МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Львівський національний університет
імені Івана Франка

Маланчук Оксана Михайлівна

УДК 517.95

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-СИМВОЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОТОЧКОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному університеті „Львівська політехніка”.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Нитребич Зіновій Миколайович,
Національний університет „Львівська політехніка”,
завідувач кафедри вищої математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Кирилич Володимир Михайлович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка, завідувач кафедри
математичної економіки та економетрії;

доктор фізико-математичних наук, професор
Пукальський Іван Дмитрович,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, завідувач кафедри
диференціальних рівнянь.

Захист відбудеться 8 червня 2018 р. о 15.00 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79001, м. Львів, вул. Університетська, 1, аудиторія 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий 3 травня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доцент Ю. Д. Головатий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню розв'язності задач із локальними двоточковими умовами за часом для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними.

Останнім часом дослідженню розв'язності задач з локальними та нелокальними багатоточковими за часом умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними надається значна увага. Це зумовлено необхідністю побудови загальної теорії багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними, а також тим, що задачі зі значеннями розв'язку в різні моменти часу мають важливу фізичну інтерпретацію і є моделями багатьох фізичних, економічних, медико-біологічних, демографічних та інших процесів.

Формулювання задач з багатоточковими умовами за однією виділеною змінною (часовою) для диференціальних рівнянь із частинними похідними, а також перші результати (1965 р.) щодо їх розв'язності на підставі метричного підходу належать Б. Й. Пташнику, у працях якого показано, що такі задачі є, загалом, умовно коректними, а їхня розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

На сьогодні, завдяки працям Б. Й. Пташника, а також В. І. Берника, І. О. Бобика, П. Б. Василишина, В. С. Ільківа, І. С. Клюс, Л. І. Комарницької, Б. О. Салиги, Л. П. Силюги, М. М. Симотюка, І. Р. Тимківа, В. М. Поліщук, В. В. Фіголя, П. І. Штабалюка, результати щодо встановлення класів коректної розв'язності задач з багатоточковими умовами за часом та умовами періодичності чи майже періодичності за просторовими змінними для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними в обмежених областях за допомогою метричного підходу істотно розвинуто та одержано чимало результатів загального характеру.

Задачам з багатоточковими умовами за часом та без додаткових умов за просторовими координатами в необмежених областях (смуга, шар) для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними присвячені праці І. І. Антипко, В. М. Борок, І. Л. Віленця, М. А. Перельман, Г. В. Савченко, Л. В. Фардіголи.

Для параболічних рівнянь та систем рівнянь задачі з нелокальними дво- та багатоточковими умовами в необмежених областях досліджували Л. І. Корбут, В. М. Лучко, М. І. Матійчук, а в обмежених областях – А. Т. Асанова, М. Майчровскі, І. Д. Пукальський, Ж. Чабровскі та інші вчені.

Численні дослідження авторів, зокрема Ю. Н. Валіцького, М. Л. Горбачука, В. В. Городецького, А. А. Дезіна, Я. М. Дріня, С. Х. Нурметова, В. К. Романка, присвячені крайовим задачам для диференціально-операторних рівнянь з багатоточковими умовами за однією виділеною змінною.

В останні роки, крім того, з'являються задачі з багатоточковими умовами за часом, які містять диференціальні поліноми за просторовими змінними, а також

задачі для диференціальних рівнянь зі зсувами за просторовими координатами. Такі рівняння можна інтерпретувати як рівняння нескінченного порядку за просторовими змінними. Для розв'язування таких та інших задач з умовами за однією виділеною змінною виявився зручним диференціально-символьний метод, розроблений у працях П. І. Каленюка та З. М. Нитребича. Суть методу полягає в тому, що він дозволяє встановлювати класи гладких (здебільшого цілих) функцій як класи існування та єдиності розв'язку задач і, що важливо, будувати цей розв'язок у явному вигляді.

Диференціально-символьний метод в останні роки застосовувався до розв'язування задач в необмежених областях для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними з початковими, дво- та багатоточковими за часом умовами, умовами Діріхле та типу Діріхле, умовами Діріхле-Неймана, а також інтегральними умовами у працях М. Б. Воробець, В. С. Ільківа, П. І. Каленюка, І. С. Клюс, І. В. Когута, Г. Кудука, З. М. Нитребича, Я. М. Плешівського, Б. Й. Пташника, П. Я. Пукача, С. М. Репетило, П. Л. Сохана. Для досліджуваних диференціально-символьним методом задач з двоточковими чи n-точковими умовами характерним було задання значення розв'язку лише в два або n моментів часу, а також те, що множина нулів характеристичного визначника була або порожньою, або не збігалася з $\mathbb{C}^s$. Випадок, коли характеристичний визначник задач тотожньо дорівнює нулеві, у згаданих вище дослідженнях був або неможливим, або не розглядався.

Отже, дослідження задач для рівнянь із частинними похідними загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з багатоточковими за часом умовами загальнішого вигляду за допомогою диференціально-символьного методу представляють інтерес як з точки зору застосувань, так і побудови загальної теорії багатоточкових задач. Залишаються також недостатньо вивченими питання ядра багатоточкових задач, зокрема, двоточкових, а також питання розв'язності таких задач у випадку, коли характеристичний визначник задачі тотожньо дорівнює нулеві.

Актуальність теми дисертаційної роботи полягає у необхідності:

– дослідження ядра задачі для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано локальні двоточкові умови, та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними, встановлення достатніх умов існування нетривіальних розв'язків задачі в класах цілих функцій, а також необхідних та достатніх умов існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків і їх побудові диференціально-символьним методом;

– встановлення умов існування та єдиності розв'язку задачі для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з неоднорідними локальними двоточковими умовами, а також задачі для неоднорідного рівняння із частин-

ними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з однорідними локальними двоточковими умовами у класах цілих функцій та у класах неперервно диференційовних функцій, якщо характеристичний визначник задачі відмінний від нуля для всіх значень аргумента, а також у класах квазіполіномів у випадку існування непорожньої множини нулів характеристичного визначника, яка не співпадає з $\mathbb{C}^s$, та побудови диференціально-символьним методом розв'язків задачі;

– дослідження за допомогою диференціально-символьного методу задачі з локальними двоточковими умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом у випадку, коли характеристичний визначник задачі тотожньо дорівнює нулеві, встановлення умов існування та неіснування розв'язку задачі та побудові розв'язку задачі у випадку його існування.

