

## ВІДГУК

офіційного опонента про дисертаційну роботу

Бугрія Олега Миколайовича

«Задачі для нелінійних параболічних рівнянь та

варіаційних нерівностей зі змінними показниками нелінійності»,

подану на здобуття наукового ступеня

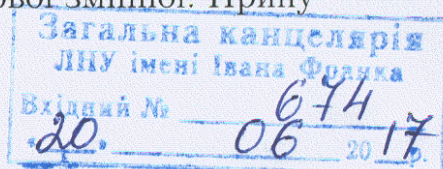
доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння

Дисертаційна робота О. М. Бугрія присвячена побудові теорії розв'язності широких класів нелінійних параболічних рівнянь і нерівностей зі змінними показниками нелінійності.

У сучасній теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними питання про існування, єдиність і поведінку розв'язків рівнянь є центральними. У 50–80-х роках минулого століття була у цілому побудована теорія розв'язності основних класів лінійних диференціальних рівнянь: еліптичних, параболічних і гіперболічних. Для нелінійних диференціальних рівнянь така теорія бурхливо розвивається в останні десятиліття. Це, окрім суто математичного інтересу, викликано тим, що переважна більшість явищ і процесів у природі та діяльності людини описується нелінійними диференціальними та інтегро-диференціальними рівняннями. Постійно з'являються нові математичні моделі, основною складовою яких є диференціальні рівняння з нелійними членами різноманітних типів: квазілінійні, півлінійні, сильно нелінійні, подвійно нелінійні рівняння, тощо. Нелінійні вирази можуть задаватися за допомогою степеневих або інших функцій; ці функції можуть містити параметри, залежні від просторових та часових змінних. Окрім рівнянь, в математичних моделях використовують і диференціальні та варіаційні нерівності, які теж часто бувають нелійними. Як правило, дослідження окремих класів нелінійних диференціальних рівнянь або нерівностей навіть одного типу вимагає модифікації відомих і часто розробки нових методів дослідження.

Об'єктом дисертаційного дослідження О. М. Бугрія є нелінійні параболічні диференціальні та інтегро-диференціальні рівняння і пов'язані з ними варіаційні нерівності, в яких нелінійні члени задані за допомогою степеневих функцій з показниками, залежними від просторових змінних, а також від часової змінної. Коротко кажучи, ці рівняння і нерівності мають змінні показники нелінійності. У математичних моделях є природною ситуація, коли її параметри, зокрема ті, що входять у нелінійні члени рівнянь, залежать від просторових та/або часової змінної. Припу-



щення же про сталість цих параметрів робиться для спрощення моделі, у першому її наближенні до явища, що описується.

Дослідження еволюційних рівнянь і нерівностей зі змінними показниками нелінійності розпочалося двадцять років тому і потребує розробки нових методів порівняно з достатньо вивченим випадком сталих показників нелінійності. Так, замість просторів Лебега і Соболева, що успішно застосовуються у цьому випадку, довелося (і це природно) використовувати узагальнені простори Орліча та їх соболевські версії, для яких показником сумовності функцій служить не число, а функція, залежна від просторових та часових змінних. За своїми властивостями простори Орліча–Соболева суттєво відрізняються від просторів Лебега–Соболева і це ускладнює розробку теорії диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Тут першорядною є проблема вдалого вибору досить широкого класу показників нелінійності, для яких можна отримати результати про характер розв'язності відповідних диференціальних рівнянь і властивості їх розв'язків.

З огляду на сказане, тема дисертації О. М. Бугрія є безсумнівно актуальною і важливою.

Дисертаційна робота складається з анотацій українською і англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, семи розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та додатку. Її загальний обсяг становить 341 сторінку.

В анотаціях зазначено основні результати дисертації та наведено повний список публікацій автора за її темою.

Перелік умовних позначень досить повний з відповідними поясненнями. Він суттєво полегшує читання дисертаційної роботи.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, вказано держбюджетні теми, у рамках яких виконувалася робота, сформульовано мету і завдання дисертаційного дослідження, вказано об'єкт, предмет і основні методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів і особистий внесок здобувача у них, наведено дані про їх публікації та апробацію.

Перший розділ дисертації містить досить повний огляд літератури за її тематикою і короткий опис основних результатів дисертації.

Основні результати дисертації викладено у 2 – 7 її розділах. Перші три з них присвячено дослідженню різних типів нелінійних параболічних диференціальних рівнянь, а решта три — вивченню різних класів нелінійних варіаційних нерівностей, пов'язаних з параболічними рівняннями.

У другому розділі розглянуто нелінійні параболічні інтегро-диферен-

ціальні рівняння, які містять нелінійність зі сталим показником у старшому члені щодо просторової похідної, нелінійність зі змінними показником у молодшому члені та деякий нелінійний інтегральний член. Останній виникає, зокрема, у теорії опціонів. Для таких рівнянь досліджено початково-крайову задачу в обмеженому циліндрі з однорідною крайовою умовою Діріхле. Знайдено достатні умови існування узагальненого розв'язку цієї задачі і охарактеризовано його регулярність у термінах приналежності розв'язку до узагальнених просторів Орліча, і деяких степенів розв'язку — до просторів Соболева. Досліджено також початково-крайову задачу для параболічних систем інтегро-диференціальних рівнянь четвертого порядку щодо просторової похідної з аналогічними нелінійними членами. Для цієї задачі знайдено достатні умови існування узагальненого розв'язку.

