

## ВІДГУК

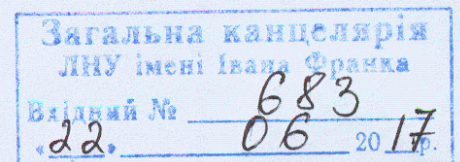
офіційного опонента на дисертацію Бугрія Олега Миколайовича  
*«Задачі для нелінійних параболічних рівнянь та варіаційних нерівностей  
зі змінними показниками нелінійності»*,

подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук  
за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння

Математичне моделювання еволюційних процесів, що відбуваються в неоднорідних середовищах, приводить до задач для нелінійних диференціальних рівнянь, показники нелінійності яких залежать від незалежних змінних. Ефективним інструментом дослідження таких задач є узагальнені простори Лебега та Соболева, які вперше появились в працях В. Орліча, О. Ковачека, Й. Ракосніка та ін. Вивченню задач для нелінійних рівнянь зі змінними показниками нелінійності присвячено праці Ю.А. Алхутова, С.Н. Антонцева, М.М. Бокала, В.В. Жикова, О. Ковачека, С.П. Лавренюка, С.І. Шмарьова та інших.

Адекватні математичні моделі складних природних процесів мають вигляд варіаційних нерівностей. Їх вивчення розпочалося у 60-х роках минулого століття з праць Ж.-Л. Ліонса та Г. Стампакья. Теорію стаціонарних і еволюційних варіаційних нерівностей зі сталими показниками нелінійності розвивали і розвивають К. Байоккі, А. Бенсусан, М.М. Бокало, Х. Брезіс, Р. Гловінські, Г. Дюво, А. Капело, Д. Кіндерлерер, О.А. Ковалевський, С.П. Лавренюк, Ж.-Л. Ліонс, Т.А. Мельник, О.А. Панков, О.В. Солонуха, Г. Стампакья, Р. Тремольер, А. Фрідман та інші.

Розвиток теорії диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності наштовхувавсь на відсутність належної бази з функціонального аналізу. В останні роки така база з'явилася, зокрема, завдяки монографіям Л. Дьонінга, П. Хар'юлетто, П. Хасто, М. Ружічки (2011р.) та С.Н. Антонцева, С.І. Шмарьова (2015р.). Це зумовило пошук зацікавленості вчених цієї тематикою та різноманітні її застосування на практиці. Але задачі для нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності вивчено недостатньо. Особливо це стосується такого типу рівнянь з нелінійними інтегральними членами. Ще менше досліджено нелінійні параболічні варіаційні нерівності зі змінними показниками нелінійності. В дисертаційній роботі її автор





пропонує вирішення частини цієї великої проблеми, а отже, тематика дисертації актуальна.

Дисертація складається із вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, наведено зв'язок роботи з науковими темами досліджень кафедри диференціальних рівнянь Львівського національного університету імені Івана Франка, сформульовано мету і завдання дослідження, вказано наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, особистий внесок здобувача, а також зазначено інформацію про апробацію результатів дисертації.

У першому розділі подано достатньо повний огляд літератури за тематикою досліджень і стисло викладено основні результати дисертації.

У другому розділі вивчаються нелінійні інтегро-диференціальні параболічні рівняння і системи. Спершу доведено існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння другого порядку. На відміну від досліджених раніше, розглядувані рівняння містять нелінійний інтегральний оператор та нелінійний член зі змінним показником нелінійності. Навіть у випадку сталих показників нелінійності і лінійних інтегральних операторів такі рівняння раніше не вивчалися. Також у цьому розділі доведено існування розв'язку мішаної задачі для системи рівнянь четвертого порядку, яка містить монотонні та немонотонні члени зі змінними показниками нелінійності. Системи такого вигляду з інтегральними доданками раніше не розглядалися.

У третьому розділі розглядаються подвійно нелінійні еліптично-параболічні та параболічні рівняння. Спершу доведено існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для сильно нелінійних еліптично-параболічних анізотропних рівняння з виродженням. Подвійно нелінійні рівняння зі змінними показниками нелінійності раніше не вивчалися. Крім того, доведено теореми існування узагальнених розв'язків мішаної задачі для сингулярних і вироджуваних подвійно нелінійних інтегро-диференціальних рівняння з лінійною головною частиною. Подвійно нелінійні рівняння з інтегральними операторами та змінними показниками нелінійності в науковій літературі не зустрічалися.

У четвертому розділі розглядаються напівлінійні параболічні рівняння і системи. Спершу доведено існування слабких (глобальних та локальних) розв'язків мішаної задачі для рівнянь другого порядку. Рівняння з неоднорідними крайовими умовами та змінними показниками нелінійності раніше не досліджувалися. Частину цих результатів перенесено на випадок



параболічних за Петровським систем зі змінними показниками не лінійності, які раніше не вивчалися.

Розділи 5-7 присвячено задачам з початковою умовою для параболічних варіаційних нерівностей та їх систем.