Ці питання є основним предметом досліджень дисертаційної роботи. Вивчення локальних двоточкових задач за допомогою диференціально-символьного методу є суттєвим як для застосувань, так і для побудови загальної теорії багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертаційної роботи відповідає науковому напряму кафедри вищої математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету „Львівська політехніка", виконана в межах науково-дослідної роботи „Дослідження розв'язності крайових задач для рівнянь з частинними похідними, розробка нових методів теорії функцій та функціонального аналізу, математичне моделювання процесів різної структури" (державний реєстраційний номер 0116U004101). Роботи проводились також у межах планових науково-дослідних робіт Львівського національного медичного університету імені Данила Галицького „Дослідження фізико-хімічних процесів у біологічних тканинах та технічних системах методами математичного моделювання" (0112U000161) та „Застосування математичних методів для дослідження фізико-хімічних процесів в біотехнічних системах" (0117U001078).

Мета і задачі дослідження. Дослідити у класах цілих функцій множину розв'язків однорідних задач з локальними двоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними. Встановити умови існування та єдиності розв'язку неоднорідних задач з локальними двоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними залежно від множини нулів характеристичного визначника задачі. Побудувати розв'язки розглядуваних задач.

Об'єкт дослідження: задачі з локальними двоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними.

Предмет дослідження: умови розв'язності задач з локальними двоточковими умовами за часом для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними та побудова розв'язків розглядуваних задач.

Методи дослідження: диференціально-символьний метод, методи теорії диференціальних рівнянь та теорії функцій комплексної змінної.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі вперше отримано такі нові результати:

— досліджено ядро задачі для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано локальні двоточкові умови, та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними; встановлено достатні умови існування нетривіальних розв'язків задачі в класах цілих функцій, а також необхідні та достатні умови існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків і запропоновано диференціально-символьний метод їх побудови; доведено, що така задача має лише тривіальний розв'язок у випадку, коли характеристичний визначник задачі є відмінним від нуля для всіх значень аргумента;

— встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з неоднорідними локальними двоточковими умовами, а також задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з однорідними локальними двоточковими умовами у класах цілих функцій та у класах неперервно диференційовних функцій, якщо характеристичний визначник задачі відмінний від нуля для всіх значень аргумента, а також у класах квазіполіномів у випадку існування непорожньої множини нулів характеристичного визначника, яка не співпадає з $\mathbb{C}^s$; запропоновано диференціально-символьний метод побудови розв'язків задачі;

— за допомогою диференціально-символьного методу досліджено задачу з локальними двоточковими умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом у випадку, коли характеристичний визначник задачі тотожньо дорівнює нулеві; знайдено умови існування та неіснування розв'язку задачі, а у випадку існування розв'язку задачі запропоновано спосіб його побудови.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна застосовувати у подальших теоретичних дослідженнях задач з локальними багатоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними, а також при дослідженні конкретних задач практики, які моделюються розглянутими задачами.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. У спільних працях [1 – 9] науковому керівнику З. М. Нитре-

бичу належить формулювання задач та аналіз отриманих результатів. В. С. Ільківу та П. Я. Пукачу у праці [6] належить ідея зображення нулів характеристичного визначника на комплексній площині, а також приклад 4.5, що стосується рівняння теорії пружності, а у праці [8] – приклад 3.2.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень доповідались та обговорювались на таких конференціях: Міжнародній науковій конференції „Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 2016 р.); Дванадцятій відкритій науковій конференції ІМФН Національного університету „Львівська політехніка" (Львів, 2016 р.); International conference on differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Львів, 2016 р.); VII Міжнародній науковій конференції „Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам'янець-Подільський, 2016 р.); Міжнародній науковій конференції „Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", присвяченій 80-річчю від дня народження проф. В. І. Фодчука (Чернівці, 2016 р.); Міжнародній науковій конференції, присвяченій 80-річчю від дня народження М. П. Ленюка (Чернівці, 2016 р.); Тринадцятій відкритій науковій конференції ІМФН Національного університету „Львівська політехніка", присвяченій 125-ти річчю з дня народження С. Банаха (Львів, 2017 р.); XVII Міжнародній науковій конференції „Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування" імені академіка М. Кравчука (Київ, 2016 р.); Міжнародній конференції „Диференціальні рівняння та їх застосування", присвяченій 75-річчю від дня народження проф. Д. І. Мартинюка (Кам'янець-Подільський, 2017 р.); International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (Cherkasy, 2017); Всеукраїнській науковій конференції „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 2018 р.); а також на засіданні Львівського міського семінару з диференціальних рівнянь (керівники: д.ф.-м.н., проф. М. І. Іванчов, д.ф.-м.н., проф. П. І. Каленюк; Львів, 2017 р.), наукових семінарах кафедри вищої математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету „Львівська політехніка" (2015 – 2018 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації висвітлено в 9 статтях [1 – 9], з яких 5 статей [1 – 4, 9] опубліковано у наукових фахових виданнях України, з них 2 статті [4, 9] перекладено у виданнях, які належать до міжнародної наукометричної бази „Scopus", 3 статті [5, 6, 8] – у наукових періодичних виданнях інших держав, які належать до міжнародних наукометричних баз („Scopus" та „Web of Science"). Також результати дисертації пройшли апробацію на Міжнародних та Всеукраїнських наукових конференціях [10 – 20].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 147 сторінок. Список використаних джерел налічує 137 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Використовуються такі позначення: $\mathbb{R}^s$ – s-вимірний дійсний евклідів простір; $\mathbb{C}^s$ – s-вимірний комплексний простір, $\mathbb{C}^1 \equiv \mathbb{C}$, $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел, $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел; $\mathbb{Z}_+^s$ – множина мультиіндексів $z = (z_1, \ldots, z_s)$, де $z_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, s}$.

Для $q = (q_1, \ldots, q_s), r = (r_1, \ldots, r_s) \in \mathbb{Z}_+^s$, $x = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_s) \in \mathbb{C}^s$ позначимо:
$q \leq r$, якщо $q_k \leq r_k$, $k = \overline{1, s}$; $x^r = \prod\limits_{i=1}^{s} {x_i}^{r_i}$, $\nu \cdot x = \nu_1 x_1 + \ldots + \nu_s x_s$; $C_r^q = \frac{r!}{q!(r-q)!}$, $r! = \prod\limits_{i=1}^{s} r_i!$, $\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^r = \frac{\partial^{|r|}}{\partial \nu_1^{r_1} \ldots \partial \nu_s^{r_s}}$, $|r| = r_1 + \ldots + r_s$; $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$; $O = (0, \ldots, 0)$ – нульовий вектор; τ – символ транспонування;
$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера.

