Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу **Гіщак Тетяни Ігорівни**
"Межові властивості функцій з просторів типу Гарді", подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01–математичний аналіз

Актуальність теми дисертації

Дисертацію присвячено розв'язанню трьох типів задач в теорії вагових просторів Гарді у півплощині: задачі про описання локальних властивостей аналітичних функцій з вагового простору Гарді $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, які забезпечують ті чи інші тотальні властивості, задачі про повноту в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ системи аналітичних функцій $\{f(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\}$, породжених заданою функцією $f \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та задачі про розщеплення аналітичних функцій з простору Пелі–Вінера на суму двох функцій, кожна з яких належить відповідному простору Гарді в першій та четвертій чверті комплексної координатної площини.

Перелічені задачі – це одні з основоположних задач сучасної теорії вагових та класичних просторів Гарді в канонічних областях комплексної площини. Конкретніше, в дисертаційній роботі перша задача полягає у доведенні теореми єдиності для аналітичних функцій з простору Гарді $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, тобто у знаходженні умов на поведінку двох функцій з $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, за яких вони збігатимуться (співпадатимуть) в усій півплощині $\mathbb{C}_+$. Важко переоцінити значення теореми єдиності в усьому комплексному аналізі. Так навіть її класичний частинний випадок, за яким дві аналітичні в $\mathbb{C}_+$ функції, які збігаються (співпадають) на дійсній півосі $\mathbb{R}_+$, збігаються і у всій півплощині $\mathbb{C}_+$, має багато важливих застосувань. Зокрема, на цьому твердженні засновано низку методів в теорії наближення аналітичних функцій, а саме, оптимальних методів відновлення аналітичних функцій за інформацією про їх значення на заданій підмножині області аналітичності. В сучасній математичній літературі є велика кількість публікацій стосовно різноманітних теорем єдиності для аналітичних функцій, проте з вивченням властивостей нових просторів аналітичних функцій, які природним чином виникають в багатьох теоретичних та прикладних задачах, актуальність цих теорем тільки зростає.

Дослідження з питань повноти систем вигляду $\{f(z)e^{\tau z}\}_\tau$ відносяться до окремого підрозділу сучасної теорії функцій, який сформувався завдяки дослідженням багатьох видатних математиків, в тому числі А. М. Сєдлєцкого, Ю. І. Любарського, Б. В. Винницького, Б. Т. Білалова та В. М. Дільного. Можливість ефективного залучення повних систем аналітичних функцій до розв'язання багатьох задач з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної фізики та інших, породжує значний інтерес до відшукання умов повноти різноманітних систем функцій. Тому дослідження з цього кола питань, проведені в дисертаційній роботі, є безсумнівно актуальними.

Задача про розщеплення функцій з простору Пелі–Вінера є цікавою сама по собі, оскільки у ній йдеться про певну конструктивну та якісну характеристику аналітичної функції. Окрім цього така задача тісно пов'язана з питаннями повноти систем аналітичних функцій, про які йшлося вище.

З огляду на це вважаю тему дисертаційного дослідження актуальною.

Зміст роботи та наукові результати

Дисертація складається з чотирьох розділів.

Перший розділ присвячено огляду літератури та основних результатів дисертації. Матеріал у ньому є достатньо об'ємним, інформативним і чітко систематизованим.

Другий розділ присвячено теоремам єдиності у просторах аналітичних функцій з простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ при $1 \le p \le \infty$. Випадки, коли $1 \le p < \infty$ і $p = \infty$ розглядаються окремо. Це викликано істотними технічними відмінностями у використаних методах доведення в обох випадках.

Як вже зазначалося вище, на теореми єдиності для аналітичних функцій є певний запит в сучасних дослідженнях з комплексного аналізу. Особливо цікавим видається випадок, коли в теоремі єдиності не вимагається цілковитої збіжності (співпадіння) двох функцій на деякій множині точок в $\mathbb{C}_+$, а висновок про тотожну рівність функцій робиться лише з асимптотичної поведінки їх різниці на деякій гладкій кривій, що проходить через нескінченно віддалену точку. У другому розділі дисертаційної роботи отримано такого типу теорему. А саме, показано, що умова $f(x) = o(x^{-2\sigma/\pi})$ при $x \in \mathbb{R}_+$ і $x \to +\infty$ для функції $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p \le \infty$, тягне за собою те, що $f \equiv 0$. До того ж показано остаточність (непокращуваність) умов цього твердження.

У третьому розділі дисертаційної роботи знайдено умови, які забезпечують повноту системи $\{f(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ в просторі $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. А саме, знайдено замикання лінійної оболонки $\operatorname{span}\{f(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$ за умов на поведінку функції $\psi(x) = \frac{\ln|f(x)|}{x} + \frac{2\sigma}{\pi}\ln x$ при $x \to +\infty$. Виявилося, що ця функція є характеристичною в питаннях повноти системи $\{f(z)e^{\tau z} : \tau \le 0\}$. У зв'язку з цим окремо досліджено поведінку функції ψ, породженої функцією f з простору $H^\infty_\sigma(\mathbb{C}_+)$. А саме, доведено рівносильність скінченності нижньої та верхньої границь функції $\psi(x)$ при $x \to +\infty$ з певними твердженнями про граничну поведінку функції f на межі $\partial\mathbb{C}_+ = i\mathbb{R}$.

