Національний університет „Львівська політехніка”
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Львівський національний університет ім. Івана Франка
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Маланчук Оксана Михайлівна

УДК 517.95

ДИСЕРТАЦІЯ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-СИМВОЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ДВОТОЧКОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

01.01.02 — диференціальні рівняння
01 – фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
О. М. Маланчук

Науковий керівник: **Нитребич Зіновій Миколайович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Львів — 2018

АНОТАЦІЯ

Маланчук О. М. Диференціально-символьний метод розв'язування двоточкових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.02 „Диференціальні рівняння". — Національний університет „Львівська політехніка". — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку літератури. У вступі обгрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача, а також наведено дані про те, де доповідались, обговорювались та опубліковані основні результати дисертації.

У розділі 1 наведено огляд літератури, що стосується теми дисертації, та зроблено короткий опис результатів дисертаційної роботи.

У розділі 2 розглянуто однорідну задачу з локальними двоточковими за часом умовами для диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку за часовою змінною та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними. Встановлено умови, за яких існує лише тривіальний розв'язок даної задачі, а також умови існування нетривіальних розв'язків задачі. У випадку існування ненульових розв'язків задачі вказано спосіб їх побудови, використавши для цього ідеї диференціально-символьного методу.

У розділі 3 досліджено задачу з неоднорідними локальними двоточкови-

ми за часом умовами для однорідного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку за часовою змінною та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними. Виділено класи цілих функцій, до яких повинні належати праві частини двоточкових умов, щоб розв'язок задачі існував і був єдиним у відповідному класі цілих функцій. Вказано спосіб побудови розв'язку задачі за допомогою диференціально-символьного методу. Встановлено також умови, за яких розв'язок задачі не існує.

У розділі 4 досліджено задачу з однорідними локальними двоточковими за часом умовами для неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку за часовою змінною та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними. Виділено класи цілих функцій як класи однозначної розв'язності задачі. При цьому права частина рівняння повинна належати до класу цілих функцій з певним порядком за просторовими змінними. У випадку існування розв'язків задачі вказано спосіб їх побудови. Встановлено також умови, за яких розв'язок задачі не існує.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна застосовувати у подальших теоретичних дослідженнях задач з локальними багатоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними, а також при дослідженні конкретних задач практики, зокрема, які моделюються розглянутими у дисертації задачами.

Ключові слова: диференціально-символьний метод, рівняння з частинними похідними нескінченного порядку, локальні двоточкові умови, характеристичний визначник.

Список публікацій за темою дисертації:

1. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Однорідна задача з локальними крайовими умовами на границі смуги для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Математика

і інформатика. 2015. Т. 27, № 2. С. 98–108.

2. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про ядро двоточкової задачі для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2016. Т. 59, № 3. С. 43–54.

3. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Критерій існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків однорідної двоточкової задачі для рівняння із частинними похідними // Буков. матем. журнал. 2016. Т. 4, № 3-4. С. 140–149.

4. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Диференціально-символьний метод розв'язування двоточкової за часом задачі для рівняння із частинними похідними // Укр. матем. вісник. 2016. Т. 13, № 4. С. 516–533

те саме: Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation // J. Math. Sci. 2017. Vol. 224, № 4. P. 541–554.

5. Malanchuk O. M., Nytrebych Z. M. Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables // Open Mathematics. 2017. № 15. P. 101–110.

6. Homogeneous problem with two-point conditions in time for some equations of mathematical physics / Z. M. Nytrebych, O. M. Malanchuk, V. S. Il'kiv, P. Ya. Pukach // Azerb. J. Math. 2017. Vol. 7, № 2. P. 180–196.

7. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про умови розв'язності двоточкової за часом задачі для рівняння з частинними похідними // Вісник Нац. ун-ту „Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. 2017. № 871. С. 93–98.

8. On the solvability of two-point in time problem for PDE / Z. M. Nytrebych, O. M. Malanchuk, V. S. Il'kiv, P. Ya. Pukach // Ital. J. of Pure and Applied Mathematics. 2017. № 38. P. 715–726.

9. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Диференціально-символьний метод розв'язування двоточкової за часом задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними // Укр. матем. вісник. 2017. Т. 14, № 1. С. 86–102

те саме: Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the problem two-point in time for a nonhomogeneous partial differential equation // J. Math. Sci. 2017. Vol. 227, № 1. P. 68–80.

10. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про множину розв'язків однорідної двоточкової задачі для рівняння з частинними похідними // Диф. рівняння та їх застосування: тези доп. міжнар. наук. конф., присв. 70-річчю акад. М. О. Перестюка (м. Ужгород, 19–21 травня 2016 р.). Ужгород, 2016. С. 103.

11. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про ядро двоточкової за часом задачі для рівняння з частинними похідними // 12-а відкрита наук. конф. ІМФН Нац. ун-ту „Львівська політехніка": збірник матеріалів конф. (м. Львів, 2–3 червня 2016 р.). Львів, 2016. С. 35.

12. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. About the set of solutions of the homogeneous two-point problem for the PDE of second order in time and infinite order in spatial variables // Intern. Conf. on Diff. Equations dedic. to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky: book of abstracts (Lviv, September 20–24, 2016). Lviv, 2016. P. 95–96.

13. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. Homogeneous Two-point in Time Problem for PDE // Intern. conf. „Differential-Functional Equations and their Applications", dedic. to the 80th anniversary of Prof. V. I. Fodchuk: Materials of conf. (Chernivtsi, September 28–30, 2016). Chernivtsi, 2016. P. 125–126.

14. Нитребич З. М., Маланчук О. М., Когут І. В. Критерій існування квазіполіномних розв'язків однорідної двоточкової задачі // 13-а відкрита наук. конф. ІМФН Нац. ун-ту „Львівська політехніка", присв. 125-річчю від дня народження С. Банаха: збірник матеріалів конф. (м. Львів, 30–31 березня 2017 р.). Львів, 2017. С. 55.

15. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Однорідна крайова задача у смузі для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Сучасні проблеми матем. моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доп.

VII Міжнар. наук. конф. (м. Кам'янець-Подільський, 21–22 квітня 2016 р.). Кам'янець-Подільський, 2016. С. 161–162.

16. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про ядро однорідної крайової задачі в смузі для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Диф. та інтегр. рівняння, їх застосування: матеріали XVII міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 19–20 травня 2016 р.). Київ, 2016. С. 211–212.

17. Маланчук О. М. Про ядро двоточкової за часом задачі для рівняння із частинними похідними // Міжнар. наук. конф., присв. 80-річчю від дня народження М. П. Ленюка: матеріали конф. (м. Чернівці, 28–30 жовтня 2016 р.). Чернівці, 2016. С. 163.

18. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про існування нетривіальних розв'язків однорідної двоточкової задачі для деяких класичних рівнянь математичної фізики // Міжнар. конф. „Диф. рівняння та їх застосування", присв. 75-річчю від дня народження д.ф.-м.н., проф. Д. І. Мартинюка: матеріали конф. (м. Кам'янець-Подільський, 19–21 травня 2017 р.). Кам'янець-Подільський, 2017. С. 92–93.

19. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. Two-point problem for homogeneous PDE of second order in time with nonhomogeneous conditions // Intern. Conf. on Diff. Equations, Math. Physics and Applications: Book of Abstracts (Cherkasy, October 17–19, 2017). Cherkasy, 2017. P. 68–69.

20. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про умови неіснування розв'язку двоточкової задачі для рівняння з частинними похідними // Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та матем. аналізу": матеріали конф. (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.). Ворохта, 2018. С. 99–100.

ABSTRACT

Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the two-point problems for partial differential equations. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis is presented for the degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics (Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.02 „Differential equations". — Lviv Polytechnic National University. — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018.

The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusions and the references. The introduction consists of the relevance of research topic, the purpose, objectives, subject, object and research methods. The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topics and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

Chapter 1 provides the literature review concerning the thesis theme.

In Chapter 2 the homogeneous problem with local two-point in time conditions for partial differential equation of the second order in time and generally infinite order in spatial variables is considered. The conditions of existence of only trivial solution of this problem and also the conditions of existence of nontrivial solutions are investigated. Using the differential-symbol method, the way of constructing of nontrivial solutions of the problem in the case of their existence is indicated.

In Chapter 3 the problem with nonhomogeneous local two-point in time conditions for homogeneous partial differential equation of the second order in time and generally infinite order in spatial variables is considered. The classes of entire functions to which the right-hand sides of two-point conditions should belong in order that the solution of the problem exist and be unique in the corresponding class of entire functions are established. The way of constructing

of solution of the problem by using differential-symbol method is indicated. The conditions of nonexistence of solution of the problem are found.

Chapter 4 is devoted to the problem with homogeneous local two-point in time conditions for nonhomogeneous partial differential equation of the second order in time and generally infinite order in spatial variables. The classes of entire functions as classes of unique solvability of the problem are established. Moreover, the right-hand side of the equation must belong to the corresponding class of entire functions with a certain order in spatial variables. In the case of existence of solutions, the method of their construction is indicated. The conditions of nonexistence of solution of the problem are found.

The practical significance of the results. The results of this thesis have theoretical significance. They can be used in further researches of the problems with local two-point conditions for partial differential equations and also in the study of specific practice problems which are modeled by considered problems.

Key words: differential-symbol method, partial differential equation of infinite order, local two-point conditions, characteristic determinant.

List of publications on the topic of the thesis:

1. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The homogeneous problem with boundary conditions on the border of the strip for partial differential equation of second order in time // Sci. Bull. Uzhorod. Univ. 2015. Vol. 27, No. 2. P. 98–108.

2. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. On the kernel of two-point problem for partial differential equation of the second order in time // Math. Metody and Fiz.-Meh. Polya. 2016. Vol. 59, No. 3. P. 43–54.

3. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. A criterion of existence of nontrivial quasipolynomial solutions of a homogeneous two-point problem for partial differential equation // Bukov. Math. Journal. 2016. Vol. 4, No. 3-4. P. 140–149.

4. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential

equation // Ukr. Math. Bull. 2016. Vol. 13, No. 4. P. 516–533.

the same: Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation // J. Math. Sci. 2017. Vol. 224, No. 4. P. 541–554.

5. Malanchuk O. M., Nytrebych Z. M. Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time and infinite order in spatial variables // Open Mathematics. 2017. No. 15. P. 101–110.

6. Homogeneous problem with two-point conditions in time for some equations of mathematical physics / Z. M. Nytrebych, O. M. Malanchuk, V. S. Il'kiv, P. Ya. Pukach // Azerb. J. Math. 2017. Vol. 7, No. 2. P. 180–196.

7. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. On the conditions of solvability of two-point in time problem for partial diffferential equation // Visn. Nation. University „Lviv Polytechnic". Fiz.-Math. Science. 2017. No. 871. P. 93–98.

8. On the solvability of two-point in time problem for PDE / Z. M. Nytrebych, O. M. Malanchuk, V. S. Il'kiv, P. Ya. Pukach // Ital. J. of Pure and Applied Mathematics. 2017. No. 38. P. 715–726.

9. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation // Ukr. Math. Bull. 2017. Vol. 14, No. 1. P. 86–102.

the same: Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation // J. Math. Sci. 2017. Vol. 227, No. 1. P. 68–80.

10. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. About the set of solutions of homogeneous two-point problem for partial differential equation // Diff. equations and their applications: Abstracts of the Intern. Conf. dedic. to the 70th anniversary of acad. M. Perestyuk (Uzhhorod, May 19–21, 2016). Uzhhorod, 2016. P. 103.

11. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. On the kernel of two-point in time problem for partial differential equation // 12th Open Scien. Conf. IMFS of Lviv Polytechnic National Univ: Book of Materials (Lviv, June 2-3, 2016).

Lviv, 2016. P. 35.

12. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. About the set of solutions of the homogeneous two-point problem for the PDE of second order in time and infinite order in spatial variables // Intern. Conf. on Diff. Equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky: Book of Abstracts (Lviv, September 20-24, 2016). Lviv, 2016. P. 95–96.

13. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. Homogeneous Two-point in Time Problem for PDE // Differential-functional Equations and their Applications: Materials of Intern. Scien. Conf., dedic. to the 80th anniversary of Prof. V. I. Fodchuk (Chernivtsi, September 28-30, 2016). Chernivtsi, 2016. P. 125–126.

14. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M., Kohut I. V. A criterion of existence of quasipolynomial solutions of homogeneous two-point problem // 13th Open Scien. Conf. IMFS of Lviv Polytechnic National University dedicated to the 125th anniversary of S. Banah: Materials of Conf. (Lviv, March 30-31, 2017). Lviv, 2017. P. 55.

15. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. Homogeneous boundary problem in the strip for partial differential equation of the second order with respect to time // Modern problems of math. modeling, forecasting and optimization: Abstracts of the 7th Intern. Scien. Conf. (Kamianets-Podilskyi, April 21-22, 2016). Kamianets-Podilskyi, 2016. P. 161–162.

16. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. On the homogeneous boundary problem in the strip for partial differential equation of the second order in time // Diff. and integral equations and its applications: Materials of the 17th Intern. Scien. ac. M. Kravchuk Conf. (Kyiv, May 19-20, 2016). Kyiv, 2016. P. 211–212.

17.Malanchuk O. M. On the kernel of two-point in time problem for PDE // Intern. Scien. Conf. devoted to the 80th anniversary of M. P. Lenyuk: Conf. Materials (Chernivtsi, Octovber 28-30, 2016). Chernivtsi, 2016. P. 163.

18. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. On the existence of nontrivial solutions of homogeneous two-point problem for some equations of mathematical

physics // Diff. equations and its application: Materials of the Intern. Conf. devoted to the 75th anniversary of prof. Martynyuk (Kamianets-Podilskyi, May 19-21, 2017). Kamianets-Podilskyi, 2017. P. 92–93.

19. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. Two-point problem for homogeneous PDE of second order in time with nonhomogeneous conditions // Intern. Conf. on Diff. Equations, Math. Physics and Applications: Book of Abstracts (Cherkasy, October 17-19, 2017). Cherkasy, 2017. P. 68–69.

20. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. On the conditions of nonexistence of solution of the two-point problem for PDE // Ukr. Scien. Conf. „Modern problems of probability theory and math. analysis": Materials of Conf. (Vorohta, February 27 – March 2, 2018). Vorohta, 2018. P. 99–100.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ **2**

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ **14**

ВСТУП **16**

РОЗДІЛ 1. **ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОПИС РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ** **24**

1.1. Багатоточкові задачі для звичайних диференціальних рівнянь 24

1.2. Багатоточкові задачі для рівнянь із частинними похідними . 26

1.3. Короткий опис результатів дисертації 39

Висновки до розділу 1 41

РОЗДІЛ 2. **ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-СИМВОЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОРІДНОЇ ДВОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ** **42**

2.1. Формулювання однорідної двоточкової задачі 42

2.2. Умови однозначної розв'язності задачі 46

2.3. Випадок, коли множина нулів характеристичного визначника не є порожньою і не збігається з $\mathbb{C}^s$ 48

2.4. Випадок, коли множина нулів характеристичного визначника збігається з $\mathbb{C}^s$ 77

Висновки до розділу 2 85

РОЗДІЛ 3. **ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ З НЕОДНОРІДНИМИ ДВОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ** **86**

3.1. Формулювання задачі 86

3.2. Умови однозначної розв'язності задачі у класі цілих функцій 87
3.3. Класи квазіполіномів як класи однозначної розв'язності задачі 92
3.4. Умови існування та неіснування розв'язків задачі 97
Висновки до розділу 3 109

РОЗДІЛ 4. **ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ З ОДНОРІДНИМИ УМОВАМИ 111**
4.1. Формулювання задачі. 111
4.2. Однозначна розв'язність задачі у класі цілих функцій . . . 112
4.3. Класи квазіполіномів як класи однозначної розв'язності задачі 117
4.4. Умови існування та неіснування розв'язків задачі 121
Висновки до розділу 4 128

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ 130

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 132

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;
$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;
$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел;
$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел;
$\mathbb{R}^s$, $s \geqslant 1$, – s-вимірний дійсний координатний простір;
$\mathbb{C}^s$, $s \geqslant 1$, – s-вимірний комплексний координатний простір;
$\mathbb{Z}^s$ – множина точок $\mathbb{R}^s$ з цілими координатами;
$\mathbb{Z}^s_+$ – множина точок $\mathbb{R}^s$ з цілими невід'ємними координатами;
$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_s) \in \mathbb{C}^s$, $x = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, $k = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{Z}^s_+$,
$\nu \cdot x = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + ... + \nu_s x_s$, $\quad x^k = {x_1}^{k_1} ... {x_s}^{k_s}$, $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right)$;
$|k| = k_1 + ... + k_s$;
$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – тривимірний оператор Лапласа;
E_n – одинична матриця порядку $n \in \mathbb{N}$;
$O = (0, 0, ..., 0)$ – нульовий вектор;
τ – символ транспонування;
$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера;
$C(\mathbb{R}^s)$ – простір неперервних на $\mathbb{R}^s$ функцій;
$C^q(\mathbb{R}^s)$ – простір функцій, неперервних на $\mathbb{R}^s$ разом з похідними до порядку q включно, $q \in \mathbb{N}$.

Позначимо класи функцій $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^s$, які допускають однозначне аналітичне продовження до цілих функцій певних порядків:
$A_{p'}$ – клас цілих функцій, порядок яких є меншим за p', де $1 < p' < \infty$;
A_∞ – клас усіх цілих функцій;
A_1 – клас функцій експоненційного типу;
$A_{1,r}$, $r > 0$, – клас цілих функцій дійсної змінної $x \in \mathbb{R}$ першого порядку і типу меншого, ніж r, або порядку меншого, ніж одиниця.

Крім того, позначимо:

$\mathbb{A}_{p'}$ – клас цілих функцій $U(t,x)$, які для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$ належать до $A_{p'}$;

$\mathbb{A}_{1,r}$ – клас цілих функцій $U(t,x)$, які для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$ належать до класу $A_{1,r}$;

K_L – клас квазіполіномів вигляду

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\,(x)\, e^{\alpha_j \cdot x},$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – попарно різні комплексні вектори з L, $L \subseteq \mathbb{C}^s$, $Q_1(x), \ldots,$ $Q_m(x)$ – ненульові поліноми з комплексними коефіцієнтами;

$K_{\mathbb{C},L}$ – клас квазіполіномів вигляду

$$f\,(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{N} P_{lj}\,(t,x)\, e^{\beta_l t + \alpha_j \cdot x},$$

де $P_{11}(t,x), \ldots, P_{Nm}(t,x)$ – ненульові поліноми змінних $t, x_1, \ldots, x_s$ з комплексними коефіцієнтами, $\beta_1, \ldots, \beta_N$ – попарно різні комплексні числа, а попарно різні комплексні вектори $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ належать до L.

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена дослідженню розв'язності задач із локальними двоточковими умовами за часом для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними.

Останнім часом дослідженню розв'язності задач з локальними та нелокальними багатоточковими за часом умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними надається значна увага. Це зумовлено необхідністю побудови загальної теорії багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними, а також тим, що задачі зі значеннями розв'язку в різні моменти часу мають важливу фізичну інтерпретацію і є моделями багатьох фізичних, економічних, медико-біологічних, демографічних та інших процесів.

Формулювання задач з багатоточковими умовами за однією виділеною змінною (часовою) для диференціальних рівнянь із частинними похідними, а також перші результати (1965 р.) щодо їх розв'язності на підставі метричного підходу належать Б. Й. Пташнику, у працях якого показано, що такі задачі є, загалом, умовно коректними, а їхня розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

На сьогодні, завдяки працям Б. Й. Пташника, а також В. І. Берника, І. О. Бобика, П. Б. Василишина, В. С. Ільківа, І. С. Клюс, Л. І. Комарницької, Б. О. Салиги, Л. П. Силюги, М. М. Симотюка, І. Р. Тимківа, В. М. Поліщук, В. В. Фіголя, П. І. Штабалюка, результати щодо встановлення класів коректної розв'язності задач з багатоточковими умовами за часом та умовами періодичності чи майже періодичності за просторовими змінними для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними в обмежених областях

за допомогою метричного підходу істотно розвинуто та одержано чимало результатів загального характеру.

Задачам з багатоточковими умовами за часом та без додаткових умов за просторовими координатами в необмежених областях (смуга, шар) для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними присвячені праці І. І. Антипко, В. М. Борок, І. Л. Віленця, М. А. Перельман, Г. В. Савченко, Л. В. Фардіголи.

Для параболічних рівнянь та систем рівнянь задачі з нелокальними дво- та багатоточковими умовами в необмежених областях досліджували Л. І. Корбут, В. М. Лучко, М. І. Матійчук, а в обмежених областях, зокрема, А. Т. Асанова, М. Майчровскі, І. Д. Пукальський, Ж. Чабровскі та інші вчені.

Численні дослідження авторів, зокрема Ю. Н. Валіцького, М. Л. Горбачука, В. В. Городецького, А. А. Дезіна, Я. М. Дріня, С. Х. Нурметова, В. К. Романка, присвячені крайовим задачам для диференціально-операторних рівнянь з багатоточковими умовами за однією виділеною змінною.

В останні роки, крім того, з'являються задачі з багатоточковими умовами за часом, які містять диференціальні поліноми за просторовими змінними, а також задачі для диференціальних рівнянь зі зсувами за просторовими координатами. Такі рівняння можна інтерпретувати як рівняння нескінченного порядку за просторовими змінними. Для розв'язування таких та інших задач з умовами за однією виділеною змінною виявився зручним диференціально-символьний метод, розроблений у працях П. І. Каленюка та З. М. Нитребича. Суть методу полягає в тому, що він дозволяє встановлювати класи гладких (здебільшого цілих) функцій як класи існування та єдиності розв'язку задач і, що важливо, будувати цей розв'язок у явному вигляді.

Диференціально-символьний метод в останні роки застосовувався до розв'язування задач в необмежених областях для лінійних диференціальних

рівнянь із частинними похідними з початковими, дво- та багатоточковими за часом умовами, умовами Діріхле та типу Діріхле, умовами Діріхле-Неймана, а також інтегральними за часом умовами у працях М. Б. Воробець, В. С. Ільківа, П. І. Каленюка, І. С. Клюс, І. В. Когута, Г. Кудука, З. М. Нитребича, Я. М. Плешівського, Б. Й. Пташника, П. Я. Пукача, С. М. Репетило, П. Л. Сохана. Для досліджуваних диференціально-символьним методом задач з двоточковими чи n-точковими умовами характерним було задання значення розв'язку лише в два або n моментів часу, а також те, що множина нулів характеристичного визначника була або порожньою, або не збігалася з $\mathbb{C}^s$. Випадок, коли характеристичний визначник задач тотожньо дорівнює нулеві, у згаданих вище дослідженнях був або неможливим, або не розглядався.

Отже, дослідження задач для рівнянь із частинними похідними загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з багатоточковими за часом умовами загальнішого вигляду за допомогою диференціально-символьного методу представляють інтерес як з точки зору застосувань, так і побудови загальної теорії багатоточкових задач. Залишаються також недостатньо вивченими питання ядра багатоточкових задач, зокрема, двоточкових, а також питання розв'язності таких задач у випадку, коли характеристичний визначник задачі тотожньо дорівнює нулеві.

Актуальність теми дисертаційної роботи полягає у необхідності:

– дослідження ядра задачі для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано локальні двоточкові умови, та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними, встановлення достатніх умов існування нетривіальних розв'язків задачі в класах цілих функцій, а також необхідних та достатніх умов існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків і їх побудові диференціально-символьним методом;

– встановлення умов існування та єдиності розв'язку задачі для одно-

рідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з неоднорідними локальними двоточковими умовами, а також задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з однорідними локальними двоточковими умовами у класах цілих функцій та у класах неперервно диференційовних функцій, якщо характеристичний визначник задачі відмінний від нуля для всіх значень аргумента, а також у класах квазіполіномів у випадку існування непорожньої множини нулів характеристичного визначника, яка не співпадає з $\mathbb{C}^s$, та побудови диференціально-символьним методом розв'язків задачі;

– дослідження за допомогою диференціально-символьного методу задачі з локальними двоточковими умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом у випадку, коли характеристичний визначник задачі тотожньо дорівнює нулеві, встановлення умов існування та неіснування розв'язку задачі та побудові розв'язку задачі у випадку його існування.

Ці питання є основним предметом досліджень дисертаційної роботи. Вивчення локальних двоточкових задач за допомогою диференціально-символьного методу є суттєвим як для застосувань, так і для побудови загальної теорії багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертаційної роботи відповідає науковому напряму кафедри вищої математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету „Львівська політехніка", виконана в межах науково-дослідної роботи „Дослідження розв'язності крайових задач для рівнянь з частинними похідними, розробка нових методів теорії функцій та функціонального аналізу, математичне моделювання процесів різної струк-

тури” (державний реєстраційний номер 0116U004101). Роботи проводились також у межах планових науково-дослідних робіт Львівського національного медичного університету імені Данила Галицького „Дослідження фізико-хімічних процесів у біологічних тканинах та технічних системах методами математичного моделювання” (0112U000161) та „Застосування математичних методів для дослідження фізико-хімічних процесів в біотехнічних системах” (0117U001078).

Мета і завдання дослідження. Дослідити у класах цілих функцій множину розв’язків однорідних задач з локальними двоточковими умовами для рівнянь з частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними. Встановити умови існування та єдиності розв’язку неоднорідних задач з локальними двоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними залежно від множини нулів характеристичного визначника задачі. Побудувати розв’язки розглядуваних задач.

Об’єкт дослідження: задачі з локальними двоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними.

Предмет дослідження: умови розв’язності задач з локальними двоточковими умовами за часом для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними та побудова розв’язків розглядуваних задач.

Методи дослідження: диференціально-символьний метод, методи теорії диференціальних рівнянь та теорії функцій комплексної змінної.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові результати:

— досліджено ядро задачі для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано локальні двоточкові умови,

та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними, встановлено достатні умови існування нетривіальних розв'язків задачі в класах цілих функцій, а також необхідні та достатні умови існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків і запропоновано диференціально-символьний метод їх побудови, доведено, що дана задача має лише тривіальний розв'язок у випадку, коли характеристичний визначник задачі є відмінним від нуля для всіх значень аргумента;

— встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з неоднорідними локальними двоточковими умовами, а також задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з однорідними локальними двоточковими умовами у класах цілих функцій та у класах неперервно диференційовних функцій, якщо характеристичний визначник задачі відмінний від нуля для всіх значень аргумента, а також у класах квазіполіномів у випадку існування непорожньої множини нулів характеристичного визначника, яка не співпадає з $\mathbb{C}^s$, запропоновано диференціально-символьний метод побудови розв'язків задачі;

— за допомогою диференціально-символьного методу досліджено задачу з локальними двоточковими умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом у випадку, коли характеристичний визначник задачі тотожньо дорівнює нулеві, знайдено умови існування та неіснування розв'язку задачі, у випадку існування розв'язку задачі запропоновано спосіб його побудови.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна застосовувати у подальших теоретичних дослідженнях задач з локальними багатоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними у класах цілих функцій, а також при

дослідженні конкретних задач практики, які моделюються розглянутими задачами.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації отримані автором самостійно. У спільних працях [63–68, 126–128] науковому керівнику З. М. Нитребичу належить формулювання задач та аналіз отриманих результатів. В. С. Ільківу та П. Я. Пукачу у праці [127] належить ідея зображення нулів характеристичного визначника на комплексній площині, а також приклад 4.5, що стосується рівняння теорії пружності, а у праці [128] – приклад 3.2.

Апробація роботи. Результати досліджень доповідались та обговорювались на:

— Міжнародній науковій конференції „Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 2016 р.);
— Дванадцятій відкритій науковій конференції ІМФН Національного університету „Львівська політехніка" (Львів, 2016 р.);
— International conference on differential equations dedicated to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Львів, 2016 р.);
— VII Міжнародній науковій конференції „Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам'янець-Подільський, 2016 р.);
— XVII міжнародній науковій конференції „Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування" імені академіка М. Кравчука (Київ, 2016 р.);
— Міжнародній науковій конференції, присвяченій 80-річчю від дня народження М. П. Ленюка (Чернівці, 2016 р.);
— Міжнародній науковій конференції „Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", присвяченій 80-річчю від дня народження професора В. І. Фодчука (Чернівці, 2016 р.);
— Тринадцятій відкритій науковій конференції ІМФН Національного

університету „Львівська політехніка”, присвяченій 125-ти річчю з дня народження С. Банаха (Львів, 2017 р.);

— Міжнародній конференції „Диференціальні рівняння та їх застосування”, присвяченій 75-річчю від дня народження д.ф.-м.н., проф. Д. І. Мартинюка (Кам’янець-Подільський, 2017 р.);

— International Conference on Differential Equations, Mathematical Physics and Applications (Черкаси, 2017);

— Всеукраїнській науковій конференції „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, 2018 р.);

— засіданні Львівського міського семінару з диференціальних рівнянь (керівники: д.ф.-м.н., проф. М. І. Іванчов, д.ф.-м.н., проф. П. І. Каленюк; Львів, 2017 р.),

— наукових семінарах кафедри вищої математики ІМФН Національного університету „Львівська політехніка“ (2015 –2018 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації висвітлені в 9 статтях [63–68,126–128], з яких 5 статей [63–67] опубліковано у наукових фахових виданнях України, з них 2 статті [66,67] перекладено у виданнях, які належать до міжнародної наукометричної бази „Scopus”, 3 статті [126–128] – у наукових періодичних виданнях інших держав, які належать до міжнародних наукометричних баз („Scopus” та „Web of Science”). Також результати дисертації пройшли апробацію на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях (11 тез доповідей та матеріалів конференцій [54, 69–74, 129–131]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів та списку використаних літературних джерел, що налічує 137 найменувань. Загальний обсяг дисертації – 147 сторінок.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОПИС РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

У даному розділі зроблено огляд літератури, що стосується багатоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь із частинними похідними, та наведено короткий опис результатів отриманих у дисертаційній роботі.

1.1. Багатоточкові задачі для звичайних диференціальних рівнянь

Серед задач прикладного спрямування часто зустрічаються n-точкові задачі вигляду:

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)\, y'(x) + a_n(x)\, y(x) = f(x), \qquad (1.1)$$

$$y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2,\ \ldots,\ y(x_n) = y_n, \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_n. \qquad (1.2)$$

Задача (1.1), (1.2) полягає у знаходженні для рівняння (1.1) з достатньо гладкими коефіцієнтами $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ та правою частиною $f(x)$ такої інтегральної кривої, яка проходить через n заданих в $\mathbb{R}^2$ різних точок (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n).

Окрім задачі з умовами (1.2), часто вивчають багатоточкову задачу з кратними вузлами, тобто задачу знаходження розв'язку рівняння (1.1) при $n > 2$, що задовольняє такі умови:

$$y^{(s)}(x_i) = y_{is}, \quad i = \overline{1, q}, \quad s = \overline{0, r_i - 1}, \qquad (1.3)$$

де $r_1 + r_2 + \ldots + r_q = n,\ r_1, r_2, \ldots, r_q \in \mathbb{N},\ 1 < q < n.$

Багатоточкову задачу (1.1), (1.3) з одним n-кратним вузлом можна трактувати як задачу Коші. Крім того, за допомогою граничного переходу при $x_n \to x_1$, $x_{n-1} \to x_1, \ldots, x_2 \to x_1$ з розв'язку задачі (1.1), (1.2) можна одержати за певною процедурою розв'язок задачі Коші з початковими умовами в точці x_1. Однак, багатоточкова задача як узагальнення задачі Коші, має непритаманні задачі Коші властивості. Зокрема, якщо однорідна задача Коші

$$y''(x) + y(x) = 0, \tag{1.4}$$

$$y(0) = y'(0) = 0,$$

має лише нульовий розв'язок, то двоточкова задача для рівняння (1.4) з однорідними умовами

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \tag{1.5}$$

має, наприклад, ненульовий розв'язок $y(x) = \sin x$.

Багатоточкова задача (1.2), (1.3) досліджувалася у праці [137] і є відомою в літературі як задача Валле-Пуссена. Однак, подібні задачі вивчалися і раніше, зокрема, у працях М. Піконе (M. Picone) [133] та Я. Д. Тамаркіна [103].

Зокрема, у праці [103] досліджено задачу для рівняння (1.1) з багатоточковими умовами, що містять інтегральні доданки:

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{m_{ik}} a_{ikj}\, y^{(k-1)}(x_{ikj}) + \int_a^b a_{ik}(x)\, y^{(k-1)}(x)\, dx \right\} = \eta_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.6}$$

де x_{ikj}, $i,k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m_{ik}}$, – різні точки відрізка $[a;b]$; $m_{ik} \in \mathbb{N}$; $a_{ik}(x)$, $i,k = \overline{1,n}$, – інтегровні на $[a;b]$ функції; a_{ikj}, η_i – задані дійсні числа. Розв'язок задачі (1.1), (1.6) зображено за допомогою функції Гріна задачі з однорідними багатоточковими умовами, умова існування якої є умовою однозначної розв'язності задачі.

Двоточкова задача (1.4), (1.5) є ілюстрацією того, що для єдиності розв'язку багатоточкових задач треба задавати більше умов, аніж поря-

док рівняння. Хоч, зауважимо, це не завжди так. Наприклад, розв'язком двоточкової задачі з умовами (1.5) для рівняння

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

є лише тривіальний розв'язок.

За допомогою функції Гріна розв'язність задачі з більшою кількістю багатоточкових умов, ніж порядок рівняння, досліджував Ю. В. Покорний [78].

Багатоточкові задачі для рівнянь, розкладених у добуток диференціальних поліномів першого степеня, вивчали О. І. Бобик, П. І. Боднарчук, Б. Й. Пташник, В. Я. Скоробогатько у праці [7].

Питанням розв'язності задач з багатоточковими умовами для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем присвячено чимало праць, зокрема, праці Л. Н. Єшукова, T. Kiguradze, А. Ю. Левіна, А. Ю. Лучки, Ю. А. Митропольського, А. М. Самойленка, Н. І. Ронто, Ф. Хартмана, G. Mammana, O. Nicoletti, G. Polya (див. [22, 48, 50, 51, 56, 98, 109, 122, 124, 125, 134]).

1.2. Багатоточкові задачі для рівнянь із частинними похідними

Формулювання задач з багатоточковими умовами за однією виділеною змінною для диференціальних рівнянь із частинними похідними, а також перші результати щодо їх розв'язності на підставі метричного підходу належать Б. Й. Пташнику [79–81]. У працях [79, 80], зокрема, досліджена задача з багатоточковими умовами за часом для рівнянь із частинними похідними гіперболічного типу зі сталими та змінними за часом коефіцієнтами. Для побудови розв'язків задач застосовано метод Фур'є. В термінах діофантових властивостей чисел сформульовано умови однозначної розв'язності досліджуваних задач.

Задача з багатоточковими умовами в часових вузлах для диференціаль-

ного рівняння із частинними похідними істотно відрізняється від задачі Коші з початковими умовами в одному з вузлів для цього ж рівняння. Для згаданих задач, як і для звичайних диференціальних рівнянь, відмінними є, насамперед, класи єдиності їх розв'язків. Наприклад, задача знаходження розв'язку рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \qquad T > 0,\, a > 0,\, t \in (0, T),\;\; x \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

що задовольняє двоточкові умови за часом

$$U(0, x) = \varphi\,(x), \quad U(T,\, x) = \psi\,(x), \tag{1.8}$$

є некоректною задачею, оскільки відповідна однорідна задача для рівняння (1.7) з однорідними двоточковими умовами

$$U(0, x) = U(T, x) = 0 \tag{1.9}$$

має нетривіальні розв'язки вигляду

$$U(t, x) = \Phi(x + at) - \Phi(x - at),$$

де $\Phi(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна функція з періодом $2aT$. Зауважимо, що задача Коші для рівняння (1.7) з однорідними початковими умовами в точці $t = 0$ має лише тривіальний (нульовий) розв'язок.

У працях [57, 58] З. М. Нитребич запропонував процедуру граничного переходу, на основі якої з розв'язку задачі з локальними багатоточковими умовами за часом для рівняння із частинними похідними при прямуванні відстані між часовими вузлами до нуля можна одержати розв'язок задачі Коші для цього ж рівняння.

Шукаючи розв'язок задачі (1.7), (1.8) у класі періодичних з періодом $\tau = 2\pi$ функцій за змінною x, одержуємо такий факт: функція $\Phi(x)$ повинна бути одночасно періодичною з періодом $\tau = 2aT$ та $\tau = 2\pi$. Якщо відношення $\beta = \frac{\pi}{aT}$ є ірраціональним числом, то неперервна функція $\Phi(x)$,

яка має два неспівмірних періоди, є сталою функцією, тому двоточкова задача (1.7), (1.9) має лише тривіальний розв'язок. За умови, що число β є ірраціональним, за допомогою методу Фур'є розв'язок задачі (1.7), (1.8) одержуємо у вигляді ряду

$$U(t,x) = \varphi_0 + \frac{\psi_0 - \varphi_0}{T} t + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\psi_k \sin[akt] + \varphi_k \sin[ak(T-t)]}{\sin[akT]} e^{ikx}, \quad (1.10)$$

де $\varphi_j, \psi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, – коефіцієнти Фур'є правих частин двоточкових умов (1.8) відповідно.

Збіжність ряду (1.10) потребує особливого дослідження, оскільки його знаменники $\sin[akT]$, будучи відмінними від нуля, можуть для нескінченної множини цілих чисел k набувати як завгодно малі значення. Залежно від того, як швидко наближається ірраціональне число β раціональними числами $\frac{m}{k}$, визначається величина малого знаменника $\sin[akT]$. Тому, за умови існування сталих $c > 0$ та $\gamma > 0$ таких, що для всіх (за винятком скінченної кількості) цілих чисел k та m справджується нерівність

$$|\alpha - \frac{m}{k}| \ > C|k|^{-\gamma-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

і того, що $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – достатньо гладкі з періодом $\tau = 2\pi$ функції, існує єдиний класичний розв'язок задачі (1.7), (1.8). Цей розв'язок задачі зображається у вигляді ряду (1.10).