K_L – клас квазіполіномів вигляду

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\,(x)\, e^{\alpha_j \cdot x},$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – попарно різні комплексні вектори з L, $L \subseteq \mathbb{C}^s$, $Q_1(x), \ldots, Q_m(x)$ – ненульові поліноми з комплексними коефіцієнтами;

$K_{\mathbb{C},L}$ – клас квазіполіномів вигляду

$$f\,(t, x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{N} P_{lj}\,(t, x)\, e^{\beta_l t + \alpha_j \cdot x},$$

де $P_{11}(t, x), \ldots, P_{Nm}(t, x)$ – ненульові поліноми змінних $t, x_1, \ldots, x_s$ з комплексними коефіцієнтами, $\beta_1, \ldots, \beta_N$ – попарно різні комплексні числа, а попарно різні комплексні вектори $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ належать до L.

Введемо класи функцій $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^s$, які допускають однозначне аналітичне продовження до цілих функцій певних порядків:

$A_{p'}$ – клас цілих функцій, порядок яких є меншим за p', де $1 < p' < \infty$;

A_∞ – клас усіх цілих функцій;

A_1 – клас функцій експоненційного типу;

$A_{1,r}$, $r > 0$, – клас цілих функцій дійсної змінної $x \in \mathbb{R}$ першого порядку і типу меншого, ніж r, або порядку меншого, ніж одиниця.

Крім того, позначимо:

$\mathbb{A}_{p'}$ – клас цілих функцій $U(t, x)$, які для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$ належать до $A_{p'}$;

$\mathbb{A}_{1,r}$ – клас цілих функцій $U(t, x)$, які для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$ належать до класу $A_{1,r}$.

У вступі обгрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та завдання досліджень, висвітлено наукову новизну, апробацію отриманих результатів та їх практичне та теоретичне значення.

У розділі 1 зроблено огляд літератури, що стосується багатоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь із частинними похідними, та наведено короткий опис отриманих результатів.

У дисертаційній роботі вивчається розв'язність двоточкової задачі

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x)\equiv\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+2a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}+b\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U=f(t,x),\ t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^s,\quad(1)$$

$$\begin{aligned}&A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x)+A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\varphi_0(x),\\&B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x)+B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x)=\varphi_1(x),\ \ h>0,\ \ x\in\mathbb{R}^s.\end{aligned}\qquad(2)$$

У рівнянні (1) $f(t,x)$ – задана ціла функція, операторні коефіцієнти $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – довільні диференціальні вирази з комплексними сталими коефіцієнтами скінченного або нескінченного порядку, причому символи $a(\nu)$, $b(\nu)$ цих коефіцієнтів є цілими функціями комплексної вектор-змінної $\nu\in\mathbb{C}^s$.

За умови, що $a(\nu)$ та $b(\nu)$ – поліноми, їх степені за сукупністю змінних позначено через $p_a\in\mathbb{Z}_+$ та $p_b\in\mathbb{Z}_+$, а також вважається, що $p_a=\infty$ та $p_b=\infty$, якщо $a(\nu)$ та відповідно $b(\nu)$ не є поліномами.

В умовах (2) $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, причому їх символи $A_1(\nu)$, $A_2(\nu)$, $B_1(\nu)$, $B_2(\nu)$ для кожного $\nu\in\mathbb{C}^s$ задовольняють умови:

$$|A_1(\nu)|^2+|A_2(\nu)|^2\neq 0,\quad |B_1(\nu)|^2+|B_2(\nu)|^2\neq 0.$$

Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо цілу функцію

$$U(t,x)=\sum_{\widehat{k}\in\mathbb{Z}_+^{s+1}}u_{\widehat{k}}\,t^{k_0}\,x^k,\ \ \widehat{k}=(k_0,k)=(k_0,k_1,\ldots,k_s),\ \ u_{\widehat{k}}\in\mathbb{C},$$

змінних t та $x\in\mathbb{R}^s$, що задовольняє рівняння (1) та двоточкові умови (2).

Дію диференціального виразу $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ з цілим символом $b(\nu)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}_+^s}b_k\nu^k$, де $b_k\in\mathbb{C}$, на функцію $U=U(t,x)$ у рівнянні (1) визначено рівністю:

$$b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U\equiv\sum_{k\in\mathbb{Z}_+^s}b_k\frac{\partial^{|k|}U}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_s^{k_s}}.$$

Дію диференціального виразу $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ на $\frac{\partial U}{\partial t}$ визначено аналогічно.

Розділ 2 присвячено дослідженню розв'язності однорідної задачі (1), (2), тобто задачі (1), (2), у якої $f(t,x)=0$, $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=0$. Встановлено умови існування лише тривіального розв'язку задачі, а також нетривіальних розв'язків однорідної задачі (1), (2). У випадку існування нетривіальних розв'язків задачі запропоновано спосіб їх побудови, використовуючи ідеї диференціально-символьного методу.

У підрозділі 2.1 сформульовано однорідну задачу (1), (2). На підставі рівняння (1) записано звичайне диференціальне рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu)\equiv\left(\frac{d^2}{dt^2}+2a(\nu)\frac{d}{dt}+b(\nu)\right)T(t,\nu)=0, \tag{3}$$

у якому $\nu\in\mathbb{C}^s$, і розглянуто його нормальну в точці $t=0$ фундаментальну систему розв'язків, що має такий вигляд:

$$\begin{gathered}T_0(t,\nu)=e^{-a(\nu)t}\left\{a(\nu)\frac{\sinh\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}+\cosh\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]\right\},\\ T_1(t,\nu)=e^{-a(\nu)t}\frac{\sinh\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}},\end{gathered} \tag{4}$$

де $D(\nu)=a^2(\nu)-b(\nu)$.

Оскільки коефіцієнти $a(\nu)$, $b(\nu)$ рівняння (3) за припущенням є цілими функціями, то функції $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ є також цілими функціями порядку $\overline{p}=\max\{p_a,p_b/2\}$ стосовно вектор-параметра ν.

