

## ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу Куниця А.В. «Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для стаціонарних рівнянь в циліндричній та сферичній системах координат», поданої на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика

**Актуальність теми дисертації.** Метод скінченних різниць є одним з найпоширеніших методів наближеного розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь завдяки його універсальності та простоті реалізації. Теорія різницевої схеми була створена завдяки працям багатьох вчених. Широкого поширення набули схеми високого порядку точності на нерівномірній сітці, оскільки розв'язок крайової задачі може змінюватися швидше або повільніше на різних частинах відрізка, на якому розглядається задача. Класична триточкова різницева схема для диференціального рівняння другого порядку має перший порядок точності на нерівномірній сітці або другий порядок на рівномірній сітці. Якщо для знаходження розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку використовувати багатоточкові різницеві схеми (більше 3), то кількість операцій збільшується, крім того такі різницеві схеми часто є нестійкими. Тому А.М. Тіхоновим та О.А. Самарським для таких задач була розроблена теорія точних триточкових та триточкових різницевої схем довільного наперед заданого порядку точності. Важливу роль у розвитку цієї теорії та її застосувань відіграли праці О.А. Самарського, В.Л. Макарова, Р.Д. Лазарова, І.П. Гаврилюка, В.Г. Приказчикова та інших. Для нелінійних рівнянь з загальними крайовими умовами ця теорія отримала розвиток у працях О.А. Самарського, В.Л. Макарова та їх учнів.

Дисертаційна робота Куниця А.В. є актуальною, оскільки присвячена розробці та обґрунтуванню точних триточкових різницевої схем та усічених триточкових схем високого порядку точності для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з сингулярністю першого роду. Крім того, оскільки запропоновані різницеві схеми вимагають розв'язування допоміжних сингулярних задач Коші, то один з розділів роботи присвячено побудові однокрокових методів (рядів Тейлора та Рунге-Кутта) для розв'язування таких задач.

**Оцінка змісту та завершеності дисертації.** Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел.

Робота Куниця А.В. присвячена побудові та дослідженню ефективних наближених методів розв'язування сингулярних задач (крайових та задач Коші) для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Перший розділ дисертації присвячено огляду існуючих методів розв'язування саме таких задач.

У другому розділі розроблено однокрокові методи рядів Тейлора та типу Рунге-Кутта четвертого порядку точності для чисельного розв'язування сингулярних задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Наведено результати чисельного розв'язування тестового прикладу з відомим точним розв'язком, які підтверджують теоретичні висновки. Надалі ці методи використовуються у розділах 3 і 4 для побудови різницевої схем високого порядку точності.

У третьому розділі побудовано та обґрунтовано точну та усічену триточкові різницеві схеми для чисельного розв'язування крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь в циліндричній системі координат. Доведено існування точної триточкової різницевої схеми, єдиність її розв'язку, збіжність методу послідовних

наближень для його знаходження. Запропоновано алгоритмічну реалізацію точних схем через усічені триточкові різницеві схеми рангу  $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$  ( $[\cdot]$  – ціла частина), де  $m$  – ціле додатне число, що позначає порядок гладкості правої частини рівняння. Встановлено оцінку точності цієї схеми, доведено, що ця схема має порядок апроксимації  $\bar{m}$  як по відношенню до розв'язку так і потоку. Досліджуються ітераційні методи знаходження розв'язку усічених різницевих схем. Теоретичні висновки підтверджено чисельними експериментами.

Четвертий розділ присвячено побудові та дослідженню триточкових різницевих схем для розв'язування стаціонарних нелінійних рівнянь в сферичній системі координат. Доведено існування точної триточнової різницевої схеми, єдиність її розв'язку, збіжність ітераційного методу послідовних наближень для його знаходження. На основі точної схеми розроблено триточкові різницеві схеми високого порядку точності, встановлено оцінку їх точності, досліджено ітераційні методи для їх розв'язування. Наведено результати чисельних експериментів та результати порівняння з методом коллокації та з відомою різницевою схемою другого порядку точності.

Зміст дисертаційної роботи відповідає Вимогам ДАК України. У дисертації правильно подано її загальну характеристику, дотримано вимоги рубрикації тексту, списку використаних джерел. Дисертант належним чином посилається на використані в роботі результати інших авторів. Матеріали наукових досліджень дисертації викладено автором з необхідною повнотою, вони ілюструються таблицями результатів та супроводжуються належно сформульованими теоремами, висновками і рекомендаціями.

**Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків та рекомендацій.** Основні результати дисертаційної роботи сформульовано у вигляді лем та теорем, доведення яких проведено з необхідною повнотою та деталізацією. Ефективність розроблених однокрокових методів та триточкових різницевих схем високого порядку точності проілюстрована на ряді прикладів. Отримані в дисертації теоретичні оцінки швидкості збіжності різницевих схем підтверджуються чисельними експериментами. Отримані результати порівняно з іншими методами і ці порівняння свідчать про високу ефективність запропонованого підходу.