На підставі двоточкової задачі (1.7), (1.8) можна зробити такі висновки:

— для єдиності розв'язку багатоточкових задач, загалом, треба накладати деякі додаткові умови, наприклад, умови періодичності за просторовою змінною;

— питання існування і єдиності розв'язків багатоточкових задач пов'язане з проблемою малих знаменників;

— для оцінки знизу цих знаменників потрібні результати теорії чисел.

На сьогодні вивчення задач з багатоточковими умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними в обмежених областях за до-

помогою метричного підходу істотно розвинуто та одержано чимало результатів загального характеру. Зокрема, Б. Й. Пташником, В. С. Ільківим, З. М. Нитребичем, І. С. Клюс, Б. О. Салигою, В. І. Берником, І. Р. Тимківим, Л. І. Комарницькою, Л. П. Силюгою, М. М. Симотюком, П. Б. Василишином, В. М. Поліщук, П. І. Штабалюком, В. В. Фіголем досліджувались класи коректної розв'язності задач з локальними та нелокальними багатоточковими умовами за виділеною змінною (здебільшого за часом) для диференціальних рівнянь із частинними похідними, в тому числі нескінченного порядку за просторовими змінними. Окрім вказаних вище праць, див. [6, 14, 25, 26, 45, 46, 82–92, 97, 99, 100, 105, 136] та бібліографію в них.

Задачам з багатоточковими умовами за часом в необмежених областях (без додатових умов за просторовими змінними) присвячені праці В. М. Борок та її учнів І. І. Антипко, М. А. Перельман, І. Л. Віленця, Г. В. Савченко, Л. В. Фардіголи [3–5, 9–12, 15, 53, 96, 106–108]. У цих працях було виділено класи єдиності розв'язку задач для рівнянь із частинними похідними та їх систем з дво- та багатоточковими локальними та нелокальними за часом умовами. Зокрема, у праці [9] встановлено умови існування лише тривіального розв'язку $U = U(x,t)$ такої однорідної задачі

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+P\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}+Q\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U=0, \quad t\in(0,T), \quad x\in\mathbb{R}^n,\\ U(x,0)=U(x,T)=0, \quad x\in\mathbb{R}^n,\end{gathered} \tag{1.11}$$

де $T>0$, $P\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$, $Q\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$ – поліноми від $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ зі сталими комплексними коефіцієнтами. Для задачі (1.11) побудована множина

$$Z=\Big\{s\in\mathbb{C}^s\colon \quad \frac{1}{4}P^2(-is)-Q(-is)=-\frac{k^2\pi^2}{T^2},\ k\in\mathbb{N}\Big\},\ \ i^2=-1,$$

і введена величина

$$a=\inf_{s\in Z}|\mathrm{Im}\,\mathrm{s}|, \tag{1.12}$$

яку названо типом крайової задачі (1.11). Доведено, якщо $a>0$, то у класі

функцій, що справджують оцінку

$$|U(x,t)| \leqslant A_0 e^{b|x|}, \quad t \in (0,T),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

задача (1.11) має лише тривіальний розв'язок для $b < a$ (теорема 2) і має нетривіальний розв'язок для $b > a$ (теорема $2'$). Праця [12] також присвячена виділенню класів єдиності розв'язку багатоточкової задачі в безмежному шарі. У ній знайдено умови існування лише тривіального розв'язку $U(x,t) = \big(U_1(x,t), \ldots, U_n(x,t)\big)^\tau$ однорідної системи рівнянь вигляду

$$\frac{\partial U}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U = 0, \ \ t \in (T_0,\, T),\ x \in \mathbb{R}^m, \tag{1.13}$$

з такими однорідними багатоточковими за часом умовами

$$\begin{aligned} &U_{i_k}(T_1,\, x) = 0, \quad k = \overline{1, n_1}, \\ &U_{j_k}(T_2,\, x) = 0, \quad k = \overline{1, n_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &U_{l_k}(T_l\,, x) = 0, \quad k = \overline{1, n_l}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

де $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – матриця, елементами якої є диференціальні поліноми від $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ зі сталими коефіцієнтами; $T_0 \leqslant T_1 < T_2 < \ldots < T_l \leqslant T$; $l,\, n_s \in \mathbb{N}$, $s = \overline{1, l}$; $n_1 + n_2 + \ldots + n_l = n$. Для задачі (1.13), (1.14) введено поняття визначника задачі $\Delta(s) = \det Q(s)$ де $Q(s)$ – матриця порядку $n - n_1$, що одержується з блочної матриці

$$Q_1(s) = \Big(\ e^{[(T_2 - T_1)P^\tau(-is)]} \ \ e^{[(T_3 - T_1)P^\tau(-is)]} \ \ \ldots \ \ e^{[(T_l - T_1)P^\tau(-is)]} \ \Big),$$

шляхом викреслення за певним правилом n_1 рядків та n_1 стовпців. Тут матриця $P^\tau(-is)$ одержується за допомогою транспонування $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ і заміни $\frac{\partial}{\partial x}$ на $-is$. Задачу (1.13), (1.14) названо виродженою, якщо $\Delta(s) \equiv 0$, і відповідно невиродженою, якщо $\Delta(s) \neq 0$. Якщо Z – множина нулів $\Delta(s)$ і задача є невиродженою, то число (1.12) – тип крайової задачі (1.13), (1.14).

У просторах функцій $M_{\alpha,A}$, що справджують оцінку

$$|f(x)| \leqslant C_f e^{A||x||^\alpha},$$

встановлено класи єдиності розв'язку задачі (1.13), (1.14) в залежності від типу $a \in [0;\infty]$. Зокрема, для задачі з безмежним типом ($a = \infty$) задача (1.13), (1.14) має лише тривіальний розв'язок:

— у просторі як завгодно швидко зростаючих функцій, якщо зведений порядок p_0 системи (1.13) є меншим за одиницю;

— у просторі $M_{\alpha,A}$ для довільних $\alpha > 0$, $A > 0$, якщо $p_0 = 1$;

— у просторі $M_{p_0{}',A}$ з деяким $A > 0$, якщо $p_0 > 1$ і $p_0{}' = \frac{p_0}{p_0-1}$.

Досліджено випадки, коли $0 < a < \infty$, $a = 0$ і $\Delta(s)$ не має дійсних нулів. У випадку виродженої задачі, тобто $\Delta(s) \equiv 0$, стверджується, що задача (1.13), (1.14) має нетривіальні розв'язки. Зауважимо, що у праці [10] задача (1.13), (1.14) досліджена для випадку $l = 2$. Стаття [5] присвячена виділенню класів єдиності розв'язку задачі в області $(T_0, T) \times \mathbb{R}^m$ для системи рівнянь (1.13) з нелокальними багатоточковими умовами вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{l} a_{i,\,k+(q-1)n}\, U_k(x, T_q) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.15}$$

в яких $\operatorname{rang}(a_{ij})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,nl}} = n$. Залежно від типу (1.12) крайової задачі, де Z – множина нулів визначника задачі (1.13), (1.15), знайдено умови існування лише тривіального розв'язку задачі у просторах функцій $M_{\alpha,A}$. У цій праці також досліджена задача для рівняння

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = P\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) U(x,t), \qquad t \in [T_0, T], \;\; x \in \mathbb{R}^m, \tag{1.16}$$

в якому $P\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$ – поліном з комплексними коефіцієнтами $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ з нелокальними триточковими умовами

$$\sum_{k=1}^{3} \left(a_{i,2k-1} U(x, T_k) + b_{i,2k} \frac{\partial U(x, T_k)}{\partial t} \right) = 0, \quad i \in \{1, 2\}, \tag{1.17}$$

де $T_0 \leqslant T_1 < T_2 < T_3 \leqslant T$, а ранг матриці коефіцієнтів в умовах (1.17) дорівнює 2. З'ясовано вигляд умов (1.17), за яких задача (1.16), (1.17) є виродженою (теорема 4), а також має безмежний тип (теорема 5). Відзначимо, що задача (1.13), (1.15) у випадку двоточкової задачі ($l = 2$) досліджена в [3]. У цій же ж праці для задачі (1.16), (1.17) знайдено вигляд двоточкових нелокальних умов, за яких задача є виродженою (теорема 3) і має нескінченний тип (теорема 4).

Коректності задачі у шарі $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ для диференціального рівняння

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = P\big(-iD_x\big)U(x,t) \tag{1.18}$$

з нелокальною двоточковою умовою

$$A\big(-iD_x\big)U(x,0) + B\big(-iD_x\big)U(x,T) = U_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.19}$$

присвячена стаття [106]. У рівнянні (1.18) та умовах (1.19) символи диференціальних виразів $P(\sigma), A(\sigma), B(\sigma)$ – довільні поліноми з комплексними коефіцієнтами, $\sigma \in \mathbb{R}^n$. Для задачі (1.18), (1.19) доведено критерій коректності задачі в класі функцій степеневого зростання (теорема 1). Коректність задачі (1.18), (1.19) для випадку $A(\sigma) = A$, $B(\sigma) = B$, $A, B \in \mathbb{C}$, досліджена в [11]. У випадку $A(\sigma) = \beta B(\sigma)$, $\beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, коректність задачі (1.18), (1.19) доведена у праці [108]. Задачі, близькі до (1.18), (1.19), вивчалися у працях [53, 96].

Розглянемо клас задач з крайовими умовами за виділеною змінною (часовою) для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними вигляду

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x) = f(t,x), \quad t \in (t_0, t_1), \quad x \in \mathbb{R}^s, \tag{1.20}$$

$$l_j U(t,x) = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1,n}, \quad x \in \mathbb{R}^s, \tag{1.21}$$

де $-\infty \leqslant t_0 < t_1 \leqslant \infty$, $L\big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\big)$ – диференціальний поліном n-го степеня відносно $\frac{\partial}{\partial t}$, коефіцієнтами якого є диференціальні вирази (скінченного або

нескінченного порядку) відносно $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}$, $l_1, \ldots, l_n$ – лінійні функціонали за змінною t, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, $f(t,x)$ – задані гладкі функції.

Для розв'язування задач вигляду (1.20), (1.21) виявився зручним диференціально-символьний метод, розроблений П. І. Каленюком та З. М. Нитребичем у праці [34]. Суть методу полягає в тому, що він дозволяє встановлювати класи гладких (здебільшого цілих) функцій як класи існування та єдиності розв'язку задач і, що важливо, будувати цей розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} U(t,x) = f\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{F(t,x,\lambda,\nu)\Big\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} + \\ + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_j(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

У формулі (1.22) $f\big(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\big)$, $\varphi_1\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)$, …, $\varphi_n\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)$ – диференціальні вирази загалом нескінченного порядку, які визначаються через розвинення $f(t,x)$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_n(x)$ в ряди Маклорена з відповідною заміною t на $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ та x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$. Вигляд функцій $F(t,x,\lambda,\nu)$, $T_1(t,\nu)$, …, $T_n(t,\nu)$ встановлюється для кожної задачі окремо.

Зауважимо, що диференціально-символьний метод дозволяє в окремих випадках доводити однозначну розв'язність задач у класах неперервно диференційовних (до певного порядку включно) функцій. За допомогою цього методу можна також вивчати ядро задач, а також будувати розв'язки задач у випадку існування неєдиного розв'язку задачі.

Диференціально-символьний метод в останні роки застосовувався до розв'язування задач в необмежених областях для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними з початковими, дво- та багатоточковими за часом умовами, умовами Діріхле та типу Діріхле, умовами Діріхле-Неймана, а також інтегральними умовами у працях П. І. Каленюка, З. М. Нитребича, Б. Й. Пташника, В. С. Ільківа, П. Я. Пукача, П. Л. Сохана, Я. М. Плешівського, М. Б. Воробець, І. В. Когута, І. С. Клюс, С. М. Репетило, Г. Кудука [16, 17, 28–42, 45, 59–62, 76, 101, 102, 116–119].

У працях [34, 59–61] в області змінних $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^s$ за допомогою

диференціально-символьного методу досліджено задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_{ij}\frac{\partial^m}{\partial t^m}-\sum_{k=1}^{m}a_{kij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{m-k}}{\partial t^{m-k}}\right)U_j(t,x)=f_i(t,x),\quad i=\overline{1,n},\quad (1.23)$$

$$\frac{\partial^k U_i}{\partial t^k}(0,\,x)=\varphi_{ki}(x),\;\; k=\overline{0,m-1}\,,\; i=\overline{1,n},\qquad (1.24)$$

де $a_{kij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – довільні диференціальні вирази зі сталими коефіцієнтами, символами яких є цілі аналітичні функції $a_{kij}(\nu)$, $i,j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,m}$, $\nu\in\mathbb{R}^s$, $m,n\in\mathbb{N}$. Зауважимо, що дослідження задачі (1.23), (1.24) у випадку $m=1$, $f_1(t,x)=0,\ldots,f_n(t,x)=0$ проведено в [40], у випадку $m=1$, $\varphi_{ki}(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$, $i=\overline{1,n}$ у [101], у випадку $m=2$, $f_1(t,x)=0,\ldots,f_n(t,x)=0$ в [35], а у випадку $m=2$, $f_1(t,x)=0,\ldots,f_n(t,x)=0$ в [16].

У працях [36–38] знайдено класи цілих функцій як класи однозначної розв'язності і вказано диференціально-символьний метод побудови розв'язку такої багатоточкової задачі

$$\left[E_n\frac{\partial}{\partial t}-A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\right]^m U(t,x)=F(t,x),\quad t\in(0,T),\;\; x\in\mathbb{R}^s,\qquad (1.25)$$

$$U(t_j,x)=\Phi_j(x),\quad j=\overline{1,m},\;\; x\in\mathbb{R}^s,\qquad (1.26)$$

де $0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_m\leqslant T<+\infty$, $A\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$ – оператор-матриця розміру $n\times n$, елементами якої є довільні диференціальні вирази зі сталими коефіцієнтами, символами яких є цілі функції деяких порядків, $U(t,x)=(U_1(t,x),U_2(t,x),\ldots,U_n(t,x))^\tau$. Задача (1.25), (1.26) характерна тим, що для неї відсутня проблема малих знаменників або за термінологією робіт В. М. Борок задача (1.25), (1.26) має нескінченний тип. Граничний перехід від розв'язку задачі (1.25), (1.26) при $t_2\to t_1$, $t_3\to t_1,\ldots,t_n\to t_1$ до розв'язку задачі Коші для системи рівнянь (1.25) з початковими умовами в $t=t_1$ здійснено в праці [39].

У праці [17] досліджено задачу Діріхле у часовому шарі $t\in(0,h)$, $x\in$

$\mathbb{R}^s$ $(s \in \mathbb{N})$:

$$\left[E_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} - A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t} - B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] U(t,x) = F(t,x), \tag{1.27}$$

$$U(0,x) = \Phi_1(x), \qquad U(h,x) = \Phi_2(x), \tag{1.28}$$

де $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – оператор-матриці розміру $n \times n$ $(n \in \mathbb{N})$, елементами яких є довільні диференціальні вирази $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $i,j = \overline{1,n}$, зі сталими комплексними коефіцієнтами та цілими символами $a_{ij}(\nu)$, $b_{ij}(\nu)$, $i,j = \overline{1,n}$, $h > 0$, $U(t,x) = (U_1(t,x), U_2(t,x), \ldots, U_n(t,x))^\tau$, $F(t,x) = \big(F_1(t,x), F_2(t,x), \ldots, F_n(t,x)\big)^\tau$, $\Phi_j(x) = (\Phi_{j1}(x), \Phi_{j2}(x), \ldots, \Phi_{jn}(x))^\tau$, $j = 0,1$. Встановлено, що класом однозначної розв'язності задачі (1.27), (1.28) у випадку $\Delta(\nu) \neq 0$ є певний клас векторних квазіполіномів. Ядро задачі (1.27), (1.28) досліджено у праці [33].

У шарі $(0,h) \times \mathbb{R}^s$ $(s \in \mathbb{N})$ досліджено коректну n-точкову задачу [45]

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{p=1}^{s} a_p \frac{\partial}{\partial x_p} - b_i\right] U(t,x) = 0, \tag{1.29}$$

$$U(t_j,x) = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1,n}, \quad x \in \mathbb{R}^s, \tag{1.30}$$

де $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant h$, $a_1, a_2, \ldots, a_s, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, причому $b_i \neq b_j$ для $i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$. Розв'язок задачі (1.29), (1.30) за допомогою диференціально-символьного методу знайдено у вигляді

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_1 + a_1(t-t_k), \ldots, x_s + a_s(t-t_k)) \sum_{i=1}^{n} \frac{d_{ik}^{\vee}}{d} e^{b_i t}, \tag{1.31}$$

де $d = \det W \equiv \det \left\| e^{b_i t_j} \right\|_{i,j=\overline{1,n}}$, $d_{ji}^{\vee}$ – алгебричні доповнення елементів d_{ji} матриці W. Характеристичний визначник задачі (1.29), (1.30) є ненульовою сталою. Для існування і єдиності розв'язку (1.31) задачі (1.29), (1.30) накладається умова, щоб $\varphi_j \in C^n(\mathbb{R}^s)$, $j = \overline{1,n}$. У випадку $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$ задачу (1.29), (1.30) досліджено в [62].

У працях [41,42,102] досліджено задачі Діріхле, а також задачі з умовами типу Діріхле у нескінченному шарі для рівняння Пуассона, поліліній-

ного рівняння із частинними похідними, для однорідної системи рівнянь Ламе у випадку плоскої деформації.

Вивченню задач з нелокальною двоточковою умовою для рівняння із частинними похідними першого порядку за часом за допомогою диференціально-символьного методу присвячено праці [30, 31]. Зокрема, у працях [31] досліджено задачу

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] U(t,x) = 0, \quad t \in (0,h), \quad x \in \mathbb{R}^s, \tag{1.32}$$

$$p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(0,x) + q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(h,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^s, \tag{1.33}$$

у якій $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — диференціальний вираз загалом нескінченного порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами та цілим символом $a(\nu) \neq \mathrm{const}$, $h > 0$, $s \in \mathbb{N}$, $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами. Описано ядро задачі (1.32), (1.33), тобто множину нетривіальних квазіполіномних розв'язків відповідної однорідної задачі. Виділено класи квазіполіномів як класи існування та єдиності розв'язку задачі (1.32), (1.33). Вказано метод побудови розв'язків. Зауважимо, що задача (1.32), (1.33) у випадку $p(\frac{\partial}{\partial x}) \equiv 1$, $q(\frac{\partial}{\partial x}) \equiv \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$ вивчалася у праці [29], а у випадку $\varphi(x) \neq 0$ в [117].

Виділенню класів однозначної розв'язності задачі з умовами Діріхле-Неймана на границі смуги $(t,x) \in (0,h) \times \mathbb{R}$ для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами присвячена праця [76].

Диференціально-символьний метод застосовувався також до дослідження розв'язності задач для диференціальних та диференціально-операторних рівнянь першого [32, 116, 118] та другого [28, 119] порядків за часом з інтегральними часовими умовами.

Задачі з нелокальними дво- та багатоточковими умовами для параболічних рівнянь та систем рівнянь в необмежених областях досліджувалися в працях М. І. Матійчука, Л. І. Корбут, В.М. Лучка [47, 52, 55]. Зокрема, у

працях [47, 55] встановлено умови коректної розв'язності задачі

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{|k|\leqslant 2b} A_k D_x^k U = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n, \tag{1.34}$$

$$\mu U(0,x) - U(T,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.35}$$

де $A_k \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}$. За умови параболічності рівняння (1.34) розв'язок задачі (1.34), (1.35) подано у вигляді суми інтеграла Пуассона та об'ємного потенціала. Аналогічні результати для параболічного рівняння високого порядку з нелокальними двоточковими умовами в нескінченному шарі $(0,T) \times \mathbb{R}^n$ отримано в роботі [52].

Задачі для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними з нелокальними багатоточковими умовами за часом в обмежених областях досліджували Ж. Чабровскі [114], І. Д. Пукальський [93], М. Майчровскі [123], А. Т. Асанова [110] та інші.

Ідеї диференціально-символьного методу в останні роки успішно використовуються для обчислення означених та невластивих інтегралів від цілих функцій, для обчислення перетворень Фур'є та Лапласа. Зокрема, A. Kampf, D. M. Jackson, A. Morales у праці [120, 121] запропонували наступні формули:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} f\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\frac{e^{\varepsilon b} - e^{\varepsilon a}}{\varepsilon},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[f\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right) + f\left(-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\Big]\frac{1}{\varepsilon},$$

$$L[f](x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} f(y)dy \qquad \Rightarrow \qquad L[f](x) = f\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{1}{x}.$$

Зауважимо, що за допомогою диференціально-символьного методу доволі легко конструюються квазіполіномні розв'язки задач з умовами за однією виділеною змінною. Побудові поліномних та квазіполіномних розв'язків диференціальних рівнянь із частинними похідними та крайових за-

дач для них присвячені чимало досліджень Б. А. Бондаренка, В. В. Карачика, A. Stanoyevitch, G. Hile, P. Pedersen [8, 43, 44, 115, 132].

Задачі у нескінченному шарі для квазілінійних систем рівнянь із частинними похідними з багатоточковими крайовими умовами вивчались у працях P. Bassanini, L. Cesari, P. Pucci [111–113, 135].

Умови однозначної розв'язності обернених задач для рівняння теплопровідності з невідомим коефіцієнтом та вільним членом з крайовими двоточковими нелокальними умовами встановлено в праці М. І. Іванчова [23].

Численні дослідження авторів С. А. Абдо, Н. І. Юрчука, Ю. Н. Валіцького, М. Л. Горбачука, В. В. Городецького, Я. М. Дріня, А. А. Дезіна, С. Х. Нурметова, В. К. Романка, Л. В. Фардіголи (див., зокрема, [1, 2, 13, 18, 19, 21, 77, 94, 95, 107]) присвячені крайовим задачам для диференціально-операторних рівнянь з багатоточковими умовами за однією виділеною змінною.

Наведений огляд літератури свідчить про те, що дослідженню двоточкових та багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними присвячено численні праці. В останні роки, зокрема, вивчаються задачі з багатоточковими умовами за часом, в які входять диференціальні вирази за просторовими змінними, а також задачі для рівнянь зі зсувами за просторовими координатами. Такі рівняння можна інтерпретувати як рівняння нескінченного порядку за просторовими змінними. Отже, дослідження задач для рівнянь із частинними похідними загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з багатоточковими за часом умовами загальнішого вигляду представляють інтерес як з точки зору застосувань, так і побудови загальної теорії крайових задач.

Залишаються також недостатньо вивченими питання ядра багатоточкових задач, а також питання розв'язності таких задач у випадку, коли характеристичний визначник задачі дорівнює нулеві. Результати дисертаційної роботи частково заповнюють цю прогалину.

1.3. Короткий опис результатів дисертації

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню розв'язності у класах цілих функцій задач з двоточковими умовами за часом, у які входять довільні диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, для диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку за часовою змінною та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними. Встановлено умови існування та неіснування розв'язків задачі. Запропоновано формули для побудови розв'язків задачі у випадку їх існування.

В області $\mathbb{R}^{1+s}$, $s \in \mathbb{N}$, досліджено множину розв'язків $U = U(t,x)$ диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t} + b\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U = f(t,x),\ (t,x) \in \mathbb{R}^{1+s}, \tag{1.36}$$

що задовольняють двоточкові умови вигляду

$$\begin{aligned} &A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x) + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_0(x), \\ &B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x) + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = \varphi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^s. \end{aligned} \tag{1.37}$$

У рівнянні (1.36) операторні коефіцієнти $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – довільні диференціальні вирази з комплексними коефіцієнтами скінченного або нескінченного порядку, причому символи $a(\nu)$, $b(\nu)$ цих коефіцієнтів є цілими функціями комплексної вектор-змінної $\nu \in \mathbb{C}^s$, $f(t,x)$ – задана ціла функція. У двоточкових умовах (1.37) $h > 0$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – задані цілі функції, $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, причому їх символи $A_1(\nu)$, $A_2(\nu)$, $B_1(\nu)$, $B_2(\nu)$ для кожного $\nu \in \mathbb{C}^s$ задовольняють умови:

$$|A_1(\nu)|^2 + |A_2(\nu)|^2 \neq 0, \quad |B_1(\nu)|^2 + |B_2(\nu)|^2 \neq 0.$$

Розділ 2 присвячено розв'язності задачі (1.36), (1.37), якщо $f(t,x) = 0$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$. У підрозділі 2.1 здійснено формулювання задачі, з'ясо-

вано вигляд характеристичного визначника задачі – функції $\Delta(\nu)$. В підрозділах 2.2 – 2.4 досліджено умови існування нетривіального розв'язку задачі залежно від множини нулів функції $\Delta(\nu)$. У підрозділі 2.2 доведено, що у випадку характеристичного визначника, який відмінний від нуля для всіх $\nu \in \mathbb{C}^s$, однорідна двоточкова задача має лише тривіальний розв'язок. Випадок, коли множина нулів $\Delta(\nu)$ не є порожньою і не співпадає з $\mathbb{C}^s$, досліджено в підрозділі 2.3. Встановлено умови існування нетривіальних розв'язків задачі у класі квазіполіномів K_M, де M – множина нулів функції $\Delta(\nu)$, та у класі цілих функцій, вказано диференціально-символьний метод їх побудови. Досліджено множину розв'язків двоточкових задач для деяких класичних рівнянь математичної фізики, зокрема для рівняння коливань струни, бікалоричного та телеграфного рівнянь, а також рівняння Клейна-Гордона-Фока. Підрозділ 2.4 присвячено випадку $\Delta(\nu) \equiv 0$, виділено класи цілих функцій, в яких розв'язок задачі існує та вказано формули для його побудови. Наведено конкретні приклади дослідження множини розв'язків однорідних двоточкових задач.

У розділі 3 досліджено множину розв'язків задачі (1.36) у випадку $f(t,x) = 0$, $|\varphi_1(x)|^2 + |\varphi_1(x)|^2 > 0$. У підрозділі 3.1 введено допоміжні функції, які необхідні для побудови розв'язків. У підрозділі 3.2 у випадку $\Delta \neq 0$ для $\forall \nu \in \mathbb{C}^s$ виділено клас функцій, якому повинні належати φ_0, φ_1, щоб розв'язок задачі існував і був єдиним, вказано спосіб побудови цього розв'язку. Випадок, коли множина нулів характеристичного визначника не є порожньою та не співпадає з $\mathbb{C}^s$, досліджено в підрозділі 3.3. Для однозначної розв'язності задачі виділено клас квазіполіномів $K_{\mathbb{C}^s \setminus M}$, де M – множина нулів характеристичного визначника, до якого повинні належати функції φ_0, φ_1, подано формулу для знаходження розв'язку. У підрозділі 3.4 досліджено умови існування та неіснування розв'язків задачі для випадку $\Delta(\nu) \equiv 0$. Доведено теореми щодо існування розв'язків задачі у певних класах цілих функцій або класах квазіполіномів та вказано спосіб

їх побудови. Розглянуто приклади знаходження розв'язків задачі у випадку $\varphi_0, \varphi_1 \in K_M$. Знайдено умови на φ_0, φ_1, за яких розв'язок двоточкової задачі не існує.

У розділі 4 досліджено множину розв'язків задачі (1.36), (1.37), у якій $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. У підрозділі 4.1 введено допоміжні функції, які необхідні для дослідження задачі. У підрозділі 4.2 у випадку $\Delta(\nu) \neq 0$ для $\forall \nu \in \mathbb{C}^s$ виділено клас цілих функцій, до якого має належати функція $f(t, x)$, щоб розв'язок задачі існував і був єдиним. Вказано спосіб побудови розв'язку задачі. Випадок, коли множина нулів характеристичного визначника не є порожньою та не співпадає з $\mathbb{C}^s$, досліджено в підрозділі 4.3. Для однозначної розв'язності задачі виділено клас квазіполіномів $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus M}$, до якого повинна належати функція f, подано формулу для знаходження розв'язку. У підрозділі 4.4 досліджено випадок $\Delta(\nu) \equiv 0$. Знайдено умови існування та неіснування розв'язку задачі. У випадку існування розв'язків задачі вказано спосіб їх побудови.

Висновки до розділу 1

У першому розділі дисертації наведено короткий огляд робіт, присвячених дослідженню задач з багатоточковими умовами для звичайних диференціальних рівнянь, а також для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними, близьких до тематики дисертації. Показано, що класи єдиності розв'язку багатоточкової за часом задачі для рівнянь із частинними похідними істотно відрізняються від класів єдиності розв'язку відповідної задачі Коші для цих же ж рівнянь. Описано роботи, в яких використовується диференціально-символьний метод для дослідження задач Коші, багатоточкових задач та крайових задач з умовами Діріхле, Неймана, типу Діріхле, типу Неймана і т.д.

РОЗДІЛ 2
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-СИМВОЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОРІДНОЇ ДВОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

У розділі досліджено умови існування лише тривіального розв'язку, а також нетривіальних розв'язків однорідної задачі для диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано локальні двоточкові умови, та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними. У випадку існування нетривіальних розв'язків задачі запропоновано спосіб їх побудови, використовуючи ідеї диференціально-символьного методу.

2.1. Формулювання однорідної двоточкової задачі

В області $\mathbb{R}^{1+s}$, $s \in \mathbb{N}$, досліджуємо множину розв'язків $U = U(t,x)$ диференціального рівняння із частинними похідними

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t} + b\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U = 0,\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^s, \quad (2.1)$$

у якому операторні коефіцієнти $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ вважаємо довільними диференціальними виразами з комплексними сталими коефіцієнтами скінченного або нескінченного порядку, причому символи $a\,(\nu)$, $b\,(\nu)$ цих коефіцієнтів є цілими функціями комплексної вектор-змінної $\nu \in \mathbb{C}^s$.

За умови, що $a\,(\nu)$ та $b\,(\nu)$ – поліноми, їх степені за сукупністю змінних позначимо через $p_a \in \mathbb{Z}_+$ та $p_b \in \mathbb{Z}_+$, а також вважатимемо, що $p_a = \infty$ та $p_b = \infty$, якщо $a\,(\nu)$ та відповідно $b\,(\nu)$ не є поліномами. Позначимо $\overline{p} = \max\{p_a,\ p_b/2\}$.

У множині розв'язків рівняння (2.1) знайдемо такі розв'язки, що задовольняють однорідні локальні двоточкові умови:

$$l_{0\partial}U(t,x) \equiv A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x) + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$$
$$l_{1\partial}U(t,x) \equiv B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x) + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^s,\ h > 0, \tag{2.2}$$

де $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, причому їх символи $A_1(\nu)$, $A_2(\nu)$, $B_1(\nu)$, $B_2(\nu)$ для кожного $\nu \in \mathbb{C}^s$ задовольняють умови:

$$|A_1(\nu)|^2 + |A_2(\nu)|^2 \neq 0, \quad |B_1(\nu)|^2 + |B_2(\nu)|^2 \neq 0.$$

Під розв'язком задачі (2.1), (2.2) розуміємо цілу функцію

$$U(t,x) = \sum_{\widehat{k}\in\mathbb{Z}_+^{s+1}} u_{\widehat{k}}\, t^{k_0}\, x^k, \quad \widehat{k} = (k_0, k) = (k_0, k_1, \ldots, k_s), \quad u_{\widehat{k}} \in \mathbb{C},$$

змінних t та $x \in \mathbb{R}^s$, що задовольняє рівняння (2.1) та двоточкові умови (2.2).

Дія диференціального виразу $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ з цілим символом

$$b(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^s} b_k \nu^k, \quad b_k \in \mathbb{C},$$

на функцію U у рівнянні (2.1) визначається так:

$$b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^s} b_k \frac{\partial^{|k|}U}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_s^{k_s}}.$$

Дія диференціального виразу $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ на $\frac{\partial U}{\partial t}$ визначається аналогічно. Зауважимо, що коректності дій диференціальних виразів нескінченного порядку у класах цілих функцій присвячені праці [27, 49].

Встановимо умови, за яких існують нетривіальні розв'язки (нетривіальне ядро) даної задачі. У випадку існування таких розв'язків вкажемо метод

їх побудови. Для цього використаємо ідеї диференціально-символьного методу [34].

Замінивши $\frac{\partial}{\partial x}$ на вектор-параметр ν і символ $\frac{\partial}{\partial t}$ на $\frac{d}{dt}$ з рівняння (2.1) одержимо звичайне диференціальне рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu)\equiv\left(\frac{d^2}{dt^2}+2a(\nu)\frac{d}{dt}+b(\nu)\right)T(t,\nu)=0, \tag{2.3}$$

у якому надалі вважаємо, що $\nu\in\mathbb{C}^s$.

Нормальна в точці $t=0$ фундаментальна система розв'язків рівняння (2.3) має вигляд:

$$\begin{gathered}T_0(t,\nu)=e^{-a(\nu)t}\left\{a(\nu)\frac{\sinh\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}+\cosh\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]\right\},\\ T_1(t,\nu)=e^{-a(\nu)t}\frac{\sinh\left[t\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}},\end{gathered} \tag{2.4}$$

де $D(\nu)=a^2(\nu)-b(\nu)$.

Оскільки коефіцієнти $a(\nu)$, $b(\nu)$ рівняння (2.3) за припущенням є цілими функціями, то згідно з теоремою Пуанкаре ([104], с. 59) функції $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ є також цілими функціями порядку $\overline{p}$ стосовно вектор-параметра ν.

Запишемо визначник вигляду:

$$\Delta(\nu)=\begin{vmatrix} l_{0\nu}T_0(t,\nu) & l_{0\nu}T_1(t,\nu)\\ l_{1\nu}T_0(t,\nu) & l_{1\nu}T_1(t,\nu)\end{vmatrix}, \tag{2.5}$$

де

$$l_{0\nu}T_0(t,\nu)\equiv A_1(\nu),\qquad l_{0\nu}T_1(t,\nu)\equiv A_2(\nu),$$

$$l_{1\nu}T_0(t,\nu)\equiv B_1(\nu)\,T_0(h,\nu)+B_2(\nu)\,\frac{dT_0}{dt}(h,\nu),$$

$$l_{1\nu}T_1(t,\nu)\equiv B_1(\nu)\,T_1(h,\nu)+B_2(\nu)\,\frac{dT_1}{dt}(h,\nu).$$

Визначник (2.5) будемо називати характеристичним визначником задачі (2.1), (2.2). Його можна подати також у вигляді:

$$\Delta(\nu) = e^{-ah}\left\{A_1B_1 - a\left(A_1B_2 + A_2B_1\right) + bA_2B_2\right\}\frac{\sinh\left[h\sqrt{a^2-b}\right]}{\sqrt{a^2-b}} +$$
$$+e^{-ah}\left\{A_1B_2 - A_2B_1\right\}\cosh\left[h\sqrt{a^2-b}\right],$$

де для скорочення записів позначено $a = a(\nu)$, $b = b(\nu)$, $A_1 = A_1(\nu)$, $A_2 = A_2(\nu)$, $B_1 = B_1(\nu)$, $B_2 = B_2(\nu)$.

Зазначимо, що функція $\Delta(\nu)$ як суперпозиція цілих функцій є також цілою. Зокрема, для $a^2 = b$ маємо

$$\Delta(\nu) = e^{-ah}\Big(\left\{A_1B_1 - a\left(A_1B_2 + A_2B_1\right) + a^2A_2B_2\right\}h + A_1B_2 - A_2B_1\Big).$$

Якщо в (2.2) $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 1$, $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 1$, $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$, $B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$, то отримуємо умови

$$U(0,x) = U(h,x) = 0 \tag{2.6}$$

і визначник $\Delta(\nu)$ набуде вигляду

$$\Delta(\nu) = T_1(h,\nu) = e^{-a(\nu)h}\frac{\sinh\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}.$$

Для $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$, $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$, $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 1$, $B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 1$ маємо задачу для рівняння (2.1) з умовами

$$\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0 \tag{2.7}$$

і визначник $\Delta(\nu)$ має вигляд

$$\Delta(\nu) = -\frac{dT_0}{dt}(h,\nu) = e^{-a(\nu)h}\frac{\sinh\left[h\sqrt{D(\nu)}\right]}{\sqrt{D(\nu)}}b(\nu).$$

Для визначника $\Delta(\nu)$ є можливими такі випадки:

1) $\Delta(\nu) \neq 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{C}^s$;

2) $\Delta(\nu) \equiv 0$ на $\mathbb{C}^s$;

3) $\Delta(\nu) \not\equiv 0$ і $\{\nu \in \mathbb{C}^s\colon \ \Delta(\nu) = 0\} \neq \varnothing$.

2.2. Умови однозначної розв'язності задачі

Нехай $p = \max\{\overline{p}, 1\}$ і $p' = p/(p-1)$ для $1 < p < \infty$ і $p' = \infty$ для $p = 1$ та $p' = 1$ для $p = \infty$.

Теорема 2.1. *Якщо* $\Delta(\nu) \neq 0 \ \ \forall \nu \in \mathbb{C}^s$, *то задача* (2.1), (2.2) *у класі цілих функцій* $\mathbb{A}_{p'}$ *має лише тривіальний розв'язок.*

Доведення. Нехай існує ненульовий цілий розв'язок $U(t,x)$ рівняння (2.1), тобто ціла функція вигляду

$$U(t,x) = \sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}_+^{s+1}} u_{\bar{k}}\, t^{k_0} x^k, \ \ \bar{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_s), \ u_{\bar{k}} \in \mathbb{C},$$

змінних t та x, що задовольняє умови (2.2).