В останньому підрозділі третього розділу дисертації доведено низку тверджень про множину аналітичних функцій $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$, яка є перетином відносно σ усіх просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Показано, що $H^p_\cap(\mathbb{C}_+) \ne H^p(\mathbb{C}_+)$ і множина $H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$ є нетривіальною – у ній міститься множина $H^p_\ominus(\mathbb{C}_+)$. Крім цього знайдено необхідні умови включення $f \in H^p_\cap(\mathbb{C}_+)$ в термінах функцій $S(r)$ та $P(r)$, які породжуються нулями функції f та інтегральною граничною функцією h відповідно.

У четвертому розділі дисертаційної роботи знайдено критерій розщеплення функції з простору Пелі–Вінера W^1_σ на суму двох функцій χ і μ, кожна з яких може бути великою тільки в першій $\mathbb{C}(0, \frac{\pi}{2})$ і четвертій $\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}, 0)$ чверті комплексної координатної площини, але з простору $E^1[\mathbb{C}(0, \frac{\pi}{2})]$ і $E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}, 0)]$ відповідно.

Обґрунтованість і достовірність наукових результатів

Усі математичні твердження дисертаційної роботи, які містяться в теоремах і лемах є строго обґрунтованими. Їх достовірність не викликає сумнівів.

Публікації та апробації результатів

Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у 5 наукових статтях у фахових виданнях, з яких 2 у журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних. Результати дисертації доповідалися на 3 міжнародних наукових конференціях та 6 наукових семінарах у провідних наукових центрах України і Словаччини.

Автореферат повністю відповідає змісту дисертації.

Зауваження

Дисертаційну роботу написано на належному науковому рівні. У цілому до наукової складової тексту дисертації зауважень немає. Проте є помітними декілька недоліків такого змісту:

1. На с. 18 наведено теорему A6 з посиланням на статтю [72]. Проте в [72] у такому вигляді твердження, як теорема A6, немає. Як з'ясувалося, текст теореми взято із статті V. Dilnyi. On Cyclic Functions in Weighted Hardy Spaces// Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2011, vol. 7, No. 1, pp. 19–33, в якій зроблені належні коментарі щодо авторства.

2. На с. 20 не вказано джерело, звідки взято теорему A8.

3. На с. 25, 26 трапляються невдалі словосполучення *"... довів, що ця теорема є правильною..."* і *"Подібне виконується і для інших теорем цього розділу."*. Такі вислови створюють певну надлишковість, адже теорема – це твердження, для якого існує доведення.

4. На с. 44 зроблено висновок з того, що функція h є незростаючою, інтеграл є *додатним*. Слово *"додатним"* , мабуть, має бути замінене на *"недодатним"* .

5. На с. 72 сформульовано без доведення лему 3.2, а потім текст цієї леми зустрічається як частина тексту теореми 3.3, в кінці доведення якої написано слова, які означають, що твердження леми 3.2 і частини теореми 3.3 є тривіальними.

6. На с. 96 доведення теореми 3.8 закінчується фразою *"Протилежне твердження тривіальне"*. Мабуть, краще написати *"Обернене твердження..."*

Підсумовуючи цей невеликий перелік недоліків, зазначу, що всі вони не спотворюють змісту дисертації і не зменшують її наукового рівня.

Висновки

Дисертаційне дослідження *"Межові властивості функцій з просторів типу Гарді"* являє собою наукове дослідження в актуальних напрямках сучасної теорії функцій, а саме, в теорії просторів Гарді у півплощині.

Розв'язані в дисертації задачі мають теоретичне значення, проте вони напевне знайдуть застосування у подальшому вивченні властивостей класів аналітичних функцій в областях комплексної площини.

Наукові положення дисертаційної роботи повною мірою апробовані на міжнародних наукових конференціях і наукових семінарах.

Наведенні зауваження не зменшують наукового рівня дисертації.

На основі вивчення рукопису дисертаційної роботи, автореферату та статей, опублікованих за темою дисертації, вважаю, що обрана тема дослідження є актуальною, наукові положення є новими, достовірними і строго математично обґрунтованими. Дисертація Т. І. Гіщак "Межові властивості функцій з просторів типу Гарді", подана на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз, відповідає вимогам щодо змісту кандидатських дисертацій "Порядку присудження наукових ступенів" , затвердженого постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013, а її автор Гіщак Тетяна Ігорівна заслуговує на присудження наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України В.В. Савчук

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
ЗАСВІДЧУЮ
Зав. канцелярією
Інституту математики АН України
«11» квітня 2017 р.