МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

ДЕРЕВ'ЯНКО

Тарас Олександрович

УДК 517.956

ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ГІПЕРБОЛІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичної економіки та економетрії Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Кирилич Володимир Михайлович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка, завідувач кафедри
математичної економіки та економетрії.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Капустян Олексій Володимирович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, професор кафедри
інтегральних та диференціальних рівнянь;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Мединський Ігор Павлович,
Інститут прикладної математики та
фундаментальних наук, Національний
університет "Львівська політехніка",
доцент кафедри прикладної математики.

Захист відбудеться __ _________ 2017 року о 15^{00} на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий __ _________ 2017 р.

В. о. вченого секретаря
спеціалізованої вченої ради,
професор С. М. Шахно

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Для математичного описання багатьох явищ і процесів різноманітного походження часто використовують нелінійні системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку гіперболічного типу. Такі системи широко застосовуються в теорії переносу і випромінювання, гідро-газодинаміці, при моделюванні процесів популяційної генетики, хімічної кінетики, математичної економіки й соціології тощо.

У багатьох прикладних задачах потрібно здійснюватиціленаправлену дію на об'єкти, що описані системами нелінійних рівнянь гіперболічного типу, тобто виникає питання щодо пошуку найкращого впливу на досліджувану систему, а з точки зору математики приводить до задач оптимального керування.

Початок теорії оптимального керування закладено в 60-их роках минулого століття Л. С. Понтрягіним, В. Г. Болтянським, Р. В. Гамкрелідзе та Є. Ф. Міщенком, в роботах яких було запропоновано принцип максимуму. Завдяки принципу максимуму Понтрягіна розв'язано багато нових оптимізаційних задач.

Пізніше теорію оптимального керування розвивали, зокрема, В. М. Александров, Р. Беллман, Р. Кальман, Ж. Лейтмон, Е. Лі, Ж.-Л. Ліонс, К. А. Лур'є, А. Маєр, Л. Маркус, А. А. Мілютін, Є. І. Мойсєєв, Е. Полак, Б. Н. Пшеничний, В. М. Тіхомір, А. Халанай, Г. Л. Харатішвілі, Ф. Р. Чорноусько, Л. Чезарі, Л. Янг та ін.

Абстрактна теорія оптимізації запропонована в роботах В. Г. Болтянського, Дж. Варги, А. Іоффе, А. С. Матвєєва, Л. Нейштадта, Х. Халкіна, В. А. Якубовича та ін. Підходи зв'язані із розвитком абстрактної теорії полягають у використанні єдиноподібної процедури виводу умов оптимальності для зосереджених і розподілених систем, з можливістю викласти основні ідеї найбільш доступно, не обтяжуючись технічними деталями.

Серед вітчизняних дослідників задачі оптимального керування вивчали А. М. Самойленко, М. З. Згуровський, М. М. Бокало, В. О. Капустян, О. В. Капустян, І. Г. Баланенко, І. А. Величко, І. Д. Пукальський та ін.

Різноманітні задачі оптимального керування гіперболічними системами, зокрема, і першого порядку, досліджувалися в роботах А. В. Аргучинцева, Д.-Р. Аубіна, М. Бенхогра, О. В. Васільєва, С. Бенвенуті, Ж. Ву, А. Дугліса, А. І. Єгорова, В. А. Ільїна, Е. Кернера, Д. Конга, М. А. Красносельського, М. А. Куржамського, Т. Лі, З. Луо, Р. А. Полуектова, Т. К. Сіразетдінова, В. А. Срочка, В. А. Терлецького та ін.

Відзначимо, технічну складність реалізації управлінь в нелінійних гіперболічних системах, що, насамперед, зв'язано з проблемами глобальної розв'язності нелінійних мішаних задач, для яких можливий перетин характеристик одного й того ж сімейства та утворення розривів розв'язку. Ця проблематика є особливо актуальною для розглядуваних в цій дисертації задач оптимального керування на необмежених інтервалах часу.

Також актуальною є проблема побудови методів розв'язування гіперболічних задач оптимального керування в класі гладких керуючих впливів з врахуванням обмежень на керування в некласичних формулюваннях задач (задачі з виродженими характеристиками, нелокальними інтегральними умовами, навантаженими системами, система рівнянь Слуцького, задачі із нескінченним горизонтом планування, задачі без початкових умов).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Результати дисертації отримано в рамках виконання наукової теми кафедри диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка "Дослідження нелінійних задач для диференціальних операторів", номер держреєстрації 0114U004540.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є знаходження необхідних умов оптимальності в задачах оптимального керування напівлінійними та квазілінійними системами гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними.

Завданнями дисертаційного дослідження є:

– встановлення умов глобальної розв'язності мішаних задач для напівлінійних гіперболічних систем з ортогональними до осей координат характеристиками, з нелокальними крайовими умовами, з навантаженими правими частинами;

– виведення необхідних умов оптимальності в задачах оптимального керування гіперболічними системами напівлінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку з ортогональними та похилими до осей координат характеристиками, з нелокальними крайовими умовами, з навантаженнями;

– отримання достатніх умов існування єдиного глобального розв'язку мішаної задачі для системи квазілінійних рівнянь.

– знаходження необхідних умов оптимальності в задачі оптимального керування гіперболічною квазілінійною системою.

Об'єктом дослідження є задачі оптимального керування гіперболічними системами рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними.

Предмет досліджень – необхідні умови оптимальності в задачах оптимального керування гіперболічними системами рівнянь першого порядку.

Методи досліджень. У дисертації використано аналітичні методи досліджень, а саме методи абстрактної теорії оптимального керування, метод характеристик (при зведенні мішаних задач до еквівалентних систем інтегро-функціональних рівнянь), апріорних оцінок та метод стискуючих відображень. Крім того, використано результати теорії рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу та теорії інтегральних рівнянь типу

Вольтерри другого роду, принципу максимуму Понтрягіна.

Наукова новизна одержаних результатів. У роботі вперше отримано:

– достатні умови глобальної узагальненої розв'язності мішаних задач у півсмузі для напівлінійних гіперболічних систем рівнянь першого порядку з похилими та ортогональними до осей координат характеристиками, з нелокальними крайовими умовами, з навантаженими правими частинами, без початкових умов;

– необхідні умови оптимальності в задачах оптимального керування для напівлінійних гіперболічних систем першого порядку з ортогональними та похилими до осей координат характеристиками, з нелокальними крайовими умовами, з навантаженнями;

– умови глобальної розв'язності мішаної задачі для системи квазілінійних рівнянь першого порядку;

– необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування гіперболічною системою квазілінійних рівнянь.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення із застосуванням в задачах газо- та гідродинаміки, теорії біологічних популяцій, хімічній кінетиці, теорії споживання тощо, а також можуть бути використані в теорії рівнянь з частинними похідними, теорії оптимальних процесів.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації отримані автором самостійно. В спільних працях В. М. Кириличу належить формулювання задач та аналіз одержаних результатів, а О. В. Пелюшкевич та М. О. Середяку – доведення деяких допоміжних тверджень, які не увійшли до цієї дисертації.