У п'ятому розділі розглядаються варіаційні нерівності, асоційовані з виродженими параболічними рівняннями. Спершу доведено існування розв'язку задачі з початковою умовою для подвійно нелінійних параболічних варіаційних нерівностей з виродженням. Потім доведено теореми існування та єдиності розв'язку параболічної варіаційної нерівності типу ньютонівської політропної фільтрації. Варіаційні нерівності таких типів раніше не вивчалися.

У шостому розділі розглядаються параболічні варіаційні нерівності та їх системи з монотонними операторами в головній частині та змінними показниками нелінійності. Для систем варіаційних нерівностей з функціоналами доведено існування та єдиність їх розв'язків. Такі варіаційні нерівності досліджено вперше. Для варіаційних нерівностей без функціоналів вперше отримано умови підвищення гладкості їхніх розв'язків. Крім того, досліджено деякі якісні властивості розв'язків розглядуваних задач. Зокрема, доведено теореми порівняння розв'язків варіаційних нерівностей та встановлено скінченність швидкості поширення збурень розв'язків цих нерівностей. Якісні властивості розв'язків варіаційних нерівностей зі змінними показниками нелінійності раніше не вивчалися.

У сьомому розділі розглядаються задачі з початковими умовами для параболічних варіаційних нерівностей другого та четвертого порядку зі змінними показниками нелінійності в необмежених за просторовими або часовими змінними областях. Такі задачі в необмежених областях раніше не розглядалися. Отримано умови існування і єдиності розв'язків розглядуваних задач, а також досліджено якісні властивості розв'язків цих варіаційних нерівностей.

Основні результати дисертації опубліковано у 23-х статтях в наукових фахових виданнях з переліку МОН України, з них 7 статей – в журналах з переліку видань наукометричних баз Scopus та Index Copernicus.

Результати достатньо повно апробовано на наукових конференціях і семінарах.

Автореферат повністю та правильно відображає зміст і основні положення дисертації.



Дисертація є завершеною науковою працею. Основні результати викладено у вигляді теорем, доведення яких є достатньо повними і строго математично доведеними. Однак є певні зауваження та побажання щодо змісту та оформлення дисертації.

1) У вступних частинах як в авторефераті, так і в дисертації, дисертант вказує, що основні результати дисертації опубліковано в 23 статтях у наукових фахових виданнях з переліку МОН України та додатково висвітлено у навчально-методичному посібнику [24]. Однак, згаданий посібник не містить результатів автора. Як зазначає сам автор у вступі до цього посібника, для написання посібника ним використано матеріали з класичних монографій. Тому вважаю, що цей посібник не можна було включати до списку робіт автора, які характеризують результати дисертації. Слід також зауважити, що цей посібник не входить до списку праць автора, де опубліковані основні результати дисертації.

2) Якісне дослідження кожної нелінійної задачі включає в себе дослідження єдиності розв'язку. На жаль в дисертації нічого не сказано про єдиність розв'язків задач, розглянутих в розділах 2-4.

3) Основними методами дослідження, які використовує дисертант, є методи: Гальоркіна, еліптичної і параболічної регуляризації, штрафу. Для застосування цих методів потрібно довести відповідні оцінки для апроксимуючих послідовностей, з яких можна отримати апріорні оцінки для розв'язків. Такі апріорні оцінки є важливим якісним і самостійним результатом, особливо, коли й ще додатково вказано залежність відповідних констант в цих нерівностях, наприклад, від області, від показника нелінійності та інших характеристик задачі. Наявність таких апріорних оцінок давала б можливість, наприклад, проводити асимптотичний аналіз згаданих нелінійних крайових задач в сингулярно збурених областях (перфоровані області, тонкі області), вивчати нелінійні крайові задачі зі швидко коливними показниками нелінійності, обґрунтовувати різні чисельні методи для таких задач. На жаль в дисертації цього не зроблено, хоча з доведень теорем існування видно, що це можна було б зробити.

4) Нумерацію формул та тверджень “Додатку А” дисертації слід починати з виразу “ А. ” а не “ 8. ”, бо додаток не є восьмим розділом дисертації.

Зазначені зауваження не мають принципового значення і не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.



Оцінюючи роботу в цілому, вважаю, що дисертація О.М. Бугрія за своїм науковим рівнем, актуальністю і одержаними результатами повністю відповідає всім вимогам чинного «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженим Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 р. зі змінами, внесеними згідно із Постановою Кабінету Міністрів України № 656 від 19 серпня 2015 року і наказу № 40 МОН України від 12 січня 2017 року, що висуваються до дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння, а її автор Олег Миколайович Бугрій заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за вказаною спеціальністю.

Професор кафедри математичної фізики  
Київського національного університету  
імені Тараса Шевченка,  
доктор фізико-математичних наук, професор

Т.А. Мельник

ПІДПИС ЗАСВІАЧУЮ  
ВЧЕНИЙ СЕКРЕТАР НДП  
КАРАУЛЬНА Н.В.  
до 06. 2017

