М.:Наука, 1988. – 304 с.
29. Макаров В. Л. О реализации точных трехточечных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с кусочно-гладкими коэффициентами / В. Л. Макаров, А. А. Самарский // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 312, № 3. – С. 538-543.
30. Макаров В. Л. Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых / В. Л. Макаров, А. А. Самарский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1980. – Т. 20, № 2. – С. 371–387.
31. Макаров В. Л. Разностные схемы любого порядка точности для дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси / В. Л. Макаров, С. Г. Гочева // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 3. – С. 527–540.
32. Макаров В. Л. Точные разностные схемы и схемы любого порядка точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / В. Л. Макаров, И. Л. Макаров, В. Г. Приказчиков // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, № 7. – С. 1194–1205.
33. Макаров В. Л. Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация / В. Л. Макаров, А. А. Самарский // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 312, № 4. – С. 795–800.

34. Макаров В. Л. Трехточечная разностная схема высокого порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (несамосопряженный случай) / В. Л. Макаров, В. В. Гуминский // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30, № 3. – С.493–502.
35. Марчук Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
36. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
37. Монастырный П. И. О сходимости метода интервальной пристрелки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1978. – Т. 18, № 5. – С. 1139–1145.
38. Монастырный П. И. Численное решение граничных задач с иррегулярной особой точкой методом замены их регулярными задачами Коши и стационарными асимптотическими граничными задачами. I / П. И. Монастырный, П. Г. Фридлянд // Весці Акадэміі навук БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1984. – № 5. – С. 17–22.
39. Монастырный П. И. Численное решение граничних задач с иррегулярной особой точкой методом замены их регулярными задачами Коши и стационарными асимптотическими граничными задачами. II / П. И. Монастырный, П. Г. Фридлянд // Весці Акадэміі навук БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1985. – № 2. – С. 37–44.
40. Мэтьюз Дж. Г. Численные методы. Использование Mathlab / Дж. Г. Мэтьюз, К. Д. Финк. – М.: Диалектика, 2001. – 720 с.
41. Ортега Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
42. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 688 с.
43. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач / Р. Д. Рихтмайер. – М.: ИЛ, 1960. – 315 с.
44. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский.

– М.: Наука, 1971. – 552 с.
45. Самарский А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
46. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
47. Самарский А. А. О реализации точных трехточечных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами / А. А. Самарский, В. Л. Макаров // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 7. – С. 1254–1265.
48. Самарский А. А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями / А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров. – М.: Наука, 1987. – 296 с.
49. Самарский А. А. Разностные схемы с операторными множителями / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П.П. Матус. – Минск, 1998. – 442 с.
50. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
51. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
52. Тихонов А. Н. Об однородных разностных схемах / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – Т. 1, № 1. – С. 5–63.
53. Тихонов А. Н. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – Т. 1, № 3. – С. 425–440.
54. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М.:Наука, 1980. – 496 с.
55. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. – М.:Мир, 1990. – 512 с.
56. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
57. Холла Дж. Современные численные методы решения обыкновенных диф-

ференциальных уравнений / Дж. Холла, Дж. Уатта. – М.: Мир, 1979. – 312 с.

58. Agarwal R. P. An Introduction to Ordinary Differential Equations / R. P. Agarwal, D. O'Regan. – New York: Springer, 2008. – 326 p.
59. Agarwal R. P. Fixed Point Theory and Applications / R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan. – Cambridge: Cambridge University Press, 2001. – 170 p.
60. Agarwal R. P. Ordinary and partial differential equations: with special functions, fourier series and boundary value problems / R. P. Agarwal, D. O'Regan. – New York: Springer, 2009. – 410 p.
61. Al-Khaled K. Theory and computation in singular boundary value problems / K. Al-Khaled // Chaos, Solitons & Fractals. – 2007. – Vol. 33, no. 2. – P. 678–684.
62. Allgower E. L. A mesh independence principle for operator equations and their discretizations / E. L. Allgower, K. Böhmer, F. Potra, W. C. Rheinboldt // SIAM Journal Numerical Analysis. – 1986. – Vol. 23, no. 1. – P. 160–169.
63. Aslanov A. A singular initial-value problem for second-order differential equations / A. Aslanov // Abstract and Applied Analysis. – 2014. – Vol. 2014. – P. 1–6.
64. Archer D. A family of modified methods for second order two-point boundary value problems / D. Archer, J. C. Diaz // SIAM Journal Numerical Analysis. – 1978. – Vol. 15, no. 2. – P. 242–254.
65. Ascher U. M. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations / U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij, R. D. Russell. – Philadelphia: SIAM, 1995. – 585 p.
66. Ascher U. On some difference schemes for singular singularly-perturbed boundary value problems / U. Ascher // Numerische Mathematik. – 1985. – Vol. 46, no. 1. – P. 1–30.
67. Ascher U. Collocation for two-point boundary value problems revisited / U. Ascher // SIAM Journal Numerical Analysis. – 1986. – Vol. 23, no. 3. –