Апробація результатів роботи. Результати досліджень доповідались на таких конференціях: IV Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача (Львів, 2011); Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2012); International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (Lviv, 2012); Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 2012); Fourth International Conference for Young Mathematics on Differential Equation and Application dedicated to Ya. B. Lopatynskii (Donetsk, 2012); XVI International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" (Kyiv, 2013); Другій міжнародній науково-практичній конференції "Метематика в сучасному технічному університеті" (Київ, 2013); V всеукраїнській науковій конференції "Нелінійні проблеми аналізу" (Івано-Франківськ, 2013); П'ятнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2014); VI міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам'янець-Подільський, 2014); Сімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2016); Міжнародній науковій конференції ”Диференціальні рівняння та їх застосування”, присвяченій 70-річчю академіка НАН України Перестюка М. О. (Ужгород, 2016); семінарах кафедри математичної економіки та економетрії Львівського національного університету імені Івана Франка упродовж 2011–2016 рр., керівники: проф. Кирилич В. М., доц. Андрусяк Р. В.; Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: член-кор. НАН України, проф. Пташник Б. Й., проф. Іванчов М. І., проф. Каленюк П. І.; Львів, 2015–2017 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 7-ми наукових працях у фахових періодичних виданнях, з них п’ять – в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз, та додатково висвітлено в 13-ти тезах матеріалів наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, а також списку літературних джерел, що налічує 167 найменувань. Загальний обсяг роботи – 152 с.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету і завдання досліджень, наукову новизну, апробацію одержаних результатів та їхнє практичне і теоретичне значення.

У першому розділі проаналізовано праці, які стосуються мішаних задач для гіперболічних систем та задач оптимального керування гіперболічними системами.

У другому розділі встановлено достатні умови для існування узагальненого розв’язку мішаної задачі у півсмузі для напівлінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними з похилими та ортогональними до осей координат характеристиками. Виведено необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування з нескінченним горизонтом планування напівлінійною гіперболічною системою з виродженими характеристиками. Одержано умови узагальненої глобальної розв’язності задачі без початкових умов для напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку.

В області $(x,t) \in \Pi = (0,l) \times (0,+\infty)$ розглянемо деякий процес $y = y(x,t)$, еволюцію якого в часі та просторі описуємо напівлінійною системою гіперболічних рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = f(y(x,t),x,t), \tag{1}$$

де $y : \Pi \to \mathbb{R}^n$ вектор-функція розв’язку, λ відображення з $\overline{\Pi}$ на простір

$n \times n$ діагональних дійснозначних матриць

$$\lambda(x,t) = diag(\lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t), \ldots, \lambda_n(x,t))$$

і $f : \mathbb{R}^n \times \Pi \to \mathbb{R}^n$ – задана нелінійна вектор-функція.

Розглянемо множини: $I = \{1, 2, ..., n\}$, $I_0 = \{i \in I | \lambda_i(x,t) > 0,\ (x,t) \in \overline{\Pi}\}$, $I_l = \{i \in I | \lambda_i(x,t) < 0,\ (x,t) \in \overline{\Pi}\}$. Для яких $m_1 = card(I_0)$, $m_2 = card(I \backslash I_l)$. Тобто, без обмеження загальності будемо вважати, що перші m_1 власних значень є додатніми, далі $(m_2 - m_1)$ - нульові, а решта $n - m_2$ - від'ємні.

Для системи (1) задамо початкові та крайові умови:

$$y(x,0) = y^0(u^{(0)}(x), x),\ x \in [0,l], \tag{2}$$

$$y_+(0,t) = \gamma^0(y_-(0,t), u^{(1)}(t), t),\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

$$y_-(l,t) = \gamma^l(y_+(l,t), u^{(2)}(t), t),\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Тут $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}$ керуючі впливи такі, що для компактів U^0, U^1, U^2, $u^{(0)} : [0,l] \to U^0,\ U^0 \subset \mathbb{R}^r (r \in \mathbb{N})$, $u^{(1)} : \mathbb{R}_+ \to U^1,\ U^1 \subset \mathbb{R}^{r_1} (r_1 \in \mathbb{N})$; $u^{(2)} : \mathbb{R}_+ \to U^2,\ U^2 \subset \mathbb{R}^{r_2} (r_2 \in \mathbb{N})$; $y^0 : U^0 \times [0,l] \to \mathbb{R}^n$; $y_+ : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^{m_1}$, $y_- : \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^{n-m_2}$ підвектори вектора y, що відповідають відповідним додатнім та від'ємним власним значенням характеристичної матриці системи (1); $\gamma^0 : \mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{m_1}$, $\gamma^l : \mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n-m_2}$.

Нехай цільовий функціонал має вигляд

$$J(u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}) = \int\limits_0^{+\infty} G_0(y_-(0,t), y_+(l,t), t)dt + \iint\limits_{\Pi} G(y(x,t), x, t)dxdt, \tag{5}$$

де $G_0 : \mathbb{R}^{m_1+n-m_2} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $G : \mathbb{R}^n \times \overline{\Pi} \to \overline{\Pi}$, причому ці функції є вимірними на $[0, +\infty)$ для довільної функції y з простору $\mathcal{Q}$, який введено нижче.

Отже, потрібно дослідити задачу

$$\min_{u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}} J(u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}), \tag{6}$$

де мінімум береться по тих $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}$, для яких існує єдиний розв'язок задачі (1)–(4) в сенсі нижче наведеного Означення 2.1.

Розглянемо простір $\mathcal{U}_{ad}$, елементами якого є набори керувань $(u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)})$, що задовольняють умови:

$$u^{(0)} \in (C[0,l])^r,\ u^{(1)} \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_1},\ u^{(2)} \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_2};$$

$$y^0_+(0, u^{(0)}(0)) = \gamma^0(y^0_-(0), u^{(1)}(0), 0),\ y^0_-(l, u^{(0)}(l)) = \gamma^l(y^0_+(l), u^{(2)}(0), 0);$$

$$\forall x \in [0,l] : u^{(0)}(x) \in U^0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+ : u^{(1)}(t) \in U^1,\ u^{(2)}(t) \in U^2.$$

Позначимо через $\xi = \varphi_i(\tau; x, t),\ i \in I$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau),\ \xi\big|_{\tau=t} = x,$$

який називатимемо характеристикою системи (1). Для всіх $(x,t) \in \overline{\Pi}$ та для довільного $i \in I$ існує єдина пара точок $(\varphi_i(\chi_i(x,t); x, t), \chi_i(x,t))$, $(\varphi_i(\nu_i(x,t); x, t), \nu_i(x,t)) \in \partial\Pi$, причому $(\varphi_i(\chi_i(x,t); x, t), \chi_i(x,t))$ точка перетину характеристики в напрямку спадання аргумента τ, а $(\varphi_i(\nu_i(x,t); x, t)$, $\nu_i(x,t))$ – в напрямку його зростання.

Уведемо області: $\Pi^i = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi}|\ \chi_i(x,t) = 0\right\}$, $i \in I$; $\Pi_0^i = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi}|\right.$ $\left.\varphi_i(\chi_i(x,t); x, t) = 0\right\}$, $i \in I_0$; $\Pi_l^i = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi}|\ \varphi_i(\chi_i(x,t); x, t) = l\right\}$, $i \in I_l$.

Проінтегрувавши (1) вздовж характеристик, одержимо для всіх $i \in I$ систему інтегро-операторних рівнянь

$$y_i(x,t) = \mathfrak{R}_i[y](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(y(\varphi_i(\tau; x, t), \tau), \varphi_i(\tau; x, t), \tau) d\tau, \qquad (7)$$

де оператор $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_i[y](x,t)$ приймає значення в залежності від $(x,t) \in \Pi$: $y_i^0(\varphi_i(0; x, t), u)$, якщо $(x,t) \in \Pi^i$; $\gamma_i^0(y_-(0, \chi_i(x,t)), u^{(1)}, \chi_i(x,t))$, якщо $(x,t) \in \Pi_0^i$; $\gamma_i^l(y_+(l, \chi_i(x,t)), u^{(2)}, \chi_i(x,t))$, якщо $(x,t) \in \Pi_l^i$.