Позначимо $U(0,x) = \varphi(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$. Тоді функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ є також цілими з класу $A_{p'}$. Запишемо розв'язок задачі (2.1), (2.2) згідно з диференціально-символьним методом [34] як розв'язок задачі Коші для рівняння (2.1) з початковими даними φ та ψ у вигляді:

$$U(t,x) = \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O} + \psi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}. \qquad (2.8)$$

Оскільки $T_0(t,\nu)\, e^{\nu\cdot x}$ та $T_1(t,\nu)\, e^{\nu\cdot x}$ є цілими за ν функціями порядку $p = \max\{\overline{p}, 1\} \geqslant 1$, то обидві цілі функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ повинні мати спряжений (див. [49] для $s = 1$ та [27] для $s > 1$) з p порядок p', тобто $p' = p/(p-1)$ для $1 < p < \infty$ і $p' = \infty$ для $p = 1$ та $p' = 1$ для $p = \infty$.

З виконання двоточкових умов (2.2) для функцій φ та ψ отримаємо в $\mathbb{R}^s$ систему тотожностей

$$\begin{cases} \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\Big\{A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O} + \psi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O} \equiv 0, \\ \varphi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\left(B_1(\nu)T_0(h,\nu) + B_2(\nu)\dfrac{dT_0}{dt}(h,\nu)\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} + \\ \qquad + \psi\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\left(B_1(\nu)T_1(h,\nu) + B_2(\nu)\dfrac{dT_1}{dt}(h,\nu)\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} \equiv 0, \end{cases} \qquad (2.9)$$

Подіємо диференціальним виразом $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T_1\left(h,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)+B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\dfrac{dT_1}{dt}\left(h,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ на першу тотожність системи (2.9), а на другу тотожність – виразом $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, після чого віднімемо від першої тотожності другу. Отримаємо

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\Delta\left(\nu\right)\Big\}\Big|_{\nu=O}\equiv 0,\quad x\in\mathbb{R}^s.$$

Оскільки функція $\Delta(\nu)\neq 0$ для всіх $\nu\in\mathbb{C}^s$, то $\Delta^{-1}\left(\nu\right)$ є цілою. Подіявши на останню тотожність диференціальним виразом $\Delta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, отримаємо $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}\frac{1}{\Delta(\nu)}\Delta\left(\nu\right)\right\}\Big|_{\nu=O}\equiv 0$, звідки маємо $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=O}\equiv 0$ або $\varphi\left(x\right)\equiv 0$.

Аналогічно, якщо подіємо на першу тотожність системи (2.9) диференціальним виразом $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T_0\left(h,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)-B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{dT_0}{dt}\left(h,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ і на другу тотожність виразом $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, а потім додамо отримані тотожності, то одержимо

$$\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Big\{e^{\nu\cdot x}\Delta\left(\nu\right)\Big\}\Big|_{\nu=O}\equiv 0,\quad x\in\mathbb{R}^s,$$

звідки випливає, що $\psi\left(x\right)\equiv 0$.

Маємо тотожність $U\left(t,x\right)\equiv 0$, яка суперечить припущенню щодо нетривіальності розв'язку задачі (2.1), (2.2). $\square$

Приклад 2.1. Дослідити розв'язність задачі для диференціально-функціонального рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U\left(t,x_1,x_2\right)+2\frac{\partial}{\partial t}U\left(t,x_1+1,x_2-1\right)+$$
$$+2U\left(x_1+1,x_2-1\right)-U\left(t,x_1,x_2\right)=0,\quad (t,x)\in\mathbb{R}^3,\quad (2.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(0,x_1,x_2)=0,\quad U(1,x_1,x_2)+\frac{\partial U}{\partial t}(1,x_1,x_2)=0,\quad x\in\mathbb{R}^2.\qquad (2.11)$$

∇ Дана задача є задачею (2.1), (2.2), в якій $a\left(\nu\right)=e^{\nu_1-\nu_2}$, $b\left(\nu\right)=2e^{\nu_1-\nu_2}-1$, $s=2$, $A_1=0$, $A_2=1$, $B_1=1$, $B_2=1$, $p=\infty$.

В даному випадку

$$T_0(t,\nu)=e^{-te^{\nu_1-\nu_2}}\left\{e^{\nu_1-\nu_2}\frac{\sinh\left[t(e^{\nu_1-\nu_2}-1)\right]}{e^{\nu_1-\nu_2}-1}+\cosh\left[t(e^{\nu_1-\nu_2}-1)\right]\right\},$$

$$T_1(t,\nu) = e^{-te^{\nu_1-\nu_2}} \frac{\sinh\left[t(e^{\nu_1-\nu_2}-1)\right]}{e^{\nu_1-\nu_2}-1}.$$

Обчислюємо визначник задачі (2.10), (2.11):

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ T_0(1,\nu) + \dfrac{dT_0}{dt}(1,\nu) & T_1(1,\nu) + \dfrac{dT_1}{dt}(1,\nu) \end{vmatrix} = e^{-2e^{\nu_1-\nu_2}+1}.$$

Оскільки $\Delta(\nu) \neq 0$ для всіх $\nu \in \mathbb{C}^2$, то за теоремою 2.1 задача (2.10), (2.11) у класі цілих функцій експоненціального типу має лише нульовий розв'язок, тобто ядро задачі є тривіальним. $\triangle$

2.3. Випадок, коли множина нулів характеристичного визначника не є порожньою і не збігається з $\mathbb{C}^s$

Розглянемо множину

$$M = \left\{\nu \in \mathbb{C}^s\colon\ \ \Delta(\nu) = 0\right\}, \tag{2.12}$$

причому вважаємо, що $M \neq \varnothing$ і $M \neq \mathbb{C}^s$.

Зауваження 2.1. Будь-якому квазіполіному $\psi(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} Q_j(x)e^{\alpha_j\cdot x}$, $m \in \mathbb{N}$, з класу $K_{\mathbb{C}^s}$ можна поставити у відповідність диференціальний вираз

$$\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right) e^{\alpha_j\cdot\frac{\partial}{\partial\nu}},$$

дія якого на цілу функцію визначається формулою

$$\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\chi(\nu) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\chi(\alpha_j+\nu),$$

зокрема,

$$\psi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\chi(\nu)\Big|_{\nu=O} = \sum_{j=1}^{m} Q_j\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\chi(\nu)\Big|_{\nu=\alpha_j} = \sum_{j=1}^{m} Q_j\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\Big)\chi(\alpha_j).$$

Зауваження 2.2. Нульовий квазіполіном $g(x) = 0$ належить як до K_M, так і до $K_{\mathbb{C}^s\setminus M}$, причому $K_M \cap K_{\mathbb{C}^s\setminus M} = \{0\}$. Результатом дії відповідного

диференціального виразу $g\left(\partial/\partial\nu\right)$ на цілу функцію є, очевидно, нульова функція.

Спочатку дослідимо задачу (2.1), (2.2) для випадку $s=1$.

Якщо $M\neq\varnothing$ і $M\neq\mathbb{C}^s$, то множина M може містити скінченну кількість нулів функції $\triangle\left(\nu\right)$ або може складатись з нескінченної кількості нулів $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ відповідно скінченної кратності $p_{\alpha_1},p_{\alpha_2},\ldots$, причому $|\alpha_n|\to\infty$ при $n\to\infty$. Зауважимо, що для нуля α функції $\Delta(\nu)$ кратності p_α виконуються умови:

$$\Delta(\alpha)=0,\ \Delta'(\alpha)=0,\ \ldots\ ,\Delta^{(p_\alpha-1)}(\alpha)=0,\ \Delta^{(p_\alpha)}(\alpha)\neq 0.$$

Теорема 2.2. *Нехай $\psi\in K_M$ і має вигляд*

$$\psi(x)=Q\left(x\right)e^{\alpha x}, \tag{2.13}$$

в якому $\alpha\in M$ (α – нуль функції $\Delta(\nu)$ кратності $p_\alpha\in\mathbb{N}$), $Q\left(x\right)$ – нетривіальний поліном степеня $n\leqslant p_\alpha-1$. Тоді функція

$$U\left(t,x\right)=Q\Big(\frac{d}{d\nu}\Big)\Big\{\left[A_2(\nu)T_0(t,\nu)-A_1\left(\nu\right)T_1\left(t,\nu\right)\right]e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}, \tag{2.14}$$

де $T_0\left(t,\nu\right)$, $T_1\left(t,\nu\right)$ – функції (2.4), є нетривіальним розв'язком задачі (2.1), (2.2) з класу $K_{\mathbb{C},M}$. Навпаки, якщо розв'язок задачі (2.1), (2.2) є квазіполіномом з класу $K_{\mathbb{C},M}$ вигляду

$$U\left(t,x\right)=\sum_{l=1}^{N}P_l\left(t,x\right)e^{\beta_l t+\alpha x}, \tag{2.15}$$

де $N\in\mathbb{N}$, $P_l\left(t,x\right)$, $l=\overline{1,N}$, – поліноми з комплексними коефіцієнтами степеня n за змінною x, $\beta_l,\alpha\in\mathbb{C}$, $\beta_l\neq\beta_r$ для $r\neq l$, $r,l=\overline{1,N}$, то $\alpha\in M$, причому $n<p_\alpha$ і цей розв'язок можна подати у вигляді (2.14), в якому $Q\left(x\right)=\sum\limits_{l=1}^{N}\big(\beta P_l\left(0,x\right)+\frac{\partial P_l}{\partial t}\left(0,x\right)\big)$.

Доведення. Достатність. Нехай $\psi\left(x\right)$ – квазіполіном вигляду (2.13). Покажемо, що функція

$$U\left(t,x\right)=\psi\left(\frac{d}{d\nu}\right)\Big\{\left[A_2\left(\nu\right)T_0\left(t,\nu\right)-A_1\left(\nu\right)T_1\left(t,\nu\right)\right]e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0},$$

тобто функція (2.14), є розв'язком рівняння (2.1). Враховуючи комутативність операцій $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ і $\frac{\partial}{\partial \nu}$, ми отримаємо

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x) =$$

$$= L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)Q\Big(\frac{d}{d\nu}\Big)\Big\{\big[A_2(\nu)T_0(t,\nu) - A_1(\nu)\,T_1(t,\nu)\big]e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= Q\Big(\frac{d}{d\nu}\Big)\left\{L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big\{\big[A_2(\nu)T_0(t,\nu) - A_1(\nu)\,T_1(t,\nu)\big]e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}\right\} =$$

$$= Q\Big(\frac{d}{d\nu}\Big)\left\{e^{\nu x}L\Big(\frac{d}{dt}, \nu\Big)\Big\{A_2(\nu)\,T_0(t,\nu) - A_1(\nu)\,T_1(t,\nu)\Big\}\right\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= Q\Big(\frac{d}{d\nu}\Big)\left\{e^{\nu x}\left[A_2(\nu)L\Big(\frac{d}{dt}, \nu\Big)T_0(t,\nu) - A_1(\nu)L\Big(\frac{d}{dt}, \nu\Big)T_1(t,\nu)\right]\right\}\Big|_{\nu=\alpha} = 0.$$

Покажемо, що функція (2.14) задовольняє першу з двоточкових умов (2.1):

$$A_1\Big(\frac{d}{dx}\Big)U(0,x) + A_2\Big(\frac{d}{dx}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) =$$

$$= Q\Big(\frac{d}{d\nu}\Big)\left\{A_1\Big(\frac{d}{dx}\Big)\big[A_2(\nu)e^{\nu x}\big]\right\}\Big|_{\nu=\alpha} - Q\Big(\frac{d}{d\nu}\Big)\left\{A_2\Big(\frac{d}{dx}\Big)\big[A_1(\nu)e^{\nu x}\big]\right\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= Q\Big(\frac{d}{d\nu}\Big)\Big\{e^{\nu x}\big[A_1(\nu)A_2(\nu) - A_1(\nu)A_2(\nu)\big]\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} = 0.$$

Крім того,

$$B_1\left(\frac{d}{dx}\right)U(h,x) + B_2\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = Q\left(\frac{d}{d\nu}\right)\Big\{\Delta(\nu)e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Оскільки $\nu = \alpha$ – нуль функції $\Delta(\nu)$ кратності p_α, то і друга умова (2.2) виконується.

Отже, функція $U(t,x)$ є розв'язком задачі (2.1), (2.2).

Обчислюємо

$$U(0,x) = Q\left(\frac{d}{d\nu}\right)\Big\{A_2(\nu)\,e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = -Q\left(\frac{d}{d\nu}\right)\Big\{A_1(\nu)\,e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

З умови $|A_1(\nu)|^2 + |A_2(\nu)|^2 \neq 0$ випливає, що хоча б одна з функцій $U(0,x)$ або $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)$ є ненульовою. Отже, функція (2.14) є нетривіальним розв'язком задачі (2.1), (2.2).

Необхідність. Нехай $U(t,x)$ – нетривіальний розв'язок задачі (2.1), (2.2), який є квазіполіномом вигляду (2.15). Позначимо $U(0,x) = \varphi_1(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_2(x)$. Тоді $\varphi_1(x) = e^{\alpha x} Q_1(x)$, $\varphi_2(x) = e^{\alpha x} Q_2(x)$, де $Q_1(x) = \sum\limits_{\ell=1}^{N} P_\ell(0,x)$, $Q_2(x) = \sum\limits_{\ell=1}^{N} \left(\beta_\ell P_\ell(0,x) + \frac{\partial P_\ell}{\partial t}(0,x) \right)$ – поліноми степеня n .

Зауважимо, що $|\varphi_1(x)|^2 + |\varphi_2(x)|^2 \neq 0$.

Квазіполіном (2.15) як єдиний розв'язок задачі Коші

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t,x) = 0,$$

$$U(0,x) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_2(x)$$

згідно з диференціально-символьним методом [34] можна записати у вигляді

$$U(t,x) = \varphi_1\left(\frac{d}{d\nu}\right) \left\{ T_0(t,\nu) e^{\nu x} \right\}\Big|_{\nu=0} + \varphi_2\left(\frac{d}{d\nu}\right) \left\{ T_1(t,\nu) e^{\nu x} \right\}\Big|_{\nu=0}. \quad (2.16)$$

Функція вигляду (2.16) задовольняє першу з двоточкових умов (2.2), тому отримаємо рівність

$$A_1\left(\frac{d}{dx}\right) \varphi_1(x) + A_2\left(\frac{d}{dx}\right) \varphi_2(x) \equiv 0. \quad (2.17)$$

Використовуючи рівність (2.17) та функцію вигляду (2.16) можна записати

$$A_1\Big(\frac{d}{dx}\Big) U(t,x) = -\varphi_2\Big(\frac{d}{d\nu}\Big) \left\{ \Big[A_2(\nu) T_0(t,\nu) - A_1(\nu) T_1(t,\nu) \Big] e^{\nu x} \right\}\Big|_{\nu=0},$$

$$A_2\Big(\frac{d}{dx}\Big) U(t,x) = \varphi_1\Big(\frac{d}{d\nu}\Big) \left\{ \Big[A_2(\nu) T_0(t,\nu) - A_1(\nu) T_1(t,\nu) \Big] e^{\nu x} \right\}\Big|_{\nu=0},$$

звідси

$$U(t,x) = \varphi\Big(\frac{d}{d\nu}\Big) \left\{ \Big[A_2(\nu) T_0(t,\nu) - A_1(\nu) T_1(t,\nu) \Big] e^{\nu x} \right\}\Big|_{\nu=0},$$

де $\varphi(x) = Q(x)e^{\alpha x}$, $Q(x)$ – деякий поліном степеня n.

Покажемо тепер, що $\alpha \in M$ і $\deg Q(x) < p_\alpha$. З другої умови (2.2) одержимо

$$Q\left(\frac{d}{d\nu}\right)\left\{\Delta\left(\nu\right)e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha} \equiv 0. \tag{2.18}$$

Завдяки лінійній незалежності функцій $e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ x^2e^{\alpha x}, ...,\ x^ne^{\alpha x}$ тотожність (2.18) виконується тоді та лише тоді, коли

$$\Delta(\alpha) = \Delta'(\alpha) = \ldots = \Delta^{(n)}(\alpha) = 0.$$

Звідси випливає, що $\alpha \in M$ і $n < p_\alpha$. □

Приклад 2.2. Знайти розв'язок рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right] U\left(t, x\right) = 0, \tag{2.19}$$

що задовольняє умови

$$U(0,x) - \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad U(h,x) - \frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0. \tag{2.20}$$

∇ Задача (2.19), (2.20) є задачею (2.1), (2.2), в якій $a\left(\nu\right) = -\nu^2$, $b\left(\nu\right) = \nu^4$, $A_1(\nu) = B_1(\nu) = 1$, $A_2(\nu) = B_2(\nu) = -1$, $p = 2$. Нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} - 2\,\nu^2\frac{d}{dt} + \nu^4\right] T(t,\nu) = 0$$

має вигляд:

$$T_0\left(t,\nu\right) = e^{\nu^2 t}\left(-\nu^2 t + 1\right),\ \ T_1\left(t,\nu\right) = e^{\nu^2 t}t.$$

Запишемо характеристичний визначник задачі та множину M:

$$\Delta\left(\nu\right) = h\,e^{\nu^2 h}\left(\nu^2 - 1\right)^2,$$

$$M = \left\{\nu \in \mathbb{C}\ :\quad \left(\nu^2 - 1\right)^2 = 0\right\}.$$

Числа $\nu = \pm 1$ для функції $\Delta\left(\nu\right)$ є двократними нулями, тому за теоремою 2.2 розв'язками задачі (2.19), (2.20) є

$$U\left(t,x\right) = \left(c_1 + c_2\frac{d}{d\nu}\right)\left\{\left(\nu^2 t - t - 1\right)e^{\nu^2 t + \nu x}\right\}\Big|_{\nu=\pm 1} = (c_1 + c_2 x)e^{t \pm x},$$

де $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. $\triangle$

Розглянемо двоточкові за часом задачі для деяких класичних рівнянь математичної фізики, знайдемо елементи їх ядра згідно з теоремою 2.2.

Рівняння коливань струни. Розглянемо задачу знаходження нетривіальних розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \ \ \gamma = \text{const} > 0, \tag{2.21}$$

які задовольняють двоточкові умови

$$U(0,x) + \tfrac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \ \ U(h,x) + \tfrac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0, \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Задача (2.21), (2.22) є задачею (2.1), (2.2), в якій $a(\nu) = 0$, $b(\nu) = -\gamma^2\nu^2$, $A_1(\nu) = A_2(\nu) = 1$, $B_1(\nu) = B_2(\nu) = 1$, $p = 1$.

Нормальна фундаментальна система розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = \gamma^2 \nu^2 T$$

має вигляд:

$$T_0(t,\nu) = \cosh[\gamma\nu t], \quad T_1(t,\nu) = \frac{\sinh[\gamma\nu t]}{\gamma\nu}.$$

Зауважимо, що $T_0(t,0) = 1$, $T_1(t,0) = t$.

Запишемо характеристичний визначник $\Delta(\nu)$ задачі:

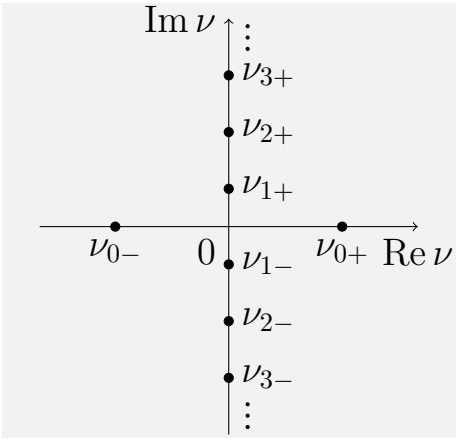
$$\Delta(\nu) = \frac{\sinh[\gamma\nu h]}{\gamma\nu}\left[1 - \gamma^2\nu^2\right].$$

Множина M матиме вигляд:

$$M = M_1 \cup M_2,$$

$$M_1 = \left\{\nu_{k\pm} : \ \ \nu_{k\pm} = \pm\frac{\pi k}{\gamma h} i, \ k \in \mathbb{N}\right\},$$

$$M_2 = \left\{\nu_{0\pm} : \ \ \nu_{0\pm} = \pm\frac{1}{\gamma}\right\}, \ i^2 = 1.$$



Нулі функції $\Delta(\nu)$ симетричні відносно точки $(0,0)$ комплексної площини. Відстань між ν_{k+} і $\nu_{k+1,+}$ для $k \in \mathbb{N}$ рівна $\frac{\pi}{\gamma h}$.

Числа $\nu_{k\pm}$ з M_1 є простими нулями функції $\Delta(\nu)$, тому згідно з теоремою 2.2 нетривіальними розв'язками задачі (2.21), (2.22) є наступні функції:

$$U_{k\pm}(t,x) = \left\{ \left[T_0(t,\nu) - T_1(t,\nu)\right] e^{\nu x} \right\}\Big|_{\nu=\pm i\frac{\pi k}{\gamma h}}$$

або

$$U_{k\pm}(t,x) = \left(\cos\frac{\pi k t}{h} - \frac{\sin\frac{\pi k t}{h}}{\frac{\pi k}{h}}\right) e^{\pm i\frac{\pi k}{h\gamma}x}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо, що остання формула для всіх $k \in \mathbb{N}$ містить дві серії розв'язків задачі (2.21), (2.22): перша – зі знаком „+" і друга – зі знаком „–".

Числа $\nu_{0\pm}$ з M_2 є також простими нулями функції $\Delta(\nu)$. Отже, відповідно до теореми 2.2, нетривіальними розв'язками задачі (2.21), (2.22) є функції вигляду

$$U_{0\pm}(t,x) = e^{-t\pm\frac{1}{\gamma}x}.$$

Зауважимо, що розв'язки $U_{k\pm}(t,x)$, $U_{0\pm}(t,x)$ знайдено з точністю до ненульових сталих множників.

Рівняння Клейна-Гордона-Фока. Розглянемо двоточкову задачу для рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2\right] U(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \gamma, m = \text{const} > 0 \qquad (2.23)$$

з умовами (2.22).

Задача (2.23), (2.22) є задачею (2.1), (2.2), в якій $a(\nu) = 0$, $b(\nu) = -\gamma^2\nu^2 + m^2$, $A_1(\nu) = A_2(\nu) = 1$, $B_1(\nu) = B_2(\nu) = 1$, $p = 1$.

Нормальна фундаментальна система розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d^2T}{dt^2} = \left(\gamma^2\nu^2 - m^2\right) T$$

має вигляд

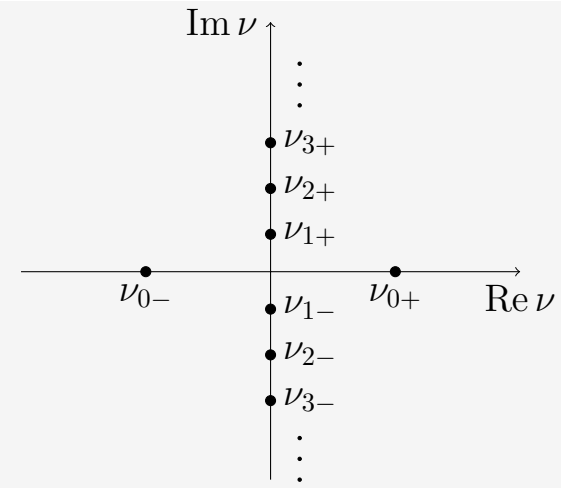
$$T_0\left(t,\nu\right)=\cosh\left[t\sqrt{\gamma^2\nu^2-m^2}\right],\quad T_1\left(t,\nu\right)=\frac{\sinh\left[t\sqrt{\gamma^2\nu^2-m^2}\right]}{\sqrt{\gamma^2\nu^2-m^2}}.$$

Зауважимо, що $T_0\left(t,0\right)=\cos[mt],\ T_1\left(t,0\right)=\dfrac{\sin[mt]}{m}$.

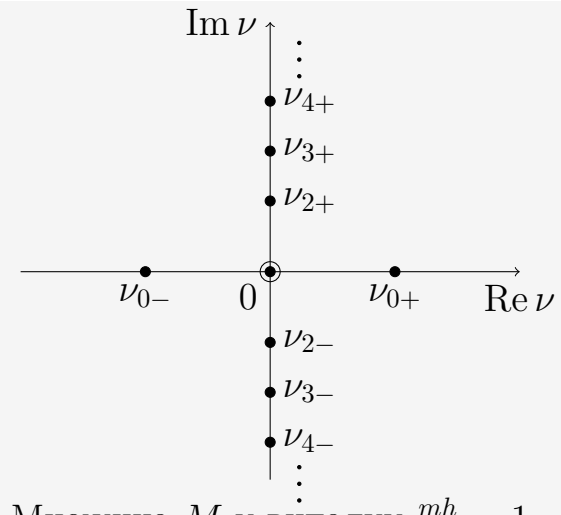
Характеристичний визначник задачі (2.23), (2.22) і множина M будуть наступними:

$$\Delta\left(\nu\right)=\frac{\sinh\left[h\sqrt{\gamma^2\nu^2-m^2}\right]}{\sqrt{\gamma^2\nu^2-m^2}}\left[1-\gamma^2\nu^2+m^2\right],$$

$$M=\left\{\nu_{k\pm}:\nu_{k\pm}=\pm\frac{\sqrt{m^2h^2-\pi^2k^2}}{\gamma h},\ k\in\mathbb{N}\right\}\bigcup\left\{\nu_{0\pm}:\nu_{0\pm}=\pm\frac{\sqrt{1+m^2}}{\gamma}\right\}.$$



Множина M у випадку $\frac{mh}{\pi}<1$



Множина M у випадку $\frac{mh}{\pi}=1$

Елементи множини M є симетричними відносно точки $(0,0)$ комплексної площини. Відстань між ν_{k+} і $\nu_{k+1,+}$ для $k\to\infty$ прямує до $\frac{\pi}{\gamma h}$.

У випадку $\frac{mh}{\pi}<1$ числа $\nu_{k\pm}=\pm\frac{\sqrt{m^2h^2-\pi^2k^2}}{\gamma h}$, $k\in\mathbb{N}$, є простими нулями функції $\Delta\left(\nu\right)$ і за теоремою 2.2 отримаємо таку серію квазіполіномних розв'язків задачі (2.23), (2.22):

$$U_{k\pm}\left(t,x\right)=\left(\cos\frac{\pi kt}{h}-\frac{\sin\frac{\pi kt}{h}}{\frac{\pi k}{h}}\right)e^{\pm i\frac{\sqrt{\pi^2k^2-m^2h^2}}{\gamma h}x}. \tag{2.24}$$

У випадку $\frac{mh}{\pi}=1$ число $\nu_{1\pm}=0$ є двократним нулем функції $\Delta(\nu)$,

тому за теоремою 2.2 обчислюємо

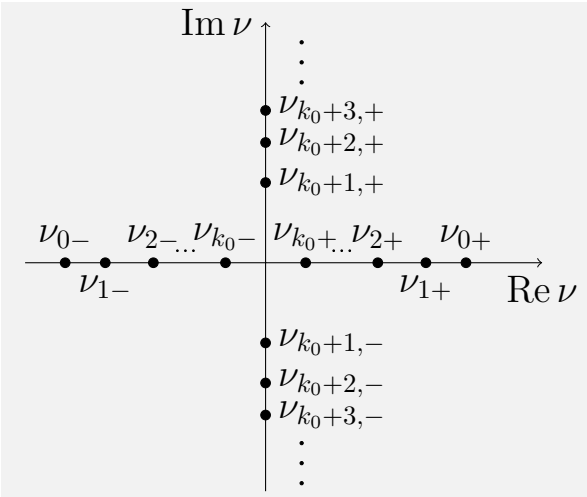
$$U_0(t,x) = \left(c_1 + c_2\frac{d}{d\nu}\right)\left\{ \left[T_0(t,\nu) - T_1(t,\nu)\right] e^{\nu x} \right\}\Bigg|_{\nu=0} = \\ = (c_1 + c_2 x)\left(\cos[mt] - \frac{\sin[mt]}{m}\right), \tag{2.25}$$

де $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $|c_1|^2 + |c_2|^2 > 0$.

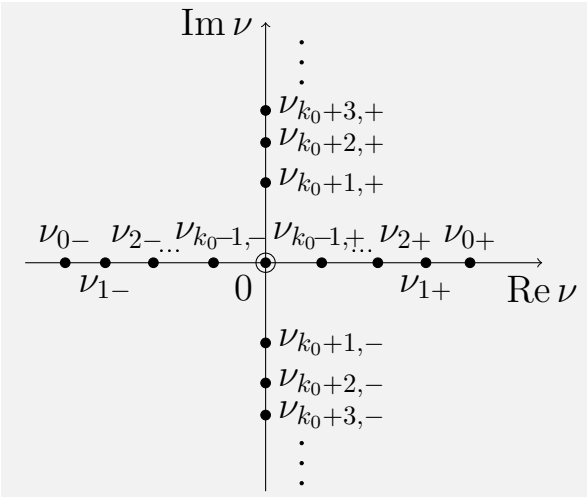
Для чисел $\nu_{0\pm} = \pm\frac{\sqrt{1+m^2}}{\gamma}$, які є простими нулями функції $\Delta(\nu)$, отримаємо такі розв'язки задачі (2.23), (2.22):

$$U_\pm(t,x) = e^{-t\pm\frac{\sqrt{1+m^2}}{\gamma}x}.$$

Для $\frac{mh}{\pi} > 1$ маємо:



Множина M у випадку $\frac{mh}{\pi} \notin \mathbb{N}$, $[\frac{mh}{\pi}] = k_0 \in \mathbb{N}$



Множина M у випадку $\frac{mh}{\pi} = k_0 \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$

Якщо $\frac{mh}{\pi} \notin \mathbb{N}$, $\frac{mh}{\pi} > 1$ і $[\frac{mh}{\pi}] = k_0 \in \mathbb{N}$ для $1 \leqslant k \leqslant k_0$ маємо такі розв'язки задачі (2.23), (2.22):

$$U_{k\pm}(t,x) = \left(\cos\frac{\pi k t}{h} - \frac{\sin\frac{\pi k t}{h}}{\frac{\pi k}{h}}\right) e^{\pm\frac{\sqrt{m^2h^2-\pi^2k^2}}{\gamma h}x}. \tag{2.26}$$

Якщо $\frac{mh}{\pi} = k_0 \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, то розв'язки задачі (2.23), (2.22) складаються з:

— розв'язків (2.24) для $k > k_0$;

— розв'язків (2.25) для $k = k_0$;

— розв'язків (2.26) для $k < k_0$.

Телеграфне рівняння. В області $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ знайти нетривіальні розв'язки рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2m\frac{\partial}{\partial t} - \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(t,x) = 0, \quad \gamma, m = \text{const} > 0, \tag{2.27}$$

які задовольняють умови

$$\alpha U(0,x) + \beta\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad \alpha U(h,x) + \beta\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.28}$$

де α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Розглянемо задачу (2.27), (2.28) як задачу (2.1), (2.2), в якій $a(\nu) = m$, $b(\nu) = -\gamma^2\nu^2$, $A_1(\nu) = B_1(\nu) = \alpha$, $A_2(\nu) = B_2(\nu) = \beta$, $p = 1$.

Нормальна фундаментальна система розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d^2T}{dt^2} + 2m\frac{dT}{dt} - \gamma^2\nu^2 T = 0$$

матиме вигляд:

$$T_0(t,\nu) = e^{-mt}\left\{m\frac{\sinh\left[t\sqrt{\gamma^2\nu^2+m^2}\right]}{\sqrt{\gamma^2\nu^2+m^2}} + \cosh\left[t\sqrt{\gamma^2\nu^2+m^2}\right]\right\},$$

$$T_1(t,\nu) = e^{-mt}\frac{\sinh\left[t\sqrt{\gamma^2\nu^2+m^2}\right]}{\sqrt{\gamma^2\nu^2+m^2}}.$$

Запишемо характеристичний визначник задачі (2.27), (2.28):

$$\Delta(\nu) = e^{-mt}\frac{\sinh\left[h\sqrt{\gamma^2\nu^2+m^2}\right]}{\sqrt{\gamma^2\nu^2+m^2}}\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta m - \beta^2\nu^2\gamma^2\right).$$

Розглянемо множину нулів функції $\Delta(\nu)$:

$$M = \begin{cases} M_1, & \beta = 0; \\ M_1 \cup M_2, & \beta \neq 0,\ \alpha^2 > 2\alpha\beta m; \\ M_1 \cup M_3, & \beta \neq 0,\ \alpha^2 = 2\alpha\beta m; \\ M_1 \cup M_4, & \beta \neq 0,\ \alpha^2 < 2\alpha\beta m, \end{cases}$$

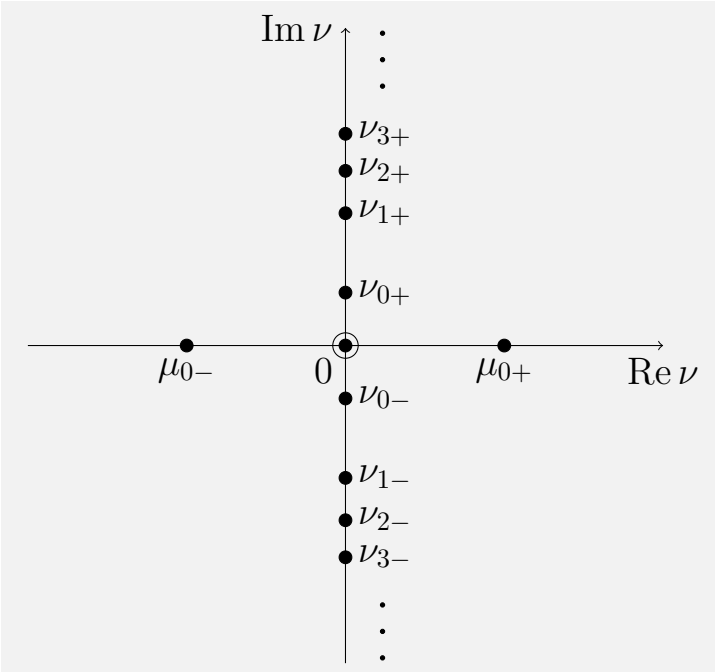
де

$$M_1 = \left\{ \nu_{k\pm} : \quad \nu_{k\pm} = \pm i \frac{\sqrt{m^2h^2 + \pi^2k^2}}{\gamma h}, \ k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_2 = \left\{ \mu_{0\pm} : \quad \mu_{0\pm} = \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta m}}{\beta\gamma} \right\},$$

$$M_3 = \{0\}, \quad M_4 = \left\{ \nu_{0\pm} : \quad \nu_{0\pm} = \pm i \frac{\sqrt{2\alpha\beta m - \alpha^2}}{\beta\gamma} \right\}.$$

Множини M_1, M_2, M_3 та M_4 комплексної площини є наступними:



Елементи множини M є симетричними відносно точки $(0, 0)$ комплексної площини. Відстань між ν_{k+} і $\nu_{k+1,+}$ з M_1 для $k \to \infty$ прямує до $\frac{\pi}{\gamma h}$.

Числа $\nu_{k\pm}$ з M_1 є простими нулями, тоді згідно з теоремою 2.2 розв'язки задачі (2.27), (2.28) будуть наступними:

$$U_{k\pm}(t, x) = \left(\beta \cos \frac{\pi k t}{h} + (\beta m - \alpha) \frac{\sin \frac{\pi k t}{h}}{\frac{\pi k}{h}} \right) e^{-mt \pm \frac{\sqrt{\pi^2k^2 + m^2h^2}}{\gamma h} ix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для простих нулів $\mu_{0\pm}$ з M_2 запишемо такі розв'язки задачі (2.27), (2.28):

$$U_{0\pm}(t, x) = e^{-mt \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta m}}{\beta\gamma} x}.$$

У випадку $\beta \neq 0$ і $\alpha^2 = 2\alpha\beta m$ число $\nu = 0$ є двократним нулем функції $\Delta(\nu)$, тоді запишемо такі розв'язки задачі (2.27), (2.28):

$$U(t,x) = \left(c_1 + c_2 \frac{d}{d\nu}\right)\Big\{\big(\beta T_0(t,\nu) - \alpha T_1(t,\nu)\big)e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\nu=0} =$$

$$= (c_1 + c_2 x)\left(\beta \cosh[mt] + (\beta m - \alpha)\frac{\sinh[mt]}{m}\right)e^{-mt},$$

де $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $|c_1|^2 + |c_2|^2 > 0$.

Для $\nu_{0\pm}$ з M_4 отримаємо такі розв'язки задачі (2.27), (2.28):

$$U_{00\pm}(t,x) = e^{-mt \pm \frac{\sqrt{2\alpha\beta m - \alpha^2}}{\beta\gamma} x}.$$

Бікалоричне рівняння. Знайти нетривіальні розв'язки задачі для рівняння

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]^2 U(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \ \ a = \text{const} > 0, \tag{2.29}$$

з двоточковими умовами

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}(1,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(1,x) = 0, \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{2.30}$$

Задача (2.29), (2.30) є задачею (2.1), (2.2), в якій $a(\nu) = -a^2\nu^2$, $b(\nu) = a^4\nu^4$, $A_1(\nu) = \nu$, $A_2(\nu) = 1$, $B_1(\nu) = \nu$, $B_2(\nu) = 1$, $h = 1$, $p = 2$.

Нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння

$$\frac{d^2T}{dt^2} - 2a^2\nu^2\frac{dT}{dt} + a^4\nu^4 T = 0$$

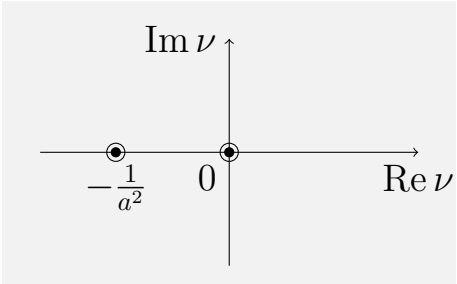
має вигляд:

$$T_0(t,\nu) = e^{a^2\nu^2 t}(-a^2\nu^2 t + 1), \quad T_1(t,\nu) = t\, e^{a^2\nu^2 t}.$$

Запишемо характеристичний визначник задачі та множину M:

$$\Delta(\nu) = e^{a^2\nu^2}\left(a^2\nu^2 + \nu\right)^2,$$

$$M = \left\{ \nu \in \mathbb{C} : \quad \left(a^2\nu^2 + \nu\right)^2 = 0 \right\}.$$



Числа $\nu = 0$ і $\nu = -\frac{1}{a^2}$ є двократними нулями функції $\Delta(\nu)$, тому згідно з теоремою 2.2 нетривіальними розв'язками задачі (2.29), (2.30) є наступні функції:

$$U_1(t,x) = \left\{ \left[T_0(t,\nu) - \nu T_1(t,\nu)\right] e^{\nu x} \right\}\Big|_{\nu=0} = 1,$$

$$U_2(t,x) = \frac{d}{d\nu}\left\{ \left[T_0(t,\nu) - \nu T_1(t,\nu)\right] e^{\nu x} \right\}\Big|_{\nu=0} = x - t,$$

$$U_3(t,x) = \left\{ \left[T_0(t,\nu) - \nu T_1(t,\nu)\right] e^{\nu x} \right\}\Big|_{\nu=-\frac{1}{a^2}} = e^{\frac{t-x}{a^2}},$$

$$U_4(t,x) = \frac{d}{d\nu}\left\{ \left[T_0(t,\nu) - \nu T_1(t,\nu)\right] e^{\nu x} \right\}\Big|_{\nu=-\frac{1}{a^2}} = (x-t)\, e^{\frac{t-x}{a^2}}.$$

Зауважимо, що задача (2.29), (2.30) має лише розв'язки вигляду

$$U(t,x) = c_1 + c_2(x-t) + e^{\frac{t-x}{a^2}}(c_3 + c_4(x-t)),$$

де c_1, c_2, c_3, $c_4 \in \mathbb{C}$.

Розглянемо задачу (2.1), (2.2) для випадку $x \in \mathbb{R}^s$, $s \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Запишемо функцію вигляду

$$\Phi(t,x,\nu) = \left\{ A_2(\nu)\, T_0(t,\nu) - A_1(\nu)\, T_1(t,\nu) \right\} e^{\nu\cdot x}, \tag{2.31}$$

яка є цілою за вектор-параметром $\nu \in \mathbb{C}^s$. Позначимо її порядок за сукупністю параметрів $\nu_1, \ldots, \nu_s$ через $\widetilde{p}$. Зауважимо, що $1 \leqslant \widetilde{p} \leqslant p$.

Нехай $\alpha \in M$, де M – множина вигляду (2.12). Для комплексного вектора α розглянемо множину мультиіндексів:

$$\Omega_1(\alpha) = \left\{ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s) \in \mathbb{Z}_+^s : \quad \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{\omega} \Delta(\nu)\Big|_{\nu=\alpha} \equiv \Delta^{(\omega)}(\alpha) \neq 0 \right\}, \tag{2.32}$$

де $\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{\omega} \Delta(\nu) = \frac{\partial^{|\omega|}\Delta(\nu)}{\partial\nu_1^{\omega_1}\ldots\partial\nu_s^{\omega_s}}$.

Для двох векторів $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s)$ і $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathbb{Z}_+^s$ припускаємо $\omega \geqslant \sigma$, якщо $\omega_1 \geqslant \sigma_1, \ldots, \omega_s \geqslant \sigma_s$. Крім того, позначимо $C_\omega^\sigma = \frac{\omega!}{\sigma!(\omega-\sigma)!}$, де $\omega! = \prod\limits_{k=1}^{s} \omega_k!$, $\omega_k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \omega_k$, $0! = 1$.

Поруч з множиною (2.32) введемо в розгляд множини:

$$\Omega(\alpha) = \{\widetilde{\omega} \in \mathbb{Z}_+^s : \quad \widetilde{\omega} \geqslant \omega, \ \omega \in \Omega_1(\alpha)\}, \quad \overline{\Omega}(\alpha) = \mathbb{Z}_+^s \setminus \Omega(\alpha).$$

Зауважимо такий факт: якщо $\omega \in \overline{\Omega}(\alpha)$, тоді $\Delta^{(\sigma)}(\alpha) = 0$ для всіх $\sigma \in \mathbb{Z}_+^s$ таких, що $\sigma \leqslant \omega$.

Теорема 2.3. Якщо $\omega \in \overline{\Omega}\,(\alpha)$, тоді функція вигляду

$$U\,(t,x) = \Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{\omega} \Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} \tag{2.33}$$

є нетривіальним розв'язком задачі (2.1), (2.2), де $\Phi(t,x,\nu)$ – функція (2.31).

Доведення. Покажемо, що функція $U\,(t,x)$ вигляду (2.33) є розв'язком рівняння (2.1):

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) \left\{\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{\omega} \Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}\right\} =$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{\omega} \left\{L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) \Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}\right\} =$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{\omega} \left\{e^{\nu\cdot x}\left[A_2(\nu) L\Big(\frac{d}{dt}, \nu\Big) T_0(t,\nu) - A_1(\nu) L\Big(\frac{d}{dt}, \nu\Big) T_1(t,\nu)\right]\right\}\Big|_{\nu=\alpha} = 0.$$

Перша з двоточкових умов (2.2) виконується:

$$A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) U\,(0,x) + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) \frac{\partial U}{\partial t}\,(0,x) =$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{\omega} \Big[\big\{A_1(\nu) A_2\,(\nu) - A_1(\nu) A_2(\nu)\big\} e^{\nu\cdot x}\Big]\Big|_{\nu=\alpha} \equiv 0.$$

Покажемо виконання другої двоточкової умови (2.2):

$$B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) \left\{\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{\omega} \Phi(h,x,\nu)\Big|_{\nu=\alpha}\right\} + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) \left\{\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(h,x,\nu)\Big|_{\nu=\alpha}\right\} =$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^{\omega} \Big\{B_1\,(\nu)\,\big[A_2\,(\nu)\,T_0\,(h,\nu) - A_1\,(\nu)\,T_1\,(h,\nu)\,\big] e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} +$$

$$+\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^{\omega}\left\{B_2(\nu)\left[A_2(\nu)\frac{dT_0}{dt}(h,\nu)-A_1(\nu)\frac{dT_1}{dt}(h,\nu)\right]e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$

$$=\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^{\omega}\Big\{\Delta(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=e^{\alpha\cdot x}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+x\right)^{\omega}\Delta(\alpha)=$$

$$=e^{\alpha\cdot x}\sum_{O\leqslant q\leqslant\omega}C_{\omega}^{q}x^{\omega-q}\Delta^{(q)}(\alpha).$$

Оскільки $\omega\in\overline{\Omega}(\alpha)$, то згідно з зауваженим фактом для довільного $q\in\mathbb{Z}_{+}^{s}$ такого, що $q\leqslant\omega$, виконуються рівності $\Delta^{(q)}(\alpha)=0$. Отже, функція (2.33) задовольняє другу умову (2.2).

Доведемо, що формула (2.33) визначає нетривіальний розв'язок задачі (2.1), (2.2). Для цього обчислимо значення цієї функції та її похідної в точці $t=0$:

$$U(0,x)=\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^{\omega}\Big\{\Phi(0,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^{\omega}\Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$

$$=e^{\alpha\cdot x}\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}+x\Big)^{\omega}A_2(\alpha)=e^{\alpha\cdot x}\sum_{O\leqslant q\leqslant\omega}C_{\omega}^{q}x^{\omega-q}A_2^{(q)}(\alpha);$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^{\omega}\left\{\left[A_2(\nu)T_0'(0,\nu)-A_1(\nu)T_1'(0,\nu)\right]e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$

$$=-\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^{\omega}\Big\{A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=-e^{\alpha\cdot x}\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}+x\Big)^{\omega}A_1(\alpha)=$$

$$=-e^{\alpha\cdot x}\sum_{O\leqslant q\leqslant\omega}C_{\omega}^{q}x^{\omega-q}A_1^{(q)}(\alpha).$$

В останніх сумах коефіцієнтами при x^{ω} є $A_2(\alpha)$ і $A_1(\alpha)$. З того, що $|A_1(\alpha)|^2+|A_2(\alpha)|^2\neq 0$, випливає, що хоча б один з виразів $U(0,x)$ або $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)$ є відмінним від нуля квазіполіномом. Це означає, що функція (2.33) є нетривіальним розв'язком задачі (2.1), (2.2). □

Приклад 2.3. В області $(t,x_1,x_2)\in\mathbb{R}^3$ знайти розв'язки двоточкової задачі

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,x_1,x_2)+2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x_1}U(t,x_1,x_2)+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}U(t,x_1,x_2+1)=0,\\ \frac{\partial U}{\partial x_1}(0,x_1,x_2)+\frac{\partial U}{\partial t}(0,x_1,x_2)=0,\quad U(1,x_1,x_2)=0.\end{gathered}\tag{2.34}$$

∇ Для даної задачі маємо $a(\nu) = \nu_1$, $b(\nu) = \nu_1^2 e^{\nu_2}$, $A_1(\nu) = \nu_1$, $B_2(\nu) = 0$, $A_2(\nu) = B_1(\nu) = 1$, $s = 2$, $h = 1$, $p = \infty$.

Функції

$$T_0(t,\nu) = e^{-\nu_1 t}\left\{\frac{\sinh\left[t\,\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]}{\sqrt{1-e^{\nu_2}}} + \cosh\left[t\,\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]\right\},$$

$$T_1(t,\nu) = e^{-\nu_1 t}\frac{\sinh\left[t\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]}{\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}}$$

утворюють нормальну в точці $t = 0$ фундаментальну систему розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\nu_1\frac{d}{dt} + \nu_1^2 e^{\nu_2}\right]T(t,\nu) = 0.$$

Характеристичний визначник задачі (2.34) і відповідна множина M матимуть вигляд:

$$\Delta(\nu) = e^{-\nu_1}\cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right],$$

$$M = \left\{\nu \in \mathbb{C}^2\colon \quad \nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}} = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)i,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Множина M містить наступні вектори:

$$\alpha_k(\mu) = \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)i}{\sqrt{1-e^{\mu}}},\ \ \mu\right), \qquad \mu \in \mathbb{C}\setminus\{2\pi m i,\quad m \in \mathbb{Z}\},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку функції $\Delta(\nu)$ в точці $\nu = \alpha_k(\mu)$:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}\big(\alpha_k(\mu)\big) =$$

$$= e^{-\nu_1}\left\{\sqrt{1-e^{\nu_2}}\sinh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\right] - \cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\right]\right\}\Big|_{\nu=\alpha_k(\mu)} =$$

$$= (-1)^k\sqrt{1-e^{\mu}}\,e^{-\frac{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)i}{\sqrt{1-e^{\mu}}}} \neq 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}(\alpha_k(\mu)) = -\frac{\nu_1}{2\sqrt{1-e^{\nu_2}}}e^{\nu_2-\nu_1}\sinh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]\Big|_{\nu=\alpha_k(\mu)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)i}{2\left(1-e^{\mu}\right)}(-1)^k e^{\mu-\frac{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)i}{\sqrt{1-e^{\mu}}}} \neq 0.$$

Отже, $\overline{\Omega}\,(\alpha_k(\mu)) = \big\{(0,0)\big\}$. Функція (2.31) матиме вигляд

$$\Phi(t,x,\nu) = \cosh\big[t\,\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\big]\,e^{\nu_1(x_1-t)+\nu_2 x_2}.$$

За теоремою 2.3 для довільних $\mu \in \mathbb{C}\setminus\big\{2\pi m i,\ m\in\mathbb{Z}\big\}$ і $k\in\mathbb{Z}$ знаходимо такі нетривіальні розв'язки задачі (2.34):

$$U_k\,(t,x_1,x_2,\mu) = \Phi\,(t,x,\alpha_k(\mu)) = \cos\Big[\Big(\frac{\pi}{2}+\pi k\Big)t\Big]\,e^{\frac{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)i}{\sqrt{1-e^{\mu}}}(x_1-t)+\mu x_2}.$$

Зауважимо, що отримані розв'язки задачі (2.34) знайдено з точністю до множника, який залежить від параметра μ, тобто це функції вигляду

$$U_k\,(t,x_1,x_2,\mu) = c(\mu)\cos\Big[\Big(\frac{\pi}{2}+\pi k\Big)t\Big]\,e^{\frac{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)i}{\sqrt{1-e^{\mu}}}(x_1-t)+\mu x_2}.$$

$\triangle$

Лема 2.1. *Нехай задано цілу функцію $\gamma(\nu)$, аналітичну функцію $\mu(\nu)$, причому $\mu(\alpha)\neq 0$ для деякого $\alpha\in\mathbb{C}^s$, поліном $\varphi(x) = \sum\limits_{0\leqslant|r|\leqslant n}\varphi_r x^r$, $\varphi_r\in\mathbb{C}$, $r\in\mathbb{Z}_+^s$, степінь якого дорівнює $n\in\mathbb{Z}_+$, тобто $\sum\limits_{|r|=n}|\varphi_r|>0$. Тоді існує поліном $\varphi^{\mu}(x)$ степеня n, для якого виконується така рівність*

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\mu(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} = \varphi^{\mu}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}. \tag{2.35}$$

Доведення. Ліву частину рівності (2.35) подамо у вигляді

$$\sum_{0\leqslant|r|\leqslant n}\varphi_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{\mu(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \sum_{0\leqslant|r|\leqslant n}\varphi_r\sum_{O\leqslant q\leqslant r}C_r^q\mu^{(r-q)}(\alpha)\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^q\Big\{\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Змінивши порядок сумування, одержимо

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\mu(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \sum_{0\leqslant|r|\leqslant n}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}\sum_{q\geqslant r,\,|q|\leqslant n}C_q^r\mu^{(q-r)}(\alpha)\varphi_q.$$

Отже, шуканий поліном $\varphi^{\mu}(x)$ має такий вигляд:

$$\varphi^{\mu}(x) = \mu(\alpha) \sum_{|r|=n} \varphi_r x^r + \sum_{0 \leqslant |r| \leqslant n-1} x^r \sum_{q \geqslant r,\, |q| \leqslant n} C_q^r \mu^{(q-r)}(\alpha) \varphi_q.$$

Оскільки $\mu(\alpha) \neq 0$ і $\sum\limits_{|r|=n} |\varphi_r| > 0$, то побудований поліном $\varphi^{\mu}(x)$ має степінь n і для нього виконується рівність (2.35). $\square$

Лема 2.2. *Нехай $A = A\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$ – диференціальний поліном з комплексними коефіцієнтами, $\alpha \in \mathbb{C}^s$ і $\varphi_\alpha(x) = \varphi(x) e^{\alpha \cdot x}$ – квазіполіном, що належить до ядра оператора A, тобто $\varphi_\alpha \in \ker A$, або $A\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)\varphi_\alpha(x) = 0$. Тоді $A(\alpha) = 0$ і для довільної аналітичної в околі $\nu = O$ функції $\gamma(\nu)$ виконується тотожність*

$$\varphi_\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu \cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O} = \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu \cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^s. \tag{2.36}$$

Доведення. Зобразимо квазіполіномний елемент ядра оператора A у вигляді

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\big\{e^{\nu \cdot x}\big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Подіємо на останню рівність диференціальним виразом $A\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$:

$$A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi_\alpha(x) = A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\big\{e^{\nu \cdot x}\big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)e^{\nu \cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} = \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A(\nu)e^{\nu \cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Оскільки $\varphi_\alpha \in \ker A$, то виконується тотожність на $\mathbb{R}^s$:

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A(\nu)e^{\nu \cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} \equiv 0. \tag{2.37}$$

Тоді для довільного $x \in \mathbb{R}^s$ маємо

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu \cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} = \gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A(\nu)e^{\nu \cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} = \gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) \cdot 0 = 0.$$

Отже, тотожність (2.36) встановлено.

Доведемо тепер, що $A(\alpha) = 0$. Нехай $\varphi(x) = \sum\limits_{0\leqslant|r|\leqslant n} \varphi_r x^r$, $\varphi_r \in \mathbb{C}$, причому $\sum\limits_{|r|=n} |\varphi_r| > 0$, тобто $\deg\varphi(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тоді з тотожності (2.37) отримуємо

$$0 \equiv \sum_{0\leqslant|r|\leqslant n} \varphi_r \Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \sum_{|r|=n} \varphi_r \Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} + \sum_{0\leqslant|r|<n} \varphi_r \Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \sum_{|r|=n} \varphi_r \sum_{O\leqslant q\leqslant r} C_r^q x^q e^{\alpha\cdot x} A^{(r-q)}(\alpha) + \sum_{0\leqslant|r|<n} \varphi_r \Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= e^{\alpha\cdot x} A(\alpha) \sum_{|r|=n} \varphi_r x^r + e^{\alpha\cdot x} \sum_{|r|=n} \varphi_r \sum_{O\leqslant q\leqslant r,\, q\neq r} C_r^q A^{(r-q)}(\alpha) x^q +$$

$$+ \sum_{0\leqslant|r|<n} \varphi_r \Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

З умови $\sum\limits_{|r|=n} |\varphi_r| > 0$ одержуємо, що $A(\alpha) = 0$. □

Теорема 2.4. *Нехай M – множина* (2.12) *і $g(x)$ – нетривіальний одночленний квазіполіном з класу K_M вигляду*

$$g(x) = Q(x)e^{\alpha\cdot x}, \tag{2.38}$$

в якому $Q(x) = \sum\limits_{0\leqslant|r|\leqslant n} D_r x^r$ – поліном n-го степеня ($\sum\limits_{|r|=n} |D_r| > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$), коефіцієнти D_r якого задовольняють однорідну систему алгебричних рівнянь:

$$\sum_{\substack{r\geqslant q,\, 0\leqslant|r|\leqslant n,\\ r-q\in\Omega_1(\alpha)}} D_r C_r^q \Delta^{(r-q)}(\alpha) = 0, \qquad q \in \mathbb{Z}_+^s,\ |q| \leqslant n-1. \tag{2.39}$$

Тоді квазіполіном

$$U(t,x) = g\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O} = Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}, \tag{2.40}$$

в якому $\Phi(t,x,\nu)$ – функція вигляду (2.31)*, є нетривіальним розв'язком задачі* (2.1), (2.2)*. Навпаки, якщо ненульовий квазіполіном, одночленний*

за змінною x, тобто $U(t,x) = F(t,x)e^{\alpha\cdot x}$, є розв'язком задачі (2.1), (2.2), *то його можна зобразити у вигляді* (2.40), *де $g(x)$ належить до K_M, має вигляд* (2.38) *і коефіцієнти D_r полінома $Q(x)$ задовольняють систему* (2.39).

Доведення. Достатність. Покажемо спочатку, що функція (2.40) задовольняє рівняння (2.1). Враховуючи комутативність операцій $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ та $\frac{\partial}{\partial \nu}$ маємо

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\left\{g\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}\right\} =$$

$$= g\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\left\{L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}\right\} =$$

$$= g\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\left\{e^{\nu\cdot x}\left[A_2(\nu)L\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)T_0(t,\nu) - A_1(\nu)L\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)T_1(t,\nu)\right]\right\}\Big|_{\nu=O} = 0.$$

Покажемо для функції (2.40) виконання першої умови (2.2):

$$A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x) + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) =$$

$$= A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\, Q\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{\Phi(0,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\, Q\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0,x,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= Q\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,[A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}]\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} - Q\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,[A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}]\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= Q\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\big[A_1(\nu)A_2(\nu) - A_1(\nu)A_2(\nu)\big]\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} = 0.$$

Функція (2.40) задовольняє другу умову (2.2). Справді,

$$B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x) + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) =$$

$$= B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)Q\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{\Phi(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)Q\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}(h,x,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= Q\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{B_1(\nu)\Phi(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} + Q\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\left\{B_2(\nu)\frac{\partial \Phi}{\partial t}(h,x,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= Q\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\Delta(\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} = \sum_{0\leqslant|r|\leqslant n} D_r\,\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)^r\Big\{e^{\nu\cdot x}\Delta(\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \sum_{0\leqslant|r|\leqslant n} D_r \sum_{O\leqslant q\leqslant r} C_r^q x^q e^{\alpha\cdot x}\Delta^{(r-q)}(\alpha) = e^{\alpha\cdot x}\sum_{0\leqslant|r|\leqslant n}\sum_{O\leqslant q\leqslant r} D_r C_r^q x^q \Delta^{(r-q)}(\alpha) =$$

$$= e^{\alpha\cdot x}\sum_{0\leqslant|q|\leqslant n} x^q \sum_{r\geqslant q,\ |r|\leqslant n} D_r C_r^q \Delta^{(r-q)}(\alpha).$$

Останній вираз дорівнюватиме нулю тоді та лише тоді, коли

$$\forall q\in\mathbb{Z}_+^s,\quad |q|\leqslant n:\quad \sum_{r\geqslant q,\ |r|\leqslant n} D_r C_r^q \Delta^{(r-q)}(\alpha) = 0.$$

Зауважимо, якщо $|q| = n$, то $r = q$, а усі рівності $D_q\Delta(\alpha) = 0$ в останній системі будуть тотожностями $0 \equiv 0$ для всіх D_q. Крім того, залишаємо лише ті доданки, для яких $\Delta^{(r-q)}(\alpha) \neq 0$, тобто для $r - q \in \Omega_1(\alpha)$. Отже, останню систему можна записати у вигляді (2.39).

Покажемо, що функція (2.40) є ненульовою. Для цього обчислимо значення цієї функції та її похідної в точці $t = 0$:

$$U(0,x) = \sum_{0\leqslant|r|\leqslant n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \sum_{|r|=n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} + \sum_{0\leqslant|r|<n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \sum_{|r|=n} D_r \sum_{O\leqslant q\leqslant r} C_r^q x^q e^{\alpha\cdot x} A_2^{(r-q)}(\alpha) + \sum_{0\leqslant|r|<n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= e^{\alpha\cdot x}A_2(\alpha)\sum_{|r|=n} D_r x^r + e^{\alpha\cdot x}\sum_{|r|=n} D_r \sum_{O\leqslant q\leqslant r,\, q\neq r} C_r^q A_2^{(r-q)}(\alpha)x^q +$$

$$+ \sum_{0\leqslant|r|<n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = -\sum_{0\leqslant|r|\leqslant n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r \Big\{A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= -e^{\alpha\cdot x}A_1(\alpha)\sum_{|r|=n} D_r x^r - e^{\alpha\cdot x}\sum_{|r|=n} D_r \sum_{O\leqslant q\leqslant r,\, q\neq r} C_r^q A_1^{(r-q)}(\alpha)x^q -$$

$$-\sum_{0\leqslant|r|<n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

З умови $\sum\limits_{|r|=n}|D_r|>0$ одержуємо, що $\sum\limits_{|r|=n}D_rx^r$ – нетривіальний поліном степеня $n\in\mathbb{Z}_+$. Оскільки $|A_1(\alpha)|^2+|A_2(\nu)|^2>0$, то нетривіальними одночленними за змінною x квазіполіномами є $U(0,x)$ або $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)$. Отже, функція вигляду (2.40), як розв'язок задачі Коші з ненульовими початковими даними є нетривіальною.

Доведемо необхідність. Нехай $U(t,x)$ – нетривіальний розв'язок задачі (2.1), (2.2), що належить до $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$ і має за змінною x одночленний вигляд, тобто

$$U(t,x)=F(t,x)e^{\alpha\cdot x},\quad \alpha\in\mathbb{C}^s, \tag{2.41}$$

де $F(t,x)=\sum\limits_{l=1}^{N}P_l\,(t,x)\,e^{\beta_l t}$, $P_1(t,x),\ldots,P_N(t,x)$ – поліноми змінних t, $x_1,\ldots,x_s$ з комплексними коефіцієнтами, $\beta_1,\ldots,\beta_N$ – попарно різні комплексні числа, $N\in\mathbb{N}$.

Позначимо $U(0,x)=g_1(x)=\varphi_1(x)e^{\alpha\cdot x}$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=g_2(x)=\varphi_2(x)e^{\alpha\cdot x}$, де $\varphi_1(x)=F(0,x)$, $\varphi_2(x)=\frac{\partial F}{\partial t}(0,x)$. Тоді хоча б один з поліномів $\varphi_1(x)$ або $\varphi_2(x)$ є нетривіальним. Квазіполіном $U(t,x)$ як єдиний розв'язок задачі Коші

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x)=0,$$
$$U(0,x)=g_1(x),\quad \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=g_2(x)$$

можна згідно з диференціально-символьним методом [34] записати у вигляді

$$U(t,x)=g_1\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}+g_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}$$

або

$$U(t,x)=\varphi_1\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}+\varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}. \tag{2.42}$$

Покажемо, що функцію (2.42) можна подати у вигляді (2.40) з деяким нетривіальним поліномом $Q(x)$. Нехай спочатку обидва поліноми $\varphi_1(x)$ та

$\varphi_2(x)$ є нетривіальними. З умови $|A_1(\alpha)|^2 + |A_2(\alpha)|^2 \neq 0$ одержуємо, що $A_1(\alpha) \neq 0$ або $A_2(\alpha) \neq 0$. Припустимо, що $A_1(\alpha) \neq 0$. Відповідно до леми 2.1 для полінома $\varphi_1(x)$ існує поліном $\varphi_1^{A_1}(x)$ того ж степеня такий, що

$$U(t,x) = \varphi_1^{A_1}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{\frac{T_0(t,\nu)}{A_1(\nu)}e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha} + \varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

З виконання для функції $U(t,x)$ першої двоточкової умови (2.2) одержимо тотожність

$$\varphi_1^{A_1}(x) + \varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} \equiv 0,$$

з урахуванням якої маємо

$$U(t,x) = -\varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{\left[\frac{A_2(\nu)T_0(t,\nu)}{A_1(\nu)} - T_1(t,\nu)\right]e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= -\varphi_2^{A_1^{-1}}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\big\{\Phi(t,x,\nu)\big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Отже, розв'язок (2.41) задачі (2.1), (2.2) ми подали у вигляді (2.40), де $Q(x) = -\varphi_2^{A_1^{-1}}(x)$.

Цілком аналогічно доводиться, що за умови $A_2(\alpha) \neq 0$ розв'язок (2.41) задачі (2.1), (2.2) можна подати у вигляді (2.40), де $Q(x) = \varphi_1^{A_2^{-1}}(x)$.

Розглянемо тепер випадок, коли $\varphi_1(x) \equiv 0$, а, отже, $\varphi_2(x) \not\equiv 0$. Тоді розв'язок задачі (2.1), (2.2) можна подати у вигляді

$$U(t,x) = \varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}. \tag{2.43}$$

З виконання першої двоточкової умови одержуємо, що

$$\varphi_2(x)e^{\alpha\cdot x} \in \ker A_2\big(\frac{\partial}{\partial x}\big).$$

Звідси згідно з лемою 2.2 маємо, що $A_2(\alpha) = 0$, а тому $A_1(\alpha) \neq 0$. Тоді функцію (2.43) можна подати у вигляді

$$U(t,x) = -\,\varphi_2^{A_1^{-1}}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha},$$

оскільки за лемою 2.2 маємо

$$\varphi_2^{A_1^{-1}}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\,[A_2(\nu)T_0(t,\nu)]\,e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=\varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\frac{A_2(\nu)T_0(t,\nu)}{A_1(\nu)}e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}\equiv 0.$$

Аналогічним є доведення і у випадку, коли $\varphi_2(x)\equiv 0$.

Отже, доведено, що розв'язок (2.41) задачі (2.1), (2.2) можна подати у вигляді (2.40), де $Q(x)=\sum\limits_{0\leqslant|r|\leqslant n}D_rx^r$ – нетривіальний поліном степеня $n\in\mathbb{Z}_+$, тобто $\sum\limits_{|r|=n}|D_r|>0$.

З виконання другої умови (2.2) для функції (2.41) одержимо тотожність

$$Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Delta(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}\equiv 0,$$

з якої одержуємо

$$\sum_{|r|=n}D_rx^r\Delta(\alpha)+\ldots\equiv 0,$$

де $\ldots$ означає поліном вектор-змінної x, степеня нижчого за n. Звідси випливає, що $D_r\Delta(\alpha)\equiv 0$ для всіх $|r|=n$, тобто $\Delta(\alpha)=0$ і $\alpha\in M$. Це означає, що квазіполіном $g(x)=Q(x)e^{\alpha\cdot x}$ належить до K_M. Коефіцієнти полінома $Q(x)$ задовольняють при цьому систему (2.39) (див. доведення достатності в теоремі 2.4). □

Зауваження 2.3. Якщо до множини $\Omega_1(\alpha)$ не належать мультиіндекси $r\in\mathbb{Z}_+^s$, для яких $|r|<k$, $k\in\mathbb{N}$, то в системі лінійних алгебричних рівнянь (2.39) для коефіцієнтів D_r, $|r|<k$, полінома $Q(x)$ одержуємо тотожності $0\equiv 0$. Тому усі згадані коефіцієнти є довільними. Для побудови нетривіального розв'язку задачі (2.1), (2.2) за формулою (2.40) можна взяти довільний ненульовий квазіполіном (2.38), у якого $\deg Q(x)\leqslant k-1$.

Зауваження 2.4. Якщо $M=\mathbb{C}^s$, тобто $\Delta(\nu)\equiv 0$, то рівняння в системі (2.39) для коефіцієнтів полінома $Q(x)$ будуть тотожностями $0\equiv 0$, тому формула (2.40) визначає нетривіальні розв'язки задачі (2.1), (2.2) для довільного нетривіального квазіполінома (2.38).

Приклад 2.4. Знайти в області $(t,x)\in\mathbb{R}^3$ розв'язки $U=U(t,x)$ двоточкової задачі

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+2\frac{\partial U}{\partial t}+\Big(1-\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\Big)U=0, \tag{2.44}$$

$$\Big(1+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big)U(0,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,\ \ \Big(1+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big)U(1,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(1,x)=0. \tag{2.45}$$

∇ Маємо $a(\nu)=1$, $b(\nu)=1-\nu_1^2\nu_2^2$, $A_1(\nu)=1+\nu_1^2$, $A_2(\nu)=B_2(\nu)=1$, $B_1(\nu)=1+\nu_2^2$, $s=2$, $h=1$, $p=2$.

Характеристичний визначник та множина M задачі (2.44), (2.45) матимуть вигляд:

$$\Delta(\nu)=e^{-1}\big(\nu_1^2-\nu_2^2\big)\cosh[\nu_1\nu_2],\ \ M=\big\{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbb{C}^2\colon\quad \Delta(\nu)=0\big\}.$$

Функція (2.31) для задачі (2.44), (2.45) має вигляд

$$\Phi(t,x,\nu)=\left\{\cosh[\nu_1\nu_2t]-\nu_1^2\frac{\sinh[\nu_1\nu_2t]}{\nu_1\nu_2}\right\}e^{\nu_1x_1+\nu_2x_2-t}.$$

Розглянемо підмножини векторів, з яких складається множина M:

1) $\nu=\alpha_\pm(\mu)\equiv(\pm\mu,\mu)$, де $\mu\in\mathbb{C}$, причому $\mu\neq0$ і $\mu\neq\mu_*$, а μ_* – корінь рівняння $\cosh[\mu^2]=0$;

2) $\nu=\beta(\mu)\equiv\Big(\frac{\mu_*^2}{\mu},\mu\Big)$, де $\mu\in\mathbb{C}$, причому $\mu\neq0$ і $\mu\neq\mu_*$;

3) $\nu=O\equiv(0,0)$;

4) $\nu=\gamma_\pm\equiv\big(\pm\mu_*,\mu_*\big)$.

Використовуючи теорему 2.4 побудуємо нетривіальні розв'язки задачі (2.44), (2.45), що відповідають $\nu=\alpha_\pm(\mu)$ з першої підмножини.

Обчислюємо

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}\big(\alpha_\pm(\mu)\big)=\pm2e^{-1}\mu\cosh[\mu^2]\neq0,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}\big(\alpha_\pm(\mu)\big)=-2e^{-1}\mu\cosh[\mu^2]\neq0,$$

тому $(1,0)$, $(0,1)\in\Omega(\alpha_\pm(\mu))$.

Узявши квазіполіном вигляду

$$g(x_1,x_2)=\big(D_{00}+D_{10}x_1+D_{01}x_2\big)e^{\pm\mu x_1+\mu x_2},\quad D_{00},D_{10},D_{01}\in\mathbb{C}, \tag{2.46}$$

для D_{00}, D_{10}, D_{01} записуємо систему алгебричних рівнянь (2.39), яка є одним рівнянням вигляду

$$D_{00}\Delta\big(\alpha_{\pm}(\mu)\big) + D_{10}\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}\big(\alpha_{\pm}(\mu)\big) + D_{01}\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}\big(\alpha_{\pm}(\mu)\big) = 0. \tag{2.47}$$

З рівняння (2.47) одержуємо, що D_{00}, D_{10} – довільні ненульові сталі, а $D_{01} = \pm D_{10}$. За формулою (2.40)

$$U(t,x) = \left[D_{00} + D_{10}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1} \pm \frac{\partial}{\partial\nu_2}\Big)\right]\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\alpha_{\pm}(\mu)}, \quad (D_{00}, D_{10}) \neq O,$$

знаходимо нетривіальні розв'язки задачі (2.44), (2.45).

Зокрема, розв'язками задачі (2.44), (2.45) є:

$$U_{0\pm}(t,x,\mu) = \Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\alpha_{\pm}(\mu)} = e^{-(1+\mu^2)t\pm\mu x_1+\mu x_2},$$

$$U_{1\pm}(t,x,\mu) = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu_1} \pm \frac{\partial\Phi}{\partial\nu_2}\Big)\Big|_{\nu=\alpha_{\pm}(\mu)} = e^{-(1+\mu^2)t\pm\mu x_1+\mu x_2}\left\{-2\mu t \pm \mu x_1 + \mu x_2\right\}.$$

Зауважимо, що розв'язки $U_{1\pm}(t,x,\mu)$ можна знайти шляхом диференціювання розв'язків $U_{0\pm}(t,x,\mu)$ за параметром μ, а саме

$$U_{1\pm}(t,x,\mu) = \frac{\partial}{\partial\mu}U_{0\pm}(t,x,\mu).$$

Аналогічно, інші розв'язки задачі (2.44), (2.45), що відповідають $\nu = \alpha_{\pm}(\mu)$, можна отримувати за формулою

$$U_{k\pm}(t,x,\mu) = \frac{\partial^k}{\partial\mu^k}\, e^{-(1+\mu^2)t\pm\mu x_1+\mu x_2}, \qquad k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

Знайдемо тепер розв'язки задачі (2.44), (2.45), що відповідають $\nu = \beta(\mu)$ з другої підмножини M. Обчислюємо

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}\big(\beta(\mu)\big) = e^{-1}\Big(\frac{\mu_*^4}{\mu^2} - \mu^2\Big)\mu\sinh[\mu_*^2] \neq 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}\big(\beta(\mu)\big) = e^{-1}\Big(\frac{\mu_*^4}{\mu^2} - \mu^2\Big)\frac{\mu_*^2}{\mu}\sinh[\mu_*^2] \neq 0.$$

Маємо $(1,0)$, $(0,1) \in \Omega_1(\beta(\mu))$. Розглянемо квазіполіном вигляду

$$g(x_1,x_2) = \big(D_{00} + D_{10}x_1 + D_{01}x_2\big)e^{\frac{\mu_*^2}{\mu}x_1+\mu x_2}, \quad D_{00}, D_{10}, D_{01} \in \mathbb{C},$$

для коефіцієнтів якого одержуємо систему рівнянь (одне рівняння):

$$D_{10}\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}\big(\beta(\mu)\big) + D_{01}\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}\big(\beta(\mu)\big) = 0. \tag{2.48}$$

З рівняння (2.48) одержуємо, що D_{00}, D_{01} – довільні сталі, а $D_{10} = -\frac{\mu_*^2}{\mu^2}D_{10}$. Згідно з теоремою 2.4 нетривіальні розв'язки задачі (2.44), (2.45) знаходимо за формулою

$$U(t,x) = \left[D_{00} + D_{01}\Big(-\frac{\mu_*^2}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial\nu_1} + \frac{\partial}{\partial\nu_2}\Big)\right]\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\beta(\mu)}, \quad (D_{00}, D_{01}) \neq 0.$$

Зокрема, нетривіальними розв'язками задачі (2.44), (2.45) є такі функції:

$$U_0(t,x,\mu) = \Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\beta(\mu)} = \left\{\cosh[\mu_*^2 t] - \frac{\mu_*^2}{\mu^2}\sinh[\mu_*^2 t]\right\}e^{\frac{\mu_*^2}{\mu}x_1+\mu x_2-t},$$

$$U_1(t,x,\mu) = \Big(-\frac{\mu_*^2}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial\nu_1} + \frac{\partial}{\partial\nu_2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\beta(\mu)} =$$

$$= \left\{\Big(x_2 - \frac{\mu_*^2}{\mu^2}x_1\Big)\cosh[\mu_*^2 t] - \Big(\frac{2\mu_*^2}{\mu^3} - \frac{\mu_*^4}{\mu^2}\Big(x_2 - \frac{\mu_*^2}{\mu^2}x_1\Big)\Big)\sinh[\mu_*^2 t]\right\}e^{\frac{\mu_*^2}{\mu}x_1+\mu x_2-t}.$$

Знову легко перевірити, що $U_1(t,x,\mu) = \frac{\partial}{\partial\mu}U_0(t,x,\mu)$.