На основі умов (2) складено визначник вигляду

$$\Delta(\nu)=\begin{vmatrix} A_1(\nu) & A_2(\nu)\\ B_1(\nu)\,T_0(h,\nu)+B_2(\nu)\,\dfrac{dT_0}{dt}(h,\nu) & B_1(\nu)T_1(h,\nu)+B_2(\nu)\,\dfrac{dT_1}{dt}(h,\nu)\end{vmatrix}, \tag{5}$$

який називається характеристичним визначником задачі (1), (2). Функція $\Delta(\nu)$ як суперпозиція цілих функцій є також цілою.

Для визначника $\Delta(\nu)$ є можливими такі випадки:

1) $\Delta(\nu)\neq 0\ \ \forall\nu\in\mathbb{C}^s$;

2) $\Delta(\nu)\not\equiv 0$ і $\{\nu\in\mathbb{C}^s:\ \ \Delta(\nu)=0\}\neq\varnothing$;

3) $\Delta(\nu)\equiv 0$ на $\mathbb{C}^s$.

У підрозділі 2.2 розглянуто випадок $\Delta(\nu)\neq 0\ \ \forall\nu\in\mathbb{C}^s$.

Нехай $p=\max\{\overline{p},1\}$ і $p'=p/(p-1)$ для $1<p<\infty$, а також $p'=\infty$ для $p=1$ та $p'=1$ для $p=\infty$.

Теорема 2.1. *Якщо* $\Delta(\nu)\neq 0\ \ \forall\nu\in\mathbb{C}^s$, *то однорідна задача* (1), (2) *у класі цілих функцій* $\mathbb{A}_{p'}$ *має лише тривіальний розв'язок.*

У підрозділі 2.3 досліджено умови існування розв'язків однорідної задачі (1), (2) у випадку $M \neq \varnothing$ і $M \neq \mathbb{C}^s$, де

$$M = \left\{\nu \in \mathbb{C}^s\colon \ \ \Delta(\nu) = 0\right\}. \tag{6}$$

Спочатку досліджено однорідну задачу (1), (2) для випадку $s = 1$. Тоді множина M може містити скінченну кількість нулів функції $\triangle(\nu)$ або може складатись з нескінченної кількості нулів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ відповідно скінченної кратності $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots$, причому $|\alpha_n| \to \infty$ при $n \to \infty$. Зауважимо, що для нуля α функції $\Delta(\nu)$ кратності p_α виконуються умови:

$$\Delta(\alpha) = 0,\ \Delta'(\alpha) = 0,\ \ldots,\ \Delta^{(p_\alpha - 1)}(\alpha) = 0,\ \Delta^{(p_\alpha)}(\alpha) \neq 0.$$

Теорема 2.2. *Нехай $\psi \in K_M$ і має вигляд*

$$\psi(x) = Q\,(x)\, e^{\alpha x}, \tag{7}$$

в якому $\alpha \in M$ (α – нуль функції $\Delta(\nu)$ кратності $p_\alpha \in \mathbb{N}$), $Q\,(x)$ – нетривіальний поліном степеня $n \leq p_\alpha - 1$. Тоді функція

$$U\,(t,x) = Q\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{\big[A_2(\nu)T_0(t,\nu) - A_1\,(\nu)\,T_1\,(t,\nu)\,\big]e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}, \tag{8}$$

де $T_0\,(t,\nu)\,,\ T_1\,(t,\nu)$ – функції (4), є нетривіальним розв'язком однорідної задачі (1), (2) з класу $K_{\mathbb{C},M}$. Навпаки, якщо розв'язок однорідної задачі (1), (2) є квазіполіномом з класу $K_{\mathbb{C},M}$ вигляду

$$U\,(t,x) = \sum_{l=1}^{N} P_l\,(t,x)\, e^{\beta_l t + \alpha x}, \tag{9}$$

де $N \in \mathbb{N}$, $P_l\,(t,x)\,,\ l = \overline{1,N}$, – поліноми з комплексними коефіцієнтами степеня n за змінною x, $\beta_l, \alpha \in \mathbb{C}$, $\beta_l \neq \beta_r$ для $r \neq l$, $r, l = \overline{1,N}$, то $\alpha \in M$, причому $n < p_\alpha$ і цей розв'язок можна подати у вигляді (8), в якому $Q\,(x) = \sum\limits_{l=1}^{N}\big(\beta P_l\,(0,x) + \frac{\partial P_l}{\partial t}\,(0,x)\big)$.

Далі досліджено випадок $x \in \mathbb{R}^s,\ s \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Запишемо функцію вигляду

$$\Phi(t,x,\nu) = \Big\{A_2\,(\nu)\,T_0\,(t,\nu) - A_1\,(\nu)\,T_1\,(t,\nu)\,\Big\}e^{\nu\cdot x}, \tag{10}$$

яка є цілою за вектор-параметром $\nu \in \mathbb{C}^s$. Позначимо її порядок за сукупністю параметрів $\nu_1, \ldots, \nu_s$ через $\widetilde{p}$. Зауважимо, що $1 \leq \widetilde{p} \leq p$, де p – порядок функцій $T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}$, $T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}$.

Нехай $\alpha \in M$, де M – множина вигляду (6). Для комплексного вектора α розглянемо множину мультиіндексів:

$$\Omega_1(\alpha) = \left\{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s) \in \mathbb{Z}_+^s\colon \quad \Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{\omega}\Delta(\nu)\Big|_{\nu=\alpha} \neq 0\right\}. \tag{11}$$

Поруч з множиною (11) введемо в розгляд множини:

$$\Omega(\alpha) = \{\widetilde{\omega} \in \mathbb{Z}_+^s : \quad \widetilde{\omega} \geq \omega,\ \omega \in \Omega_1(\alpha)\}, \quad \overline{\Omega}(\alpha) = \mathbb{Z}_+^s \setminus \Omega(\alpha).$$

Теорема 2.3. *Якщо* $\omega \in \overline{\Omega}(\alpha)$, *то функція вигляду*

$$U(t,x) = \Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{\omega} \Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} \tag{12}$$

є нетривіальним розв'язком однорідної задачі (1), (2), *де* $\Phi(t,x,\nu)$ *– функція* (10).