У третьому розділі досліджено характер розв'язності початково-крайової задачі для різних параболічних інтегро-диференціальних рівнянь, які містять старший нелінійний член вигляду  $|u|^{r(x)-2}u_t$ , а також інші нелінійні члени із змінними показниками нелінійності. Для деяких рівнянь допускається, щоб число  $r$  або функція  $r(x)$  набувала значень з інтервалу  $(3/2, 2)$ , тобто множник  $|u|^{r(x)-2}$  може бути сингулярним. Задача розглядається в обмеженому циліндрі і для однорідної крайової умови Діріхле. Знайдено достатні умови існування її узагальненого розв'язку  $u$  і охарактеризовано його регулярність у термінах приналежності розв'язку та деяких функцій від нього до просторів Лебега і Соболева.

Четвертий розділ присвячений півлінійним параболічним диференціальним рівнянням з нелінійним членом вигляду  $g(x, t)|u|^{q(x,t)-2}u$ . У залежності від поведінки показника нелінійності  $q(x, t)$  знайдено достатні умови існування глобального або локального слабкого розв'язку мішаної задачі з крайовою умовою Діріхле. Отримано також достатні умови існування слабкого розв'язку мішаної задачі для півлінійних  $2b$ -параболічних за Петровським систем з лінійною крайовою умовою першого порядку.

У п'ятому розділі досліджено дві нелінійні варіаційні нерівності, пов'язані з параболічними диференціальними рівняннями, які містять нелінійні члени  $|u|^{r-2}u_t$  і  $|u|^{q(x)-2}u$ , або один нелінійний член  $\Delta(|u|^{p(x)-2}u)$ . Для першої нерівності знайдено достатні умови існування сильного розв'язку та охарактеризовано його регулярність. Для другої встановлено достатні умови існування і єдиності слабкого розв'язку.

У шостому розділі досліджено нелінійні варіаційні параболічні нерівності, які містять нелінійний член вигляду  $|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i}$ . Знайдено достатні умови єдиності та існування слабкого або сильного розв'язків цих нерівностей. Доведено теореми про порівняння розв'язків і про скінчен-

ність поширення їх початкових збурень.

Заключний, сьомий, розділ дисертації присвячений нелінійним параболічним варіаційним нерівностям у необмежених областях за просторовими змінними або за часовою змінною. Знайдено достатні умови існування та єдиності розв'язків цих нерівностей. У випадку області, необмеженої за часовою змінною, доведено теорему про скінченність часу згасання розв'язків. Теореми про існування і єдиність розв'язків встановлено також і для варіаційних нерівностей четвертого порядку.

У висновках до дисертації подано перелік основних її наукових результатів. Список використаних джерел є досить повним і налічує 290 найменувань. У додатку наведено допоміжні твердження і позначення.

На мою думку, головним досягненням дисертації О. М. Бугрія є те, що у ній закладено основи теорії розв'язності нелінійних параболічних диференціальних рівнянь і варіаційних нерівностей зі змінними показниками нелінійності. Для цього автором була суттєво розвинута техніка дослідження таких задач, зокрема, методика застосування до них просторів Орліча–Соболева.

Дисертаційна робота написана досить чітко з обґрунтуванням результатів. Автореферат правильно і достатньо повно подає її основні досягнення.

Втім, до змісту дисертації є такі зауваження:

1. В обґрунтуванні актуальності теми дисертації було б корисно вказати, які прикладні задачі описуються параболічними диференціальними рівняннями або нерівностями саме із змінними показниками нелінійності.

2. На мій погляд, термін «еліптико-параболічне рівняння» не доречно застосовувати до диференціальних рівнянь, розглянутих у третьому розділі дисертації. Ці рівняння мають параболічний тип при будь-яких допустимих значеннях параметрів, що в них входять.

3. Можливо, замість формальних термінів «тип А» і «тип В» стосовно варіаційних нерівностей було б краще застосувати більш змістовні терміни, наприклад, «нерівність без функціоналу» і «нерівність з функціоналом».

4. Систематично використовується нестандартне позначення  $\circlearrowleft$  замість  $\leftrightarrow$  для неперервного вкладення просторів.

5. Навряд чи була потреба повторювати добре відоме означення оператора Лапласа на сс. 30 і 39.

6. У дисертації трапляються друкарські помилки, іноді і в математичних формулах.

Ці зауваження не впливають на загальне позитивне враження від дисертації.

Всі основні результати дисертації є новими і обґрунтованими. Вони достатньо повно і своєчасно опубліковані у 23 статтях у провідних вітчизняних і міжнародних наукових математичних журналах, серед яких 6 входять до наукометричних баз даних SCOPUS і Web of Science. Окремі результати і дисертація у цілому доповідались на міжнародних наукових конференціях і семінарах, про що свідчить 15 тез доповідей автора.

Дисертація виконана на високому науковому рівні та є цілісним і завершеним дослідженням. Вона має теоретичний характер. Її результати та методи можуть бути використані у подальших дослідженнях у теорії диференціальних рівнянь, математичній фізиці, фінансовій математиці.

Дисертація відповідає спеціальності 01.01.02 — диференціальні рівняння.

Вважаю, що дисертаційна робота «Задачі для нелінійних параболічних рівнянь та варіаційних нерівностей зі змінними показниками нелінійності» відповідає всім вимогам «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого постановою КМУ № 567 від 24.07.2013 зі змінами згідно постанови КМУ № 656 від 19.08.2015, що висуваються до докторських дисертацій, а її автор Бугрій Олег Миколайович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння.

Офіційний опонент,  
доктор фізико-математичних наук,  
провідний науковий співробітник відділу нелінійного аналізу  
Інституту математики НАН України

19.06.2017

О. О. Мурач

Підпис Мурача Олександра Олександровича засвідчую

Вчений секретар  
Інституту математики НАН України,  
кандидат фізико-математичних наук

19.06.2017



І. В. Соколенко