Зауважимо, що інші розв'язки задачі (2.44), (2.45), що відповідають $\nu = \beta(\mu)$, можна шукати за формулою

$$U_k(t,x,\mu) = \frac{\partial^k}{\partial\mu^k}\left\{\Big(\cosh[\mu_*^2 t] - \frac{\mu_*^2}{\mu^2}\sinh[\mu_*^2 t]\Big)e^{\frac{\mu_*^2}{\mu}x_1+\mu x_2-t}\right\}, \quad k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

Розглянемо побудову нетривіальних розв'язків задачі (2.44), (2.45) за вектором $\nu = O$ з третьої підмножини, причому побудову виконаємо за допомогою полінома третього степеня

$$g(x_1,x_2) = \sum_{|k+j|\leqslant 3} D_{kj}x_1^k x_2^j.$$

Оскільки усі похідні до третього порядку включно від $\Delta(\nu)$ при $\nu = O$ дорівнюють нулеві (за виключенням $\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(O) = 2e^{-1}$, $\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(O) = -2e^{-1}$), то для сталих коефіцієнтів $D_{00}, \ldots, D_{03}$ отримуємо таку систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} D_{20}C_{(2,0)}^{(0,0)}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(O) + D_{02}C_{(0,2)}^{(0,0)}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(O) = 0, \\ D_{30}C_{(3,0)}^{(1,0)}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(O) + D_{12}C_{(1,2)}^{(1,0)}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(O) = 0, \\ D_{21}C_{(2,1)}^{(0,1)}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(O) + D_{03}C_{(0,3)}^{(0,1)}\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(O) = 0, \end{cases}$$

звідки одержуємо $D_{20} = D_{02}$, $D_{12} = 3D_{30}$, $D_{21} = 3D_{03}$, де D_{00}, D_{01}, D_{11}, D_{02}, D_{30}, D_{03} відмінні від нуля. За теоремою 2.4 знаходимо такі ненульові розв'язки задачі (2.44), (2.45):

$$U_{00}(t,x) = \Phi(t,x,O) = e^{-t}, \quad U_{10}(t,x) = \frac{\partial\Phi}{\partial\nu_1}\bigg|_{\nu=O} = x_1e^{-t},$$

$$U_{01}(t,x) = \frac{\partial\Phi}{\partial\nu_2}\bigg|_{\nu=O} = x_2e^{-t}, \quad U_{11}(t,x) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\bigg|_{\nu=O} = x_1x_2e^{-t},$$

$$U_{20}(t,x) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\bigg|_{\nu=O} = \big(-2t + x_1^2 + x_2^2\big)e^{-t},$$

$$U_{30}(t,x) = \Big(\frac{\partial^3}{\partial\nu_1^3} + 3\frac{\partial^3}{\partial\nu_1\partial\nu_2^2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\bigg|_{\nu=O} = \big(-6tx_1 + x_1^3 + 3x_1x_2^2\big)e^{-t},$$

$$U_{03}(t,x) = \Big(3\frac{\partial^3}{\partial\nu_1^2\partial\nu_2} + \frac{\partial^3}{\partial\nu_2^3}\Big)\Phi(t,x,\nu)\bigg|_{\nu=O} = \big(-6tx_2 + x_2^3 + 3x_1^2x_2\big)e^{-t}.$$

Зауважимо, що $U_{00}(t,x) = U_{0\pm}(t,x,O)$, однак, решта знайдених розв'язків $U_{10}(t,x)$, $U_{01}(t,x)$, $U_{11}(t,x)$, $U_{20}(t,x)$, $U_{30}(t,x)$, $U_{03}(t,x)$ не можна отримати з $U_{0\pm}(t,x,\mu)$ шляхом диференціювання за μ у точці $\mu = 0$.

Розглянемо нарешті четвертий випадок, коли $\gamma_\pm = (\pm\mu_*, \mu_*)$. Обчислюємо

$$\Delta(\gamma_\pm) = \frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}(\gamma_\pm) = \frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}(\gamma_\pm) = 0, \quad \frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(\gamma_\pm) = 4e^{-1}\mu_*^2\sinh[\mu_*^2] \neq 0,$$

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1\partial\nu_2}(\gamma_\pm) = \mp e^{-1}\mu_*^2\sinh[\mu_*^2] \neq 0; \quad \frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(\gamma_\pm) = -4e^{-1}\mu_*^2\sinh[\mu_*^2] \neq 0.$$

Маємо $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2) \in \Omega_1(\gamma_\pm)$. Побудуємо нетривіальні розв'язки задачі (2.44), (2.45) за допомогою квазіполінома вигляду

$$g(x_1,x_2) = \Big(D_{00} + D_{10}x_1 + D_{01}x_2 + D_{20}x_1^2 + D_{11}x_1x_2 + D_{02}x_2^2\Big)e^{\pm\mu_* x_1 + \mu_* x_2}.$$

Для сталих $D_{00},\ldots,D_{02}$ запишемо систему алгебричних рівнянь (2.39), яка буде одним рівнянням (див. зауваження 2.3):

$$D_{20}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}\big(\gamma_\pm(\mu)\big) + D_{11}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\big(\gamma_\pm(\mu)\big) + D_{02}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}\big(\gamma_\pm(\mu)\big) = 0$$

або

$$4D_{20} \mp D_{11} - 4D_{02} = 0,$$

звідки одержуємо, що D_{00}, D_{10}, D_{01}, D_{20}, D_{02} – довільні сталі, причому $\big(D_{00}, D_{10}, D_{01}, D_{20}, D_{02}\big) \neq O$, а $D_{11} = \pm 4\big(D_{20} - D_{02}\big)$. Відповідно до теореми 2.4 знаходимо нетривіальні розв'язки задачі (2.44), (2.45):

$$U_{00\pm}(t,x) = \Phi(t,x,\gamma_\pm) = \big\{\cosh[\mu_*^2 t] - \sinh[\mu_*^2 t]\big\}\, e^{\pm\mu_* x_1 + \mu_* x_2 - t} =$$

$$= e^{-(1+\mu_*^2)t \pm \mu_* x_1 + \mu_* x_2}.$$

Як бачимо, $U_{00\pm}(t,x) = U_{0\pm}(t,x,\mu_*)$. Крім того, обчислюємо

$$U_{10\pm}(t,x) = \frac{\partial\Phi}{\partial\nu_1}\bigg|_{\nu=\gamma_\pm} = \left\{\Big(x_1 \mp \mu_* t\Big)e^{-\mu_*^2 t} \mp \frac{1}{\mu_*}\sinh[\mu_*^2 t]\right\} e^{\pm\mu_* x_1 + \mu_* x_2 - t},$$

$$U_{01\pm}(t,x) = \frac{\partial\Phi}{\partial\nu_2}\bigg|_{\nu=\gamma_\pm} = \left\{\Big(x_2 - \mu_* t\Big)e^{-\mu_*^2 t} + \frac{1}{\mu_*}\sinh[\mu_*^2 t]\right\} e^{\pm\mu_* x_1 + \mu_* x_2 - t}.$$

Зауважимо знову, що функції $U_{10\pm}(t,x)$, $U_{01\pm}(t,x)$ не можна отримати з $U_{0\pm}(t,x,\mu)$ та $U_0(t,x,\mu)$ шляхом диференціювання за μ у точці $\mu = \mu_*$. Крім того, за теоремою 2.4 знаходимо інші нетривіальні розв'язки задачі (2.44), (2.45) за формулою

$$U(t,x) = \left[D_{20}\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2} \pm 4\Big(D_{20} - D_{02}\Big)\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2} + D_{02}\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\right]\Phi(t,x,\nu)\bigg|_{\nu=\gamma_\pm}.$$

Очевидно, що окремими розв'язками задачі (2.44), (2.45) є

$$U_{20\pm}(t,x) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2} \pm 4\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\bigg|_{\nu=\gamma_\pm},$$

$$U_{02\pm}(t,x) = \Big(\mp 4\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2} + \frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\gamma_\pm}.$$

Зокрема,

$$U_{20\pm}(t,x) = \Big\{\big(-t + x_1(x_1 \mp \mu_* t) \pm 4(x_1 \mp \mu_* t)x_2 +$$

$$+5\mu_* t(\mu_* t - \frac{1}{\mu_*} \mp x_1)\big)\cosh[\mu_*^2 t] \pm \Big(5(x_1 \mp \mu_* t)\mu_* t +$$

$$+(\mu_* t - \frac{1}{\mu_*} \mp x_1)(x_1 \pm 4x_2) + \frac{x_1}{\mu_*} \pm 4(t + \frac{1}{\mu_*})\Big) \times \sinh[\mu_*^2 t]\Big\} e^{\pm\mu_* x_1 + \mu_* x_2 - t}.$$

Зауважимо знову, що розв'язки $U_{20\pm}(t,x)$ та $U_{02\pm}(t,x)$ не можна отримати з розв'язку $U_{0\pm}(t,x,\mu)$ за допомогою диференціювання за μ у точці $\mu = \mu_*$. $\triangle$

2.4. Випадок, коли множина нулів характеристичного визначника збігається з $\mathbb{C}^s$

Дослідимо розв'язність задачі (2.1), (2.2) у випадку $\Delta(\nu) \equiv 0$.

Теорема 2.5. *Якщо для задачі* (2.1), (2.2) *виконується умова* $\Delta(\nu) \equiv 0$, *то у класі* $\mathbb{A}_{\widetilde{p}'}$ *існують цілі нетривіальні розв'язки цієї задачі, які можна подати у вигляді*

$$U\,(t,x) = \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}, \tag{2.49}$$

де $\varphi(x)$ *– довільна ціла функція порядку* $\widetilde{p}'$.

Доведення. Оскільки $\Delta(\nu) \equiv 0$, то виконується тотожність

$$\begin{aligned} A_1(\nu)\left\{B_1\,(\nu)\,T_1(h,\nu) + B_2\,(\nu)\,\tfrac{dT_1}{dt}(h,\nu)\right\} \equiv \\ \equiv A_2(\nu)\left\{B_1\,(\nu)\,T_0(h,\nu) + B_2\,(\nu)\,\tfrac{dT_0}{dt}(h,\nu)\right\}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Функція (2.49) задовольняє рівняння (2.1). Доводиться цей факт аналогічно, як у теоремі 2.4.

Покажемо виконання першої умови (2.2):

$$A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x)+A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=$$

$$=A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{\Phi(0,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}+A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\,\Big\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}=$$

$$=\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\,\Big\{A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,[A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}]\Big\}\Big|_{\nu=O}-\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\,\Big\{A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,[A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}]\Big\}\Big|_{\nu=O}=$$

$$=\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\big[A_1(\nu)A_2(\nu)-A_1(\nu)A_2(\nu)\big]\Big\}\Big|_{\nu=O}=0.$$

Завдяки тотожності (2.50) функція (2.49) задовольняє також другу умову (2.2):

$$B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x)+B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x)=$$

$$=B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{\Phi(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}+B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\,\Big\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}=$$

$$=\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{B_1(\nu)\Phi(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}+\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\,\Big\{B_2(\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial t}(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}=$$

$$=\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\Delta(\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}=0.$$

Отже, ми довели, що функція (2.49) є розв'язком задачі (2.1), (2.2), у якій $\varphi(x)$ – довільна ціла функція порядку $\widetilde{p}'$ за сукупністю змінних.

Покажемо, що функція (2.49) є ненульовою. Справді,

$$U(0,x)=\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{\Phi(0,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}=\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{\big[A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\big]\Big\}\Big|_{\nu=O},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\,\Big\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}=-\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\Big\{\big[A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}\big]\Big\}\Big|_{\nu=O}.$$

Оскільки $|A_1(\nu)|^2+|A_2(\nu)|^2>0$ для довільного $\nu\in\mathbb{C}^s$, то нетривіальними є $U(0,x)$ або $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)$. Отже, функція (2.49) як розв'язок задачі Коші з ненульовими початковими даними є нетривіальною. □

Приклад 2.5. В області $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ знайти розв'язок диференціально-функціонального рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U\,(t,x)+2\frac{\partial}{\partial t}U\,(t,x+1)+2U\,(t,x+1)-U\,(t,x)=0, \qquad (2.51)$$

що задовольняє двоточкові умови

$$U(0,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0, \quad U(h,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(h,x)=0. \tag{2.52}$$

$\triangledown$ Диференціально-функціональне рівняння (2.51) подамо у вигляді такого диференціального рівняння нескінченного порядку

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2e^{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial t}+2e^{\frac{\partial}{\partial x}}-1\right]U\left(t,x\right)=0.$$

Задача (2.51), (2.52) є задачею (2.1), (2.2), в якій $a\left(\nu\right)=e^{\nu}$, $b\left(\nu\right)=2e^{\nu}-1$, $A_1\left(\nu\right)=A_2\left(\nu\right)=1$, $B_1\left(\nu\right)=B_2\left(\nu\right)=1$, $p=\infty$.

Нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+2e^{\nu}\frac{d}{dt}+2e^{\nu}-1\right]T\left(t,\nu\right)=0$$

має вигляд

$$T_0\left(t,\nu\right)=\frac{2e^{\nu}-1-e^{-2(e^{\nu}-1)t}}{2\left(e^{\nu}-1\right)}e^{-t}, \;\; T_1\left(t,\nu\right)=\frac{1-e^{-2(e^{\nu}-1)t}}{2\left(e^{\nu}-1\right)}e^{-t}.$$

Характеристичний визначник $\Delta(\nu)$ задачі (2.51), (2.52) є таким:

$$\Delta\left(\nu\right)=T_1\left(h,\nu\right)+\frac{dT_1}{dt}\left(h,\nu\right)-T_0\left(h,\nu\right)-\frac{dT_0}{dt}\left(h,\nu\right)\equiv 0.$$

За формулою (2.49) маємо

$$\begin{aligned}U\left(t,x\right)=&\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left[T_0(t,\nu)-T_1(t,\nu)\right]e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=\\ =&\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=e^{-t}\varphi\left(x\right).\end{aligned}$$

Як бачимо, функції $T_0\left(t,\nu\right)$ та $T_1\left(t,\nu\right)$ є цілими за ν функціями нескінченного порядку ($p=\infty$), однак функція $\left[T_0(t,\nu)-T_1(t,\nu)\right]e^{\nu x}=e^{-t+\nu x}$ має перший порядок ($\widetilde{p}=1$).

Отже, розв'язок задачі (2.51), (2.52) набуває вигляду

$$U\left(t,x\right)=e^{-t}\varphi\left(x\right),$$

де $\varphi\in C(\mathbb{R})$. Ядро цієї задачі є нескінченновимірним. $\triangle$

Приклад 2.6. Знайти в області $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ розв'язки двоточкової задачі

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+2a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}+\left(\frac{\pi^2k^2}{h^2}+a^2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\right)U=0,\quad k\in\mathbb{N}, \tag{2.53}$$

$$\alpha U(0,x)+\beta\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,\quad \alpha U(h,x)+\beta\frac{\partial U}{\partial t}(h,x)=0, \tag{2.54}$$

де $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

$\triangledown$ Для задачі (2.53), (2.54) маємо $a(\nu)$ – ціла функція, $b(\nu)=a(\nu)+\frac{\pi^2k^2}{h^2}$, $A_1(\nu)=\alpha,\ A_2(\nu)=\beta,\ B_1(\nu)=\alpha,\ B_2(\nu)=\beta,\ D(\nu)=-\frac{\pi^2k^2}{h^2}$.

Нормальна фундаментальна система розв'язків відповідного до (2.53) звичайного диференціального рівняння має вигляд

$$T_0\left(t,\nu\right)=e^{-a(\nu)t}\left\{\frac{h\,a\left(\nu\right)\sin\frac{\pi kt}{h}}{\pi k}+\cos\frac{\pi kt}{h}\right\},\quad T_1\left(t,\nu\right)=h\,e^{-a(\nu)t}\frac{\sin\frac{\pi kt}{h}}{\pi k},$$

а характеристичний визначник задачі є таким:

$$\Delta\left(\nu\right)=e^{-a(\nu)h}\frac{h\sin\left[\pi k\right]}{\pi k}\left(\alpha^2-2\alpha\beta a\left(\nu\right)+\beta^2\left(a^2\left(\nu\right)+\frac{\pi^2k^2}{h^2}\right)\right)\equiv 0.$$

Шукаючи нетривіальні розв'язки задачі (2.53), (2.54) у вигляді (2.49) для $k\in\mathbb{N}$ отримуємо

$$\begin{aligned}U_k(t,x)=&\frac{h\sin\dfrac{\pi kt}{h}}{\pi k}\,\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\left(\beta a\left(\nu\right)-\alpha\right)\right\}\Big|_{\nu=0}+\\&+\beta\cos\frac{\pi kt}{h}\,\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Розв'язки (2.55) будуть цілими розв'язками задачі (2.53), (2.54), якщо φ є цілою функцією, порядок q якої має такі обмеження ([49], с. 316):

1) $q=1$, якщо $a\left(\nu\right)$ не є поліномом ($p_a=\infty$);

2) $1<q<\frac{p_a}{p_a-1}\leqslant 2$, якщо $2\leqslant p_a<\infty$;

3) $q=\infty$, якщо $p_a\leqslant 1$, тобто $a\left(\nu\right)$ – лінійна функція.

Для лінійної функції $a\left(\nu\right)=A\nu+B$, де $A,B\in\mathbb{R}$, отримуємо нетривіальні класичні розв'язки задачі (2.53), (2.54) у вигляді

$$U_k\left(t,x\right)=$$

$$= e^{-Bt}\left[\frac{h\sin\frac{\pi kt}{h}}{\pi k}\{\beta A\varphi'(x-At)+(B\beta-\alpha)\,\varphi(x-At)\}+\beta\cos\frac{\pi kt}{h}\varphi(x-At)\right],$$

де $k\in\mathbb{N},\ \varphi\in C^3(\mathbb{R})$. Ядро цієї задачі є нескінченновимірним.

Зокрема, для $k=1, h=\pi, a(\nu)=\nu$ нетривіальними розв'язками задачі (2.53), (2.54) будуть функції вигляду

$$U(t,x)=\beta\,\varphi(x-t)\cos t-\alpha\varphi(x-t)\sin t\ +\beta\varphi'(x-t)\sin t,$$

причому в останній формулі достатньо вважати, що $\varphi\in C^3(\mathbb{R})$.

Якщо ж, окрім цього, $\alpha=0,\ \beta=1$ нетривіальними розв'язками задачі (2.53), (2.54) будуть функції

$$U(t,x)=\ \varphi(x-t)\cos t+\ \varphi'(x-t)\sin t,$$

де $\varphi\in C^3(\mathbb{R})$.

Якщо ж $\alpha=1,\ \beta=0$ і задачу розглядати у смузі $(0,\pi)\times\mathbb{R}$, то маємо задачу Діріхле, нетривіальними розв'язками якої є функції

$$U(t,x)=\ \varphi(x-t)\sin t,$$

де $\varphi\in C^2(\mathbb{R})$ (такий результат отримано у [24]). $\triangle$

Приклад 2.7. Знайти в області $(t,x_1,x_2)\in\mathbb{R}^3$ розв'язки рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\frac{\partial}{\partial t}+\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2+1\right]U(t,x_1,x_2)=0, \qquad (2.56)$$

що задовольняють локальні двоточкові умови

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)U(0,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,\\&\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)U(h,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(h,x)=0.\end{aligned} \qquad (2.57)$$

∇ Для даної задачі маємо $a(\nu)=\nu_1+\nu_2$, $b(\nu)=(\nu_1+\nu_2)^2+1$, $A_1(\nu)=B_1(\nu)=\nu_1+\nu_2$, $A_2(\nu)=B_2(\nu)=1$, $s=2$, $p=1$.

Нормальна в точці $t = 0$ фундаментальна система розв'язків відповідного до (2.56) звичайного диференціального рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\left(\nu_1 + \nu_2\right)\frac{d}{dt} + \left(\nu_1 + \nu_2\right)^2 + 1\right] T(t, \nu_1, \nu_2) = 0$$

матиме вигляд

$$T_0\left(t, \nu\right) = e^{-(\nu_1+\nu_2)t}\Big\{\left(\nu_1 + \nu_2\right)\sin t + \cos t\Big\}, \;\; T_1\left(t, \nu\right) = e^{-(\nu_1+\nu_2)t}\sin t.$$

Запишемо характеристичний визначник задачі (2.56), (2.57):

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} \nu_1 + \nu_2 & 1 \\ \left(\nu_1 + \nu_2\right) T_0(h, \nu) + \frac{dT_0}{dt}(h, \nu) & \left(\nu_1 + \nu_2\right) T_1(h, \nu) + \frac{dT_1}{dt}(h, \nu) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-(\nu_1+\nu_2)h}\sin h.$$

У випадку $h \neq \pi k$, $k \in \mathbb{N}$, виконується умова $\Delta\left(\nu\right) \neq 0$ для довільного $\nu \in \mathbb{C}^2$, тому за теоремою 2.1 задача (2.56), (2.57) має лише тривіальний розв'язок.

Якщо $h = \pi k$, де $k \in \mathbb{N}$, то виконується тотожність $\Delta\left(\nu\right) \equiv 0$. Тому згідно з теоремою 2.5 існують нетривіальні розв'язки задачі (2.56), (2.57). Функція (2.31) набуває вигляду

$$\Phi(t, x, \nu) = \Big\{T_0\left(t, \nu\right) - (\nu_1 + \nu_2)T_1\left(t, \nu\right)\Big\}e^{\nu\cdot x} = e^{-(\nu_1+\nu_2)t+\nu\cdot x}\cos t.$$

Шукаємо нетривіальні розв'язки задачі (2.56), (2.57) у випадку $h = \pi k$, де $k \in \mathbb{N}$, за формулою (2.49):

$$U\left(t, x\right) = \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{e^{-(\nu_1+\nu_2)t+\nu\cdot x}\cos t\right\}\Big|_{\nu=O} =$$

$$= \cos t\,\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{e^{-(\nu_1+\nu_2)t+\nu_1 x_1+\nu_2 x_2}\right\}\Big|_{\nu=O} = \varphi\left(x_1 - t, x_2 - t\right)\cos t.$$

Ядро задачі є нескінченновимірним. Зауважимо, що умову цілості функції φ можна послабити, розглядаючи класичні розв'язки задачі (2.56), (2.57), а саме, можна вважати, що $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. $\triangle$

Приклад 2.8. В області $(t,x) \in \mathbb{R}^4$ знайти розв'язки двоточкової задачі

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial}{\partial t} + a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\right]^2 U(t,x) = 0,\\ \left[a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big) + c\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\right] U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad U(1,x) = 0,\end{gathered} \tag{2.58}$$

в якій $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $c\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами.

∇ Задача (2.58) є задачею (2.1), (2.2), у якій $b(\nu) = a^2(\nu)$, $A_1(\nu) = a(\nu) + c(\nu)$, $A_2(\nu) = B_1(\nu) = 1$, $B_2(\nu) = 0$, $h = 1$, $s = 3$.

Нормальну в точці $t = 0$ фундаментальну систему розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$\left[\frac{d}{dt} + a(\nu)\right]^2 T(t,\nu) = 0$$

утворюють функції

$$T_0(t,\nu) = e^{-a(\nu)t}\left\{a(\nu)t + 1\right\}, \quad T_1(t,\nu) = t\, e^{-a(\nu)t}.$$

Обчислимо характеристичний визначник задачі (2.58):

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} a(\nu) + c(\nu) & 1 \\ T_0(1,\nu) & T_1(1,\nu) \end{vmatrix} = e^{-a(\nu)}\big\{c(\nu) - 1\big\}.$$

Розглянемо випадки.

Випадок 1. Нехай $c(\nu) = c \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Тоді для довільного $\nu \in \mathbb{C}^3$ виконується умова $\Delta(\nu) = e^{-a(\nu)}\{c - 1\} \neq 0$. Тому за теоремою 2.1 задача (2.58) має лише тривіальний розв'язок.

Випадок 2. Якщо $c(\nu) = 1$, то $\Delta(\nu) \equiv 0$. Функція (2.31) має вигляд

$$\Phi(t,x,\nu) = \Big\{T_0(t,\nu) - [a(\nu) + 1]\, T_1(t,\nu)\Big\} e^{\nu\cdot x} = (1-t)e^{-a(\nu)t + \nu\cdot x}.$$

Згідно з теоремою 2.5 знаходимо такі нетривіальні розв'язки задачі (2.58):

$$U(t,x) = (1-t)\,\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{e^{-a(\nu)t+\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O},$$

де φ – довільна ціла функція трьох змінних, порядок якої є спряженим з числом $p = \max\{1,\, \deg a(\nu)\}$ ($\deg a(\nu)$ – степінь полінома $a(\nu)$ за сукупністю змінних ν_1, ν_2, ν_3).

Випадок 3. Нехай $c(\nu) = \nu_3$, $a(\nu) = \nu_3 - \nu_1\nu_2$. Тоді задача (2.58) набуває вигляду

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 U(t,x) = 0,\\ \left[2\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + 1\right] U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad U(1,x) = 0.\end{gathered} \tag{2.59}$$

Для задачі (2.59) маємо

$$\Phi(t,x,\nu) = \big\{1 - (\nu_3+1)t\big\}e^{(-\nu_3+\nu_1\nu_2)t+\nu\cdot x},$$

$$\Delta(\nu) = \nu_3 e^{-\nu_3+\nu_1\nu_2}, \qquad M = \big\{\nu \in \mathbb{C}^3\colon \quad \nu_3 = 0\big\}.$$

Множина M складається з векторів: $\alpha \equiv \alpha(\mu_1,\mu_2) = (\mu_1,\mu_2,0)$, де $\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{C}$. Обчислюємо

$$\frac{\partial^j\Delta}{\partial x_1^j}(\alpha) = \nu_2^j\nu_3 e^{-\nu_3+\nu_1\nu_2}\Big|_{\nu=\alpha} = 0, \quad \frac{\partial^j\Delta}{\partial x_2^j}(\alpha) = \nu_1^j\nu_3 e^{-\nu_3+\nu_1\nu_2}\Big|_{\nu=\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x_3}(\alpha) = (1-\nu_3)\,e^{-\nu_3+\nu_1\nu_2}\Big|_{\nu=\alpha} = e^{\mu_1\mu_2} \neq 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

До множини $\Omega(\alpha)$ належать усі мультиіндекси $\omega \in \mathbb{Z}_+^3$ такі, що $\omega \geqslant (0,0,1)$. Оскільки для довільних $m,n \in \mathbb{Z}_+$ виконуються рівності $\frac{\partial^{m+n}\Delta}{\partial x_1^m\partial x_2^n}(\alpha) = 0$, то $\overline{\Omega}(\alpha) = \Big\{(m,n,0),\ m,n \in \mathbb{Z}_+\Big\}$.

За теоремою 2.4 для довільних $m,n \in \mathbb{Z}_+$ та $\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{C}$ знаходимо такі нетривіальні розв'язки задачі (2.59):

$$U_{mn}(t,x,\mu_1,\mu_2) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial\nu_1^m\partial\nu_2^n}\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= (1-t)\frac{\partial^{m+n}}{\partial\nu_1^m\partial\nu_2^n}e^{\nu_1\nu_2 t+\nu_1 x_1+\nu_2 x_2+\nu_3 x_3}\Big|_{\nu=\alpha} = (1-t)\frac{\partial^{m+n}}{\partial\mu_1^m\partial\mu_2^n}e^{\mu_1\mu_2 t+\mu_1 x_1+\mu_2 x_2} =$$

$$= m!\,n!\,(1-t)\,e^{\mu_1\mu_2 t+\mu_1 x_1+\mu_2 x_2}\sum_{j=0}^{\min\{m,n\}}\frac{t^j}{j!}\frac{(\mu_2 t+x_1)^{m-j}}{(m-j)!}\frac{(\mu_1 t+x_2)^{n-j}}{(n-j)!}.$$

Неважко переконатися, що нетривіальними розв'язками задачі (2.59) є також функції вигляду

$$U(t,x,\nu_1,\nu_2) = (1-t)\,\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_1},\frac{\partial}{\partial\nu_2}\Big)e^{\nu_1\nu_2 t+\nu_1 x_1+\nu_2 x_2}, \tag{2.60}$$

де φ – довільна ненульова ціла функція двох змінних, порядок за сукупністю змінних якої є не вище другого, а ν_1,ν_2 – довільні комплексні параметри.

$\triangle$

Висновки до розділу 2

Однорідна задача для рівняння із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано локальні двоточкові умови, та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними має лише тривіальний розв'язок у випадку, коли характеристичний визначник задачі є відмінним від нуля для всіх значень $\nu\in\mathbb{C}^s$.

У випадку інших значень характеристичного визначника задачі доведено теореми, що дають необхідні та достатні умови існування нетривіальних розв'язків в класах квазіполіномів, а також достатні умови в класах цілих та неперервно диференційовних функцій. Запропоновано диференціально-символьний метод їх побудови.

Подано приклади застосування методу.

Основні результати розділу опубліковано у статтях [63–65, 126, 127], а також додатково у [69–74, 129, 130].

РОЗДІЛ 3
ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ З НЕОДНОРІДНИМИ ДВОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ

У цьому розділі досліджено розв'язність задачі для однорідного рівняння з частинними похідними другого порядку за часовою змінною та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з неоднорідними локальними двоточковими умовами. Виділено класи цілих функцій як класи однозначної розв'язності задачі. Встановлено умови існування та умови неіснування розв'язку задачі залежно від множини нулів характеристичного визначника. У випадку існування розв'язків задачі запропоновано диференціально-символьний метод їх побудови.

3.1. Формулювання задачі

У просторі $\mathbb{R}^{1+s}$ змінних $t, x_1, \ldots, x_s$ розглянемо задачу

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t} + b\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U = 0, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} l_{0\partial}U(t,x) &\equiv A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x) + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_0(x), \\ l_{1\partial}U(t,x) &\equiv B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x) + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = \varphi_1(x), \end{aligned} \tag{3.2}$$

у якій $h > 0$, а $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ – задані функції, причому хоча б одна з них є ненульовою. Диференціальні вирази $a(\frac{\partial}{\partial x}), b(\frac{\partial}{\partial x}), A_1(\frac{\partial}{\partial x}), A_2(\frac{\partial}{\partial x}), B_1(\frac{\partial}{\partial x}), B_2(\frac{\partial}{\partial x})$ є такими ж, як і в рівнянні (2.1) та умовах (2.2).

Знайдемо розв'язки $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$ відповідного до (3.1) звичайного

диференціального рівняння (2.3), що задовольняють двоточкові умови

$$
\begin{aligned}
l_{0\nu}\widetilde{T}_k\,(t,\nu) &\equiv A_1(\nu)\widetilde{T}_k\,(0,\nu) + A_2(\nu)\frac{d\widetilde{T}_k}{dt}\,(0,\nu) = \delta_{0k},\\
l_{1\nu}\widetilde{T}_k\,(t,\nu) &\equiv B_1(\nu)\widetilde{T}_k\,(h,\nu) + B_2(\nu)\frac{d\widetilde{T}_k}{dt}\,(h,\nu) = \delta_{1k}, \quad k\in\{0,1\}\,.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Шукаємо ці розв'язки у вигляді

$$
\widetilde{T}_k(t,\nu) = c_{k1}(\nu)T_0(t,\nu) + c_{k2}(\nu)T_1(t,\nu), \quad k\in\{0,1\},
$$

де $c_{01}(\nu)$, $c_{02}(\nu)$, $c_{11}(\nu)$, $c_{12}(\nu)$ – невідомі функції вектор-параметра $\nu\in\mathbb{C}^s$, а $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ – нормальна фундаментальна в точці $t=0$ система розв'язків рівняння (2.3).

Умова $\Delta(\nu)\neq 0$ є умовою існування функцій $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$, де $\Delta(\nu)$ – функція вигляду (2.5).

3.2. Умови однозначної розв'язності задачі у класі цілих функцій

У випадку $\Delta\,(\nu)\neq 0$ для всіх $\nu\in\mathbb{C}^s$ функція $\Delta^{-1}(\nu)$ є також цілою функцією, а тому функції $\widetilde{T}_0\,(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1\,(t,\nu)$ визначаються однозначно для довільного $\nu\in\mathbb{C}^s$. Ці функції є цілими стосовно цього вектор-параметра і мають такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}_0\,(t,\nu) &= \Delta^{-1}(\nu)\Big\{T_0(t,\nu)\,l_{1\nu}T_1(t,\nu) - T_1(t,\nu)\,l_{1\nu}T_0(t,\nu)\Big\} =\\
&= \frac{e^{-a(t+h)}}{\Delta\,(\nu)}\Big[\,(B_1 - aB_2)\,\frac{\sinh\left[(h-t)\sqrt{a^2-b}\,\right]}{\sqrt{a^2-b}} +\\
&\quad + B_2\cosh\left[(h-t)\sqrt{a^2-b}\,\right]\Big],\\
\widetilde{T}_1\,(t,\nu) &= \Delta^{-1}(\nu)\Big\{-T_0(t,\nu)\,l_{0\nu}T_1(t,\nu) + T_1(t,\nu)\,l_{0\nu}T_0(t,\nu)\Big\} =\\
&= \frac{e^{-at}}{\Delta\,(\nu)}\left[(A_1 - aA_2)\,\frac{\sinh\left[t\sqrt{a^2-b}\,\right]}{\sqrt{a^2-b}} - A_2\cosh\left[t\sqrt{a^2-b}\,\right]\right],
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

де $a = a(\nu)$, $b = b(\nu)$, $A_1 = A_1(\nu)$, $A_2 = A_2(\nu)$, $B_1 = B_1(\nu)$, $B_2 = B_2(\nu)$.

Зауважимо, що функції (3.4) для $a^2 = b$ є такими

$$\widetilde{T}_0(t,\nu) = \frac{e^{-a(t+h)}}{\Delta(\nu)}\left[(B_1 - aB_2)(h-t) + B_2\right],$$

$$\widetilde{T}_1(t,\nu) = \frac{e^{-at}}{\Delta(\nu)}\left[(A_1 - aA_2)t - A_2\right].$$

Порядок цілих функцій $\widetilde{T}_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}$ за сукупністю параметрів $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ позначимо через p. Зауважимо, що $p \geqslant 1$ або $p = \infty$.

Теорема 3.1. *Нехай $\Delta(\nu) \neq 0$ для довільного $\nu \in \mathbb{C}^s$ і p – порядок цілих функцій $\widetilde{T}_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}$ за сукупністю параметрів ν_1, ν_2, $\ldots$, ν_s. Якщо $\varphi_0, \varphi_1 \in A_{p'}$, то у класі $\mathbb{A}_{p'}$ існує єдиний розв'язок задачі* (3.1), (3.2). *Цей розв'язок можна подати у вигляді*

$$U(t,x) = \varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} + \varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O}. \quad (3.5)$$

Доведення. Для цілих функцій $\varphi_0, \varphi_1 \in A_{p'}$ диференціальні вирази нескінченного порядку $\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ та $\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ визначимо шляхом заміни x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$ у рядах Маклорена для функцій $\varphi_0(x)$ та $\varphi_1(x)$. Тоді вираз (3.5) є деяким рядом. Цей ряд визначає цілу функцію $U(t,x)$, яка є квазіполіномом за змінною t і для кожного фіксованого t належить до класу $A_{p'}$ (див. [49] для $s = 1$ та [27] для $s > 1$).

Покажемо, що функція (3.5) задовольняє рівняння (3.1). З того, що функції (3.4) є розв'язками рівняння (2.3), враховуючи комутативність операцій $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial\nu}$, отримаємо:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x) = L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\sum_{j=0}^{1}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_j(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} =$$

$$= \sum_{j=0}^{1}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\widetilde{T}_j(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} =$$

$$= \sum_{j=0}^{1}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[e^{\nu\cdot x}\left\{L\left(\frac{d}{dt}, \nu\right)\widetilde{T}_j(t,\nu)\right\}\right]\Big|_{\nu=O} = 0.$$

Оскільки функції (3.4) задовольняють умови (3.3), то для $j \in \{0,1\}$ отримуємо

$$l_{j\partial}U\,(t,x) = \sum_{k=0}^{1} \varphi_k\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}\, l_{j\nu}\widetilde{T}_k(t,\nu)\right\}\Big|_{\nu=O} =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \varphi_k\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}\delta_{jk}\right\}\Big|_{\nu=O} = \varphi_j\,(x)\,.$$

Отже, функція (3.5) є розв'язком задачі (3.1), (3.2).

Для доведення єдиності розв'язку задачі (3.1), (3.2) у класі $\mathbb{A}_{p'}$ насамперед покажемо, що кожен її розв'язок можна подати у вигляді (3.5). Отже, припустимо, що існує цілий розв'язок $U(t,x)$ рівняння (3.1), тобто ціла функція вигляду

$$U(t,x) = \sum_{\bar{k}\in\mathbb{Z}_+^{s+1}} u_{\bar{k}}\, t^{k_0}x^k, \;\; \bar{k} = (k_0,k) = (k_0,k_1,\ldots,k_s), \;\; u_{\bar{k}} \in \mathbb{C},$$

змінних t та x, що задовольняє умови (3.2).