Теорема 2.4. *Нехай* M *– множина* (6) *і* $g(x)$ *– нетривіальний одночленний квазіполіном з класу* K_M *вигляду*

$$g(x) = Q(x)e^{\alpha \cdot x}, \tag{13}$$

в якому $Q(x) = \sum\limits_{0 \leq |r| \leq n} D_r x^r$ *– поліном* n*-го степеня* ($\sum\limits_{|r|=n} |D_r| > 0,\ n \in \mathbb{Z}_+$), *коефіцієнти* D_r *якого задовольняють однорідну систему алгебричних рівнянь:*

$$\sum_{\substack{r \geq q,\, 0 \leq |r| \leq n, \\ r-q \in \Omega_1(\alpha)}} D_r C_r^q \Delta^{(r-q)}(\alpha) = 0, \qquad q \in \mathbb{Z}_+^s,\ |q| \leq n-1. \tag{14}$$

Тоді квазіполіном

$$U(t,x) = g\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O} = Q\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}, \tag{15}$$

в якому $\Phi(t,x,\nu)$ *– функція вигляду* (10), *є нетривіальним розв'язком однорідної задачі* (1), (2). *Навпаки, якщо ненульовий квазіполіном, одночленний за змінною* x, *тобто* $U(t,x) = F(t,x)e^{\alpha \cdot x}$, *є розв'язком однорідної задачі* (1), (2), *то його можна зобразити у вигляді* (15), *де* $g(x)$ *належить до* K_M, *має вигляд* (13) *і коефіцієнти* D_r *полінома* $Q(x)$ *задовольняють систему* (14).

Підрозділ 2.4 присвячений дослідженню розв'язності задачі (1), (2) у випадку $\Delta(\nu) \equiv 0$.

Теорема 2.5. *Якщо для однорідної задачі* (1), (2) *виконується умова* $\Delta(\nu) \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}^s$, *то у класі* $\mathbb{A}_{\widetilde{p}'}$ *існують цілі нетривіальні розв'язки цієї задачі, які можна подати у вигляді*

$$U(t,x) = \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}, \tag{16}$$

де $\varphi(x)$ *– довільна ціла функція, що має порядок, спряжений з порядком* $\widetilde{p}$.

У розділі 3 досліджено розв'язність задачі (1), (2) у випадку $f(t,x) = 0$, $|\varphi_1(x)|^2 + |\varphi_1(x)|^2 > 0$. Виділено класи цілих функцій як класи однозначної

розв'язності задачі. Встановлено умови існування та умови неіснування розв'язку задачі залежно від множини нулів характеристичного визначника. У випадку існування розв'язків задачі запропоновано диференціально-символьний метод їх побудови.

У підрозділі 3.1 сформульовано задачу (1), (2), під якою у розділі 3 розуміється задача для однорідного рівняння (1) ($f(t,x)=0$) з неоднорідними умовами (2). Введено допоміжні функції, необхідні для дослідження розв'язності задачі. Зокрема, введено функції $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$, які є розв'язками звичайного диференціального рівняння (3), що задовольняють двоточкові умови

$$\begin{gathered} A_1(\nu)\widetilde{T}_k(0,\nu)+A_2(\nu)\frac{d\widetilde{T}_k}{dt}(0,\nu)=\delta_{0k}, \\ B_1(\nu)\widetilde{T}_k(h,\nu)+B_2(\nu)\frac{d\widetilde{T}_k}{dt}(h,\nu)=\delta_{1k}, \quad k\in\{0,1\}, \end{gathered} \tag{17}$$

де δ_{jk} – символ Кронекера.

Умова $\Delta(\nu)\neq 0$ є умовою існування функцій $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$, де $\Delta(\nu)$ – характеристичний визначник задачі (1), (2) вигляду (5).

У підрозділі 3.2 досліджено задачу (1), (2) для випадку $\Delta(\nu)\neq 0$ для кожного $\nu\in\mathbb{C}^s$. Тоді функція $\Delta^{-1}(\nu)$, як і $\Delta(\nu)$, є цілою функцією, а функції $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$ визначаються однозначно для довільного $\nu\in\mathbb{C}^s$, є цілими стосовно цього вектор-параметра і мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_0(t,\nu)&=\frac{e^{-a(t+h)}}{\Delta(\nu)}\Big[(B_1-aB_2)\frac{\sinh\left[(h-t)\sqrt{a^2-b}\right]}{\sqrt{a^2-b}}+ \\ &\quad +B_2\cosh\left[(h-t)\sqrt{a^2-b}\right]\Big], \\ \widetilde{T}_1(t,\nu)&=\frac{e^{-at}}{\Delta(\nu)}\left[(A_1-aA_2)\frac{\sinh\left[t\sqrt{a^2-b}\right]}{\sqrt{a^2-b}}-A_2\cosh\left[t\sqrt{a^2-b}\right]\right], \end{aligned} \tag{18}$$

де $a=a(\nu)$, $b=b(\nu)$, $A_1=A_1(\nu)$, $A_2=A_2(\nu)$, $B_1=B_1(\nu)$, $B_2=B_2(\nu)$.

Теорема 3.1. *Нехай* $\forall\nu\in\mathbb{C}^s$ $\Delta(\nu)\neq 0$ *і* p *– порядок цілих функцій* $\widetilde{T}_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}$ *за сукупністю параметрів* $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$. *Якщо* $\varphi_0,\varphi_1\in A_{p'}$, *то у класі* $\mathbb{A}_{p'}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2). *Цей розв'язок можна подати у вигляді*

$$U(t,x)=\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O}+\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O}. \tag{19}$$

Підрозділ 3.3 присвячений встановленню умов існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у класі $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus M}$, де M – множина вигляду (6), причому $M\neq\mathbb{C}^s$ і $M\neq\varnothing$.

Для $\nu \in \mathbb{C}^s \backslash M$ функції $\widetilde{T}_0(t,\nu), \widetilde{T}_1(t,\nu)$ можна однозначно знайти і мають вигляд (18). Вони є квазіполіномами за змінною t і можуть бути мероморфними за вектор-змінною ν на множині M.

Теорема 3.2. *Нехай φ_0, $\varphi_1 \in K_{\mathbb{C}^s \backslash M}$ і M – множина* (6)*, причому $M \neq \mathbb{C}^s$, $M \neq \varnothing$. Тоді у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s \backslash M}$ існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2)*. Цей розв'язок можна подати у вигляді* (19)*, де $\widetilde{T}_0(t,\nu), \widetilde{T}_1(t,\nu)$ – функції* (18)*.*

Ще один клас існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) знайдено для випадку $s = 1$.

Теорема 3.3. *Нехай $r = \inf\limits_{\nu \in M} |\nu|$, де M – множина* (6)*, причому $r \neq 0$. Якщо φ_0, $\varphi_1 \in A_{1,r}$, то у класі функцій $\mathbb{A}_{1,r}$ існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2)*, який можна подати у вигляді* (19)*.*

У підрозділі 3.4 досліджено розв'язність задачі (1), (2), якщо $\Delta(\nu) \equiv 0$.