Розглянемо метричний простір

$$\mathcal{Q} = \Big\{y \in \big(C(\overline{\Pi})\big)^n \cap \big(B(\overline{\Pi})\big)^n : \\ y_i(\varphi_i(\cdot; x, t), \cdot) \in AC\left[\chi_i(x,t), \nu_i(x,t)\right],\ i \in I,\ (x,t) \in \overline{\Pi}\Big\},$$

де $B(\overline{\Pi})$ – простір обмежених функцій на множині $\overline{\Pi}$, а $AC\left[\chi_i(x,t), \nu_i(x,t)\right]$ – простір абсолютно неперервних функцій на множині $[\chi_i(x,t), \nu_i(x,t)\rangle$ (тут під $\rangle$ розумітимемо $)$ або $]$ відповідно до того, приймає чи не приймає ν_i значення $+\infty$), на якому визначимо метрику $\rho_\alpha(y^1, y^2) = \|y^1 - y^2\|_\alpha$, породжену нормою $\|y\|_\alpha = \sup\limits_{\substack{i \in I,\\ (x,t) \in \overline{\Pi}}} |y_i(x,t)|\alpha_i(x,t; a, p)$ з параметрами $p = \max\left\{\ln(4L)/l, 0\right\} + p_0$ та $a = \max\left\{p\Lambda, pl\Lambda, 4L\max\{e^{pl}, e^{pl^2/4}\}\right\} + a_0$, ($a_0$, $p_0 > 0$ довільно фіксовані величини).

Означення 2.1. *Під узагальненим розв'язком задачі* (1)–(4)*, що відповідає набору керувань* $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, *будемо розуміти вектор-функцію* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{Q}$, *компоненти якої задовольняють систему інтегро-операторних рівнянь* (7) *в* $\overline{\Pi}$.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda \in \left(C(\overline{\Pi}) \cap Lip_x(\overline{\Pi})\right)^n, \quad \sup\limits_{\substack{i\in I,\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} \pm|\lambda_i(x,t)| < +\infty$*;*

2) $f \in \left(C(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}) \cap Lip_y(\overline{\Pi})\right)^n, \quad \sup\limits_{\substack{i\in I,\\ (y,x,t)\in\mathbb{R}^n\times\Pi}} |f_i(y,x,t)|\, e^{-at} < +\infty$*;*

3) $y^0 \in \left(C(U^0 \times [0,l])\right)^n$*;*

4) $\gamma^0 \in \left(C(\mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+) \cap Lip_y(\mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+)\right)^{m_1}$,
$\sup\limits_{\substack{i\in I_0,\\ (y_-,u^{(1)},t)\in\mathbb{R}^{n-m_2}\times U^1\times\mathbb{R}_+}} \left|\gamma_i^0(y^-,u^{(1)},t)\right| e^{-at} < +\infty$,
$\gamma^l \in \left(C(\mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+) \cap Lip_y(\mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+)\right)^{n-m_2}$,
$\sup\limits_{\substack{i\in I_l,\\ (y_+,u^{(2)},t)\in\mathbb{R}^{m_1}\times U^2\times\mathbb{R}_+}} \left|\gamma_i^l(y^+,u^{(2)},t)\right| e^{-at} < +\infty$*;*

5) $u^{(0)} \in (C[0,l])^r$, $u^{(1)} \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_1}$, $u^{(2} \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_2}$*;*

6) $y_+^0(0,u^{(0)}(0)) = \gamma^0(y_-^0(0),u^{(1)}(0),0)$, $y_-^0(0,u^{(0)}(0)) = \gamma^l(y_+^0(l),u^{(2)}(0),0)$.

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(4).

Додатково вимагаємо виконання умов:
А1) $\lambda \in \left(C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Pi})\right)^n$; А2) $f \in \left(C^{1,0,0}_{y,x,t}(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi})\right)^n$; А3) $y^0 \in \left(C^{1,0}_{u,x}(U \times [0,l])\right)^n$;
А4) $\gamma^0 \in \left(C^{1,1,0}_{y,u^{(1)},t}(\mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+)\right)^{m_1}$; А5) $\gamma^l \in \left(C^{1,1,0}_{y,u^{(2)},t}(\mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+)\right)^{n-m_2}$;
А6) $G \in C^{1,0,0}_{y,x,t}(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi})$; А7) $G_0 \in C^{1,1,0}_{y_-,y_+,t}(\mathbb{R}^{n-m_2} \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}_+)$.

Уведемо функції

$$H(\psi,y,x,t) = \psi^T(x,t)f(y,x,t) - G(y,x,t),$$

$$h(\psi(x,0),u^{(0)},x) = \psi^T(x,0)y^0(u^{(0)}(x),x),$$

$$h^1(\psi_+(0,t),y_-(0,t),u^{(1)}(t),t) = \psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)\gamma^0(y_-(0,t),u^{(1)}(t),t),$$

$$h^2(\psi_-(l,t),y_+(l,t),u^{(2)}(t),t) = \psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)\gamma^l(y_+(l,t),u^{(2)}(t),t),$$

де $\psi = \psi(x,t)$ – вектор-функція з простору $\mathcal{Q}$, яка є розв'язком відповідної спряженої задачі

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial x}\psi(x,t) = -H_y(\psi,y,x,t),\ (x,t)\in\Pi, \quad (8)$$

$$\lim_{t\to+\infty}\psi(x,t)e^{at} = 0,\ x\in[0,l], \quad (9)$$

і для всіх $t \in \mathbb{R}_+$

$$\psi_+(l,t) = -\left(\lambda_+(l,t)\right)^{-1}\left(\frac{\partial\tilde{\gamma}^l(y_+,t)}{\partial y_+}\lambda_-(l,t)\psi_-(l,t) + \frac{\partial G_0(y_-,y_+,t)}{\partial y_+}\right),$$
$$\psi_-(0,t) = -\left(\lambda_-(0,t)\right)^{-1}\left(\frac{\partial\tilde{\gamma}^0(y_-,t)}{\partial y_-}\lambda_+(0,t)\psi_+(0,t) - \frac{\partial G_0(y_-,y_+,t)}{\partial y_-}\right). \tag{10}$$

Уведемо області: $\pi^i = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi} |\ \nu_i(x,t) = +\infty\right\}$, $i \in I$; $\pi^i_l = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi} |\ \varphi_i(\nu_i(x,t);x,t) = l\right\}$, $i \in I_0$; $\pi^i_0 = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi} |\ \varphi_i(\nu_i(x,t);x,t) = 0\right\}$, $i \in I_l$.

На множині $\overline{\Pi}$ для $i \in I$ визначимо функції: $e^{qx(l-x)+bt}, i \in I_0, i \in I_l$, $e^{q(l-x)+bt}, i \in I_0, i \notin I_l$, $e^{qx+bt}, i \notin I_0$, $i \in I_l$, $e^{ql+bt}, i \notin I_0$, $i \notin I_l$, для яких вибираємо параметри $b = \max\left\{a, q\Lambda, ql\Lambda, 2(n+1)\max\{e^{ql}, e^{ql^2/4}\}\right\} + b_0$, $q = \max\left\{\ln\left(2\max\{n-m_2, m_1\}C\right)/l, 0\right\} + q_0$, з довільно фіксованими додатними величинами b_0, q_0, а стала C обмежує за абсолютною величиною функції:

$$\frac{\partial\lambda_i(x,t)}{\partial x},\ i \in I; \quad \frac{\partial f_j(y,x,t)}{\partial y_i},\ i,j \in I;$$
$$(det\lambda_+(l,t))^{-1}\lambda_i(l,t)\frac{\partial\gamma^l_j}{\partial y_i}(y_+(l,t), u^{(2)}(t), t)\lambda_j(l,t),\ i \in I_l, j \in I_0;$$
$$(det\lambda_-(0,t))^{-1}\lambda_i(0,t)\frac{\partial\gamma^0_j}{\partial y_i}(y_+(0,t), u^{(1)}(t), t)\lambda_j(l,t),\ i \in I_0, j \in I_l,$$

на відповідних множинах визначення.