P. 596–609.
68. Auzinger W. A collocation code for singular boundary value problems in ordinary differential equations / W. Auzinger, G. Kneisl, O. Koch, E. Weinmüller // Numerical Algorithms. - 2003. - Vol. 33, no. 1. - P. 27-39.
69. Auzinger W. Analysis of a new error estimate for collocation methods applied to singular boundary value problems / W. Auzinger, O. Koch, E. Weinmüller // SIAM J. Numer. Anal. – 2005. – Vol. 42, no. 6. – P. 2366-2386.
70. Auzinger W. Modified defect correction algorithms for ODEs. Part I: General Theory / W. Auzinger, H. Hofstätter, W. Kreuzer, E. Weinmüller // Numer. Algorithms. – 2004. – Vol. 36, no. 2. – P. 135-155.
71. Auzinger W. New a posteriori error estimates for singular boundary value problems / W. Auzinger, O. Koch, D. Praetorius, E. Weinmüller // Numer. Algorithms. – 2005. – Vol. 40, no. 1. – P. 79-100.
72. Aziz A. K. Numerical solutions of boundary value problems for ordinary differential equations / A. K. Aziz. – New York: Academic Press, 1975. – 369 p.
73. Bader G. A new basis implementation for a mixed order boundary value ODE solver / G. Bader, U. Ascher // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. – 1987. – Vol. 8, no. 4. – P. 483–500.
74. Bardalexe E. Eigenvalue equation for a general periodic potential and its multipole expansion solution / E. Badralexe, A. Freeman // Phys. Rev. B – 1988. – Vol. 37, no. 3. – P. 1067–1084.
75. Bauer L. Axisymmetric buckling of hollow spheres and hemispheres / L. Bauer, E. Reiss, H. Keller // Comm. Pure Appl. Math. – 1970. – Vol. 23, no. 4. – P. 529–568.
76. Boor C. Stability of finite difference schemes for two-point boundary value problems / C. Boor, F. Hoog // SIAM Journal Numerical Analysis. – 1986. – Vol. 23, no. 5. – P. 925–935.
77. Brown D. A high order method for stiff BVPs with turning points / D. Brown, J. Lorentz // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. – 1987. – Vol. 8, no. 5. – P. 798–805.