Теорема 3.4. *Нехай для задачі* (1), (2) *виконується тотожність $\Delta(\nu) \equiv 0$ на $\mathbb{C}^s$. Якщо для деякого $x \in \mathbb{R}^s$ та для $\varphi_0, \varphi_1 \in A_{p'}$ справджується хоча б одна з умов*

$$\left\{B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) T_1\left(h, \frac{\partial}{\partial x}\right) + B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{dT_1}{dt}\left(h, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\varphi_0(x) \neq A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_1(x) \quad (20)$$

або

$$\left\{B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) T_0\left(h, \frac{\partial}{\partial x}\right) + B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{dT_0}{dt}\left(h, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\varphi_0(x) \neq A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_1(x), \quad (21)$$

то у класі цілих функцій $\mathbb{A}_{p'}$ розв'язок задачі (1), (2) *не існує.*

Умовам розв'язності задачі (1), (2) у класах квазіполіномів та цілих функцій присвячено такі теореми.

Теорема 3.5. *Нехай для задачі* (1), (2) *$\Delta(\nu) \equiv 0$ на $\mathbb{C}^s$ і $A_1(\nu) \not\equiv 0$. Якщо для ненульового квазіполінома φ_0 з K_P, де $P = \{\nu \in \mathbb{C}^s : \ A_1(\nu) \neq 0\}$, на $\mathbb{R}^s$ справджується тотожність*

$$A_1^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) T_0\left(h, \frac{\partial}{\partial x}\right) + B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{dT_0}{dt}\left(h, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\varphi_0(x) \equiv \varphi_1(x), \quad (22)$$

то розв'язок задачі (1), (2) *у класі $K_{\mathbb{C},P}$ існує. Цей розв'язок задачі можна знайти за формулою*

$$U(t,x) = \varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\frac{T_0(t,\nu)e^{\nu \cdot x}}{A_1(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=O}. \quad (23)$$

Аналогічну теорему існування розв'язку задачі (1), (2) у класі квазіполіномів сформульовано у випадку $A_2(\nu) \not\equiv 0$ (**теорема 3.6**).

Теорема 3.7. *Нехай для задачі* (1), (2) $\Delta(\nu) \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}^s$ *і* $A_1(\nu) = A_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Якщо на* $\mathbb{R}^s$ *для* $\varphi_0 \in A_{p'}$ *справджується тотожність*

$$\left\{B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T_0\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)+B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{dT_0}{dt}\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\varphi_0(x)\equiv A_1\varphi_1(x), \qquad (24)$$

то розв'язок задачі (1), (2) *у класі* $\mathbb{A}_{p'}$ *існує. Цей розв'язок задачі можна знайти за формулою*

$$U\left(t,x\right)=\frac{1}{A_1}\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O}. \qquad (25)$$

Аналогічну теорему існування розв'язків задачі (1), (2) у класі цілих функцій певного порядку доведено і для випадку $A_2(\nu) = A_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ (**теорема 3.8**).

У розділі 4 досліджено множину розв'язків задачі (1), (2), у якій $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$ (надалі задача (1), (2)).

Підрозділ 4.1 присвячено формулюванню задачі.

У підрозділі 4.2 у випадку $\Delta(\nu) \neq 0$ для кожного $\nu \in \mathbb{C}^s$ виділено клас цілих функцій, до якого має належати функція $f(t,x)$, щоб розв'язок задачі існував і був єдиним.

Введено функцію

$$G\left(t,\lambda,\nu\right)=\frac{e^{\lambda t}-T_0\left(t,\nu\right)-\lambda T_1\left(t,\nu\right)}{L\left(\lambda,\nu\right)}, \qquad (26)$$

де $T_0(t,\nu), T_1(t,\nu)$ – функції вигляду (4). Функція (26) є розв'язком задачі Коші

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)G=e^{\lambda t},$$

$$G\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,$$

а тому є цілою за параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ та вектор-параметром $\nu \in \mathbb{C}^s$. Крім того, введено ще одну функцію вигляду

$$F\left(t,\lambda,\nu\right)=\frac{e^{\lambda t}-\left[A_1(\nu)+\lambda A_2(\nu)\right]\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right)-\left[B_1(\nu)+\lambda B_2(\nu)\right]e^{\lambda h}\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)}{L\left(\lambda,\nu\right)}, \qquad (27)$$

де $\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right), \widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)$ – функції (18).

Лема 1. *Для функцій* (26) *та* (27) *правильним є таке зображення:*

$$F\left(t,\lambda,\nu\right)=G\left(t,\lambda,\nu\right)-\left\{B_1(\nu)G\left(h,\lambda,\nu\right)+B_2(\nu)\frac{\partial G}{\partial t}\left(h,\lambda,\nu\right)\right\}\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right). \qquad (28)$$

Лема 2. *Функція $F(t,\lambda,\nu)$ є квазіполіномом за t та цілою за параметром λ та вектор-параметром ν.*

Теорема 4.1. *Якщо $f \in \mathbb{A}_{p'}$ і для довільного $\nu \in \mathbb{C}^s$ виконується умова $\Delta(\nu) \neq 0$, то у класі $\mathbb{A}_{p'}$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2). Цей розв'язок можна подати у вигляді*

$$U(t,x) = f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{F(t,\lambda,\nu)\, e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}, \tag{29}$$

де $F(t,\lambda,\nu)$ – функція (27).

У підрозділі 4.3 встановлено однозначну розв'язність задачі (1), (2) у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^s\setminus M}$ та у певному класі цілих функцій, якщо $s=1$.

Теорема 4.2. *Нехай $f \in K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^s\setminus M}$, де M – множина (6), причому $M \neq \mathbb{C}^s$ і $M \neq \varnothing$. Тоді у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^s\setminus M}$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2). Цей розв'язок можна подати у вигляді (29), де $F(t,\lambda,\nu)$ – функція (27).*

Теорема 4.3. *Нехай $r = \inf\limits_{\nu\in M} |\nu|$, де M – множина (6) при $s=1$, причому $r>0$, тобто $\Delta(0)\neq 0$. Якщо $f \in \mathbb{A}_{1,r}$, то у класі функцій $\mathbb{A}_{1,r}$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який можна подати у вигляді (29).*

У підрозділі 4.4 знайдено умови існування та неіснування розв'язків задачі у випадку $\Delta(\nu) \equiv 0$ на $\mathbb{C}^s$.

