

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу Кунинця Андрія Володимировича "Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для стаціонарних рівнянь в циліндричній та сферичній системах координат", поданої на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика

Крайові задачі для нелінійних стаціонарних рівнянь дифузії або теплопровідності в циліндричній та сферичній системах координат у випадку відповідно осьової або центральної симетрії зводяться до крайових задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з сингулярністю першого роду. Оскільки такі задачі є нелінійними, то для їх розв'язування застосовують чисельні методи, зокрема, скінченних різниць.

Серед різницевих схем розв'язування крайових (несингулярних) задач для звичайних диференціальних рівнянь слід виділити компактні різницеві схеми, які у випадку диференціальних рівнянь m -го порядку є $m+1$ точковими.

Вперше підхід до побудови точних (компактних) різницевих схем та різницевих схем високого порядку для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з крайовими умовами першого роду був запропонований О. А. Самарським та В. Л. Макаровим та був розвинений та узагальнений у працях їхніх учнів, зокрема, І.П. Гаврилюка, М.В. Кутніва, О. І. Паздрій та інших.

Однак застосовувати класичні різницеві схеми, зокрема, точні різницеві схеми у випадку сингулярних задач не завжди можливо, а відомі у літературі спеціальні різницеві схеми розв'язування сингулярних крайових задач як правило мають низький порядок точності. Тому побудова та обґрунтування точних різницевих схем та різницевих схем високого порядку точності є однією з актуальних задач сучасної обчислювальної математики.

У рецензованій роботі побудовано та обґрунтовано точні триточкові різницеві схеми та триточкові різницеві схеми високого порядку точності розв'язування сингулярних крайових задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації становить 158 сторінок.

Перший розділ присвячено огляду стану проблеми за тематикою дисертації.

Зауважимо, що розроблені в третьому та четвертому розділах дисертації різницеві схеми вимагають розв'язування допоміжних задач Коші в тому числі і сингулярних, то **другий розділ** роботи присвячений побудові та обґрунтуванню однокрокових методів (рядів Тейлора та типу Рунге-Кутта) четвертого порядку точності чисельного розв'язування задачі Коші для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з

сингулярністю першого роду. Запропоновані тут методи Рунге-Кутта є явними і на відміну від відомого методу дефекту корекції, який ґрунтується на неявній схемі Ейлера, не вимагають додаткових ітераційних процедур. Результати чисельних експериментів підтверджують ефективність таких методів.

У *третьому розділі* для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку в циліндричній системі координат побудовано точні триточкові різницеві схеми на нерівномірній сітці. Використовуючи принцип стискаючих відображень, доведено існування та єдиність їх розв'язків а також збіжність методу послідовних наближень для їх знаходження. Розроблено ефективну алгоритмічну реалізація точних триточкових різницевих схем через усічені триточкові схеми рангу $\bar{m} = [(m + 1)/2]$ (m - ціле додатне, $[\cdot]$ - ціла частина виразу в дужках). За допомогою принципу стискаючих відображень, доведено існування та єдиність розв'язку усічених триточкових різницевих схем. Крім того, показано, що ці схеми мають один і той самий порядок точності як по відношенню до розв'язку так і потоку у вузлах сітки. Доведено також збіжність і отримана оцінка точності методу послідовних наближень розв'язування усічених триточкових різницевих схем. Проведено чисельні експерименти, які підтверджують ефективність таких схем.

У *четвертому розділі* для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку в сферичній системі координат побудовано точні та усічені триточкові різницеві схеми на нерівномірній сітці. За умов існування та єдиності розв'язку вихідної задачі доведено існування та єдиність розв'язку триточкових різницевих схем. Встановлено порядок точності усічених схем. Розроблені триточкові різницеві схеми апробовані на низці чисельних прикладів, проведено також порівняння з іншими чисельними методами. Отримані результати підтверджують теоретичні обґрунтування і показують високу ефективність цих схем для чисельного розв'язування сингулярних крайових задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків і рекомендацій

Загальний підхід до виконаного у роботі дослідження ґрунтується на сучасних досягненнях обчислювальної математики та функціонального аналізу. Усі наукові положення, висновки та рекомендації теоретично обґрунтовані з використанням методів функціонального аналізу, які вдалося застосувати також і до дослідження різницевих схем у сіткових просторах.