Позначимо $U(0,x) = \varphi(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$. Тоді функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ є також цілими з класу $A_{p'}$. Запишемо розв'язок задачі (3.1), (3.2) згідно з диференціально-символьним методом [34] як єдиний розв'язок задачі Коші для рівняння (3.1) з початковими даними φ та ψ у вигляді:

$$U(t,x) = \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O} + \psi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}. \qquad (3.6)$$

Оскільки $U(t,x)$ задовольняє умови (3.2), то маємо систему рівнянь

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\, l_{0\nu}T_0(t,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O} + \psi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\, l_{0\nu}T_1(t,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O} = \varphi_0(x),$$

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\, l_{1\nu}T_0(t,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O} + \psi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\, l_{1\nu}T_1(t,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O} = \varphi_1(x),$$

яку запишемо у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} l_{0\partial}T_0\Big(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) & l_{0\partial}T_1\Big(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) \\ l_{1\partial}T_0\Big(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) & l_{1\partial}T_1\Big(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix}.$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо

$$\varphi(x) = \Delta^{-1}(\nu)\left\{l_{1\partial}T_1\Big(t, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi_0(x) - l_{0\partial}T_1\Big(t, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi_1(x)\right\},$$

$$\psi(x) = \Delta^{-1}(\nu)\left\{-l_{1\partial}T_0\Big(t, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi_0(x) + l_{0\partial}T_0\Big(t, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi_1(x)\right\}.$$

Підставляючи знайдені φ та ψ у рівність (3.6), одержуємо

$$U(t,x) = \Delta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{T_0\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\ l_{1\partial}T_1\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) -\right.$$

$$\left. -T_1\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\ l_{1\partial}T_0\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\varphi_0(x) +$$

$$+\Delta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{-T_0\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\ l_{0\partial}T_1\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) +\right.$$

$$\left. +T_1\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\ l_{0\partial}T_0\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\varphi_1(x) =$$

$$= \widetilde{T}_0\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0(x) + \widetilde{T}_1\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_1(x) =$$

$$= \varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} + \varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O}.$$

За умови $\Delta(\nu) \neq 0$ для довільного $\nu \in \mathbb{C}^s$ функції $\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right)$, $\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)$ можна знайти однозначно, тому у класі цілих функцій $\mathbb{A}_{p'}$ розв'язок задачі (3.1), (3.2) є єдиним. $\square$

Приклад 3.1. В області $(t,x) \in \mathbb{R}^4$ знайти розв'язок двоточкової задачі

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_3\right]^2 U(t,x) = 0,\\ \big(2 - \Delta_3\big)U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_0(x), \quad U(1,x) = \varphi_1(x).\end{gathered} \tag{3.7}$$

∇ Задача (3.7) є задачею (3.1), (3.2), у якій $a(\nu) = -||\nu||^2 \equiv -(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)$, $b(\nu) = a^2(\nu)$, $A_1(\nu) = 2 - ||\nu||^2$, $A_2(\nu) = B_1(\nu) = 1$, $B_2(\nu) = 0$, $h = 1$, $s = 3$.

Характеристичний визначник та множина M для задачі (3.7) є такими:

$$\Delta(\nu) = e^{||\nu||^2}, \quad M = \varnothing.$$

Функції (3.4) мають вигляд

$$\widetilde{T}_0\,(t,\nu) = (1-t)e^{||\nu||^2 t}, \quad \widetilde{T}_1\,(t,\nu) = (2t-1)e^{||\nu||^2(t-1)} \tag{3.8}$$

і є цілими (для $t \notin \{0,1\}$) другого порядку за сукупністю змінних ν_1, ν_2, ν_3 ($p = 2$). Якщо $\varphi_0, \varphi_1 \in A_2$, то у класі $\mathbb{A}_2$ існує єдиний розв'язок задачі (3.7). Цей розв'язок згідно з теоремою 3.1 можна подати у вигляді (3.5), де $\widetilde{T}_0\,(t,\nu)\,,\ \widetilde{T}_1\,(t,\nu)$ – функції (3.4).

Зокрема, якщо $\varphi_0(x) = x_1 e^{x_2 - x_3}$, $\varphi_1(x) = 0$, то за формулою (3.5) знаходимо:

$$U(t,x) = \frac{\partial}{\partial \nu_1}\left\{(1-t)e^{||\nu||^2 t + \nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu_1=0,\,\nu_2=1,\,\nu_3=-1} = (1-t)x_1 e^{2t+x_2-x_3}.$$

Знайдений розв'язок задачі (3.7) у класі $\mathbb{A}_2$ є єдиним. $\triangle$

Приклад 3.2. Знайти в області $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ розв'язок рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + 1\right] U\,(t,x) = 0, \tag{3.9}$$

що задовольняє локальні двоточкові умови:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) U\,(0,x) + \frac{\partial}{\partial t} U\,(0,x) = \varphi_0\,(x)\,,\\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) U\left(\frac{\pi}{2}, x\right) + \frac{\partial}{\partial t} U\left(\frac{\pi}{2}, x\right) = \varphi_1\,(x)\,.\end{gathered} \tag{3.10}$$

∇ Для даної задачі маємо $a(\nu) = \nu_1 + \nu_2$, $b(\nu) = (\nu_1 + \nu_2)^2 + 1$, $A_1(\nu) = B_1(\nu) = \nu_1 + \nu_2$, $A_2(\nu) = B_2(\nu) = 1$, $h = \frac{\pi}{2}$, $s = 2$.

Характеристичний визначник задачі (3.9), (3.10) та функції (3.4) мають вигляд

$$\Delta\,(\nu) = e^{-(\nu_1+\nu_2)\frac{\pi}{2}},$$

$$\widetilde{T}_0\,(t,\nu) = e^{-(\nu_1+\nu_2)t}\sin t, \quad \widetilde{T}_1\,(t,\nu) = -e^{-(\nu_1+\nu_2)(t+\frac{\pi}{2})}\cos t.$$

Множина нулів характеристичного визначника задачі є порожньою, а функції $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$ є цілими функціями, причому першого порядку за сукупністю параметрів ν_1, ν_2.

Розв'язок задачі (3.9), (3.10) можна знайти за формулою (3.5):

$$U(t,x) = \varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-(\nu_1+\nu_2)t+\nu\cdot x}\sin t\right\}\Big|_{\nu=O}+$$

$$+\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{-e^{-(\nu_1+\nu_2)(t+\frac{\pi}{2})+\nu\cdot x}\cos t\right\}\Big|_{\nu=O}=$$

$$=\varphi_0(x_1-t,\, x_2-t)\sin t-\varphi_1\left(x_1-t-\frac{\pi}{2},\, x_2-t-\frac{\pi}{2}\right)\cos t.$$

Отримана формула

$$U(t,x)=\varphi_0(x_1-t,\, x_2-t)\sin t-\varphi_1\left(x_1-t-\frac{\pi}{2},\, x_2-t-\frac{\pi}{2}\right)\cos t$$

має зміст не лише для цілих функцій $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$. Ця формула зображає класичний розв'язок задачі (3.9), (3.10) у разі двічі неперервно диференційовних на $\mathbb{R}^2$ функцій $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$. $\triangle$

3.3. Класи квазіполіномів як класи однозначної розв'язності задачі

Встановимо однозначну розв'язність задачі (3.1), (3.2) у класах квазіполіномів K_L та $K_{\mathbb{C},L}$ для довільної підмножини L ($L \neq \varnothing$, $L \neq \mathbb{C}^s$) з простору $\mathbb{C}^s$.

Для $\nu \in \mathbb{C}^s \backslash M$, де M – множина вигляду (2.12), тобто

$$M = \{\nu \in \mathbb{C}^s\colon \quad \Delta(\nu) = 0\},$$

функції $\widetilde{T}_0(t,\nu), \widetilde{T}_1(t,\nu)$ можна однозначно знайти у вигляді (3.4). Вони є квазіполіномами за змінною t і можуть бути мероморфними за вектор-змінною ν на множині M.

Теорема 3.2. *Нехай* $\varphi_0,\ \varphi_1 \in K_{\mathbb{C}^s\setminus M}$ *і* M *– множина* (2.12), *причому* $M \neq \mathbb{C}^s$, $M \neq \varnothing$. *Тоді у класі квазіполіномів* $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^s\setminus M}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (3.1), (3.2). *Цей розв'язок можна подати у вигляді* (3.5), *де* $\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right), \widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)$ *– функції* (3.4).

Доведення. Якщо $\varphi_0,\ \varphi_1 \in K_{\mathbb{C}^s\setminus M}$, то згідно із зауваженням 2.1 функція (3.5) є квазіполіномом з класу $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^s\setminus M}$.

Аналогічно як у теоремі 3.1 доводиться, що функція (3.5) задовольняє рівняння (3.1) та умови (3.2).

Для доведення єдиності розв'язку задачі (3.1), (3.2) в класі $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^s\setminus M}$ спочатку аналогічно як у теоремі 3.1 треба показати, що кожен розв'язок задачі у класі $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^s\setminus M}$ можна зобразити у вигляді (3.5), а далі використати умову, що для $\nu \in \mathbb{C}^s\setminus M$ функції $\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right), \widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)$ визначаються однозначно. □

Приклад 3.3. В області $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ розв'язати двоточкову задачу для диференціально-функціонального рівняння

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U(t,x_1,x_2)}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_1}(t,x_1,x_2) + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(t,x_1,x_2+1) = 0,\\ \frac{\partial U}{\partial x_1}(0,x_1,x_2) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x_1,x_2) = e^{x_1}, \qquad U(1,x_1,x_2) = x_2 e^{x_1}.\end{gathered} \tag{3.11}$$

∇ Задача (3.11) є задачею (3.1), (3.2), у якій $a(\nu) = \nu_1$, $b(\nu) = \nu_1^2 e^{\nu_2}$, $s = 2$, $h = 1$, $A_1(\nu) = \nu_1$, $A_2(\nu) = 1$, $B_1(\nu) = 1$, $B_2(\nu) = 0$, $\varphi_0\left(x\right) = e^{x_1}$, $\varphi_1\left(x\right) = x_2 e^{x_1}$.

Характеристичний визначник задачі (3.11) та множина M матимуть вигляд:

$$\begin{gathered}\Delta(\nu) = -e^{-\nu_1}\cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right],\\ M = \left\{\nu \in \mathbb{C}^2\colon \quad \nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}} = \left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right) i,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Запишемо функції (3.4) для задачі (3.11):

$$\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right) = -e^{-\nu_1 t}\frac{\sinh\left[\nu_1\left(1-t\right)\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]}{\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]},$$

$$\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)=e^{-\nu_1(t-1)}\frac{\cosh\left[\nu_1 t\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]}{\cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]}.$$

Оскільки φ_0, $\varphi_1\in K_{\mathbb{C}^2\setminus M}$, то розв'язок задачі (3.11) знайдемо за формулою (3.5):

$$U\left(t,x\right)=e^{\frac{\partial}{\partial\nu_1}}\left\{e^{\nu_1x_1+\nu_2x_2}\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right)\right\}\Big|_{\nu=O}+e^{\frac{\partial}{\partial\nu_1}}\frac{\partial}{\partial\nu_2}\left\{e^{\nu_1x_1+\nu_2x_2}\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)\right\}\Big|_{\nu=O}=$$

$$=e^{x_1}\left\{\widetilde{T}_0(t,1,0)+x_2\widetilde{T}_1(t,1,0)+\frac{\partial\widetilde{T}_1}{\partial\nu_2}(t,1,0)\right\}=$$

$$=e^{x_1-t}\left(t-1\right)+\frac{1}{2}e^{x_1-t+1}\left(2x_2-t^2+1\right).$$

Отже, розв'язок задачі (3.11) має вигляд

$$U(t,x)=e^{x_1-t}\left(t-1+ex_2-\frac{et^2}{2}+\frac{e}{2}\right)$$

і є єдиним за теоремою 3.2 у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^2\setminus M}$, де M – множина (3.12). $\triangle$

Приклад 3.4. В області $(t,x)\in\mathbb{R}^4$ знайти розв'язок двоточкової задачі

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]^2U(t,x)=0,$$

$$\left[2\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+1\right]U(0,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\varphi_0(x),\quad U(1,x)=\varphi_1(x). \tag{3.13}$$

∇ Задача (3.13) є задачею (3.1), (3.2), у якій $a(\nu)=\nu_3-\nu_1\nu_2$, $b(\nu)=a^2(\nu)$, $A_1(\nu)=2\nu_3-\nu_1\nu_2+1$, $A_2(\nu)=B_1(\nu)=1$, $B_2(\nu)=0$, $h=1$, $s=3$.

Для задачі (3.13) маємо

$$\Delta(\nu)=\nu_3e^{-\nu_3+\nu_1\nu_2},\quad M=\left\{\nu\in\mathbb{C}^3\colon\ \ \nu_3=0\right\},$$

$$\widetilde{T}_0(t,\nu)=\frac{e^{(\nu_1\nu_2-\nu_3)t}}{\nu_3}(1-t),\quad \widetilde{T}_1(t,\nu)=\frac{e^{(\nu_1\nu_2-\nu_3)(t-1)}}{\nu_3}[(\nu_3+1)t-1].$$

Нехай в задачі (3.13) $\varphi_0(x)=x_1e^{x_2-x_3}$, $\varphi_1(x)=0$. Ці функції належать до класу $K_{\mathbb{C}^3\setminus M}$.

За формулою (3.5) знаходимо розв'язок двоточкової задачі

$$U(t,x) = (1-t)\frac{\partial}{\partial \nu_1}\left\{\frac{e^{(\nu_1\nu_2-\nu_3)t+\nu_1x_1+\nu_2x_2+\nu_3x_3}}{\nu_3}\right\}\Bigg|_{\nu_1=0,\,\nu_2=1,\,\nu_3=-1} =$$

$$= (1-t)\left\{\frac{(\nu_2 t + x_1)e^{(\nu_1\nu_2-\nu_3)t+\nu_1x_1+\nu_2x_2+\nu_3x_3}}{\nu_3}\right\}\Bigg|_{\nu_1=0,\,\nu_2=1,\,\nu_3=-1} =$$

$$= (1-t)\left\{\frac{(t+x_1)e^{t+x_2-x_3}}{-1}\right\} = (t-1)(t+x_1)e^{t+x_2-x_3}.$$

Знайдений розв'язок

$$U(t,x) = (t-1)(t+x_1)e^{t+x_2-x_3}$$

задачі (3.13) за теоремою 3.2 є єдиним у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^3\setminus M}$. $\triangle$

Розглянемо ще один клас існування та єдиності розв'язку задачі (3.1), (3.2) для випадку $s = 1$.

Теорема 3.3. *Нехай* $r = \inf\limits_{\nu\in M}|\nu|$, *де* M *– множина* (2.12), *причому* $r \neq 0$. *Якщо* φ_0, $\varphi_1 \in A_{1,r}$, *то у класі функцій* $\mathbb{A}_{1,r}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (3.1), (3.2), *який можна подати у вигляді* (3.5).

Доведення. Визначимо диференціальні вирази $\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right), \varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ нескінченного порядку шляхом заміни x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$ у рядах Маклорена для функцій $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$. Тоді вираз (3.5) є деяким рядом. Цей ряд визначає функцію $U(t,x)$, яка є цілою функцією за змінною t і для кожного фіксованого t належить до класу $A_{1,r}$, що випливає з рівностей для $j \in \{0,1\}$

$$\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_j(t,\nu)\,e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\widetilde{T}_j\left(t,\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{e^{\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0} = \widetilde{T}_j\left(t,\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_j(x)$$

і леми 1 [76]. Отже, $U \in \mathbb{A}_{1,r}$.

Для доведення єдиності розв'язку задачі (3.1), (3.2) треба повторити хід доведення теореми 3.1 і використати умову, що всередині круга радіуса $r = \inf\limits_{\nu\in M}|\nu|$ не міститься нулів $\Delta(\nu)$. $\square$

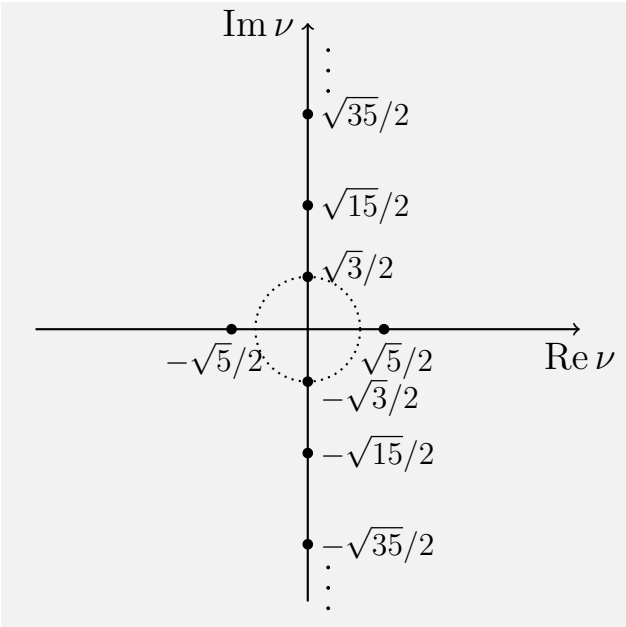
Приклад 3.5. Розглянемо двоточкову задачу

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\right] U(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$
$$U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_0(x), \quad U(\pi,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(\pi,x) = \varphi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

∇ Задача (3.14) – це задача (3.1), (3.2), у якій $a(\nu) = 0$, $b(\nu) = -\nu^2 + \frac{1}{4}$, $A_1(\nu) = A_2(\nu) = 1$, $B_1(\nu) = B_2(\nu) = 1$.

Характеристичний визначник задачі (3.14) та множина M є наступними:

$$\Delta(\nu) = \frac{\sinh\left[\pi\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}}\left(\frac{5}{4} - \nu^2\right),$$
$$M = \left\{\nu_{k\pm} = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - k^2},\ k \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \left\{\nu_{0\pm} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}\right\}.$$



Якщо $\varphi_0, \varphi_1 \in A_{1,\sqrt{3}/2}$, то розв'язок задачі (3.14) згідно з теоремою 3.3 можна знайти за формулою (3.5), в якій

$$\widetilde{T}_0(t,\nu) = \frac{1}{\Delta(\nu)}\left\{\frac{\sinh\left[(\pi - t)\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}} + \cosh\left[(\pi - t)\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right]\right\},$$

$$\widetilde{T}_1(t,\nu) = \frac{1}{\Delta(\nu)} \left\{ \frac{\sinh\left[t\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}} - \cosh\left[t\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}\right] \right\}.$$

Зокрема, якщо $\varphi_0(x) = 0$, $\varphi_1(x) = e^{-x/2}$, то за формулою (3.5) знаходимо

$$U(t,x) = \frac{t-1}{\pi} e^{-x/2}.$$

У класі цілих функцій $\mathbb{A}_{1,\sqrt{3}/2}$ знайдений розв'язок є єдиним. $\triangle$

3.4. Умови існування та неіснування розв'язків задачі

Дослідимо розв'язність задачі (3.1), (3.2) у випадку $\Delta(\nu) \equiv 0$.

Теорема 3.4. *Нехай для задачі* (3.1), (3.2) *виконується тотожність* $\Delta(\nu) \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}^s$. *Якщо деякого* $x \in \mathbb{R}^s$ *та для* $\varphi_0, \varphi_1 \in A_{p'}$ *справджується хоча б одна з умов*

$$\left\{ l_{1\partial} T_1\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} \varphi_0(x) \neq A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_1(x) \tag{3.15}$$

або

$$\left\{ l_{1\partial} T_0\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} \varphi_0(x) \neq A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_1(x), \tag{3.16}$$

то у класі цілих функцій $\mathbb{A}_{p'}$ *розв'язок задачі* (3.1), (3.2) *не існує.*

Доведення. Припустимо, що існує цілий розв'язок $U(t,x)$ рівняння (3.1), що задовольняє умови (3.2). Позначимо $U(0,x) = \varphi(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$. Тоді функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ є також цілими з класу $A_{p'}$.

Запишемо розв'язок задачі (3.1), (3.2) згідно з диференціально-символьним методом [34] як розв'язок задачі Коші для рівняння (3.1) з початковими даними φ та ψ у вигляді (3.6).

З виконання умов (3.2) для $U(t,x)$ одержуємо матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} l_{0\partial} T_0\Big(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\Big) & l_{0\partial} T_1\Big(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\Big) \\ l_{1\partial} T_0\Big(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\Big) & l_{1\partial} T_1\Big(t, \dfrac{\partial}{\partial x}\Big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix}.$$

Помножимо останнє рівняння на матричний диференціальний вираз

$$\begin{pmatrix} l_{1\partial}T_1\Big(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) & -l_{0\partial}T_1\Big(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) \\ -l_{1\partial}T_0\Big(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) & l_{0\partial}T_0\Big(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) \end{pmatrix}.$$

З умови $\Delta(\nu)\equiv 0$ маємо

$$\begin{pmatrix} l_{1\partial}T_1\Big(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) & -l_{0\partial}T_1\Big(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) \\ -l_{1\partial}T_0\Big(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) & l_{0\partial}T_0\Big(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\Big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $l_{0\partial}T_1\Big(t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)=A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)$ і $l_{0\partial}T_0\Big(t,\frac{\partial}{\partial x}\Big)=A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)$, то маємо суперечність з умовами (3.15) та (3.16). $\square$

Приклад 3.6. Знайти в області $(t,x_1,x_2)\in\mathbb{R}^3$ розв'язки рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\frac{\partial}{\partial t}+\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^2+1\right]U(t,x)=0, \tag{3.17}$$

що задовольняють неоднорідні локальні двоточкові умови

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)U(0,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=\varphi_0(x),\\ &\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)U(\pi,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(\pi,x)=\varphi_1(x). \end{aligned} \tag{3.18}$$

∇ Для даної задачі маємо $a(\nu)=\nu_1+\nu_2$, $b(\nu)=(\nu_1+\nu_2)^2+1$, $A_1(\nu)=B_1(\nu)=\nu_1+\nu_2$, $A_2(\nu)=B_2(\nu)=1$, $s=2$, $h=\pi$, $p=1$.

Нормальна в точці $t=0$ фундаментальна система розв'язків відповідного до (3.17) звичайного диференціального рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+2\left(\nu_1+\nu_2\right)\frac{d}{dt}+\left(\nu_1+\nu_2\right)^2+1\right]T(t,\nu)=0$$

матиме вигляд

$$T_0\left(t,\nu\right)=e^{-(\nu_1+\nu_2)t}\Big\{\left(\nu_1+\nu_2\right)\sin t+\cos t\Big\},\ \ T_1\left(t,\nu\right)=e^{-(\nu_1+\nu_2)t}\sin t.$$

Запишемо характеристичний визначник задачі (3.17), (3.18):

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} \nu_1 + \nu_2 & 1 \\ (\nu_1+\nu_2)\,T_0(\pi,\nu) + \dfrac{dT_0}{dt}(\pi,\nu) & (\nu_1+\nu_2)\,T_1(\pi,\nu) + \dfrac{dT_1}{dt}(\pi,\nu) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-(\nu_1+\nu_2)\pi}\sin\pi \equiv 0.$$

Умови (3.15) та (3.16) для задачі (3.17), (3.18) мають вигляд

$$\begin{gathered} -\varphi_0(x_1-\pi, x_2-\pi) \neq \varphi_1(x_1,x_2), \\ -\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\varphi_0(x_1-\pi, x_2-\pi) \neq \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\varphi_1(x_1,x_2). \end{gathered} \tag{3.19}$$

Отже, у випадку виконання умов (3.19) згідно з теоремою 3.4 розв'язок неоднорідної задачі (3.17), (3.18) у класі цілих функцій не існує. $\triangle$

Теорема 3.5. *Нехай для задачі* (3.1), (3.2) $\Delta(\nu) \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}^s$ *і* $A_1(\nu) \not\equiv 0$. *Якщо для ненульового квазіполінома* φ_0 *з* K_P, *де* $P = \{\nu \in \mathbb{C}^s\colon\ A_1(\nu) \neq 0\}$, *на* $\mathbb{R}^s$ *справджується тотожність*

$$A_1^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T_0\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right) + B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{dT_0}{dt}\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\varphi_0(x) \equiv \varphi_1(x), \tag{3.20}$$

то розв'язок задачі (3.1), (3.2) *у класі* $K_{\mathbb{C},P}$ *існує. Цей розв'язок задачі можна знайти за формулою*

$$U(t,x) = \varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\frac{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}}{A_1(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=O}. \tag{3.21}$$

Доведення. Якщо $\varphi_0 \in K_P$, то дія $\varphi_0\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)$ на $A_1^{-1}(\nu)T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}$ є коректною, а після покладання $\nu = O$ формула (3.21) визначає квазіполіном з класу $K_{\mathbb{C},P}$.

Доведемо, що формула (3.21) визначає розв'язок задачі (3.1), (3.2). Дійсно, враховуючи комутативність операцій диференціювання $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ та $\frac{\partial}{\partial \nu}$, маємо:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x) = L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\frac{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}}{A_1(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=O}\right\} =$$

$$= \varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\frac{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}}{A_1(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=O}\right\} =$$
$$= \varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{e^{\nu\cdot x}}{A_1(\nu)}L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T_0(t,\nu)\right\}\Bigg|_{\nu=O} = 0.$$

Отже, функція (3.21) задовольняє рівняння (3.1).

Покажемо виконання першої двоточкової умови (3.2) в точці $t = 0$:

$$A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(0,x)+A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) =$$
$$= A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{1\cdot e^{\nu\cdot x}}{A_1(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=O}+$$
$$+ A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{0\cdot e^{\nu\cdot x}}{A_1(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=O} =$$
$$= \varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} = \varphi_0(x)\left\{e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} = \varphi_0(x).$$

Тепер доведемо, що функція вигляду (3.21) задовольняє другу двоточкову умову (3.2) в точці $t = h$, використавши при цьому тотожність (3.20):

$$B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(h,x) + B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) =$$
$$= B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{T_0(h,\nu)e^{\nu\cdot x}}{A_1(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=O}\right\}+$$
$$+B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\frac{dT_0}{dt}(h,\nu)e^{\nu\cdot x}}{A_1(\nu)}\right\}\Bigg|_{\nu=O}\right\} =$$
$$= B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{T_0\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)}{A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}\varphi_0(x) + B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\frac{dT_0}{dt}\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)}{A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}\varphi_0(x) =$$
$$= \frac{1}{A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}\left\{B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T_0\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right) + B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{dT_0}{dt}\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\varphi_0(x) =$$
$$= \frac{1}{A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_1(x) = \varphi_1(x).$$

Теорему доведено. □

Теорема 3.6. *Нехай для задачі* (3.1), (3.2) $\Delta(\nu) \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}^s$ *і* $A_2(\nu) \not\equiv 0$. *Якщо для ненульового квазіполінома* φ_0 *з* K_N, *де* $N = \{\nu \in \mathbb{C}^s\colon\ A_2(\nu) \neq 0\}$,

на $\mathbb{R}^s$ *справджується тотожність*

$$A_2^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T_1\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)+B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{dT_1}{dt}\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\varphi_0(x)\equiv\varphi_1(x), \tag{3.22}$$

то розв'язок задачі (3.1), (3.2) *у класі* $K_{\mathbb{C},N}$ *існує. Цей розв'язок задачі можна знайти за формулою*

$$U\left(t,x\right)=\varphi_0\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{\frac{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}}{A_2(\nu)}\right\}\Big|_{\nu=O}. \tag{3.23}$$

Доведення. Для доведення теореми треба провести аналогічні міркування, що й при доведенні теореми 3.5. □

Зауважимо, що умова $\left|A_1\left(\nu\right)\right|^2+\left|A_2\left(\nu\right)\right|^2\neq 0$ для всіх $\nu\in\mathbb{C}^s$ справджується, зокрема, якщо $A_1(\nu)=A_1$ або $A_2(\nu)=A_2$, де $A_1,\ A_2\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Теорема 3.7. *Нехай для задачі* (3.1), (3.2) $\Delta(\nu)\equiv 0$ *на* $\mathbb{C}^s$ *і* $A_1(\nu)=A_1\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Якщо на* $\mathbb{R}^s$ *для* $\varphi_0\in A_{p'}$ *справджується тотожність*

$$\left\{B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T_0\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)+B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{dT_0}{dt}\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\varphi_0(x)\equiv A_1\varphi_1(x), \tag{3.24}$$

то розв'язок задачі (3.1), (3.2) *у класі* $\mathbb{A}_{p'}$ *існує. Цей розв'язок задачі можна знайти за формулою*

$$U\left(t,x\right)=\frac{1}{A_1}\varphi_0\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}. \tag{3.25}$$

Доведення. Оскільки $p\in[1;+\infty]$ – порядок цілої функції $T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}$ за сукупністю змінних $\nu_1,\ldots,\nu_s$ і $\varphi_0\in A_{p'}$, то дія $\varphi_0\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)$ на $T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}$ є коректною і після покладання $\nu=O$ визначає цілу функцію з $\mathbb{A}_{p'}$ [27]. Зауважимо, що для цілої функції $\varphi_0\left(x\right)$ з класу $A_{p'}$ диференціальний вираз $\varphi_0\big(\frac{\partial}{\partial\nu}\big)$ визначаємо шляхом заміни у розвиненні цієї функції в ряд Маклорена вектор-змінної x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$.

Те, що функція (3.25) задовольняє рівняння (3.1) та умови (3.2), доводиться аналогічно, як у теоремі 3.5. □

Теорема 3.8. *Нехай для задачі* (3.1), (3.2) $\Delta(\nu) \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}^s$ *і* $A_2(\nu) = A_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Якщо на* $\mathbb{R}^s$ *для ненульової функції* φ_0 *з* $A_{p'}$ *справджується тотожність*

$$\left\{B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T_1\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)+B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{dT_1}{dt}\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}\varphi_0(x)\equiv A_2\varphi_1(x), \tag{3.26}$$

то розв'язок задачі (3.1), (3.2) *у класі* $\mathbb{A}_{p'}$ *існує. Цей розв'язок задачі можна знайти за формулою*

$$U\left(t,x\right)=\frac{1}{A_2}\varphi_0\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}. \tag{3.27}$$

Доведення. Доведення є аналогічним до доведення теореми 3.7. □

Зауваження 3.1. Якщо $A_1(\nu) \not\equiv 0$, $A_2(\nu) \not\equiv 0$ і $\Delta(\nu) \equiv 0$ на $\mathbb{C}^s$, то тотожності (3.20) та (3.22) для $\varphi_0(x)$ з $K_{M\cap N}$ збігаються, а обидві формули (3.21) та (3.23) визначають розв'язки задачі (3.1), (3.2) у класі $K_{\mathbb{C},M\cap N}$, які відрізняються між собою на елементи ядра задачі. Справді, для різниці $V(t,x)$ розв'язків задачі (3.1), (3.2), обчислюваних за формулами (3.21) та (3.23), маємо:

$$\begin{aligned}V\left(t,x\right)&=\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(\frac{T_0(t,\nu)}{A_1(\nu)}-\frac{T_1(t,\nu)}{A_2(\nu)}\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Bigg|_{\nu=O}=\\&=\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{A_2(\nu)T_0(t,\nu)-A_1(\nu)T_1(t,\nu)}{A_1(\nu)A_2(\nu)}e^{\nu\cdot x}\right\}\Bigg|_{\nu=O}=\\&=\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\Big[A_2(\nu)T_0(t,\nu)-A_1(\nu)T_1(t,\nu)\Big]e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O},\end{aligned}$$

де $A_1(\frac{\partial}{\partial x})A_2(\frac{\partial}{\partial x})\psi(x)=\varphi_0(x)$.

У розділі 2 показано, що для довільної ненульової функції $\psi(x)$ з $A_{p'}$ формула

$$V(t,x)=\psi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\Big[A_2(\nu)T_0(t,\nu)-A_1(\nu)T_1(t,\nu)\Big]e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O}$$

визначає нетривіальні елементи ядра задачі (3.1) та (3.2).

Розглянемо деякі приклади двоточкових задач (3.1) та (3.2). На підставі теорем 3.5 – 3.8 встановимо умови розв'язності цих задач та у випадку

існування розв'язків задачі побудуємо їх у класах цілих та неперервно диференційовних функцій за вказаними формулами (3.21) та (3.23), (3.25) та (3.27).

Приклад 3.7. У просторі змінних $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$ дослідимо існування розв'язків задачі

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial t} + 1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2\right] U(t,x) = 0, \tag{3.28}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) U\left(0,x\right) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_0\left(x\right), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right) U\left(\pi,x\right) + \frac{\partial U}{\partial t}(\pi,x) = \varphi_1\left(x\right).\end{gathered} \tag{3.29}$$

∇ Задача (3.28), (3.29) є задачею (3.1), (3.2), в якій $a\left(\nu\right) = \nu_1 + \nu_2$, $b(\nu) = 1 + (\nu_1 + \nu_2)^2$, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $A_1(\nu) = B_1(\nu) = \nu_1 + \nu_2$, $A_2(\nu) = B_2(\nu) = 1$, $h = \pi$, $s = 2$, $p = 1$.

Відповідну однорідну задачу (2.56), (2.57) досліджено у розділі 2 (приклад 2.7). Встановлено, що характеристичний визначник задачі (2.56), (2.57) тотожньо рівний нулю.

Для дослідження розв'язності задачі (3.28), (3.29) у класі $\mathbb{A}_\infty$ застосуємо теорему 3.8, оскільки $A_2(\nu) = 1$.

Тотожність (3.26) набуває вигляду

$$\frac{dT_1}{dt}\left(\pi, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0(x) \equiv \varphi_1(x)$$

або

$$-e^{\left(-\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\pi}\varphi_0(x) \equiv \varphi_1(x),$$

звідки отримуємо умову існування розв'язку задачі (3.28), (3.29):

$$-\varphi_0(x_1 - \pi, x_2 - \pi) \equiv \varphi_1(x_1, x_2). \tag{3.30}$$

Для знаходження розв'язку задачі (3.28), (3.29), (3.30) застосуємо формулу (3.27), яка набуває вигляду

$$U\left(t,x\right) = \varphi_0\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\left\{e^{-(\nu_1+\nu_2)t + \nu\cdot x}\sin t\right\}\Big|_{\nu=O}.$$

З цього зображення за допомогою диференціально-символьного методу отримуємо розв'язок задачі (3.28), (3.29), (3.30) у вигляді

$$U(t,x) = \varphi_0(x_1 - t, x_2 - t)\sin t. \tag{3.31}$$

Зауважимо, що формула (3.31) визначає розв'язок задачі (3.28), (3.29), (3.30) не лише для $\varphi_0 \in A_\infty$, але й для довільної двічі неперервно диференційовної на $\mathbb{R}^2$ функції $\varphi_0(x)$. Відзначимо також, що розв'язок задачі (3.28), (3.29), (3.30) вигляду (3.31) у класі $\mathbb{A}_\infty$ не є єдиним. Сума (3.31) з довільним елементом ядра задачі (3.28), (3.29), тобто розв'язками задачі (2.56), (2.57) вигляду (див. приклад 2.7)

$$U(t,x) = \varphi(x_1 - t, x_2 - t)\cos t,$$

де $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ функція, є також розв'язком задачі (3.28), (3.29), (3.30).

$\triangle$

Приклад 3.8. Дослідимо умови існування розв'язку двоточкової задачі в області змінних $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ для однорідного диференціально-функціонального рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U\left(t, x_1, x_2, x_3\right) + 2\frac{\partial}{\partial t}U\left(t, x_1+3, x_2-1, x_3+1\right) + \\ + U\left(t, x_1, x_2, x_3\right) + U\left(t, x_1+6, x_2-2, x_3+2\right) = 0 \tag{3.32}$$

з неоднорідними локальними умовами

$$U(0,x) + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_1}(0,x) = \varphi_0\left(x\right), \quad U(\pi,x) + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_1}(\pi,x) = \varphi_1\left(x\right). \tag{3.33}$$

∇ Диференціально-функціональне рівняння (3.32) запишемо у вигляді диференціального рівняння нескінченного порядку

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2e^{3\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}}\frac{\partial}{\partial t} + 1 + e^{6\frac{\partial}{\partial x_1} - 2\frac{\partial}{\partial x_2} + 2\frac{\partial}{\partial x_2}}\right] U\left(t,x\right) = 0.$$

Тоді маємо $a\left(\nu\right) = e^{3\nu_1 - \nu_2 + \nu_3}$, $b\left(\nu\right) = 1 + e^{6\nu_1 - 2\nu_2 + 2\nu_3}$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $A_1\left(\nu\right) = B_1\left(\nu\right) = 1$, $A_2\left(\nu\right) = B_2\left(\nu\right) = \nu_1$, $s = 3$, $h = \pi$, $p = \infty$.

Нормальна фундаментальна система в точці $t = 0$ розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2e^{3\nu_1-\nu_2+\nu_3}\frac{d}{dt} + 1 + e^{6\nu_1-2\nu_2+2\nu_3}\right] T\left(t,\nu\right) = 0$$

має вигляд

$$T_0\left(t,\nu\right) = e^{-t\,e^{3\nu_1-\nu_2+\nu_3}}\left[e^{3\nu_1-\nu_2+\nu_3}\sin t + \cos t\right],$$
$$T_1\left(t,\nu\right) = e^{-t\,e^{3\nu_1-\nu_2}}\sin t.$$

Обчислимо характеристичний визначник задачі (3.32), (3.33): $\Delta\left(\nu\right) \equiv 0$ на $\mathbb{C}^3$. Оскільки $A_1(\nu) = 1$, то для дослідження розв'язності задачі (3.32), (3.33) у класі $\mathbb{A}_1$ застосуємо теорему 3.7.

Тотожність (3.24) набуває вигляду

$$T_0\left(\pi, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0(x) \equiv \varphi_1(x)$$

або

$$-e^{-\pi\,e^{3\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}}}\varphi_0(x) \equiv \varphi_1(x). \tag{3.34}$$

Виконання тотожності (3.34) для цілих функцій експоненційного типу φ_0 та φ_1 – це умова існування розв'язку задачі (3.32), (3.33).