78. Burden R. C. Numerical Analysis / R. C. Burden, J. D. Faires. – Boston: Prindle, Weber, and Schmidt, 1985. – 676 p.
79. Butcher J. C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations / J. C. Butcher – Chichester: J.Wiley, 2003. – 440 p.
80. Carr T. Understanding the bifurcation to traveling waves in a class-B laser using a degenerate Ginzburg-Landau equation / T. Carr, T. Erneux // Phys. Rev. A – 1994. – Vol. 50, no. 5. – P. 4219–4227.
81. Cash J. R. A highly stable deferred correction scheme with interpolant for systems of nonlinear two point boundary value problems / J. R. Cash, D. R. Moore, N. Sumarti, M. Van Daele // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2003. – Vol. 155, no. 2. – P. 339–382.
82. Cash J. R. A survey of some global methods for solving two-point BVPs / J. R. Cash // Appl. Num. Anal. Comp. Math. – 2004. – Vol. 1, no. 1. – P. 7–17.
83. Cash J. Numerical solution of singular two point BVPs / J. Cash, G. Kitzhofer, O. Koch, G. Moore, E. Weinmüller // JNAIAM J. Numer. Anal. Indust. and Appl. Math. – 2009. – Vol. 4, no. 1–2. – P. 129–149.
84. Cash J. R. On the numerical integration of nonlinear two point boundary value problems using iterated deferred corrections, Part I / J. R. Cash // Computers & Mathematics with Applications. – 1986. – Vol. 11, no. 10. – P. 1029–1048.
85. Cash J. R. On the numerical integration of nonlinear two point boundary value problems using iterated deferred corrections, Part II / J. R. Cash // SIAM Journal Numerical Analysis. – 1988. – Vol. 25, no. 4. – P. 862–882.
86. Chan C. A constructive solution for a generalized Thomas-Fermi theory of ionized atoms / C. Chan, Y. Hon // Quart. Appl. Math. – 1987. – Vol. 45, no. 3. – P. 591–599.
87. Chawla M. M. A sixth order tri-diagonal finite difference method for general non-linear two point boundary value problems / M. M. Chawla // J. Inst. Math. Appl. – 1979. – Vol. 24, no. 1. – P. 35–42.
88. Christiansen J. Deferred corrections using uncentered end formulas / J. Christiansen, R. D. Russell // Numerische Mathematik. – 1980. – Vol. 35, no. 1. –

P. 21–33.
89. Cui M. Solving singular two-point boundary value problem in reproducing kernel space / M. Cui, F. Geng // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2007. – Vol. 205, no. 1. – P. 6–15.
90. Daniel J. W. Numerov's method with deferred corrections for two-point boundary value problems / J. W. Daniel, A. J. Martin // SIAM Journal Numerical Analysis. – 1977. – Vol. 10, no. 6. – P. 1033–1050.
91. Demir H. Numerical solution of a class of nonlinear Emden-Fowler equations by using differential transform method / H. Demir, I. Ç. Süngü // Journal of Arts and Sciences. – 2009. – Vol. 12, no. 2. – P. 75–81.
92. Deuflhard P. A stepsize control for continuation methods and its special application to multiple shooting techniques / P. Deuflhard // Numerische Mathematik. – 1979. – Vol. 33, no. 2. – P. 115–146.
93. Deuflhard P. Multiple shooting techniques revisited / P. Deuflhard, G. Bader // Numerical treatment of inverse problems in differential and integral equations, – Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1983. – P. 74–94.
94. Diaz J. C. A collocation-Galerkin method for two-point boundary value problems using continuous piece-wise polynomial spaces / J. C. Diaz // SIAM Journal Numerical Analysis. – 1977. – Vol. 14, no. 5. – P. 844–858.
95. Doedel E. J. Finite difference methods for nonlinear two-point boundary value problems / E. J. Doedel // SIAM Journal Numerical Analysis. – 1979. – Vol. 16, no. 2. – P. 173–185.
96. Dormand J. R. Families of Runge-Kutta-Nystrom formulae / J. R. Dormand, E. A. El-Mikkawy, P. J. Prince // IMA Journal of Numerical Analysis. – 1987. – Vol. 7, no. 3. – P. 235–250.
97. Drmota M. On the imperfection sensitivity of complete spherical shells / M. Drmota, R. Scheidl, H. Troger, E. Weinmüller // Comp. Mech. – 1987. – Vol. 2, no. 1. – P. 63–74.
98. Duggan R.C. Pointwise bounds for a nonlinear heat conduction model of the human head / R. C. Duggan, A. M. Goodman // Bulletin of Mathematical

Biology. – 1986. – Vol. 48, no. 2. – P. 229–236.