Достовірність результатів та їх новизна

У дисертаційній роботі розв'язано актуальну задачу побудови точних триточкових різницевих схем та триточкових різницевих схем високого порядку точності для розв'язування нелінійних сингулярних крайових задач. При цьому отримані такі основні наукові результати:

1. Побудовано методи рядів Тейлора та типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності для чисельного розв'язування сингулярних задач Коші для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь.

2. Побудовано точні триточкові різницеві схеми розв'язування крайових задач для нелінійних стаціонарних рівнянь у циліндричній та сферичній системах координат. Встановлено достатні умови існування та єдиності розв'язку цих схем, а також обґрунтовано збіжність методу послідовних наближень для його знаходження.

3. Досліджено існування та єдиність розв'язку усічених триточкових різницевих схем. Розроблено ефективну алгоритмічну реалізацію точних триточкових різницевих схем через усічені триточкові різницеві схеми довільного порядку точності. Запропоновані алгоритми досліджено та повністю обґрунтовано, дано оцінки точності та наведено умови збіжності різницевих схем, які застосовано до конкретних прикладів. Теоретичні оцінки точності використовуються для побудови апостеріорних способів оцінки точності та вибору точок сітки так, щоб отримати чисельний розв'язок з заданою точністю.

Отже, достовірність отриманих наукових результатів та положень дисертації не викликає сумніву і забезпечується математичною обґрунтованістю розроблених чисельних алгоритмів, а також тим, що всі теоретичні висновки підтверджено чисельними експериментами.

Практичне значення одержаних результатів

Розроблені в дисертації триточкові різницеві схеми можуть використовуватися як у подальших наукових дослідженнях у різних наукових установах та організаціях, так і при математичному моделюванні фізичних процесів і явищ у квантовій механіці, астрофізиці, хімії, тощо, які описуються сингулярними задачами для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Повнота викладу в опублікованих працях

Основні результати дисертації опубліковані в 5 статтях у фахових наукових виданнях України, крім того одна стаття опублікована у закордонному журналі, який входить до наукометричних баз Scopus та Web of Science, а також додатково висвітлено у 8 тезах доповідей та матеріалах наукових конференцій. Автореферат дисертації правильно та достатньо повно відображає основні положення роботи.

Зауваження

Позитивно оцінюючи здобутки дисертанта, вважаю за необхідне зазначити наступні зауваження до поданої дисертаційної роботи:

1. Наведені в дисертації твердження, які містять достатні умови існування та єдиності розв'язку крайових задач, в деяких випадках не є найсильнішими з відомих в літературі.

2. У розділах 3 і 4 розроблено триточкові різницеві схеми які стосуються лише звичайних диференціальних рівнянь, права частина яких не залежить від похідної. Проте, нічого не сказано, бодай з огляду на перспективу, чи можна побудувати такі схеми для більш загальних рівнянь?

3. Виявлено деякі описки та неточності тексту, на які автору вказано особисто.

Висновки

Вказані зауваження не знижують наукової та практичної цінності дисертаційної роботи, яка є завершеним цілеспрямованим науковим дослідженням, а побажання можуть бути реалізовані у подальшій науковій роботі.

Результати, представлені в дисертації, є новими, математично строго обґрунтовані й опубліковані з доведеннями у фахових журналах та доповідалися на багатьох наукових семінарах і міжнародних конференціях, а автореферат повно і вірно відображає зміст дисертації.

Робота виконана на належному науковому рівні, містить нові наукові положення та результати, які роблять суттєвий внесок у теорію різницевих схем.

За актуальністю теми, обсягом виконаних досліджень, новизною дисертаційна робота Куниця А.В. "Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для стаціонарних рівнянь в циліндричній та сферичній системах координат" за змістом є завершеною науковою працею, відповідає паспорту спеціальності 01.01.07 – обчислювальна математика та вимогам ДАК МОН України щодо кандидатських дисертацій, а її автор Куниць Андрій Володимирович заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика.

Офіційний опонент

д. фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
провідний науковий співробітник відділу
числових методів математичної фізики
Інституту прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

Подлевський Б.М.