Проінтегрувавши (8) вздовж характеристик та використавши крайові умови (10), для всіх $i \in I$, отримаємо систему інтегро-операторних рівнянь

$$\psi_i(x,t) = \mathfrak{D}_i[\psi](x,t) + \int\limits_t^{\nu_i(x,t)} \frac{\partial\lambda_i}{\partial x}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\psi_i(\tau;x,t),\tau) -$$
$$-\sum_{j\in I}\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), \varphi_i(\tau;x,t),\tau)\psi_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) +$$
$$+\frac{\partial G}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), \varphi_i(\tau;x,t),\tau)d\tau, \tag{11}$$

де оператор $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}_i[\psi](x,t)$ визначається в залежності від точки (x,t), а саме: 0, якщо точка $(x,t) \in \pi^i$; $-(det\lambda_+(l,\nu_i(x,t)))^{-1}\lambda_i(l,\nu_i(x,t)) \sum\limits_{j\in I_l}\frac{\partial\gamma^l_j}{\partial y_i}(y_+(l,\nu_i(x,t)), u^{(2)}(\nu_i(x,t)), \nu_i(x,t))\lambda_j(l,\nu_i(x,t))\psi_j(l,\nu_i(x,t)) - \frac{\partial G_0}{\partial y_i}(y_-(0, \nu_i(x,t)), y_+(l,\nu_i(x,t)), \nu_i(x,t))$, якщо $(x,t) \in \pi^i_l$; $-(det\lambda_-(0,\nu_i(x,t)))^{-1}$ $\lambda_i(0,\nu_i(x,t))\sum\limits_{j\in I_0}\frac{\partial\gamma^0_j}{\partial y_i}(y_+(0,\nu_i(x,t)), u^{(1)}(\nu_i(x,t)),\nu_i(x,t))\lambda_j(l,\nu_i(x,t))\psi_j(0,\nu_i(x,t))$ $-\frac{\partial G_0}{\partial y_i}(y_-(0,\nu_i(x,t)), y_+(l,\nu_i(x,t)), \nu_i(x,t))$ якщо $(x,t) \in \pi^i_0$.

З простору $\mathcal{Q}$ виберемо підпростір $\mathcal{W}$, елементи якого володіють властивістю

$$\lim_{t\to+\infty}\psi(x,t)e^{at}=0 \text{ для будь-якого } x\in[0,l],\psi\in\mathcal{W}.$$

На просторі $\mathcal{W}$ визначимо метрику

$$\rho_\beta(\psi^1,\psi^2)=\max_{\substack{i\in I,\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}}|\psi^1(x,t)-\psi^2(x,t)|\beta_i(x,t;b,q).$$

Означення 2.2 *Узагальненим розв'язком спряженої задачі* (8)–(10), *що відповідає набору керувань* $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, *будемо називати набір неперервних функцій* $(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)\in\mathcal{W}$, *які задовольняють систему інтегро-операторних рівнянь* (11) *в* $\overline{\Pi}$.

Теорема 2.2 *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda\in\left(C_x^1(\overline{\Pi})\right)^n$, $\sup\limits_{\substack{i\in I,\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}}\left\{\pm|\lambda_i(x,t)|,\left|\dfrac{\partial\lambda_i(x,t)}{\partial x}\right|\right\}<+\infty$*;*

2) $y\in\mathcal{Q}$ *– розв'язок задачі* (1)–(4)*;*

3) $f\in\left(C_y^1(\mathbb{R}^n\times\overline{\Pi})\right)^n$, *має обмежену на* $\mathbb{R}^n\times\overline{\Pi}$ *та інтегровну похідну за* t*;*

4) $G_0\in C^{1,1}_{y_-,y_+}(\mathbb{R}^{n-m_2}\times\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}_+)$,
$\forall i\in I_0\cup I_l:\ \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\partial G_0(y_-(0,t),y_+(l,t),t)}{\partial y_i}e^{at}=0$*;*

5) $G\in C_y^1(\mathbb{R}^n\times\overline{\Pi})$, $\forall i\in I:\ \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\partial G(y(x,t),x,t)}{\partial y_i}e^{at}=0$ *;*

6) $\gamma^0\in\left(C_y^1(\mathbb{R}^{n-m_2}\times U^1\times\mathbb{R}_+)\right)^{m_1}$, $\sup\limits_{\substack{i\in I_l,j\in I_0,\\ (y_-,u^{(1)},t)\in\mathbb{R}^{n-m_2}\times U^1\times\mathbb{R}_+}}\left|\dfrac{\partial\gamma_j^0(y_-,u^{(1)},t)}{\partial y_i}\right|<+\infty$,

$$\gamma^l\in\left(C_y^1(\mathbb{R}^{m_1}\times U^2\times\mathbb{R}_+)\right)^{n-m_2},\quad \sup_{\substack{i\in I_0,j\in I_l,\\ (y_+,u^{(2)},t)\in\mathbb{R}^{m_1}\times U^2\times\mathbb{R}_+}}\left|\frac{\partial\gamma_j^l(y_+,u^{(2)},t)}{\partial y_i}\right|<+\infty.$$

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (8)–(10).

Варіаційний аналіз досліджуваної задачі заснований на використанні варіацій, які забезпечують гладкість допустимих керувань. Варіація керування будується за правилом

$$u^{(0)}_{\varepsilon,\delta}(x)=u^{(0)}(x+\varepsilon\delta^{(0)}(x)),\ x\in[0,l], \tag{12}$$

де $\varepsilon \in [0,1]$ - параметр, який характеризує малість варіації, $\delta(x)$ - неперервно-диференційовна функція, яка задовольняє умову

$$0 \leqslant x + \delta(x) \leqslant l,\ x \in [0,l], \delta(0) = \delta(l) = 0. \tag{13}$$

Вибираючи варіацію керування за правилом (12) і використовуючи результати абстрактної теорії оптимального керування, справедливою є така теорема.

Теорема 2.3 *Якщо процес* $\{y, u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}\}$ *є оптимальним в задачі* (6), *то виконуються умови*

$$\begin{gathered} h_{u^{(0)}}(\psi(x,0), u^{(0)}(x), x)u_x^{(0)}(x) = 0,\ x \in [0,l], \\ h^1_{u^{(1)}}(\psi_+(0,t), y_-(0,t), u^{(1)}(t), t)u_t^{(1)}(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+, \\ h^2_{u^{(2)}}(\psi_-(l,t), y_+(l,t), u^{(2)}(t), t)u_t^{(2)}(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}_+, \end{gathered} \tag{14}$$

де $y = y(x,t)$ *узагальнений розв'язок задачі* (1)–(4), $\psi = \psi(x,t)$ *– узагальнений розв'язок спряженої задачі при* $y = y(x,t)$, $u = u^{(0)}(x)$, $u^{(1)} = u^{(1)}(t)$, $u^{(2)} = u^{(2)}(t)$.