99. Ebaid A. A new analytical and numerical treatment for singular two-point boundary value problems via the Adomian decomposition method / A. Ebaid // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 235, no. 8. – P. 1914–1924.
100. El-Kalla I. L. A new technique for solving a class of nonlinear boundary value problems / I. L. El-Kalla // Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2014. – Vol. 2, no. 2. – P. 1–11.
101. Enright W. E. Runge-Kutta software with defect control for boundary value ODEs / W. E. Enright, P. Muir // SIAM Journal on Scientific Computing. – 1996. – Vol. 17, no. 2. – P. 479–497.
102. Frommlet F. Asymptotic error expansions for singular boundary value problems / F. Frommlet, E. Weinmüller // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2001. – Vol. 11, no. 1. – P. 71–85.
103. Gartland E. C. Jr. Compact high-order finite differences for interface problems in one dimension / E. C. Gartland Jr. // IMA Journal of Numerical Analysis. – 1989. – Vol. 9, no. 2. – P. 243–260.
104. Gartland E. C. Jr. Strong stability of compact discrete boundary value problems via exact discretizations / E. C. Gartland Jr. // SIAM Journal Numerical Analysis. – 1988. – Vol. 25, no. 1. – P. 111–123.
105. Gavrilyuk I. P. Difference schemes for nonlinear BVPs on the semiaxis / I. P. Gavrilyuk, M. Hermann, M. V. Kutniv, V. L. Makarov // Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM). – 2007. – Vol. 7, no. 1. – P. 25–47.
106. Gavrilyuk I. P. Difference schemes for nonlinear BVPs using Runge-Kutta IVP-solvers / I. P. Gavrilyuk, M. Hermann, M. V. Kutniv, V. L. Makarov // Advances in Difference Equations. – 2006. – Vol. 2006. – P. 1–29.
107. Gavrilyuk I. P. Adaptive algorithms based on exact difference schemes for nonlinear BVPs on the half-axis / I. P. Gavrilyuk, M. Hermann, M. V. Kutniv, V. L. Makarov // Applied Numerical Mathematics. – 2009. – Vol. 59, no. 7. - P.

1529 - 1536.
108. Gavrilyuk I. P. Two-point difference schemes of an arbitrary given order of accuracy for nonlinear bvps / I. P. Gavrilyuk, M. Hermann, M. V. Kutniv, V.L. Makarov // Applied Mathematics Letters. – 2010. – Vol. 23, no 5. – P. 585–590.
109. Gavrilyuk I. P. Exact and Truncated Difference Schemes for Boundary Value ODEs. (International Seris of Numerical Mathematics, Vol. 159) / I. P. Gavrilyuk, M. Hermann, V. L. Makarov, M. V. Kutniv. – Springer Basel AG, 2011. – 247 p.
110. Gnativ L.B. Exact three-point difference schemes for second order nonlinear differential equations with boundary conditions of the third kind /L. B. Gnativ, M. Król, and M. V. Kutniv // Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія "Обчислювальна математика". – 2012. – Вип. 3(109). – С. 34–52.
111. Goh J. A quartic B-spline for second-order singular boundary value problems / J. Goh, A. Abd. Majid, A. I. Md. Ismail // Computers and Mathematics with Applications. – 2012. – Vol. 64, no. 2. – P. 115–120.
112. Gnativ L. B. Exact three-point difference schemes for second order nonlinear differential equations with boundary conditions of the third kind / L. B. Gnativ, M. Król, M. V. Kutniv // Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія "Обчислювальна математика". – 2012. – Вип. 3(109). – С. 34–52.
113. Gupta V. G. Solving singular initial value problems of Emden-Fowler and Lane-Emden type / V. G. Gupta, P. Sharma // International Journal of Applied Mathematics and Computation. – 2009. – Vol. 1, no. 4. – P. 206–212.
114. Gupta Y. A computer based numerical method for singular boundary value problems / Y. Gupta, M. Kumar // International Journal of Computer Applications. – 2011. – Vol. 30, no. 1. – P. 21–25.
115. Hamad A. A numerical method for singular boundary-value problems / A. Hamad, M. Tadi, M. Radenkovic // Journal of Applied Mathematics and Physics. – 2014 . – Vol. 2, no. 9. – P. 882–887.
116. Hasan M. K. A new implicit method for numerical solution of singular initial