Теорема 4.4. *Нехай для двоточкової задачі (1), (2) виконуються умови:*
1) $\Delta(\nu) \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}^s$,
2) $\exists x \in \mathbb{R}^s$ *таке, що для* $f \in \mathbb{A}_{p'}$ *справджується хоча б одна з нерівностей:*

$$f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(B_1(\nu)G(h,\lambda,\nu)+B_2(\nu)\frac{\partial G}{\partial t}(h,\lambda,\nu)\right)A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} \not\equiv 0,$$

$$f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(B_1(\nu)G(h,\lambda,\nu)+B_2(\nu)\frac{\partial G}{\partial t}(h,\lambda,\nu)\right)A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} \not\equiv 0, \tag{30}$$

тоді розв'язок задачі (1), (2) у класі $\mathbb{A}_{p'}$ не існує.

Теорема 4.5. *Нехай для двоточкової задачі (1), (2) виконуються умови:*
1) $\Delta(\nu) \equiv 0$ на $\mathbb{C}^s$,
2) *для* $\forall\, x \in \mathbb{R}^s$ *і* $f \in \mathbb{A}_{p'}$ *справджується тотожність:*

$$f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(B_1(\nu)G(h,\lambda,\nu)+B_2(\nu)\frac{\partial G}{\partial t}(h,\lambda,\nu)\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} \equiv 0, \tag{31}$$

тоді розв'язок задачі (1), (2) у класі $\mathbb{A}_{p'}$ існує і його можна знайти за формулою

$$U(t,x) = f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{e^{\lambda t} - T_0(t,\nu) - \lambda T_1(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)}e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}. \tag{32}$$

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню розв'язності задач з локальними за часовою змінною двоточковими умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними у просторах цілих функцій.

Одержано такі нові результати:

• досліджено ядро задачі для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано локальні двоточкові умови, та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними; встановлено достатні умови існування нетривіальних розв'язків задачі в класах цілих функцій, а також необхідні та достатні умови існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків і запропоновано диференціально-символьний метод їх побудови; доведено, що однорідна задача має лише тривіальний розв'язок у випадку, коли характеристичний визначник задачі є відмінним від нуля для всіх значень аргумента;

• встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з неоднорідними локальними двоточковими умовами, а також задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з однорідними локальними двоточковими умовами у класах цілих функцій та у класах неперервно диференційовних функцій, якщо характеристичний визначник задачі відмінний від нуля для всіх значень аргумента, а також у класах квазіполіномів у випадку існування непорожньої множини нулів характеристичного визначника, яка не співпадає з $\mathbb{C}^s$; запропоновано диференціально-символьний метод побудови розв'язків задачі;

• за допомогою диференціально-символьного методу досліджено задачу з локальними двоточковими умовами, що містять диференціальні поліноми, для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними у випадку, коли характеристичний визначник задачі тотожньо дорівнює нулеві; знайдено умови існування та неіснування розв'язку задачі; у випадку існування розв'язків задачі запропоновано спосіб їх побудови.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна застосовувати у подальших теоретичних дослідженнях задач з локальними багатоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними та систем таких рівнянь, а також при дослідженні конкретних задач практики, які моделюються розглянутими у дисертації задачами.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Однорідна задача з локальними крайовими умовами на границі смуги для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Математика і інформатика. 2015. Т. 27, № 2. С. 98–108.

2. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про ядро двоточкової задачі для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2016. Т. 59, № 3. С. 43–54.

3. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Критерій існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків однорідної двоточкової задачі для рівняння із частинними похідними // Буков. матем. журнал. 2016. Т. 4, № 3-4. С. 140–149.

4. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Диференціально-символьний метод розв'язування двоточкової за часом задачі для рівняння із частинними похідними // Укр. матем. вісник. 2016. Т. 13, № 4. С. 516–533

те саме: Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation // J. Math. Sci. 2017. Vol. 224, № 4. P. 541–554.

5. Malanchuk O. M., Nytrebych Z. M. Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables // Open Mathematics. 2017. № 15. P. 101–110.

6. Homogeneous problem with two-point conditions in time for some equations of mathematical physics / Z. M. Nytrebych, O. M. Malanchuk, V. S. Il'kiv, P. Ya. Pukach // Azerb. J. Math. 2017. Vol. 7, № 2. P. 180–196.

7. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про умови розв'язності двоточкової за часом задачі для рівняння з частинними похідними // Вісник Нац. ун-ту „Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. 2017. № 871. С. 93–98.

8. On the solvability of two-point in time problem for PDE / Z. M. Nytrebych, O. M. Malanchuk, V. S. Il'kiv, P. Ya. Pukach // Ital. J. of Pure and Applied Mathematics. 2017. № 38. P. 715–726.

9. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Диференціально-символьний метод розв'язування двоточкової за часом задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними // Укр. матем. вісник. 2017. Т. 14, № 1. С. 86–102

те саме: Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the problem two-point in time for a nonhomogeneous partial differential equation // J. Math. Sci. 2017. Vol. 227, № 1. P. 68–80.

10. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про множину розв'язків однорідної двоточкової задачі для рівняння з частинними похідними // Диф. рівняння та їх застосування: тези доп. міжнар. наук. конф., присв. 70-річчю акад. М. О. Перестюка (м. Ужгород, 19–21 травня 2016 р.). Ужгород, 2016. С. 103.

11. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про ядро двоточкової за часом задачі

для рівняння з частинними похідними // 12-а відкрита наук. конф. ІМФН Нац. ун-ту „Львівська політехніка”: збірник матеріалів конф. (м. Львів, 2–3 червня 2016 р.). Львів, 2016. С. 35.

12. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. About the set of solutions of the homogeneous two-point problem for the PDE of second order in time and infinite order in spatial variables // Intern. Conf. on Diff. Equations dedic. to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky: Book of Abstracts (Lviv, September 20–24, 2016). Lviv, 2016. P. 95–96.

13. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. Homogeneous Two-point in Time Problem for PDE // Intern. conf. „Differential-Functional Equations and their Applications”, dedic. to the 80th anniversary of Prof. V. I. Fodchuk: Materials of conf. (Chernivtsi, September 28–30, 2016). Chernivtsi, 2016. P. 125–126.