Побудуємо розв'язки задачі (3.32), (3.33), (3.34) для цілої функції експоненційного типу $\varphi_0\left(x\right) = e^{x_1+2x_2-x_3}$. Функція $\varphi_1(x)$ згідно з тотожністю (3.34) має вигляд

$$\varphi_1(x) = -e^{-\pi\,e^{3\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}}}e^{x_1+2x_2-x_3} = -e^{x_1+2x_2-x_3-\pi}.$$

Розв'язок задачі (3.32), (3.33), (3.34) знаходимо за формулою (3.25):

$$U\left(t,x\right) = \frac{1}{A_1}e^{\frac{\partial}{\partial\nu_1}+2\frac{\partial}{\partial\nu_2}-\frac{\partial}{\partial\nu_3}}\left\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} =$$
$$= T_0\left(t,1,2,-1\right)e^{x_1+2x_2-x_3} = e^{x_1+2x_2-x_3-t}\left(\sin t + \cos t\right).$$

Оскільки $\varphi_0(x)$ є квазіполіномом з класу $K_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$, то розв'язок задачі (3.32), (3.33), (3.34) можна знайти також за формулою (3.23):

$$U\left(t,x\right) = e^{\frac{\partial}{\partial\nu_1}+2\frac{\partial}{\partial\nu_2}-\frac{\partial}{\partial\nu_3}}\left\{\frac{T_1\left(t,\nu\right)}{\nu_1}e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=O} =$$

$$= T_1\left(t,1,2,-1\right)e^{x_1+2x_2-x_3} = e^{x_1+2x_2-x_3-t}\sin t.$$

Зауважимо, що різниця знайдених розв'яків задачі (3.32), (3.33), (3.34), у якій $\varphi_0\left(x\right) = e^{x_1+2x_2-x_3}$, є функція вигляду

$$U(t,x) = e^{x_1+2x_2-x_3-t}\cos t,$$

яка належить до ядра задачі (3.32), (3.33).

Розглянемо ще один випадок, коли $\varphi_0\left(x\right) = 1+2x_1-x_2$. Згідно з умовою існування розв'яку задачі (3.32), (3.33) знайдемо вигляд функції $\varphi_1\left(x\right)$:

$$\varphi_1\left(x\right) = -e^{-\pi e^{3\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}}}\varphi_0\left(x\right) = \Big\{(-e^{-\pi e^{3\nu_1-\nu_2+\nu_3}})\Big|_{\nu=O}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\nu_1}(-e^{-\pi e^{3\nu_1-\nu_2+\nu_3}})\Big|_{\nu=O}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial\nu_2}(-e^{-\pi e^{3\nu_1-\nu_2+\nu_3}})\Big|_{\nu=O}\frac{\partial}{\partial x_2}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\nu_3}(-e^{-\pi e^{3\nu_1-\nu_2+\nu_3}})\Big|_{\nu=O}\frac{\partial}{\partial x_3}+\dots\Big\}\varphi_0(x) =$$

$$= -e^{-\pi}\Big\{1-3\pi\frac{\partial}{\partial x_1}+\pi\frac{\partial}{\partial x_2}-\pi\frac{\partial}{\partial x_3}+\dots\Big\}(1+2x_1-x_2) = -e^{-\pi}(1+2x_1-x_2-7\pi).$$

Розв'язок задачі (3.32), (3.33), у якій $\varphi_0\left(x\right) = 1+2x_1-x_2$, $\varphi_1\left(x\right) = -e^{-\pi}(1+2x_1-x_2-7\pi)$ знайдемо за формулою (3.25):

$$U\left(t,x\right) = \left(1+2\frac{\partial}{\partial\nu_1}-\frac{\partial}{\partial\nu_2}\right)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O} =$$

$$= (1+2x_1-x_2)T_0(t,O)+2\frac{\partial T_0}{\partial\nu_1}(t,O)-\frac{\partial T_0}{\partial\nu_2}(t,O) =$$

$$= e^{-t}\Big[(8+2x_1-x_2-7t)\sin t+(1+2x_1-x_2-7t)\cos t\Big].$$

Зауважимо, що формула (3.27) для знаходження розв'язку задачі (3.32), (3.33) у випадку поліномного вигляду $\varphi_0(x)$ є незастосовною. △

Приклад 3.9. Дослідимо розв'язність задачі:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}+4+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]U(t,x) = 0,\quad (t,x)\in\mathbb{R}^2, \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{\partial}{\partial x}\right)U(0,x)+\left(1+\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_0\left(x\right),\\&\left(1-\frac{\partial}{\partial x}\right)U(\pi,x)+\left(1+\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t}(\pi,x) = \varphi_1\left(x\right),\quad x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

∇ Дана задача є задачею (3.1), (3.2), в якій $a(\nu) = \nu$, $b(\nu) = 4 + \nu^2$, $A_1(\nu) = B_1(\nu) = 1 - \nu$, $A_2(\nu) = B_2(\nu) = 1 + \nu$, $s = 1$, $h = \pi$, $p = 1$.

Нормальна фундаментальна система розв'язків в точці $t = 0$ звичайного диференціального рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\nu\frac{d}{dt} + 4 + \nu^2\right] T(t,\nu) = 0$$

має вигляд

$$T_0(t,\nu) = e^{-\nu t}\left\{\nu\,\frac{\sin[2t]}{2} + \cos[2t]\right\},\ T_1(t,\nu) = e^{-\nu t}\,\frac{\sin[2t]}{2}.$$

Характеристичний визначник задачі (3.35), (3.36) є тотожним нулем. З'ясуємо умови існування розв'язку задачі відповідно до теорем 3.5 та 3.6.

Тотожності (3.20) та (3.22) збігаються і мають такий вигляд:

$$e^{-\pi\frac{d}{dx}}\varphi_0(x) \equiv \varphi_1(x).$$

Отже, розв'язок задачі (3.35), (3.36) існує, якщо справджується умова

$$\varphi_0(x - \pi) \equiv \varphi_1(x). \tag{3.37}$$

Розв'язок задачі (3.35), (3.36), (3.37) можна знаходити за формулами (3.21) та (3.23), які набувають вигляду

$$U(t,x) = \varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{T_0(t,\nu)e^{\nu x}}{1-\nu}\right\}\Bigg|_{\nu=0}, \tag{3.38}$$

$$U(t,x) = \varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{T_1(t,\nu)e^{\nu x}}{1+\nu}\right\}\Bigg|_{\nu=0}. \tag{3.39}$$

При цьому формули (3.38) та (3.39) є застосовними для $\varphi_0 \in K_{\mathbb{C}\setminus\{1\}}$ та $\varphi_0 \in K_{\mathbb{C}\setminus\{-1\}}$ відповідно.

Якщо, наприклад, $\varphi_0(x) = x$ за формулами (3.38) та (3.39) відповідно знаходимо такі розв'язки задачі (3.35), (3.36), (3.37):

$$U_1(t,x) = xT_0(t,0) + \frac{\partial T_0}{\partial\nu}(t,0) + T_0(t,0) = (x + 1 - t)\cos[2t] + \frac{\sin[2t]}{2},$$

$$U_2(t,x) = xT_1(t,0) + \frac{\partial T_1}{\partial \nu}(t,0) - T_1(t,0) = (x-1-t)\frac{\sin[2t]}{2}.$$

Зауважимо, що різниця знайдених розв'язків

$$U_1(t,x) - U_2(t,x) = (x+1-t)\cos[2t] - (x-2-t)\frac{\sin[2t]}{2}$$

є елементом ядра задачі (3.35), (3.36). $\triangle$

Розглянемо випадок, коли в умовах (3.2) $\varphi_0, \varphi_1 \in K_M$ і множина M є непорожньою і не збігається з $\mathbb{C}^s$. У цьому разі умови існування і єдиності розв'язку задачі (3.1), (3.2), сформульовані у теоремі 3.2, не виконуються. Виявляється все ж, що розв'язок задачі (3.1), (3.2) існує, але не є єдиним у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},M}$, оскільки задача згідно з теоремами 2.2, 2.3, 2.4 має нетривіальне ядро.

Якщо $\varphi_0, \varphi_1 \in K_M$, то з використанням елементів ядра задачі можна вказати нові формули, відмінні від (3.5), за допомогою яких будуть знаходитися розв'язки задачі. Покажемо це на конкретних прикладах.

Приклад 3.10. Розглянемо двоточкову задачу (3.13), у якій

$$\varphi_0(x) = 1, \;\; \varphi_1(x) = e^{x_1+2x_2}.$$

∇ Оскільки $\varphi_0, \varphi_1 \notin K_{\mathbb{C}^3\setminus M}$, де $M = \left\{\nu \in \mathbb{C}^3\colon \;\; \nu_3 = 0\right\}$, то формула (3.5), очевидно, є непридатною. Цю формулу будемо „підправляти" розв'язками відповідної однорідної задачі – задачі (2.59) (випадок 3 прикладу 2.8 розділу 2), зокрема, функціями вигляду

$$\Phi_1(t,x,\nu) = c_1(\nu)(1-t)e^{\nu_1\nu_2 t + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2},$$

$$\Phi_2(t,x,\nu) = c_2(\nu)(1-t)e^{\nu_1\nu_2 (t-1) + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2},$$

які одержуються з функції (2.60) при $\varphi = c_1(\nu)$ та $\varphi = c_2(\nu)e^{-\nu_1\nu_2}$ відповідно. За рахунок цих елементів ядра задачі можна запропонувати таку формулу для знаходження розв'язку задачі (3.13) у випадку $\varphi_0, \varphi_1 \in K_M$:

$$U(t,x) = (1-t)\,\varphi_0\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{e^{\nu_1\nu_2 t + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2}\frac{e^{-\nu_3 t + \nu_3 x_3} - 1}{\nu_3}\right\}\Bigg|_{\nu = O} +$$

$$+\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu_1\nu_2(t-1)+\nu_1x_1+\nu_2x_2}\frac{e^{-\nu_3(t-1)+\nu_3x_3}\left[(\nu_3+1)t-1\right]-(t-1)}{\nu_3}\right\}\Bigg|_{\nu=O}.$$

Зокрема, для $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=e^{x_1+2x_2}$ знаходимо

$$U(t,x)=(1-t)\left\{e^{\nu_1\nu_2t+\nu_1x_1+\nu_2x_2}\frac{e^{-\nu_3t+\nu_3x_3}-1}{\nu_3}\right\}\Bigg|_{\nu=O}+$$

$$+\left\{e^{\nu_1\nu_2(t-1)+\nu_1x_1+\nu_2x_2}\frac{e^{-\nu_3(t-1)+\nu_3x_3}\left[(\nu_3+1)t-1\right]-(t-1)}{\nu_3}\right\}\Bigg|_{\nu_1=1,\nu_2=2,\nu_3=0}=$$

$$=(1-t)\lim_{\nu_3\to0}\frac{e^{-\nu_3t+\nu_3x_3}-1}{\nu_3}+$$

$$+e^{2(t-1)+x_1+2x_2}\lim_{\nu_3\to0}\frac{e^{-\nu_3(t-1)+\nu_3x_3}\left[(\nu_3+1)t-1\right]-(t-1)}{\nu_3}=$$

$$=(1-t)(x_3-t)+e^{2(t-1)+x_1+2x_2}\Big\{t+(t-1)(x_3-t+1)\Big\}.$$

Зауважимо, що знайдений розв'язок задачі не є єдиним, оскільки у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},M}$ існують нетривіальні елементи ядра задачі, наприклад, вигляду $U(t,x)=A(1-t)$, де $A\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ (див. приклад 2.8), тобто розв'язками задачі (3.13), в якій $\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=e^{x_1+2x_2}$ у класі $K_{\mathbb{C},M}$ також є однопараметрична множина функцій

$$U(t,x)=(1-t)(A+x_3-t)+e^{2(t-1)+x_1+2x_2}\Big\{t+(t-1)(x_3-t+1)\Big\},$$

де $A\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. $\triangle$

Висновки до розділу 3

У розділі доведено, що задача для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано неоднорідні локальні двоточкові умови, та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними може не мати розв'язку, якщо характеристичний визначник задачі $\Delta(\nu)$ тотожно дорівнює нулеві. В іншому випадку виділено класи цілих функцій як класи існування та єдиності розв'язку задачі, а також запропоновано диференціально-символьний метод побудови

розв'язку. У класах існування розв'язків задачі запропоновано формули для знаходження цих розв'язків. Подано приклади застосування методу.

Основні результати, подані в даному розділі, опубліковано в працях [66, 68, 128], а також додатково висвітлено в [131].

РОЗДІЛ 4
ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ З ОДНОРІДНИМИ УМОВАМИ

У цьому розділі досліджено розв'язність задачі для неоднорідного рівняння з частинними похідними другого порядку за часовою змінною та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з однорідними локальними двоточковими умовами. У класах цілих функцій встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі. Знайдено також умови існування та неіснування розв'язку задачі залежно від множини нулів характеристичного визначника. У випадку існування розв'язків задачі запропоновано диференціально-символьний метод їх побудови.

4.1. Формулювання задачі.

У просторі $\mathbb{R}^{1+s}$, де $s \in \mathbb{N}$, змінних t та $x = (x_1, \ldots, x_s)$ дослідимо розв'язність двоточкової задачі

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\,a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t} + b\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U = f(t,x), \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} &l_{0\partial}U(t,x) \equiv A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x) + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \\ &l_{1\partial}U(t,x) \equiv B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x) + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0, \quad h > 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

У рівнянні (4.1) $f(t,x)$ – задана ціла ненульова функція.

4.2. Однозначна розв'язність задачі у класі цілих функцій

Якщо для довільного $\nu \in \mathbb{C}^s$ виконується умова $\Delta(\nu) \neq 0$, то функції $\widetilde{T}_0(t,\nu)$ та $\widetilde{T}_1(t,\nu)$ визначаються однозначно і мають вигляд

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_0(t,\nu) = \frac{e^{-a(\nu)(t+h)}}{\Delta(\nu)} \Bigg[\Big(B_1(\nu) - a(\nu)B_2(\nu)\Big) \frac{\sinh\left[(h-t)\,D(\nu)\right]}{D(\nu)} + \\
+ B_2(\nu)\cosh\left[(h-t)\,D(\nu)\right] \Bigg], \\
\widetilde{T}_1(t,\nu) = \frac{e^{-a(\nu)t}}{\Delta(\nu)} \Bigg[\Big(A_1(\nu) - a(\nu)A_2(\nu)\Big) \frac{\sinh\left[tD(\nu)\right]}{D(\nu)} - \\
- A_2(\nu)\cosh\left[tD(\nu)\right] \Bigg],
\end{aligned} \tag{4.3}$$

де $D(\nu) = \sqrt{a^2(\nu) - b(\nu)}$.

Розглянемо функцію

$$G(t,\lambda,\nu) = \frac{e^{\lambda t} - T_0(t,\nu) - \lambda T_1(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)}, \tag{4.4}$$

яка є розв'язком задачі Коші

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right) G = e^{\lambda t},$$

$$G\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,$$

а тому є цілою [104] за параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ та вектор-параметром $\nu \in \mathbb{C}^s$.

Поряд з функцією (4.4) розглянемо ще одну функцію вигляду

$$\begin{aligned}
F(t,\lambda,\nu) = \\
= \frac{e^{\lambda t} - \left[A_1(\nu) + \lambda A_2(\nu)\right]\widetilde{T}_0(t,\nu) - \left[B_1(\nu) + \lambda B_2(\nu)\right] e^{\lambda h}\widetilde{T}_1(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

де $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$ – функції (4.3).

Лема 4.1. *Для функції* (4.5) *правильним є таке зображення:*

$$F\left(t,\lambda,\nu\right)=G\left(t,\lambda,\nu\right)-$$
$$-\left\{B_1(\nu)G\left(h,\lambda,\nu\right)+B_2(\nu)\frac{\partial G}{\partial t}\left(h,\lambda,\nu\right)\right\}\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right). \quad (4.6)$$

Доведення. Зі співвідношень (3.4) знаходимо

$$\begin{aligned} T_0\left(t,\nu\right)&=A_1(\nu)\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right)+d_0(h,\nu)\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right),\\ T_1\left(t,\nu\right)&=A_2(\nu)\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right)+d_1(h,\nu)\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тоді маємо

$$\left(A_1(\nu)+\lambda A_2(\nu)\right)\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right)=$$
$$=T_0\left(t,\nu\right)+\lambda T_1\left(t,\nu\right)-\Big[d_0(h,\nu)+\lambda d_1(h,\nu)\Big]\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right).$$

Використовуючи останню рівність, зробимо наступні перетворення над $F\left(t,\lambda,\nu\right)$:

$$F(t,\lambda,\nu)=\frac{1}{L(\lambda,\nu)}\Big\{e^{\lambda t}-T_0(t,\nu)-\lambda T_1(t,\nu)+$$
$$+\Big[d_0(h,\nu)+\lambda d_1(h,\nu)\Big]\widetilde{T}_1(t,\nu)-\left[B_1(\nu)+\lambda B_2(\nu)\right]e^{\lambda h}\widetilde{T}_1(t,\nu)\Big\}=$$
$$=G(t,\lambda,\nu)-\frac{1}{L(\lambda,\nu)}\Big\{B_1(\nu)\left[e^{\lambda h}-T_0(h,\nu)-\lambda T_1(h,\nu)\right]+$$
$$+B_2(\nu)\left[\lambda e^{\lambda h}-\frac{\partial T_0}{\partial t}(h,\nu)-\lambda\frac{\partial T_1}{\partial t}(h,\nu)\right]\Big\}\widetilde{T}_1(t,\nu)=$$
$$=G\left(t,\lambda,\nu\right)-\left\{B_1(\nu)G\left(h,\lambda,\nu\right)+B_2(\nu)\frac{\partial G}{\partial t}\left(h,\lambda,\nu\right)\right\}\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right).$$

Лему доведено. □

Лема 4.2. *Функція $F\left(t,\lambda,\nu\right)$ є квазіполіномом за t та цілою за параметром λ та вектор-параметром ν.*

Доведення. Функції $\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right)$ та $\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)$ є квазіполіномами за t, тому із зображення (4.6) випливає, що $F\left(t,\lambda,\nu\right)$ є також квазіполіномом за цією ж змінною.

З вигляду (4.5) для функції $F(t,\lambda,\nu)$ і того, що $\widetilde{T}_0(t,\nu)$, $\widetilde{T}_1(t,\nu)$ та $G(t,\lambda,\nu)$ є цілими за параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ та вектор-параметром $\nu \in \mathbb{C}^s$ відповідно, випливає, що $F(t,\lambda,\nu)$ є також цілою за параметром λ та вектор-параметром $\nu \in \mathbb{C}^s$.

Лему доведено. □

Нехай $p \in [1;+\infty]$ – порядок цілої функції $F(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}$ за сукупністю змінних $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$.

Теорема 4.1. *Якщо $f \in \mathbb{A}_{p'}$ і для довільного $\nu \in \mathbb{C}^s$ виконується умова $\Delta(\nu) \neq 0$, то у класі $\mathbb{A}_{p'}$ існує єдиний розв'язок задачі* (4.1), (4.2). *Цей розв'язок можна подати у вигляді*

$$U(t,x) = f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{F(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}, \tag{4.8}$$

де $F(t,\lambda,\nu)$ – функція (4.5).

Доведення. Нехай $f(t,x)$ – ціла функція, що належить до класу $\mathbb{A}_{p'}$. Визначимо диференціальний вираз $f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ як диференціальний вираз загалом нескінченного порядку через відповідний ряд Маклорена, замінюючи у розвиненні функції $f(t,x)$ змінну t та вектор-змінну x відповідно на $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ та $\frac{\partial}{\partial\nu}$. Тоді вираз (4.8) є рядом, що визначає цілу функцію $U(t,x)$, яка для кожного фіксованого t є цілою функцією класу $A_{p'}$ [27], тобто $U(t,x)$ належить до класу $\mathbb{A}_{p'}$. Таке твердження випливає з того, що функція $F(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}$, на яку діє диференціальний вираз, є цілою першого порядку за λ та порядку p за сукупністю змінних $\nu_1,\ldots,\nu_s$.

Покажемо, що ціла функція (4.8) задовольняє рівняння (4.1):

$$\begin{aligned}
&L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x) = \\
&= L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right) f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{F(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} = \\
&= f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right) L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{F(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} = \\
&= f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x} L\left(\frac{d}{dt},\nu\right) F(t,\lambda,\nu)\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}.
\end{aligned}$$

Оскільки функції (3.4) задовольняють рівняння (3.3), то

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)F\left(t,\lambda,\nu\right)=$$
$$=L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\frac{1}{L\left(\lambda,\nu\right)}\Big\{e^{\lambda t}-\big(A_1(\nu)+\lambda A_2(\nu)\big)\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right)-$$
$$-\big(B_1(\nu)+\lambda B_2(\nu)\big)e^{\lambda h}\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)\Big\}=$$
$$=\frac{1}{L\left(\lambda,\nu\right)}\left\{L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)e^{\lambda t}-\big(A_1(\nu)+\lambda A_2(\nu)\big)L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\widetilde{T}_0\left(t,\nu\right)-\right.$$
$$\left.-\big(B_1(\nu)+\lambda B_2(\nu)\big)e^{\lambda h}L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\widetilde{T}_1\left(t,\nu\right)\right\}=$$
$$=\frac{1}{L\left(\lambda,\nu\right)}L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)e^{\lambda t}=e^{\lambda t}.$$

Отже, маємо

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U\left(t,x\right)=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\lambda t+\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}=f\left(t,x\right).$$

Покажемо, що функція (4.8) справджує умови (4.2). Використаємо для цього такі властивості функції $F(t,\lambda,\nu)$:

$$A_1(\nu)F(0,\lambda,\nu)+A_2(\nu)\frac{\partial F}{\partial t}(0,\lambda,\nu)\equiv 0,$$

$$B_1(\nu)F(h,\lambda,\nu)+B_2(\nu)\frac{\partial F}{\partial t}(h,\lambda,\nu)\equiv 0,$$

які перевіряються безпосередньо.

Маємо

$$l_{0\partial}U(t,x)=A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{F\left(0,\lambda,\nu\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}+$$
$$+A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial t}\left(0,\lambda,\nu\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}=$$
$$=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}A_1(\nu)F\left(0,\lambda,\nu\right)\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}+$$
$$+f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}A_2(\nu)\frac{\partial F}{\partial t}\left(0,\lambda,\nu\right)\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}=$$

$$= f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}\left[A_1(\nu)F(0,\lambda,\nu) + A_2(\nu)\frac{\partial F}{\partial t}(0,\lambda,\nu)\right]\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} \equiv 0.$$

Аналогічно доводиться, що функція (4.8) задовольняє умови (4.2) в точці $t = h$.

У класі $\mathbb{A}_{p'}$ немає інших розв'язків задачі (4.1), (4.2), окрім розв'язку (4.8), оскільки у випадку $\Delta(\nu) \neq 0\ \forall\nu \in \mathbb{C}^s$ відповідна однорідна задача в $\mathbb{A}_{p'}$ згідно з теоремою 2.1 має лише тривіальний розв'язок.

□

Приклад 4.1. Знайти розв'язок двоточкової задачі

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_3\right]^2 U(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^4, \\ \big(2 - \Delta_3\big)U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad U(1,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.\end{gathered} \tag{4.9}$$

▽ Задача (4.9) є задачею (4.1), (4.2), у якій $a(\nu) = -||\nu||^2 \equiv -(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)$, $b(\nu) = a^2(\nu)$, $A_1(\nu) = 2 - ||\nu||^2$, $A_2(\nu) = B_1(\nu) = 1$, $B_2(\nu) = 0$, $h = 1,\ s = 3,\ p = 2$.

Характеристичний визначник задачі (4.9), функції (3.4) та (4.5) мають вигляд:

$$\Delta(\nu) = e^{||\nu||^2},$$

$$\widetilde{T}_0(t,\nu) = (1-t)e^{||\nu||^2 t}, \quad \widetilde{T}_1(t,\nu) = (2t-1)e^{||\nu||^2(t-1)}.$$

$$F(t,\lambda,\nu) = \frac{e^{\lambda t} - \left(2 + \lambda - \|\nu\|^2\right)(1-t)\,e^{\|\nu\|^2 t} - e^{\lambda}\,(2t-1)\,e^{\|\nu\|^2(t-1)}}{\left(\lambda - \|\nu\|^2\right)^2}. \tag{4.10}$$

Функція (4.10) є цілою за λ першого порядку та порядку $p = 2$ за сукупністю параметрів ν_1, ν_2, ν_3. Якщо $f \in \mathbb{A}_2$, то за теоремою 4.1 у класі $\mathbb{A}_2$ існує єдиний розв'язок задачі (4.9), який можна подати у вигляді (4.8), де $F(t,\lambda,\nu)$ – функція (4.10).

Зокрема, для функції вигляду $f(t,x) = te^{x_1}$ з класу $\mathbb{A}_2$ за формулою (4.8) знаходимо:

$$U(t,x) = \frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\frac{\partial}{\partial\nu_1}}\left\{F(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} = \frac{\partial F}{\partial\lambda}(t,0,1,0,0)e^{x_1} =$$

$$= \left[2 + t - 3(1-t)e^t - 3\,(2t-1)\,e^{t-1}\right] e^{x_1}.$$

Розв'язок задачі (4.9) за теоремою 4.1 у класі $\mathbb{A}_2$ є єдиним. $\triangle$

4.3. Класи квазіполіномів як класи однозначної розв'язності задачі

Встановимо однозначну розв'язність задачі (4.1), (4.2) у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},\,L}$ для деякої підмножини L ($L \neq \varnothing$, $L \neq \mathbb{C}^s$) з простору $\mathbb{C}^s$.

Зауваження 4.1. Кожному квазіполіному $f \in K_{\mathbb{C},\,L}$ вигляду

$$f(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} f_{kj}\,(t,x)\,e^{\beta_k t + \alpha_j \cdot x}, \quad m, N \in \mathbb{N}, \tag{4.11}$$

можна поставити у відповідність диференціальний вираз нескінченного порядку $f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, що діє на цілу функцію $\Gamma(\lambda,\nu)$ за формулою

$$f\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Gamma(\lambda,\nu) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} f_{kj}\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Gamma(\lambda+\beta_k, \nu+\alpha_j). \tag{4.12}$$

Теорема 4.2. *Нехай $f \in K_{\mathbb{C},\,L}$, де $L = \mathbb{C}^s \backslash M$, а M – множина* (2.12), *причому $M \neq \mathbb{C}^s$ і $M \neq \varnothing$. Тоді у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},\,L}$ існує єдиний розв'язок задачі* (4.1), (4.2). *Цей розв'язок можна подати у вигляді* (4.8), *де $F\,(t,\lambda,\nu)$ – функція* (4.5).

Доведення. Нехай $f \in K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^s\backslash M}$ і має вигляд (4.11). Тоді згідно з формулами (4.8) та (4.12) маємо:

$$U(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} f_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right) e^{\beta_k \frac{\partial}{\partial\lambda} + \alpha_j \cdot \frac{\partial}{\partial\nu}} \Big\{F(t,\lambda,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Bigg|_{\lambda=0,\,\nu=O} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} f_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right) \Big\{F(t,\lambda,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Bigg|_{\lambda=\beta_k,\,\nu=\alpha_j}.$$

З останнього зображення випливає, що $U \in K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^s\backslash M}$.

Аналогічно як у теоремі 4.1 доводиться, що функція (4.8) задовольняє рівняння (4.1) та умови (4.2).

Знайдений розв'язок задачі (4.1), (4.2) у класі $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^s\setminus M}$ є єдиним, оскільки у випадку $\Delta(\nu) \neq 0\ \forall \nu \in \mathbb{C}^s\setminus M$ відповідна однорідна задача згідно з теоремою 2.1 має в $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}^s\setminus M}$ лише тривіальний розв'язок. $\square$

Приклад 4.2. В області $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ розв'язати двоточкову задачу для диференціально-функціонального рівняння

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(t,x_1,x_2) + 2\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x_1}(t,x_1,x_2) + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(t,x_1,x_2+1) = e^{t+x_1},\\ \frac{\partial U}{\partial x_1}(0,x_1,x_2) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x_1,x_2) = 0, \quad U(1,x_1,x_2) = 0.\end{gathered} \tag{4.13}$$

$\triangledown$ Задача (4.13) є задачею (4.1), (4.2), у якій $a(\nu) = \nu_1$, $b(\nu) = \nu_1^2 e^{\nu_2}$, $s = 2$, $h = 1$, $A_1(\nu) = \nu_1$, $A_2(\nu) = 1$, $B_1(\nu) = 1$, $B_2(\nu) = 0$, $f(t,x) = e^{t+x_1}$.

Характеристичний визначник задачі (4.13), множина M, функції (3.4) та (4.10) матимуть вигляд:

$$\begin{gathered}\Delta(\nu) = -e^{-\nu_1}\cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right],\\ M = \left\{\nu \in \mathbb{C}^2\colon\ \nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}} = \left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right) i,\ k \in \mathbb{Z}\right\},\\ \widetilde{T}_0(t,\nu) = -e^{-\nu_1 t}\frac{\sinh\left[\nu_1(1-t)\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]}{\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]},\\ \widetilde{T}_1(t,\nu) = e^{-\nu_1(t-1)}\frac{\cosh\left[\nu_1 t\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]}{\cosh\left[\nu_1\sqrt{1-e^{\nu_2}}\,\right]},\\ F(t,\lambda,\nu) = \frac{e^{\lambda t} - (\nu_1+\lambda)\,\widetilde{T}_0(t,\nu) - e^{\lambda}\widetilde{T}_1(t,\nu)}{\lambda^2 + 2\lambda\nu_1 + e^{\nu_2}\nu_1^2}.\end{gathered} \tag{4.14}$$

Оскільки $f(t,x) = e^{t+x_1}$ є квазіполіномом вигляду (4.11), у якому $m = 1$, $N = 1$, $f_{11}(t,x) = 1$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_1 = (1,0)$ і α_1 не належить до множини (4.14) ($\Delta(\alpha_1) = -e^{-1}$), то за формулою (4.8) обчислюємо:

$$\begin{gathered}U(t,x) = e^{\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{\partial}{\partial\nu_1}}\left\{F(t,\lambda,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\ \nu=O} = F(t,1,1,0)e^{x_1} =\\ = \frac{1}{4}\left(e^t - 2\widetilde{T}_0(t,1,0) - e\widetilde{T}_1(t,1,0)\right)e^{x_1} =\\ = \frac{1}{4}\left(e^t + 2e^{-t}(1-t) - e^{2-t}\right)e^{x_1}.\end{gathered}$$

Отже, знайдено розв'язок задачі (4.13) вигляду

$$U(t,x) = \frac{1}{4}\left(e^{t} + 2e^{-t}(1-t) - e^{2-t}\right)e^{x_1},$$

який є єдиним за теоремою 4.2 у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^2\setminus M}$, де M – множина (4.14). $\triangle$

У випадку однієї просторової змінної $s = 1$ вкажемо ще один клас однозначної розв'язності задачі (4.1), (4.2).

Теорема 4.3. *Нехай* $r = \inf\limits_{\nu\in M}|\nu|$, *де* M *– множина* (2.12) *при* $s = 1$, *причому* $r > 0$, *тобто* $\Delta(0) \neq 0$. *Якщо* $f \in \mathbb{A}_{1,r}$, *то у класі функцій* $\mathbb{A}_{1,r}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (4.1), (4.2), *який можна подати у вигляді* (4.8).

Доведення. Згідно з лемою 4.2 функція $F(t,\lambda,\nu)$ є цілою за λ першого порядку, мероморфною за ν та аналітичною в крузі $K_r = \left\{\nu \in \mathbb{C}\colon\ |\nu| < r\right\}$, оскільки $\Delta(\nu) \neq 0$ для $\nu \in K_r$. Тоді дія диференціального виразу загалом нескінченного порядку $f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, визначеного рядом Маклорена для цілої функції $f(t,x)$ заміною t і x відповідно на $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ та $\frac{\partial}{\partial\nu}$, на $F(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu x}$ є коректною, якщо $f \in \mathbb{A}_{1,r}$ [76]. Результатом такої дії після покладання $\lambda = 0$ та $\nu = 0$ є функція $U(t,x)$, яка є квазіполіномом за змінною t і цілою з класу $A_{1,r}$ за змінною x, тобто $U \in \mathbb{A}_{1,r}$.

Аналогічно як у теоремі 4.1 доводиться, що функція (4.8) задовольняє рівняння (4.1) та умови (4.2).

У класі $\mathbb{A}_{1,r}$ інших розв'язків задачі (4.1), (4.2), крім (4.8), немає, оскільки $\Delta(\nu) \neq 0$ для $\nu \in K_r$ і відповідна однорідна двоточкова задача у класі $\mathbb{A}_{1,r}$ згідно з теоремою 2.2 має лише тривіальний розв'язок.

Теорему доведено. $\square$

Приклад 4.3. Розглянемо двоточкову задачу

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\right]U(t,x) = e^{-\frac{t+x}{2}}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2,\\ U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad U(\pi,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(\pi,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.\end{gathered} \tag{4.15}$$

$\triangledown$ Для задачі (4.15) як задачі (4.1), (4.2) маємо: $a(\nu)=0$, $b(\nu)=-\nu^2+\frac{1}{4}$, $A_1(\nu)=A_2(\nu)=B_1(\nu)=B_2(\nu)=1$, $h=\pi$.

$$\Delta(\nu)=\frac{\sinh\left[\pi\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}}\Big(\frac{5}{4}-\nu^2\Big),\quad \Delta(0)=\frac{5}{8},\quad r=\inf_{\nu\in M}|\nu|=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\widetilde{T}_0(t,\nu)=\frac{1}{\Delta(\nu)}\left\{\frac{\sinh\left[(\pi-t)\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}}+\cosh\left[(\pi-t)\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}\right]\right\},$$

$$\widetilde{T}_1(t,\nu)=\frac{1}{\Delta(\nu)}\left\{\frac{\sinh\left[t\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}\right]}{\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}}-\cosh\left[t\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}\right]\right\},$$

$$F(t,\lambda,\nu)=\frac{e^{\lambda t}-(1+\lambda)\widetilde{T}_0(t,\nu)-(1+\lambda)e^{\pi\lambda}\widetilde{T}_1(t,\nu)}{\lambda^2-\nu^2+\frac{1}{4}}.$$

Оскільки функція $f(t,x)=e^{-\frac{t+x}{2}}$ належить до $\mathbb{A}_{1,\sqrt{3}/2}$, то згідно з теоремою 4.3 у класі цілих функцій $\mathbb{A}_{1,\sqrt{3}/2}$ існує єдиний розв'язок задачі (4.15) і його знаходимо за формулою (4.8):

$$U(t,x)=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{\partial}{\partial\nu}\right)}\Big\{F(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu x}\Big\}\Big|_{\lambda=\nu=0}=$$

$$=F\Big(t,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\Big)e^{-\frac{1}{2}x}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}t}-(1-\frac{1}{2})\widetilde{T}_0\left(t,-\frac{1}{2}\right)-(1-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}\pi}\widetilde{T}_1\left(t,-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}x}=$$

$$=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\Big\{e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\pi}(\pi-t+1)-\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}}(t-1)\Big\}.$$

Отже, знайдений розв'язок задачі (4.15)

$$U(t,x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\Big\{e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\pi}(\pi-t+1)-\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}}(t-1)\Big\}$$

у класі цілих функцій $\mathbb{A}_{1,\sqrt{3}/2}$ є єдиним. $\triangle$

4.4. Умови існування та неіснування розв'язків задачі

Теорема 4.4. *Нехай для двоточкової задачі* (4.1), (4.2) *виконуються умови:*

1) $\Delta(\nu) \equiv 0$ *на* $\mathbb{C}^s$,

2) $\exists x \in \mathbb{R}^s$ *таке, що для* $f \in \mathbb{A}_{p'}$ *справджується хоча б одна з нерівностей:*

$$f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(B_1(\nu)G(h,\lambda,\nu)+B_2(\nu)\frac{\partial G}{\partial t}(h,\lambda,\nu)\right)A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} \not\equiv 0,$$

$$f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(B_1(\nu)G(h,\lambda,\nu)+B_2(\nu)\frac{\partial G}{\partial t}(h,\lambda,\nu)\right)A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} \not\equiv 0, \tag{4.16}$$

тоді розв'язок задачі (4.1), (4.2) *у класі* $\mathbb{A}_{p'}$ *не існує.*

Доведення. Припустимо, що існує цілий розв'язок $U(t,x)$ з класу $\mathbb{A}_{p'}$ задачі (4.1), (4.2). Позначимо $U(0,x) = \varphi_0(x)$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \varphi_1(x)$. Функції $\varphi_0(x)$ та $\varphi_1(x)$ належать до класу $A_{p'}$.

Подамо функцію $U(t,x)$ згідно з диференціально-символьним методом [34] як розв'язок задачі Коші з початковими умовами $\varphi_0(x)$ та $\varphi_1(x)$ та правою частиною рівняння $f(t,x)$ у вигляді

$$U(t,x) = f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{G(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} + \\ + \sum_{j=0}^{1}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{T_j(t,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}. \tag{4.17}$$

З того, що функція (4.17) задовольняє умови (4.2), маємо $l_{0\partial}U(t,x) \equiv 0$. Оскільки $G(0,\lambda,\nu) = \frac{\partial G}{\partial t}(0,\lambda,\nu) = 0$, то підставивши функцію (4.17) в першу умову з (4.2), отримаємо

$$A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0(x) + A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_1(x) \equiv 0.$$

З другої умови (4.2) маємо

$$B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{G\left(h,\lambda,\nu\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\nu=O}+$$

$$+B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\partial G}{\partial t}\left(h,\lambda,\nu\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\nu=O}+$$

$$+B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T_0\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0\left(x\right)+B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{dT_0}{dt}\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0\left(x\right)+$$

$$+B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)T_1\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_1\left(x\right)+B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{dT_1}{dt}\left(h,\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_1\left(x\right)\equiv 0.$$

Дві останні тотожності запишемо у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) & A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\\ l_{1\partial}T_0\left(t,\frac{\partial}{\partial x}\right) & l_{1\partial}T_1\left(t,\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_0\left(x\right)\\ \varphi_1\left(x\right)\end{pmatrix}=$$

$$=-\begin{pmatrix} 0\\ f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(B_1(\nu)G\left(h,\lambda,\nu\right)+B_2(\nu)\frac{\partial G}{\partial t}\left(h,\lambda,\nu\right)\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}\end{pmatrix}.$$

Подіявши на останнє рівняння матричним диференціальним виразом

$$\begin{pmatrix} l_{1\partial}T_1\left(t,\frac{\partial}{\partial x}\right) & -A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\\ -l_{1\partial}T_0\left(t,\frac{\partial}{\partial x}\right) & A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{pmatrix},$$

одержимо

$$\begin{pmatrix} \triangle\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0\left(x\right)\\ \triangle\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_1\left(x\right)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(B_1G\left(h,\lambda,\nu\right)+B_2\frac{\partial G}{\partial t}\left(h,\lambda,\nu\right)\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\nu=O}\\ A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(B_1G\left(h,\lambda,\nu\right)+B_2\frac{\partial G}{\partial t}\left(h,\lambda,\nu\right)\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\nu=O}\end{pmatrix}.$$

Оператор $\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ є нульовим оператором, оскільки $\Delta\left(\nu\right)\equiv 0$ на $\mathbb{C}^s$, тому для $\forall x\in\mathbb{R}^s$ маємо виконання двох тотожностей:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{A_2(\nu)\left(B_1(\nu)G\left(h,\lambda,\nu\right)+B_2(\nu)\frac{\partial G}{\partial t}\left(h,\lambda,\nu\right)\right)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\nu=O}\equiv 0,$$

$$f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{A_1(\nu)\big(B_1(\nu)G\left(h,\lambda,\nu\right)+B_2(\nu)\frac{\partial G}{\partial t}\left(h,\lambda,\nu\right)\big)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\nu=O}\equiv 0.$$

Отримали суперечність з умовами (4.16). □

Вкажемо конкретні приклади двоточкових задач, розв'язки яких не існують.