value problems / M. K. Hasan, M. A. Huq, M S. Rahman, M. M. Rahman, M. S. Alam // International Journal of Conceptions on Computing and Information Technology. – 2014. – Vol. 2, no. 1. – P. 87–91.
117. Hasan Y. Q. Modified Adomian decomposition method for singular initial value problems in the second-order ordinary differential equations / Y. Q. Hasan, L. M. Zhu // Surveys in Mathematics and its Applications. – 2008. – Vol. 3. – P. 183–193.
118. Hoog F. Collocation methods for singular boundary value problems / F. de Hoog, R. Weiss // SIAM J. Numer. Anal. – 1978. – Vol. 15, no. 1. – P. 198–217.
119. Hoog F. Difference methods for boundary value problems with a singularity of the first kind / F. de Hoog, R. Weiss // SIAM J. Numer. Anal. – 1976. – Vol. 13, no. 5. – P. 775–813.
120. Hoog F. The application of linear multistep methods to singular initial value problems / F. de Hoog, R. Weiss // Math. Comp. – 1977. – Vol. 31, no. 139. – P. 676–690.
121. Hoog F. The application of Runge-Kutta schemes to singular initial value problems / F. de Hoog, R. Weiss // Math. Comp. – 1985. – Vol. 44, no. 169. – P. 93–103.
122. Jafari M. Solutions of singular boundary value problems of Emden-Fowler type by the variational iteration method / M. Jafari, M. M. Hosseini, S. T. Mohyud-Din // World Applied Sciences Journal. – 2010. – Vol. 10, no. 2. – P. 154–160.
123. Khalique C. M. Lagrangian formulation of a generalized Lane-Emden equation and double reduction / C. M. Khalique, F. Z. Mahomed, B. Muatjetjeja // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2008. – Vol. 15, no. 2. – P. 152–161.
124. Koch O. Iterated Defect Correction for the solution of singular initial value problems / O. Koch, E. Weinmüller // SIAM, J. Numer. Anal. – 2001. – Vol. 38, no. 6. – P. 1784–1799.
125. Koch O. The implicit Euler method for the numerical solution of singular initial

value problems / O. Koch, P. Kofler, E. Weinmüller // Appl. Num. Math. – 2000. – Vol. 34, no. 2-3. – P. 231–252.
126. Król M. Exact three-point difference scheme for singular nonlinear boundary value problems / M. Król, A. V. Kunynets, M. V. Kutniv // J. Comput. Appl. Math.– 2016. – Vol. 298, no. 1. – P. 175–189.
127. Król M. Three-point difference schemes of high-order accuracy for second-order nonlinear ordinary differential equations with boundary conditions of third kind / M. Król, M. V. Kutniv // Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія "Обчислювальна математика". – 2014. – Вип. 2(116). – С. 43–62.
128. Kumar M. A collection of computational techniques for solving singular boundary-value problems / M. Kumar, N. Singh // Advances in Engineering Software. – 2009. – Vol. 40, no. 4. – P. 288–297.
129. Kumar M. A three-point finite difference method for a class of singular two-point boundary value problems / M. Kumar // J. Comput. Appl. Math.– 2002. – Vol. 145, no. 1. – P. 89–97.
130. Kunynets A. V. Exact three-point difference scheme for nonlinear stationary differential equations in cylindrical coordinates / A. V. Kunynets, M. V. Kutniv // Журнал обчислювальної та прикладної математики. Серія "Обчислювальна математика". – 2011. Вип. 2(105). – С. 51–68.
131. Kutniv M. V. Compact difference schemes of high-order accuracy / M. V. Kutniv, V. L. Makarov // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 183, no.1. – P. 29–42.
132. Kutniv M. V. Exact three-point difference schemes for nonlinear boundary value-problem on the semiaxis / M.V. Kutniv, O.I. Pazdrii // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 181, no.3. – P. 383–400.
133. Kutniv M. V. Modified three-point difference schemes of high-accuracy order for second order nonlinear ordinary differential equations / M. V. Kutniv // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2003. – Vol. 3, no. 2. – P. 287–312.
134. Mach P. All solutions of the n = 5 Lane–Emden equation / P. Mach // Journal

of Mathematical Physics. – 2012. – Vol. 53, no. 6. – P. 1–9.