14. Нитребич З. М., Маланчук О. М., Когут І. В. Критерій існування квазіполіномних розв’язків однорідної двоточкової задачі // 13-а відкрита наук. конф. ІМФН Нац. ун-ту „Львівська політехніка”, присв. 125-річчю від дня народження С. Банаха: збірник матеріалів конф. (м. Львів, 30–31 березня 2017 р.). Львів, 2017. С. 55.

15. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Однорідна крайова задача у смузі для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Сучасні проблеми матем. моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доп. VII Міжнар. наук. конф. (м. Кам’янець-Подільський, 21–22 квітня 2016 р.). Кам’янець-Подільський, 2016. С. 161–162.

16. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про ядро однорідної крайової задачі в смузі для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Диф. та інтегр. рівняння, їх застосування: матеріали XVII міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 19–20 травня 2016 р.). Київ, 2016. С. 211–212.

17. Маланчук О. М. Про ядро двоточкової за часом задачі для рівняння із частинними похідними // Міжнар. наук. конф., присв. 80-річчю від дня народження М. П. Ленюка: матеріали конф. (м. Чернівці, 28–30 жовтня 2016 р.). Чернівці, 2016. С. 163.

18. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про існування нетривіальних розв’язків однорідної двоточкової задачі для деяких класичних рівнянь математичної фізики // Міжнар. конф. „Диф. рівняння та їх застосування”, присв. 75-річчю від дня народження д.ф.-м.н., проф. Д. І. Мартинюка: матеріали конф. (м. Кам’янець-Подільський, 19–21 травня 2017 р.). Кам’янець-Подільський, 2017. С. 92–93.

19. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. Two-point problem for homogeneous PDE of second order in time with nonhomogeneous conditions // Intern. Conf. on Diff. Equations, Math. Physics and Applications: Book of Abstracts (Cherkasy, October 17–19, 2017). Cherkasy, 2017. P. 68–69.

20. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про умови неіснування розв'язку двоточкової задачі для рівняння з частинними похідними // Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та матем. аналізу": матеріали конф. (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.). Ворохта, 2018. С. 99–100.

АНОТАЦІЯ

Маланчук О. М. Диференціально-символьний метод розв'язування двоточкових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.02 „Диференціальні рівняння". — Національний університет „Львівська політехніка". — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню розв'язності задач з локальними за часовою змінною двоточковими умовами, які містять диференціальні поліноми, для рівнянь із частинними похідними у просторах цілих функцій.

Досліджено ядро задачі для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано локальні двоточкові умови, та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними. Встановлено достатні умови існування нетривіальних розв'язків задачі в класах цілих функцій, а також необхідні та достатні умови існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків і запропоновано диференціально-символьний метод їх побудови. Знайдено умови існування лише тривіального розв'язку задачі.

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з неоднорідними локальними двоточковими умовами, а також задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з однорідними локальними двоточковими умовами у класах цілих функцій та у класах неперервно диференційовних функцій. Запропоновано диференціально-символьний метод побудови розв'язків задачі.

За допомогою диференціально-символьного методу досліджено задачу з локальними двоточковими умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними у випадку, коли характеристичний визначник задачі тотожньо дорівнює нулеві. Знайдено умови існування та неіснування розв'язку задачі. У випадку існування розв'язків задачі запропоновано спосіб їх побудови.

Ключові слова: диференціально-символьний метод, рівняння з частинними похідними нескінченного порядку, локальні двоточкові умови, характеристичний визначник.

АННОТАЦИЯ

Маланчук О. М. Дифференциально-символьный метод решения двухточечных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.02 „Дифференциальные уравнения". — Национальный университет „Львовская политехника". — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2018.

Диссертация посвящена исследованию разрешимости задач с локальными по временной переменной двухточечными условиями для уравнений в частных производных в пространствах целых функций. Исследовано ядро задачи для уравнений в частных производных второго порядка по временной переменной, по которой заданы локальные двухточечные условия, содержащие дифференциальные полиномы, и в общем бесконечного порядка по пространственным переменным. Установлены достаточные условия существования нетривиальных решений задачи в пространствах целых функций, а также необходимые и достаточные условия существования нетривиальных квазиполиномиальных решений и предложен дифференциально-символьный метод построения решения задачи.

Установлены условия существования и единственности решения задачи для однородного уравнения в частных производных второго порядка по временной переменной и в общем бесконечного порядка по пространственным переменным с неоднородными локальными двухточечными условиями, а также задачи для неоднородного уравнения в частных производных второго порядка по временной переменной и в общем бесконечного порядка по пространственным переменным с однородными локальными двухточечными условиями в классах целых функций и непрерывно дифференцируемых функций, а также в классах квазиполиномов. Предложен дифференциально-символьный метод построения решений задачи.

С помощью дифференциально-символьного метода исследована задача в случае, если характеристический определитель тождественно равен нулю. Найдены условия существования и несуществования решения задачи. В случае существования решений предложен способ их построения.

Ключевые слова: дифференциально-символьный метод, уравнение в частных производных бесконечного порядка, локальные двухточечные условия, характеристический определитель.

ABSTRACT

Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the two-point problems for partial differential equations. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis is presented for the degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics (Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.02 „Differential equations". — Lviv Polytechnic National University. — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018.

The dissertation is devoted to investigation of solvability of the problems with local two-point in time conditions which contain differential polynomials, for partial differential equations in the spaces of entire functions.

The kernel of the problem for partial differential equation of second order in time variable in which local two-point conditions are given and generally infinite order in spatial variables is investigated. Sufficient conditions of existence of the nontrivial solutions in the classes of entire functions, and also necessary and sufficient conditions of existence of nontrivial quasipolynomial solutions are established. The differential-symbol method of constructing the solutions is proposed. The conditions of existence only trivial solution of the problem are found.

The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem for homogeneous partial differential equation of second order in time and generally infinite order in spatial variables with nonhomogeneous local two-point conditions, and also the problem for nonhomogeneous partial differential equation of second order in time and generally infinite order in spatial variables with homogeneous local two-point conditions in the classes of entire functions, continuously differentiable functions and in classes of quasipolynomials are established. The differential-symbol method of constructing the solutions of the problem is proposed.

The problem with local two-point conditions for partial differential equation of second order in time variable and generally infinite order in spatial variables when the characteristic determinant of the problem identically equals to zero is investigated by differential-symbol method. The conditions of existence and nonexistence solution of the problem are found. In the case of existence of solutions of the problem the method of their construction is proposed.

Key words: differential-symbol method, partial differential equation of infinite order, local two-point conditions, characteristic determinant.