**Достовірність результатів та їхня новизна.** У дисертаційній роботі розроблено та обґрунтовано точні та усічені триточкові різницеві схеми високого порядку точності для чисельного розв'язування сингулярних крайових задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, а також однокрокові методи рядів Тейлора та Рунге-Кутта наближеного розв'язування сингулярних задач Коші.

Серед основних нових наукових результатів цієї праці слід відзначити такі:

1. Побудова методів рядів Тейлора та Рунге-Кутта наближеного розв'язування сингулярних задач Коші.
2. Побудова та обґрунтування точної триточнової різницевої схеми на нерівномірній сітці для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з сингулярністю першого роду.
3. Дослідження умови існування та єдиності розв'язку цих схем, доведення збіжності ітераційного методу послідовних наближень для їх розв'язування.
4. Розробка ефективної алгоритмічної реалізації точних схем через усічені триточкові різницеві схеми високого порядку точності.
5. Отримання оцінок точності усічених триточкових різницевих схем, а також доведення збіжності ітераційного методу послідовних наближень.

**Повнота викладу в опублікованих працях.** Основні положення та результати дисертації є досить повно викладеними в опублікованих працях (13 друкованих праць: 1 у зарубіжному науковому журналі, який входить до наукометричних баз Scopus та Web of Science, 4 статті у вітчизняних фахових виданнях, 8 праць – тези доповідей та матеріали наукових конференцій). Автореферат дисертації достатньо повно відображає основні положення, результати та структуру дисертації. Тема дисертаційної роботи повністю відповідає спеціальності 01.01.07–обчислювальна математика

**Важливість одержаних результатів та рекомендацій щодо їхнього використання.** Практична цінність виконаної роботи полягає у подальшому розвитку напрямку теорії точних та усічених триточкових різницевоїх схем для чисельного розв’язування крайових задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Отримані в дисертації результати можуть бути використані при дослідженні та чисельному розв’язуванні сингулярних крайових задач та задач Коші для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, а розроблені алгоритми можуть застосовуватися для розв’язування прикладних задач, які виникають в хімії, екології, тощо.

Розроблені автором чисельні методи можуть використовуватися в наукових дослідженнях, що проводяться в Інституті кібернетики ім. Глушкова НАН України, Інституті математики НАН України, Інституті прикладних проблем механіки і математики НАН України, Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка, Львівському національному університеті ім. Івана Франка, Національному університеті «Львівська політехніка».

#### **Зауваження до дисертаційної роботи**

1. Сторінка 37, в 2-му рядку невірне посилання. Має бути таблиця 2.1.
2. Сторінка 42 2-й рядок знизу не потрібно писати, щоб точки розриву функцій  $k$ ,  $f$  збігалися з вузлами сітки, оскільки це сказано в наступному реченні. Аналогічно на сторінці 91.
3. Вважаю, що непотрібно вводити два сімейства функцій, що задовольняють крайові задачі (3.12) оскільки  $Y_2^j = Y_1^{j+1}$  і це не впливає принципово на доведення про зображення розв’язку крайової задачі. Це доцільно було би зробити при введенні задач Коші (3.39) чи (3.41), розв’язками яких є функції з (3.12).
4. Аналогічно до зауваження 3, вважаю, що непотрібно вводити два сімейства функцій, що задовольняють крайові задачі (4.12) оскільки  $Y_2^j = Y_1^{j+1}$  і це не впливає принципово на доведення про зображення розв’язку крайової задачі. Це доцільно було би зробити при введенні задач Коші (4.40) чи (4.44), розв’язками яких є функції з (4.12).
5. В роботі є ряд описок: сторінка 10, 7 рядок зверху пропущено слово методи; ст. 11 в формулі (1.7)  $d$  один раз розмірність, один раз вектор; ст. 12 2-й абзац інтервал, має бути інтервали; ст. 16 2-й рядок знизу описки в слові інтерполіює; в теоремі 2.1 має бути «виконуються».

**Висновки по дисертаційній роботі.** Вказані зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи, в якій отримано і строго доведено нові важливі результати. Дисертаційна праця Куниця А.В. відзначається чіткістю формулювань, ясністю викладу, повнотою і строгістю математичних обґрунтувань основних наукових положень і результатів виконаних досліджень. Розроблено ефективні алгоритми

чисельного розв'язування сингулярних крайових задач та сингулярних задач Коші для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Вважаю, що дисертаційна робота Куниця А.В. «Тригочкові різницеві схеми високого порядку точності для стаціонарних рівнянь в циліндричній та сферичній системах координат» є цілісним та завершеним науковим дослідженням з актуальних проблем обчислювальної математики, яка відповідає всім вимогам до робіт на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика, а її автор заслуговує присудження йому вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Офіційний опонент  
канд. фіз.-мат. наук, старший  
науковий співробітник  
Інституту математики НАН України

Василик В.Б.