135. Makarov V. L. A two-point difference scheme of arbitrary given accuracy order for BVPs for systems of first order nonlinear ODEs / V. L. Makarov, I. P. Gavrilyuk, M. V. Kutniv, M. Hermann // Comput. Methods Appl. Math.– 2004. – Vol. 4, no. 4. – P. 464–493.
136. Meissner H. Cylindrically symmetric solutions of the Ginsburg-Landau equation / H. Meissner, P. Tholfsen // Phys. Rev. – 1968. – Vol. 169. – P. 413–416.
137. Moore G. Computation and parametrization of periodic and connecting orbits // IMA J. Numer. Anal. – 1995. – Vol. 15,no. 2. – P. 245-263.
138. Palamides A. P. Terminal value problem for singular ordinary differential equations: Theoretical analysis and numerical simulations of ground states / A. P. Palamides, T. G. Yannopoulos // Boundary Value Problems. – 2006. – Vol. 2006. – P. 1–28.
139. Pandey R. K. On a class of regular singular two point boundary value problems / R. K. Pandey // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1997. – Vol. 208, no. 2. – P. 388–403.
140. Parter S. On the multiplicity of solutions of a differential equation arising in chemical reactor theory / S. Parter, M. Stein, P. Stein // Studies in Appl. Math. – 1975. – Vol. 54, no. 4. – P. 293–314.
141. Pirkhedri A. An approximation algorithm for the solution of astrophysics equations using rational scaled generalized Laguerre function collocation method based on transformed Hermite-Gauss nodes / A. Pirkhedri, P. Daneshjoo, H. H. S. Javadi, H. Navidi, S. Khodamoradi, K. Ghaderi // International Journal of Astronomy and Astrophysics. – 2011. – Vol. 1, no. 2. – P. 67–72.
142. Qu R. A collocation method for solving a class of singular nonlinear two-point boundary value problems / R. Qu, R. P. Agarwal // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1997. – Vol. 83, no. 2. – P. 147–163.
143. Ravi Kanth A. S. V. He's variational iteration method for treating nonlinear singular boundary value problems / A. S. V. Ravi Kanth, K. Aruna // Computers

and Mathematics with Applications.– 2010. – Vol. 60, no. 3. – P. 821–829.

144. Ravi Kanth A. S. V. Solution of singular two-point boundary value problems using differential transformation method / A. S. V. Ravi Kanth, K. Aruna // Physics Letters A.– 2008. – Vol. 372, no. 26. – P. 4671–4673.
145. Rentrop P. Numerical solution of the singular Ginsburg-Landau equations by multiple shooting /P. Rentrop // Computing. – 1976. – Vol. 16. – P. 61–67.
146. Russell R. D. Numerical methods for singular boundary value problems /R. D. Russell, L. F. Shampine // SIAM J. Numer. Anal. – 1975. – Vol. 12, no. 1. – P. 13–36.
147. Sami Bataineh A. Approximate solutions of singular two-point BVPs by modified homotopy analysis method / A. Sami Bataineh, M. S. M. Noorani, I. Hashim // Physics Letters A. – 2008. – Vol. 372, no. 22. – P. 4062–4066.
148. Sami Bataineh A. Novel method for solving singular two-point BVPs / A. Sami Bataineh // Journal of Physics: Conference Series. – 2013 .– Vol. 435. – 7 p. Available online at: http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/435/1/012044/meta
149. Van Daele M. Superconvergent deferred correction methods for first order systems of nonlinear two-point boundary value problems / M. van Daele, J. R. Cash // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2000. – Vol. 22, no. 5. – P. 1697–1716.
150. Weinmüller E. On the boundary value problem for systems of ordinary second order differential equations with a singularity of the first kind / E. Weinmüller // SIAM J. Math. Anal. – 1984. – Vol. 15, no. 2. – P. 287–307.
151. Weinmüller E. Collocation for singular boundary value problems of second order / E. Weinmüller // SIAM J. Numer. Anal. – 1986. – Vol. 23, no. 5. – P. 1062–1095.
152. Yousefi S. A. Legendre scaling function for solving generalized Emden-Fowler equation / S. A. Yousefi // International Journal for Information & Systems Sciences. – 2007. – Vol. 3, no. 2. – P. 243–250.
153. Yusufoğlu E. Numerical simulation of emden-fowler type equations using vari-

ational iteration algorithm / E. Yusufoğlu // Journal of Physical Sciences. – 2009. – Vol. 64, no. 9–10. – P. 583–587.

154. Zadunaisky P.E. On the estimation of errors propagated in the numerical integration of ordinary differential equations / P.E. Zadunaisky // Numer. Math.– 1976.–V.27, no. — 21-39.