Аналогічна методика дозволила у підрозділі 2.6 одержати необхідні умови оптимальності для задач оптимального керування напівлінійними гіперболічними системами рівнянь першого порядку з характеристиками, які ортогональні не тільки просторовій осі, але й часовій.

У **третьому розділі** встановлено достатні умови існування узагальненого розв'язку мішаної задачі у ' для напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з навантаженнями та нелокальними крайовими умовами. Для таких задач виведено необхідні умови оптимальності. Розглянуто відповідні спряжені задачі. Для лінеаризації відповідних функціоналів використано нестандартну слабку внутрішню варіацію.

Тобто, розглянуто напівлінійні гіперболічні системи

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = f_i(y(x,t),x,t) + \sum_{k\in\{0,l\}} f_i^k(y(k,t),t),\ i \in I_{m_1}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} = f_i(y(x,t),x,t) + \sum_{k\in\{0,l\}} f_i^k(y(k,t),t),\ i \in I_{m_2}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = f_i(y(x,t),x,t) + \sum_{k\in\{0,l\}} f_i^k(y(k,t),t),\ i \in I_{m_3}, \tag{17}$$

де $card(I_{m_j}) = m_j$ $(j = 1,2,3)$, $y : \Pi \to \mathbb{R}^{m_1+m_2+m_3}$ – вектор-функція розв'язку, праві частини рівнянь (15)–(17) нелінійні функції, причому для $i \notin I_{m_3}$ вони не залежать від компонент розв'язку $y_j(0,t), j \in I_0 \cup I_{m_2}$,

$y_j(l,t), j \in I_1 \cup I_{m_2}$ та $y_j(0,t), j \in I_{m_3}$, а також для $i \in I_{m_3}$ функції $f_i = f_i(y(x,t), y(0,t), y(l,t), x, t)$ не залежать від $y_j(l,t), j \in I_{m_3}$.

Для системи (15)–(17) початково-крайові умови мають вигляд (2)–(4) та

$$y_i(0,t) = \gamma_i^0\left(u^{(3)}(t), t\right),\ t \in \mathbb{R},\ i \in I_{m_3}. \tag{18}$$

У підрозділі 3.2 розглянуто систему

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = f_i(y(x,t), z(x,t), x, t),\ i \in I_{m_1},$$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} = f_i(y(x,t), z(x,t), x, t),\ i \in I_{m_2},$$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = f_i(y(x,t), z(x,t), x, t),\ i \in I_{m_3},$$

$$z_i(x,t;y) = \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} g_i(y(s,t), x, t, s)ds,\ i \in I_{m_1} \cup I_{m_2} \cup I_{m_3}$$

із початковою умовою (2) та нелокальними крайовими умовами:

$$y_i(0,t) = \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \gamma_i^0(y_j(s,t)_{j \notin I_{m_3}}, u^{(1)}(s), s, t)ds, t \in \mathbb{R}_+,\ i \in I_0,$$

$$y_i(l,t) = \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \gamma_i^l(y_j(s,t)_{j \notin I_{m_3}}, u^{(2)}(s), s, t)ds, t \in \mathbb{R}_+,\ i \in I_l,$$

$$y_i(0,t) = \int\limits_{s_i^1(t)}^{s_i^2(t)} \gamma_i^0(y_j(s,t)_{j \notin I_{m_3}}, u^{(3)}(s), s, t)ds, t \in \mathbb{R}_+,\ i \in I_{m_3}.$$

Для вказаних задач доведено теореми 3.1-3.6, що дозволяють одержати відповідні необхідні умови оптимальності.

У четвертому розділі побудовано модель для визначення зміни попиту на товари при зміні ціни товару і капіталу споживача, яка описана системою квазілінійних гіперболічних рівнянь першого порядку в інваріантах Рімана. Використовуючи результати теорії звичайних диференціальних рівнянь з параметрами, доведено існування класичного розв'язку відповідної мішаної задачі. А також, застосувавши метод лінеаризації і некласичну внутрішню варіацію, виведено необхідні умови оптимальності для знаходження заданого рівня попиту при зміні ціни товару і капіталу споживача.

Розглянемо з погляду споживача ринок, на якому представлено n товарів. Попит на кожен з товарів позначатимемо $x_i \geqslant 0,\ i \in I$, де $I := \{1, 2, ..., n\}$. Також будемо вважати, що споживач володіє деякою кількістю капіталу $K >$

0. Для кожного i-го ($i \in I$) товару на ринку встановлена ціна $p_i > 0$ за одиницю товару. Позначимо $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0,\ i \in I\}$ та $\mathbb{R}^n_{++} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0,\ i \in I\}$.

Для кількісного порівняння споживчих наборів вважаємо, що споживач володіє функцією сукупної корисності $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$. Тоді для знаходження попиту на споживчий набір товарів потрібно розв'язати задачу

$$\begin{aligned} & U(x) \to \max, \\ \text{якщо}\quad & x \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{i\in I} p_i x_i \leqslant K. \end{aligned} \tag{19}$$

Додатково для функції $U = U(x)$ вимагатимемо виконання умов: a) U – строго увігнута; b) $U \in C^2(\mathbb{R}^n_{++})$; c) $\dfrac{\partial U(x)}{\partial x_i} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_{++},\ \forall i \in I$; d) $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial U(x)}{\partial x_i} = +\infty$, $\lim\limits_{x_i \to +\infty} \dfrac{\partial U(x)}{\partial x_i} = 0\ \forall i \in I$.

Знаходження розв'язку задачі (19) ґрунтується на теоремі Куна-Таккера, за допомогою якої одержимо рівняння Слуцького

$$\frac{\partial x_i(K,p_n)}{\partial p_n} + \left(x_n(K,p_n) + \frac{1}{p_n} \frac{\partial U(x(K,p_n))}{\partial x_n} \sum_{j=1}^{n} p_j H^{-1}_{jn}(x(K,p_n)) \right) \frac{\partial x_i(K,p_n)}{\partial K} =$$
$$= \frac{1}{p_n} \frac{\partial U(x(K,p_n))}{\partial x_n} H^{-1}_{in}(x(K,p_n)),\ i \in I, \tag{20}$$

де $H = H(x)$ – матриця Гессе для функції $U = U(x)$.

Для рівняння (20) визначено умови при деякій початковій ціні $p_n = p_n^0$:

$$p_n^0 \frac{\partial U(x(K,p_n^0))}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial U(x(K,p_n^0))}{\partial x_n} = 0,\ i \in I,\ i \neq n, \tag{21}$$

$$\sum_{\substack{j \in I, \\ i \neq n}} p_j x_j(K,p_n^0) + p_n^0 x_n(K,p_n^0) = K,\ K \in \mathbb{R}_{++} \tag{22}$$

та рівні капіталу $K = K^0$:

$$p_n \frac{\partial U(x(K^0,p_n))}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial U(x(K^0,p_n))}{\partial x_n} = 0,\ i \in I,\ i \neq n, \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} p_j x_j(K^0,p_n) + p_n x_n(K^0,p_n) = K^0,\ p_n \in \mathbb{R}_{++}. \tag{24}$$

При виконанні умов теореми про неявно задану функцію, умови (21) – (24) можна записати у вигляді

$$x_i(K,p_n^0) = \alpha_i(K),\ K \in \mathcal{K}(K^0),\ i \in I, \tag{25}$$

$$x_i(K^0, p_n) = \gamma_i(p_n),\ p_n \in \mathcal{P}(p_n^0),\ i \in I, \tag{26}$$

де $\mathcal{K}(K^0), \mathcal{P}(p_n^0)$ – деякі околи, відповідно, точок K^0, p_n^0.

Відшукання попиту Слуцького, як розв'язку задачі (20), (25), (26), дозволяє ставити задачу на досягнення наперед заданого рівня попиту шляхом вибору відповідних керуючих впливів (задачу оптимального керування).

Для знаходження рівня попиту Слуцького при зростанні цін та капіталу в термінах усталених позначень теорії гіперболічних систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними (20), перепишемо (25), (26) у вигляді

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} + \lambda(x,t,y)\frac{\partial y_i}{\partial x} = f_i(x,t,y),\ (x,t) \in \Pi = [0,l] \times [0,T], \tag{27}$$

$$y_i(x,0) = \alpha_i(x),\ x \in [0,l], \tag{28}$$

$$y_i(0,t) = \gamma_i(t),\ t \in [0,T], \tag{29}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $l, T > 0$ – деякі сталі, $\alpha_i : [0,l] \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$, $\gamma_i : [0,T] \to \mathbb{R}$, $f_i, \lambda : \Pi \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$, причому $\lambda = \lambda(x,t,y)$ набуває тільки невід'ємних значень, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – невідома функція.

Означення 4.1 *Класичним розв'язком задачі* (27)–(29) *називаємо вектор-функцію* $y \in (C^1(\Pi))^n$, *яка поточково задовольняє рівняння* (27) *та умови* (28), (29).

Теорема 4.1 *Нехай виконуються умови:*

1) $\alpha_i \in C^1([0,l])$, $\alpha_i'(x) \geqslant 0\ \forall x \in [0,l]$, $\gamma_i \in C^1([0,T])$, $\gamma_i'(t) \leqslant 0\ \forall t \in [0,T]$ $(i \in I)$*;*

2) функції λ, f_i $(i \in I)$ *є неперервними та невід'ємними на* $[0,l] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$*;*

3) функції $(\lambda)_x, (\lambda)_{y_j}, (f_i)_x, (f_i)_{y_j}$ $(i, j \in I)$ *є неперервними, невід'ємними та обмеженими на* $[0,l] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$*;*

4) $\alpha_i(0) = \gamma_i(0),\ \gamma_i'(0) + \lambda(0,0,\alpha(0))\alpha_i'(0) = f_i(0,0,\alpha(0))$ $(i \in I)$.

Тоді існує єдиний класичний розв'язок задачі (27)–(29).

Нехай $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \left(C^1([0,l] \times \mathbb{R}^{r_0})\right)^n$, $\gamma \in \left(C^1([0,T] \times \mathbb{R}^{r_1})\right)^n$ – задані функції, U^0 – компакт в $\mathbb{R}^{r_0}$, U^1 – компакт в $\mathbb{R}^{r_1}$. Визначимо простір керувань

$$\begin{aligned} W(\alpha, \gamma, U^0, U^1) = \Big\{ & u = (u^{(0)}, u^{(1)}) \in \left(C^1([0,l])\right)^n \times \left(C^1([0,T])\right)^n \mid \\ & u^{(0)}(x) \in U^0 \forall x \in [0,l], u^{(1)}(t) \in U^1\ \forall t \in [0,T], \\ & \alpha_i(0, u^{(0)}(0)) = \gamma_i(0, u^{(1)}(0))\ \forall i \in I, \\ & \gamma_i'(0, u^{(0)}) u_t^{(1)}(0) + \lambda(0,0,\alpha(0,u^{(0)}(0)))\alpha_i'(0,u^{(0)}(0)) u_x^{(0)}(0) = \\ & = f_i(0,0,\alpha(0,u^{(0)}(0)))\ \forall i \in I \Big\}. \end{aligned}$$

Для заданого керування $u = (u^{(0)}, u^{(1)}) \in W(\alpha, \gamma, U^0, U^1)$ стан системи описується вектор-функцією $y : \Pi \to \mathbb{R}^n$, яка є розв'язком (27), при заданих умовах

$$y_i(x, 0) = \alpha_i(x, u^{(0)}(x)),\ x \in [0, l], \tag{30}$$

$$y_i(0, t) = \gamma_i(t, u^{(1)}(t)),\ t \in [0, T]. \tag{31}$$

Цей розв'язок будемо позначати через $y = y(x, t; u)$ або $y = y(u)$.

Цільовий функціонал задачі оптимального керування має вигляд

$$J(u) = \int\limits_0^l \Phi(x, y(x, T; u))dx + \int\limits_0^l \int\limits_0^T F(x, t, y(u))dxdt, \tag{32}$$

де $\Phi : [0, l] \times \mathbb{R}^n \to [0, l]$, $F : \Pi \times \mathbb{R}^n \to \Pi$.

Задача оптимального керування полягає в мінімізації цільового функціоналу на множині допустимих керувань $W(\alpha, \gamma, U^0, U^1)$.

Припустимо, що вихідні дані (27), (30), (31) задовольняють умови:

I) виконуються умови теореми 4.1;

II) функції $\dfrac{\partial \Phi(y, x)}{\partial y_i}$, $\dfrac{\partial F(x, t, y)}{\partial y_i}$ $(i \in I)$ є неперервними та обмеженими, відповідно, на множині $\mathbb{R}^n \times [0, l]$ та $\Pi \times \mathbb{R}^n$;

III) $\left.\dfrac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y_i}\right|_{x=l} = 0\ (i \in I)\ \forall y \in \mathbb{R}^n$.

Варіаційний аналіз досліджуваної задачі заснований на використанні некласичних варіацій, які забезпечують гладкість допустимих керувань. Варіація керування будується за правилом

$$u^{(0)}_{\varepsilon, \delta^{(0)}}(x) = u^{(0)}(x + \varepsilon\delta^{(0)}(x)),\ u^{(1)}_{\varepsilon, \delta^{(1)}}(t) = u^{(1)}(t + \varepsilon\delta^{(1)}(t)), \tag{33}$$

де $x \in [0, l]$, $t \in [0, T]$, $\varepsilon \in [0, 1]$ – параметр, який характеризує малість варіації, $\delta^{(0)}$, $\delta^{(1)}$ – неперервно-диференційовні функції на своїх областях визначення, які задовольняють умови:

$$\begin{gathered} 0 \leqslant x + \delta^{(0)}(x) \leqslant l\ \forall x \in [0, l], \delta^{(0)}(0) = \delta^{(0)}(l) = \delta^{(0)}_x(0) = \delta^{(0)}_x(l) = 0, \\ 0 \leqslant t + \delta^{(1)}(t) \leqslant T\ \forall t \in [0, T], \delta^{(1)}(0) = \delta^{(1)}(T) = \delta^{(1)}_t(0) = \delta^{(1)}_t(T) = 0. \end{gathered} \tag{34}$$

Нехай для всіх $i \in I$ вектор функція $\psi_i : \Pi \to \mathbb{R}$ задовольняє задачу

$$\frac{\partial \psi_i(x, t)}{\partial t} + \lambda(x, t, y(u))\frac{\partial \psi_i(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial F(x, t, y(u))}{\partial y_i} +$$

$$+\frac{\partial\lambda(x,t,y(u))}{\partial y_i}\sum_{j=1}^{n}\psi_j(x,t)\frac{\partial y_j(x,t;u)}{\partial x}-\frac{\partial\lambda(x,t,y(u))}{\partial x}\psi_i(x,t)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\psi_j(x,t)\frac{\partial f_j(x,t,y(u))}{\partial y_i},\ (x,t)\in\Pi,\quad (35)$$

$$\psi_i(x,T)=-\frac{\partial\Phi(x,y(u))}{\partial y_i},\ x\in[0,l],\quad (36)$$

$$\psi_i(l,t)=0,\ t\in[0,T],\quad (37)$$

де $y\in\left(C^1(\Pi)\right)^n$. З припущень I)–III), отримаємо існування єдиної $\psi\in(C(\Pi))^n$, що є розв'язком задачі (35)–(37), тобто неперервний розв'язок відповідної еквівалентної системи інтегральних рівнянь в Π, який позначаємо через $\psi=\psi(x,t;y,u)$.

Вибираючи варіацію керування за правилом (33) і використовуючи (35)–(37) та представлення для $\Delta u_{\varepsilon,\delta}=(\Delta u^0_{\varepsilon,\delta^{(0)}},\Delta u^1_{\varepsilon,\delta^{(1)}})$:

$$\Delta u^0_{\varepsilon,\delta^{(0)}}(x)=\frac{du^{(0)}(x)}{dx}\delta^{(0)}(x)+o(\varepsilon),\ \Delta u^1_{\varepsilon,\delta^{(1)}}(t)=\frac{du^{(1)}(t)}{dt}\delta^{(1)}(t)+o(\varepsilon),$$

з формули приросту цільового функціоналу (32), одержимо

$$\lim_{\varepsilon\to0_+}\frac{J(u+\Delta u_{\varepsilon,\delta})-J(u)}{\varepsilon}=$$

$$=-\int\limits_0^l\sum_{i=1}^{n}\psi_i(x,0;y,u)\sum_{j=1}^{r_0}\frac{\partial\alpha_i(x,u^{(0)}(x))}{\partial u_j^{(0)}}\frac{du_j^{(0)}(x)}{dx}\delta^{(0)}(x)dx-$$

$$-\int\limits_0^T\lambda(0,t,y(0,t;u))\sum_{i=1}^{n}\psi_i(0,t;y,u)\sum_{j=1}^{r_1}\frac{\partial\gamma_i(t,u^{(1)}(t))}{\partial u_j^{(1)}}\frac{du_j^{(1)}(t)}{dt}\delta^{(1)}(t)dt.\quad (38)$$

Оскільки, $\delta=\delta^{(0)}(x)$, $\delta_1=\delta^{(1)}(t)$ довільні функції, можна сформулювати такий результат.

Теорема 4.3 *Якщо* $u=(u^{(0)},u^{(1)})$ *надає мінімального значення функціоналу* (32) *і функція* $y=y(x,t;u)$ *відповідний класичний розв'язок задачі* (27), (30), (31), *то виконуються умови*

$$\sum_{i=1}^{n}\psi_i(x,0;y,u)\sum_{j=1}^{r_0}\frac{\partial\alpha_i(x,u^{(0)}(x))}{\partial u_j^{(0)}}\frac{du_j^{(0)}(x)}{dx}=0,\ x\in[0,l],$$

$$\sum_{i=1}^{n}\psi_i(0,t;y,u)\sum_{j=1}^{r_1}\frac{\partial\gamma_i(t,u^{(1)}(t))}{\partial u_j^{(1)}}\frac{du_j^{(1)}(t)}{dt}=0,\ t\in[0,T],$$

де $\psi=\psi(x,t;y,u)$ *- узагальнений розв'язок задачі* (35)–(37).

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена одержанню необхідних умов оптимальності мішаних задач у півсмузі для гіперболічних систем рівнянь з частинними похідними першого порядку, з виродженими характеристиками, нелокальними крайовими умовами та навантаженнями. Задачі для таких систем гіперболічних рівнянь описують різноманітні математичні моделі природознавства, техніки, економіки, теорії біопопуляцій, теорії споживання, в яких часто виникає потреба оптимального керування відповідними процесами.

У роботі одержано такі основні результати:

• встановлено достатні умови узагальненої глобальної розв'язності мішаних задач у півсмузі для одновимірних гіперболічних системи рівнянь першого порядку з виродженими характеристиками, з нелокальними крайовими умовами, з навантаженнями, без початкових умов;

• виведено необхідні умови оптимальності для задач оптимального керування напівлінійними гіперболічними системами рівнянь першого порядку з виродженими характеристиками, з нелокальними крайовими умовами, з навантаженнями в правих частинах рівнянь;

• доведено існування класичного розв'язку мішаної задачі для квазілінійної гіперболічної системи першого порядку без умов ліпшицевості щодо перших похідних для вихідних даних за функцією розв'язку;

• отримано необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування квазілінійною гіперболічною системою.

Результати дисертації є новими щодо мішаних задач для лінійних, напівлінійних та квазілінійних гіперболічних систем рівнянь та теорії оптимального керування цими системами.

Ці результати мають теоретичний характер, їх можна використати в теорії мішаних задач для рівнянь з частинними похідними, задачах оптимального керування системами гіперболічних рівнянь, а також при дослідженні практичних проблем, які моделюються гіперболічними системами напівлінійних, квазілінійних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Дерев'янко Т. О.* Задача оптимального керування виродженою напівлінійною гіперболічною системою з нескінченним горизонтом планування / Т. О. Дерев'янко // Наук. вісник Ужгород ун-ту. – 2011. - Вип. 23. – С. 4–18.

2. *Дерев'янко Т. О.* Задача з рухомими межами для виродженої гіперболічної системи квазілінійних рівнянь / Т. О. Дерев'янко, В. М. Кирилич, О. В. Пелюшкевич // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 27–46.

3. *Derevianko T. O.* Global Solvability of Mixed Problem for Hyperbolic System of the First Order Stochastic Equations / T. O. Derevianko // Буковинський математичний журнал. – 2014. – Т. 2 – № 2–3. – P. 82–85.

4. *Дерев'янко Т. О.* Задача оптимального керування для виродженої напівлінійної гіперболічної системи навантажених рівнянь першого порядку / Т. О. Дерев'янко // Буковинський математичний журнал. – 2014. – Т. 2 – № 4 – С. 34 – 47.

5. *Дерев'янко Т. О.* Оптимальне керування квазілінійною гіперболічною системою, що описує попит Слуцького / Т. О. Дерев'янко, В. М. Кирилич // Математичні Студії – 2015. - Т.43 – №1 – С. 66—77.

6. *Derev'yanko T. O.* Problem of Optimal Control for a Semilinear Hyperbolic System of Equations of the First Order with Infinite Horizon Planning / T. O. Derev'yanko, V. M. Kyrylych // Ukrainian Math. Journal. – 2015. – Vol. 67 – No 2. – P. 211–229.

7. *Дерев'янко Т. О.* Необхідні умови оптимальності в задачі оптимального керування напівлінійною гіперболічною системою з нелокальними крайовими умовами і нескінченним горизонтом планування / Т. О. Дерев'янко, М. О. Середяк // Буковинський математичний журнал. – 2016. – Т. 4 – № 1-2 – С. 53–63.

8. *Дерев'янко Т. О.* Задача з горизонтальними характеристиками для напівлінійної гіперболічної системи в кутовій області / Т. О. Дерев'янко, О. В. Пелюшкевич // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: матеріали конференції І, Київ, 13-15 травня, 2010 р. – К., 2010. – С. 138.

9. *Дерев'янко Т. О.* Задача з контактним розривом для виродженої гіперболічної системи трьох квазілінійних рівнянь / Т. О. Дерев'янко // IV Конф. молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача: тези доп., 24-27 травня 2011 р. – Львів, 2011. – С. 295–296.

10. *Дерев'янко Т. О.* Задача оптимального керування популяцією, представленою квазілінійним рівнянням / Т. О. Дерев'янко // Чотирнадцята міжн. наукова конф. імені академіка М. Кравчука: матер. конф. І, Київ, 19-21 квітня 2012р. – К.:НТУУ «КПІ», 2012. – С. 166.

11. *Дерев'янко Т. О.* Задача оптимального керування гіперболічною системою / Т. О. Дерев'янко // Intern. Conf. dedicated to the 120th Anniversary of Stefan Banach: Abstracts of Reports, 17-21 September 2012, Lviv. – Lviv, 2012. – P. 242–243.

12. *Дерев'янко Т. О.* Оптимальне керування квазілінійною гіперболічною системою / Т. О. Дерев'янко // Міжн. наукова конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування": матер. конф., Ужгород, 27-29 вересня, 2012 р. – Ужгород, 2012. – С. 24.

13. *Derevianko T. O.* Necessary Conditions for Infinite Horizon Control Problems

for a Semilinear Hiperbolic System / T. O. Derevianko // Fourth Intern. Conf. for Young Mathematics on Diff. Eq. and Appl. dedicated to Ya. B. Lopatynskii: Book of Abstracts, November 14-17, 2012, Donetsk, Ukraine. – Donetsk, 2012. – P. 96.

14. *Derevianko T. O.* Optimal Control Problem of for Degenerate Hyperbolic System with Infinite Horizon Planning / T. O. Derevianko // Друга міжн. наук.-практ. конф "Математика в сучасному технічному університеті": матер. конф., Київ, 20-21 грудня 2013 р. – Київ, 2013. – С. 5-6.

15. *Derevianko T. O.* Optimal Control Problem of Hyperbolic System with Infinite Horizon Planning / T. O. Derevianko // XVI Intern. Conf. "Dynamical Systemm Modelling and Stability Investigation": Abstr. of Conf. Reports. Kiev, May 29-31, 2013.– Kiev, 2013. – P. 332.

16. *Дерев'янко Т. О.* Необхідні умови для визначення оптимального рівноважного попиту Слуцького / Т. О. Дерев'янко // V всеукр. наук. конф. «Нелінійні проблеми аналізу»: тези доп., Івано-Франківськ, 19-21 вересня 2013. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 23.

17. *Дерев'янко Т. О.* Оптимальне керування гіперболічними системами стохастичних рівнянь першого порядку / Т. О. Дерев'янко // VI Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації»: тези доп., Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 4-5 квітня, 2014 р. – Кам'янець-Подільський, 2014. – С. 45-47.

18. *Дерев'янко Т. О.* Глобальна розв'язність виродженої гіперболічної системи стохастичних рівнянь першого порядку / Т. О. Дерев'янко // П'ятнадцята міжнар. наук. конф. ім. акад. Михайла Кравчука: матер. конф. I, Київ, 15-17 травня 2014 р. – Київ, 2014. – С. 94.

19. *Дерев'янко Т. О.* Задача оптимального керування напівлінійною гіперболічною системою з нелокальними крайовими умовами і нескінченним горизонтом планування / Т. О. Дерев'янко, М. О. Середяк // Сімнадцята міжнар. наук. конф. ім. акад. Михайла Кравчука: матер. конф., Ч. I, "Диференціальні та інтегральні рівняння", Київ, 19-20 травня 2016 р. – Київ, 2016. – С. 94–95.

20. *Дерев'янко Т. О.* Нелінійні задачі оптимального керування гіперболічними системами напівлінійних рівнянь / Т. О. Дерев'янко, В. М. Кирилич // Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвячена 70-річчю академіка НАН України Перестюка М. О.: тези доп., 19–21 травня 2016, Ужгород, Україна. – Ужгород, 2016.– С. 64.

Анотація

Дерев'янко Т. О. Задачі оптимального керування гіперболічними системами. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння. – Львівський національний університет імені Івана Франка. Львів, 2017.

У дисертаційній роботі одержано необхідні умови оптимальності для мішаних задач для гіперболічних систем рівнянь з частинними похідними першого порядку з виродженими характеристиками, нелокальними крайовими умовами, навантаженнями. У роботі встановлено достатні умови узагальненої глобальної розв'язності мішаних задач у півсмузі для одновимірних гіперболічних системи рівнянь першого порядку з похилими та ортогональними до осей координат характеристиками, з нелокальними крайовими умовами, з навантаженнями, без початкових умов. Виведено необхідні умови оптимальності для задач оптимального керування напівлінійними гіперболічними системами рівнянь першого порядку з виродженими характеристиками, з нелокальними крайовими умовами, з навантаженнями в правих частинах. Доведено існування класичного розв'язку мішаної задачі для квазілінійної гіперболічної системи без умов ліпшицевості для перших похідних щодо вихідних даних за функцією розв'язку. Отримано необхідні умови оптимальності для задачі оптимального керування квазілінійною гіперболічною системою в прямокутній області.

Ключові слова: оптимальне керування, необхідні умови оптимальності, гіперболічна система, метод характеристик, теорема Банаха про нерухому точку, принцип максиму.

Abstract

Derevianko T. O. Optimal control problems for hyperbolic systems of first order equations. – Manuscript.

The thesis presented for the degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics in speciality 01.01.02 – differential equations. – The Ivan Franko National University of Lviv. Lviv, 2017.

The thesis addresses the investigation of the necessary optimality conditions for hyperbolic systems of partial first-order differential equations with two independent variables with degenerate characteristics, with nonlocal boundary conditions, for system with loaded equations in half-strip. The sufficient conditions of existence and uniqueness of global generalized solution of initial-boundary value problem for hyperbolic system of semilinear first-order equations with two independent variables with degenerate characteristics, with non local boundary conditions, for system with loaded equations in half-strip are investigated. The problem without initial conditions in strip for a semilinear hyperbolic system of partial first-order equations are studied. The theorems of existence and uniqueness global classical solvability of mixed problem for hyperbolic quasilinear system in rectangle was proved without Lipschitz conditions on first derivatives of coefficients on solution. The necessary optimality conditions for hyperbolic systems of partial first-order one dimensional equations with two independent variables with degenerate characteristics, with nonlocal boundary conditions, for system with loaded equations in half-strip are derived. Non classical optimality conditions for quasilinear hyperbolic system of first-order equation in rectangle are researched.

Key words: optimal control, necessary optimality conditions, hyperbolic system, method of characteristics, Banach Theorem of the fixed point, maximum principle.

Аннотация

Деревянко Т. А. Оптимальное управления гиперболическими системами уравнений первого порядка. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко. Львов, 2017.

Диссертация состоит в получении необходимых условий оптимальности для смешанных задач для гиперболических систем уравнений в частных производными первого порядка с вырожденными характеристиками, нелокальными краевыми условиями, с нагруженными правыми частями. В работе установлены достаточные условия обобщенной глобальной разрешимости смешанных задач в полуполосе для одномерных гиперболических систем уравнений первого порядка с наклонными и ортогонильным к осям координат характеристиками, с нелокальными краевыми условиями, с нагруженными правыми частями, без начальных условий. Выведены необходимые условия оптимальности для задач оптимального управления полулинейными гиперболическими системами уравнений первого порядка с вырожденными характеристиками, с нелокальными краевыми условиями, с нагруженными правыми частями. Доказано существование классического решения смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы без условий Липшица для первых производных относительно исходных данных по функции решения. Получены необходимые условия оптимальности для задачи оптимального управления квазилинейной гиперболической системой в прямоугольной области.

Ключевые слова: оптимальное управление, необходимые условия оптимальности, гиперболическая система, метод характеристик, теорема Банаха о неподвижной точке, принцип максимума.