Приклад 4.4. Розглянемо задачу з локальними двоточковими умовами в просторі $(t,x)\in\mathbb{R}^2$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}+1+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]U\left(t,x\right)=f(t,x), \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=0,\ \ \frac{\partial U}{\partial x}(\pi,x)+\frac{\partial U}{\partial t}(\pi,x)=0. \tag{4.19}$$

▽ Дана задача є задачею (4.1), (4.2), в якій $a\left(\nu\right)=\nu$, $b(\nu)=\nu^2+1$, $h=\pi$, $A_1(\nu)=B_1(\nu)=\nu,\ A_2(\nu)=B_2(\nu)=1$.

Нормальна фундаментальна система розв'язків відповідного до (4.18) однорідного звичайного диференціального рівняння має вигляд

$$T_0\left(t,\nu\right)=e^{-\nu t}\left[\nu\sin t+\cos t\right],\quad T_1\left(t,\nu\right)=e^{-\nu t}\sin t,$$

а характеристичний визначник задачі є таким:

$$\Delta\left(\nu\right)=\begin{vmatrix}\nu & 1\\ -\nu e^{-\pi\nu} & -e^{-\pi\nu}\end{vmatrix}\equiv 0.$$

Для задачі (4.18), (4.19) функція (4.4) матиме вигляд:

$$G\left(\pi,\lambda,\nu\right)=e^{-\nu\pi}\frac{e^{\pi(\lambda+\nu)}+1}{\left(\lambda+\nu\right)^2+1},$$

тоді умова (4.16) – умова неіснування розв'язків задачі (4.18), (4.19) запишеться таким чином: існує $x\in\mathbb{R}$ таке, що виконується хоча б одна з нерівностей

$$\begin{aligned}&f\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{\nu e^{-\nu\pi}\left(\nu+\lambda\right)\frac{e^{(\lambda+\nu)\pi}+1}{\left(\lambda+\nu\right)^2+1}e^{\nu x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\ \nu=0}\neq 0,\\ &f\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{e^{-\nu\pi}\left(\nu+\lambda\right)\frac{e^{(\lambda+\nu)\pi}+1}{\left(\lambda+\nu\right)^2+1}e^{\nu x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\ \nu=0}\neq 0.\end{aligned} \tag{4.20}$$

У випадку $f(t,x)=e^x$ перша з умов (4.20) матиме вигляд:

$$e^{\frac{\partial}{\partial\nu}}\left\{\nu e^{-\nu\pi}(\nu+\lambda)\frac{e^{\pi(\lambda+\nu)}+1}{(\lambda+\nu)^2+1}e^{\nu x}\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\ \nu=0}=$$

$$=\left\{\nu e^{-\nu\pi}(\nu+\lambda)\frac{e^{\pi(\lambda+\nu)}+1}{(\lambda+\nu)^2+1}e^{\nu x}\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\ \nu=1}=\frac{1+e^{-\pi}}{2}e^x.$$

Оскільки $\frac{1+e^{-\pi}}{2}e^x\neq 0$ для $\forall x\in\mathbb{R}$, то задача (4.18), (4.19) для функції $f(t,x)=e^x$ розв'язків у класі цілих функцій не має. $\triangle$

Теорема 4.5. *Нехай для двоточкової задачі* (4.1), (4.2) *виконуються умови:*

1) $\Delta(\nu)\equiv 0$ *на* $\mathbb{C}^s$,

2) *для* $\forall\, x\in\mathbb{R}^s$ *і* $f\in\mathbb{A}_{p'}$ *справджується тотожність:*

$$f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left(l_{1\nu}\left\{G(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\right)\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O}\equiv 0, \tag{4.21}$$

тоді розв'язок задачі (4.1), (4.2) *у класі* $\mathbb{A}_{p'}$ *існує і його можна знайти за формулою*

$$U(t,x)=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{e^{\lambda t}-T_0(t,\nu)-\lambda T_1(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)}e^{\nu\cdot x}\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\,\nu=O}. \tag{4.22}$$

Доведення. Функція $G(t,\lambda,\nu)$ є квазіполіномом за t, цілою за λ першого порядку і порядку p за сукупністю параметрів $\nu_1,...,\nu_s$. Для $f\in\mathbb{A}_{p'}$ дія $f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ на $G(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}$ є коректною [27] і результат дії належить до $\mathbb{A}_{p'}$.

Ціла функція (4.22) задовольняє рівняння (4.1):

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)=$$

$$=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\nu\cdot x}\frac{L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\left(e^{\lambda t}-T_0(t,\nu)-\lambda T_1(t,\nu)\right)}{L(\lambda,\nu)}\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\nu=O}=$$

$$=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{\lambda t+\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\ \nu=O}=f(t,x).$$

Крім того, з умови $G(0,\lambda,\nu) = \dfrac{\partial G}{\partial t}(0,\lambda,\nu) = 0$ маємо

$$l_{0\partial}U(t,x) = f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left(A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{G(0,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\right)\Big|_{\lambda=0,\ \nu=O} +$$

$$+f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left(A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\frac{\partial G}{\partial t}(0,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\right)\Big|_{\lambda=0,\ \nu=O} \equiv 0.$$

Враховуючи рівність (4.21), покажемо, що функція (4.22) задовольняє другу умову з (4.2):

$$l_{1\partial}U(t,x) = f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left(B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\{G(h,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\}\right)\Big|_{\lambda=0,\ \nu=O} +$$

$$+f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left(B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\frac{\partial G}{\partial t}(h,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\right\}\right)\Big|_{\lambda=0,\ \nu=O} =$$

$$= f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left(l_{1\nu}\{G(t,\lambda,\nu)\,e^{\nu\cdot x}\}\right)\Big|_{\lambda=0,\ \nu=O} \equiv 0.$$

□

Встановимо умови розв'язності двоточкової задачі (4.1), (4.2) для конкретних прикладів.

Приклад 4.5. Дослідимо умови розв'язності задачі (4.18), (4.19) (приклад 4.4).

∇ У прикладі 4.4 показано, що характеристичний визначник задачі (4.18), (4.19) тотожньо рівний нулю.

Умовою існування розв'язку задачі (4.18), (4.19) є виконання такої тотожності на $\mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{e^{-\nu\pi}(\lambda+\nu)\frac{e^{(\lambda+\nu)\pi}+1}{(\lambda+\nu)^2+1}e^{\nu x}\right\}\Big|_{\lambda=\nu=0} \equiv 0.$$

Ця тотожність виконується, наприклад, якщо $f(t,x) = e^{x-t}$. Справді,

$$e^{\frac{\partial}{\partial\nu}-\frac{\partial}{\partial\lambda}}\left\{e^{\nu(x-\pi)}(1+\lambda)\frac{e^{(\lambda+\nu)\pi}+1}{(\lambda+\nu)^2+1}e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\ \nu=0} =$$

$$= \left\{e^{\nu(x-\pi)}(1+\lambda)\frac{e^{(\lambda+\nu)\pi}+1}{(\lambda+\nu)^2+1}e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=-1,\,\nu=1} \equiv 0.$$

За теоремою 4.5 задача (4.18), (4.19) має в $\mathbb{A}_\infty$ розв'язок, який обчислюється за формулою (4.22):

$$U(t,x) = e^{-\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{\partial}{\partial\nu}} \left\{ \frac{e^{\lambda t} - T_0(t,\nu) - \lambda T_1(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)} e^{\nu x} \right\}\Bigg|_{\lambda=\nu=0} =$$

$$= \left\{ \frac{e^{\lambda t} - T_0(t,\nu) - \lambda T_1(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)} e^{\nu x} \right\}\Bigg|_{\lambda=-1,\,\nu=1} =$$

$$= \frac{e^{-t} - T_0(t,1) + T_1(t,1)}{L(-1,1)} e^{x} = e^{x-t} - e^{x-t}\cos t.$$

Зауважимо, що даний розв'язок задачі (4.18), (4.19) не є єдиним, оскільки його знайдено з точністю до елементів ядра задачі, які є розв'язками задачі (2.53), (2.54) (див. приклад 2.6 розділу 2) для випадку $k = 1$, $h = \pi$, $a(\nu) = \nu$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Елементи ядра задачі (4.18), (4.19) – це функції вигляду

$$U(t,x) = \varphi(x-t)\cos t - \varphi(x-t)\sin t + \varphi'(x-t)\sin t,$$

де $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$. $\triangle$

Приклад 4.6. Дослідимо умови існування розв'язку двоточкової задачі в області змінних $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ для неоднорідного диференціально-функціонального рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t,x) + 2\frac{\partial}{\partial t} U(t, x+\omega) + 2U(t, x+\omega) - U(t,x) = f(t,x) \qquad (4.23)$$

з однорідними локальними умовами

$$U(0,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \quad U(1,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(1,x) = 0, \qquad (4.24)$$

де $\omega = (1, 1, -1)$.

∇ Диференціально-функціональне рівняння (4.23) можна записати у вигляді диференціального рівняння нескінченного порядку

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\, e^{\omega\cdot\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial t} + 2\, e^{\omega\cdot\frac{\partial}{\partial x}} - 1 \right] U(t,x) = f(t,x).$$

Тоді маємо $a(\nu) = e^{\omega\cdot\nu}$, $b(\nu) = 2\,e^{\omega\cdot\nu} - 1$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $A_1(\nu) = A_2(\nu) = B_1(\nu) = B_2(\nu) = 1$, $s = 3$, $h = 1$, $p = \infty$.

Нормальна фундаментальна система в точці $t = 0$ розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\,e^{\omega\cdot\nu}\frac{d}{dt} + 2\,e^{\omega\cdot\nu} - 1\right] T(t,\nu) = 0$$

має вигляд

$$T_0(t,\nu) = e^{-te^{\omega\cdot\nu}}\left\{e^{\omega\cdot\nu}\frac{\sinh\left[t(e^{\omega\cdot\nu}-1)\right]}{e^{\omega\cdot\nu}-1} + \cosh\left[t(e^{\omega\cdot\nu}-1)\right]\right\},$$

$$T_1(t,\nu) = e^{-te^{\omega\cdot\nu}}\frac{\sinh\left[t(e^{\omega\cdot\nu}-1)\right]}{e^{\omega\cdot\nu}-1}, \tag{4.25}$$

(для $e^{\omega\cdot\nu} = 1$, зокрема, $T_0(t,\nu) = e^{-t}(t+1)$, $T_1(t,\nu) = te^{-t}$).

Для задачі (4.23), (4.24) маємо:

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-e^{\omega\cdot\nu}}\dfrac{\sinh\left[e^{\omega\cdot\nu}-1\right]}{e^{\omega\cdot\nu}-1} & e^{-e^{\omega\cdot\nu}}\dfrac{\sinh\left[e^{\omega\cdot\nu}-1\right]}{e^{\omega\cdot\nu}-1} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Умовою існування розв'язку задачі (4.23), (4.24) є виконання для $f \in \mathbb{A}_1$ тотожності на $\mathbb{R}^3$:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{e^{\lambda} - e^{-2e^{\omega\cdot\nu}+1}}{\lambda - 1 + 2e^{\omega\cdot\nu}}e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} \equiv 0. \tag{4.26}$$

Умова (4.26) виконується, зокрема, якщо права частина рівняння (4.23) має вигляд:

$$f(t,x) = \cos[2\pi t]e^{-t+x_2+x_3}.$$

Справді,

$$\cos\left[2\pi\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]e^{-\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{\partial}{\partial\nu_2}+\frac{\partial}{\partial\nu_3}}\left(l_{1\nu}\left\{G(t,\lambda,\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\right)\Big|_{\lambda=0,\,\nu=O} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{e^{\nu\cdot x}l_{1\nu}G(t,\lambda,\nu)\right\}\Big|_{\lambda=2\pi i-1,\,\nu=(0,1,1)} +$$

$$+\frac{1}{2}\Big\{e^{\nu\cdot x}l_{1\nu}G(t,\lambda,\nu)\Big\}\Big|_{\lambda=-2\pi i-1,\,\nu=(0,1,1)}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{x_2+x_3}\Big\{\frac{e^{\lambda}-e^{-1}}{\lambda+1}\Big\}\Big|_{\lambda=2\pi i-1}+\frac{1}{2}e^{x_2+x_3}\Big\{\frac{e^{\lambda}-e^{-1}}{\lambda+1}\Big\}\Big|_{\lambda=-2\pi i-1}\equiv 0.$$

Отже, у випадку функції $f(t,x)=\cos[2\pi t]e^{-t+x_2+x_3}$ задача (4.23), (4.24) має в $\mathbb{A}_1$ розв'язок, який знайдемо за формулою (4.22):

$$U\left(t,x\right)=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{e^{\lambda t}-T_0\left(t,\nu\right)-\lambda T_1\left(t,\nu\right)}{L\left(\lambda,\nu\right)}e^{\nu\cdot x}\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\,\nu=O}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{\lambda t}-T_0\left(t,\nu\right)-\lambda T_1\left(t,\nu\right)}{L\left(\lambda,\nu\right)}e^{\nu\cdot x}\right\}\Bigg|_{\lambda=2\pi i-1,\,\nu=(0,1,1)}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{\lambda t}-T_0\left(t,\nu\right)-\lambda T_1\left(t,\nu\right)}{L\left(\lambda,\nu\right)}e^{\nu\cdot x}\right\}\Bigg|_{\lambda=-2\pi i-1,\,\nu=(0,1,1)}=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}e^{-t+x_2+x_3}\big\{1-\cos[2\pi t]\big\}.$$

Зауважимо, що отриманий розв'язок задачі (4.23), (4.24) не є єдиним, оскільки його знайдено з точністю до елементів ядра задачі вигляду

$$U\left(t,x\right)=\varphi\left(x\right)e^{-t},$$

де φ – довільна неперервна на $\mathbb{R}^3$ функція. Елементи ядра задачі (4.23), (4.24) знаходяться аналогічно, як в задачі (2.51), (2.52) (приклад 2.5 розділу 2). $\triangle$

Висновки до розділу 4

Досліджено розв'язність задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано однорідні локальні двоточкові умови, та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними у випадку, якщо визначник задачі не є тотожним нулем. Виділено класи цілих функцій як класи існування та єдиності розв'язку задачі, а також запропоновано диференціально-символьний метод побудови розв'язку.

У випадку $\Delta(\nu) \equiv 0$ для всіх $\nu \in \mathbb{C}^s$ знайдено умови існування та неіснування розв'язку задачі. За умови існування розв'язку задачі вказано спосіб його побудови.

Умови розв'язності двоточкової задачі проілюстровано на конкретних прикладах.

Результати розділу 4 опубліковано в [67] та додатково висвітлено в [75].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню розв'язності задач з локальними за часовою змінною двоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними у просторах цілих функцій.

Одержано такі нові результати:

• досліджено ядро задачі для рівнянь із частинними похідними другого порядку за часовою змінною, за якою задано локальні двоточкові умови, та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними; встановлено достатні умови існування нетривіальних розв'язків задачі в класах цілих функцій, а також необхідні та достатні умови існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків і запропоновано диференціально-символьний метод їх побудови; доведено, що однорідна задача має лише тривіальний розв'язок у випадку, коли характеристичний визначник задачі є відмінним від нуля для всіх значень аргумента;

• встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з неоднорідними локальними двоточковими умовами, а також задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними з однорідними локальними двоточковими умовами у класах цілих функцій та у класах неперервно диференційовних функцій, якщо характеристичний визначник задачі відмінний від нуля для всіх значень аргумента, а також у класах квазіполіномів у випадку існування непорожньої множини нулів характеристичного визначника, яка не співпадає з $\mathbb{C}^s$; запропоновано диференціально-

символьний метод побудови розв'язків задачі;

• за допомогою диференціально-символьного методу досліджено задачу з локальними двоточковими умовами, що містять диференціальні поліноми, для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними у випадку, коли характеристичний визначник задачі тотожньо дорівнює нулеві; знайдено умови існування та неіснування розв'язку задачі; у випадку існування розв'язків задачі запропоновано спосіб їх побудови.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна застосовувати у подальших теоретичних дослідженнях задач з локальними багатоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними та систем таких рівнянь, а також при дослідженні конкретних задач практики, які моделюються розглянутими у дисертації задачами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абдо С. А., Юрчук Н. И. Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 3. С. 417–425.
2. Абдо С. А., Юрчук Н. И. Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. II. Разрешимость и свойства решений // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 5. С. 806–815.
3. Антыпко И. И. О краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Вестник ХГУ. Серия мех.-матем. 1969. № 36. С. 62–72.
4. Антыпко И. И., Борок В. М. Критерий безусловной корректности краевой задачи в слое // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1976. № 26. С. 3–9.
5. Антыпко И. И., Перельман М. А. О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1972. Т. 16. С. 98–109.
6. Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О. Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 4. С. 637–645.
7. Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними / О. І. Бобик, П. І. Боднарчук, Б. Й. Пташник, В. Я. Скоробогатько // К.: Наук. думка, 1972. 175 с.
8. Бондаренко Б. А. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных // Ташкент: ФАН, 1987. 148 с.

9. Борок В. М. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое // ДАН СССР. 1968. Т. 183, № 5. С. 995–998.
10. Борок В. М. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэфициентами // Мат. сб. 1969. Т. 10, № 4. С. 89–100.
11. Борок В. М. Критерий абсолютной с-устойчивости уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 79, № 2. С. 293–304.
12. Борок В. М., Перельман М. А. О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. 1973. Т. 8. С. 29–34.
13. Валицкий Ю. Н. Четырехточечная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Функц. анализ. 1981. Т. 15, вып. 4. С. 69–70.
14. Василишин П. Б., Клюс І. С., Пташник Б. Й. Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. 1996. Т. 48, № 11. С. 1468–1476.
15. Віленць І. Л. Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних // ДАН УРСР. Сер. А. 1974. Т. 3. С. 195–197.
16. Воробець М. Б. Задача Коші для одного класу неоднорідної системи рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом // Вісник ДУ „Львівська політехніка“. Серія „Прикладна математика“. 1999. № 364. С. 252–256.
17. Воробець М. Б. Двоточкова задача для однорідної системи рівнянь із частинними похідними другого порядку за часом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2002. Т. 45, № 2. С. 16–21.
18. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференци-

ально-операторных уравнений. К.: Наук. думка, 1984. 284 с.

19. Городецький В. В., Дрінь Я. М. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодифенціальними операторами в просторах періодичних функцій // Буков. матем. журн. 2014. Т. 2, № 1. С. 26–42.
20. Городецький В. В., Мартинюк О. В., Петришин Р. І. Коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу еволюційних рівнянь // Укр. матем. журн. 2013. Т.65, №3. С. 339–353.
21. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980. 208 с.
22. Ешуков Л. Н., Веков А. А., Степанов А. Н. Проблемы и библиография теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды Рязан. радиотехн. ин–та. 1972. № 42. С. 164–192.
23. Иванчов Н. И. Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Укр. матем. журн. 1993. Т.45, №8. С. 1066–1071.
24. Ільків В. С., Нитребич З. М. Про розв'язки однорідної задачі Діріхле у часовій смузі для рівняння з частинними похідними другого порядку за часовою змінною // Вісник Львівського ун-ту. Серія мех-мат. 2013. Вип. 78. С. 65–77.
25. Илькив В. С., Полищук В. Н., Пташник Б. И., Салыга Б. О. Нелокальная многоточечная задача для псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами // Укр. матем. журн. 1986. Т. 38, № 5. С. 582–587.
26. Илькив В. С. Многоточечная нелокальная задача для уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 3. С. 487–492.
27. Каленюк П. І., Нитребич З. М. Про дію диференціального виразу нескінченного порядку у класах цілих функцій багатьох комплексних

змінних // Доп. НАН України. 2007. № 6. С. 11–16.

28. Каленюк П. І., Ільків В. С., Нитребич З. М., Когут І. В. Однозначна розв'язність задачі з інтегральними умовами для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Вісник нац. ун-ту „Львівська політехніка". Серія „Фіз.-мат. науки". 2013. № 768. С. 5–11.
29. Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М. Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для рівняння із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2002. Т. 45, № 2. С. 7–15.
30. Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М. Про ядро задачі з нелокальною двоточковою умовою для рівняння із частинними похідними // Матем. вісник НТШ. 2007. № 4. С. 116–128.
31. Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М. Задача з нелокальною двоточковою умовою за часом для однорідного рівняння із частинними похідними нескінченного порядку за просторовими змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2008. Т. 51, № 4. С. 17–26.
32. Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М. Про ядро задачі з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними нескінченного порядку // Вісник нац. ун-ту „Львівська політехніка". Серія „Фіз.-мат. науки". 2008. № 601. С. 5–11.
33. Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М. Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2009. Т. 52, № 4. С. 7–17.
34. Каленюк П. І., Нитребич З. М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка", 2002. 292 с.
35. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Воробець М. Б. Задача Коші для одного класу систем диференціальних рівнянь із частинними похідни-

ми безмежного порядку // Вісник ДУ „Львівська політехніка”. Серія „Прикладна математика”. 1998. № 341. С. 124–128.

36. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Плешівський Я. М. Крайова задача з локальними багатоточковими умовами для однорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2000. Т. 43, № 2. С. 90–95.
37. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Плешівський Я. М. Багатоточкова задача для неоднорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними // Вісн. нац. ун-ту ім. І. Франка. Серія мех.-мат. 2000. № 58. С. 144–152.
38. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Плешівський Я. М. Багатоточкова задача для однорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними // Вісн. держ. ун-ту „Львівська політехніка”. 1999. № 364. С. 223–227.
39. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Плешівський Я. М. Багатоточкова задача для однорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними // Вісн. нац. ун-ту „Львівська політехніка”. Прикладна математика. 2000. № 411. С. 151–159.
40. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Сохан П. Л. Метод розв’язання задачі Коші для неоднорідної системи рівнянь із частинними похідними // Волинський матем. вісник. 1995. № 2. С. 87–89.
41. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Сохан П. Л. Задача Діріхле у безмежному шарі для рівняння Пуассона // Вісник держ. ун-ту „Львівська політехніка”. „Диференціальні рівняння та їх застосування”. 1995. № 286. С. 65–70.
42. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Сохан П. Л. Крайова задача для однорідного полілінійного рівняння з частинними похідними // Вісник держ. ун-ту „Львівська політехніка”. Прикладна математика. 1996. № 299. С. 67–73.

43. Карачик В. В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Вестник ЮУрГУ, Серия „Математика. Механика. Физика". 2011. Выпуск 4, № 10. С. 4–17.
44. Карачик В. В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Дифференц. уравнения. 2015. Т 51, № 8. С. 1038–1047.
45. Клюс І. С., Нитребич З. М. Багатоточкова задача для диференціального рівняння із частинними похідними, що розкладається у добуток лінійних відносно диференціювання множників // Вісн. нац. ун-ту „Львівська політехніка". Прикладна математика. 2000. № 407. С. 220–226.
46. Клюс І. С., Пташник Б. Й. Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, нерозв'язних відносно старшої похідної за часом // Укр. матем. журн. 1999. Т. 51, № 12. С. 1604–1613.
47. Корбут Л. І., Матійчук М. І. Про зображення розв'язку нелокальної крайової задачі для параболічних рівнянь // Укр. матем. журн. 1994. Т. 46, № 7. С. 947–952.
48. Левин А. Ю. Неосциляция решений уравнения // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 2. С. 43–96.
49. Леонтьев А. Ф. Обобщение рядов экспонент. М.: Наука. 1981. 320 с.
50. Лучка А. Ю., Габрель О. М. Наближене розв'язання задачі Валле-Пуссена для звичайних диференціальних рівнянь проекційно-ітеративним методом // Доп. АН УРСР. 1982. № 8. С. 18–22.
51. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. К.: Наук. думка, 1980. 264 с.
52. Лучко В. М. Про двоточкову крайову задачу для параболічних рівнянь вищого порядку // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Серія Математика. 2004. Вип. 228. С. 51–59.

53. Макаров А. А. Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 1. С. 144–150.

54. Маланчук О. М. Про ядро двоточкової за часом задачі для рівняння із частинними похідними // Міжнар. наук. конф., присв. 80-річчю від дня народження М. П. Ленюка: матеріали конф. (м. Чернівці, 28-30 жовтня 2016 р.). Чернівці, 2016. С. 163.

55. Матійчук М. І. Параболічні сингулярні крайові задачі. К.: Інститут математики НАН України, 1999. 176 с.

56. Митропольский Ю. А., Урмачева Л. Б. О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений // Укр. матем. журн. 1990. Т. 42, № 2. С. 1657–1663.

57. Нитребич З. М. Граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння з частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2000. Т. 43, № 3. С. 64–70.

58. Нитребич З. М. Про граничні переходи у задачах з локальними за часом умовами для рівнянь із частинними похідними // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем. 2006. № 66. С. 137–150.

59. Нитребич З. М. Операційний метод побудови розв'язку задачі Коші для однорідної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1995. Т. 38. С. 40–45.

60. Нитребич З. М. Про граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші // Вісн. ЛНУ ім. І. Франка. Серія мех.-матем. 1999. № 54. С. 125–131.

61. Нитребич З. М. Диференціально-символьний метод розв'язування задачі Коші для однорідної системи рівнянь із частинними похідними // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія „Математика та інформатика". 2014. Т. 25, № 1. С. 85–93.

62. Нитребич З. М., Ільків В. С., Пукач П. Я. Коректні багатоточкові задачі для факторизованих рівнянь із частинними похідними // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія „Математика і інформатика”. 2014. Т. 25, № 2. С. 123–130.
63. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Однорідна задача з локальними крайовими умовами на границі смуги для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. „Математика і інформатика”. 2015. Т. 27, № 2. С. 98–108.
64. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Критерій існування нетривіальних квазіполіномних розв’язків однорідної двоточкової задачі для рівняння із частинними похідними // Буков. матем. журн. 2016. Т. 4, № 3-4. С. 140–149.
65. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про ядро двоточкової задачі для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2016. Т. 59, № 3. С. 43–54.
66. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Диференціально-символьний метод розв’язування двоточкової за часом задачі для рівняння із частинними похідними // Укр. матем. вісник. 2016. Т. 13, № 4. С. 516–533.
те саме: Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation // J. Math. Sci. 2017. Vol. 224, No. 4. P. 541–554.
67. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Диференціально-символьний метод розв’язування двоточкової за часом задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними // Укр. матем. вісник. 2017. Т. 14, № 1. С. 86-102.
те саме: Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. The differential-symbol method of solving the problem two-point in time for a nonhomogeneous partial differential equation // J. Math. Sci. 2017. Vol. 227, No. 1. P. 68-80.
68. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про умови розв’язності двоточкової

за часом задачі для рівняння з частинними похідними // Вісник Нац. ун-ту „Львівська політехніка”. Фіз.-мат. науки. 2017. № 871. С. 93-98.

69. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про множину розв’язків однорідної двоточкової задачі для рівняння з частинними похідними // Диф. рівняння та їх застосування: тези доп. міжнар. наук. конф. (м. Ужгород, 19–21 травня 2016 р.). Ужгород, 2016. С. 103.
70. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про ядро двоточкової за часом задачі для рівняння з частинними похідними // 12-а відкрита наук. конф. ІМФН Нац. ун-ту „Львівська політехніка”: збірник матеріалів конф. (м. Львів, 2-3 червня 2016 р.). Львів, 2016. С. 35.
71. Нитребич З. М., Маланчук О. М., Когут І. В. Критерій існування квазіполіномних розв’язків однорідної двоточкової задачі // 13-а відкрита наук. конф. ІМФН Нац. ун-ту „Львівська політехніка”, присв. 125-річчю від дня народження С. Банаха: збірник матеріалів конф. (м. Львів, 30-31 березня 2017 р.). Львів, 2017. С. 55.
72. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Однорідна крайова задача у смузі для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // VII Міжнар. наук. конф. „Сучасні проблеми матем. моделювання, прогнозування та оптимізації”: тези доповідей (м. Кам’янець-Подільський, 21-22 квітня 2016 р.). Кам’янець-Подільський, 2016. С. 161-162.
73. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про ядро однорідної крайової задачі в смузі для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // XVII Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука „Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування”: матеріали конф. (м. Київ, 19-20 травня 2016 р.). Київ, 2016. С. 211-212.
74. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про існування нетривіальних розв’язків однорідної двоточкової задачі для деяких класичних рівнянь математичної фізики // Міжнар. конф. „Диф. рівняння та їх

застосування”, присв. 75-річчю від дня народження д.ф.-м.н., проф. Д. І. Мартинюка: матеріали конф. (м. Кам’янець-Подільський, 19-21 травня 2017 р.). Кам’янець-Подільський, 2017. С. 92-93.

75. Нитребич З. М., Маланчук О. М. Про умови неіснування розв’язку двоточкової задачі для рівняння з частинними похідними // Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та матем. аналізу”: матеріали конф. (Ворохта, 27 лютого – 2 березня 2018 р.). Ворохта, 2018. С. 99–100.
76. Нитребич З. М., Пташник Б. Й., Репетило С. М. Задача Діріхле-Неймана для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія „Математика і інформатика”. 2014. Т. 25, № 1. С. 94–105.
77. Нурметов С. Х. Четырехточечная задача для операторного уравнения четвертого порядка // Некорректные матем. задачи и проблемы геофизики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1979. С. 100–104.
78. Покорный Ю. В. Вопросы качественной теории краевой задачи Валле-Пуссена: автореф. дис. на соискание научной степ. д-ра физ.-мат. наук: спец. 01.01.02 – „диф. уравнения”. Л., 1980. 24 с.
79. Пташник Б. Й. Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // ДАН УРСР. 1966. Т. 10. С. 1254–1257.
80. Пташник Б. Й. Задача типу Валле-Пуссена для лінійних гіперболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами // ДАН УРСР. 1967. Т. 2. С. 127–130.
81. Пташник Б. Й. n-лінійна задача для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. 1967. № 16. С. 80–87.
82. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К.: Наук. думка, 1984. 264 с.
83. Пташник Б. Й. Аналог n-точкової задачі для системи гіперболічних

рівнянь із сталими коефіцієнтами // ДАН УРСР. Серія А. 1974. Т. 8. С. 709–712.

84. Пташник Б. Й., Комарницька Л. І. Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Доп. НАН України. 1995. Т. 10. С. 20–23.
85. Пташник Б. И., Салыга Б. О. Аналог многоточечной задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами // Укр. матем. журн. 1983. Т. 35, № 6. С. 728–734.
86. Пташник Б. Й., Силюга Л. П. Багатоточкова задача для безтипних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. матем. журн. 1997. Т. 49, № 9. С. 1238–1249.
87. Пташник Б. Й., Симотюк М. М. Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. матем. журн. 2003. Т. 55, № 3. С. 400–413.
88. Пташник Б. Й., Симотюк М. М. Багатоточкова задача для неізотропних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. матем. журн. 2003. Т. 55, № 2. С. 241–254.
89. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, І. Я. Кміть, В. С. Ільків, В. М. Поліщук. К.: Наук. думка, 2002. 416 с.
90. Пташник Б. Й., Тимків І. Р. Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами // Доп. НАН України. 2008. № 12. С. 34—39.
91. Пташник Б. Й., Штабалюк П. І. Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій майже періодичних по просторових змінних // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 1992. № 35. С. 210–215.
92. Пташник Б. Й., Фіголь В. В., Штабалюк П. І. Розв'язність, стійкість і регуляризація багатоточкової задачі для гіперболічних рівнянь // Мат. студії. 1991. Вип. 1. С. 16–32.

93. Пукальський І. Д. Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. Чернівці: Рута, 2008. 253 с.

94. Романко В. К. Граничные задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений // Докл АН СССР. 1976. Т. 227, № 4. С. 812–816.

95. Романко В. К. Разрешимость граничных задач для дифференциально-операторных уравнений высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 6. С. 1081–1092.

96. Савченко Г. В. О корректности одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 8. С. 1450–1453.

97. Салыга Б. О. Аналог многоточечной задачи для нестрого гиперболического оператора с переменными по x коэффициентами // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1979. № 9. С. 9–14.

98. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. К.: Наук. думка, 1986. 224 с.

99. Симотюк М. М. Багатоточкова задача для лінійних систем рівнянь з частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2002. Т. 45, № 4. С. 107–118.

100. Симотюк М. М., Тимків І. Р. Задача з багатоточковими умовами для системи параболічних рівнянь високого порядку зі змінними коефіцієнтами // Прикарпатський вісник НТШ. Число. 2015. Т. 29, № 1. С. 45–59.

101. Сохан П. Л. Метод розв'язання задачі Коші для неоднорідної системи рівнянь із частинними похідними // Вісник держ. ун-ту „Львівська політехніка". Прикладна математика. 1998. № 346. С. 102–106.

102. Сохан П. Л. Крайова задача для однієї системи рівнянь із частинними похідними // Вісник держ. ун-ту „Львівська політехніка". Прикладна математика. 1998. № 346. С. 153–155.

103. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Пг., 1917. 308 с.

104. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 232 с.

105. Тимків І. Р. Задача з двоточковими умовами для системи параболічних рівняннь другого порядку за часом // Прикарпатський вісник НТШ. Число. 2016. Т. 33, № 1. С. 124–138.

106. Фардигола Л. В. Корректные задачи в слое с дифференциальными операторами в краевом условии // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44, № 8. С. 1083–1090.

107. Фардигола Л. В. Нелокальные двухточечные краевые задачи в слое с дифференциальным оператором в краевом условии // Укр. матем. журн. 1995. Т. 47, № 8. С. 1122–1128.

108. Фардигола Л. В. Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральным условием // Укр. матем. журн. 1990. Т. 42, № 11. С. 1546–1552.

109. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

110. Asanova A. T. On a solvability of a family of a multi-point boundary value problems for system of differential equations and their application to the nonlocal boundary value problems // Mathematical journal, Almaty. 2013. Vol. 13, No. 3. P. 58–73.

111. Bassanini P. Iterative methods for quasilinear hyperbolic systems in the first canonic form // Appl. Anal. 1981. Vol. 12, No. 2. P. 105–117.

112. Cesari L. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in shauder's canonic form // Ann. Scuola norm. super. Pisa CI. sci. 1974. Vol. 1, No. 4. P. 331–358.

113. Cesari L. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems //

Riv. math. Univ. Parma. 1974. Vol. 3, No. 2. P. 107–131.

114. Chabrovski J. On non-local problems for parabolic equations // Nagoja Math. J. 1984. No. 93. P. 109–131.
115. Hile G. N., Stanoyevitch A. Heat polynomial analogous for equations with higher order time derivatives // J. Math. Anal. Appl. 2004. Vol. 295. P. 595–610.
116. Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M. Problem with integral condition for partial differential equation of the first order with respect to time // J. Math. Sci. 2012. Vol. 181, No. 3. P. 293–304.
117. Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M. Differential-symbol method of solving the nonlocal boundary value problem in the class of nonuniqueness of its solution // Мат. студії. 2003. №1. С. 53–60.
118. Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M., Yarka U. V. Problem with inhomogeneous integral time condition for a partial differential equation of the first order with respect to time and of infinite order wih respect to the space variable // J. Math. Sci. 2014. Vol. 198, №1. P. 1–12.
119. Problem with integral conditions for differential-operator equation / P. I. Kalenyuk, G. Kuduk, I. V. Kohut, Z. M. Nytrebych // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2013. Т. 56, №4. С. 7–14.
120. Kampf A., Jackson D. M., Morales A. H. New Dirac delta function based methods with applications to perturbative expansions in quantum // J. Phys. Math. Theor. 2014. Vol. 47, No. 41. 415204.
121. Kampf A., Jackson D. M., Morales A. H. How to (Parth–) Integrate by Differentiating // J. Phys.: Conf. Ser. 2015. Vol. 626. 626012015.
122. Kiguradze T. The Vallee-Poussin problem for higher order nonlinear hyperbolic equations // Computers and Mathematics with Applications. 2010. Vol. 59, Iss. 2. P. 994-1002.
123. Majchrowski M. On certain nonlocal problem with mixed boundary condition for a parabolic system of partial differential equation // Demonstratio

Math. 1982. Vol. 5, № 3. P. 635–646.

124. Mammana G. Decomposizione delle espressioni differenziali lineari homogenee in prodotto di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenzi ali lineari // Math. Z. 1931. Vol. 33. P. 186–231.
125. Nicoletti O. Sulle condizione iniziali che determiniano gli integrali della equazioni differenziali ordinarie // Atti della R. Acc. Sc. Torino. 1897–1898. Vol. 33. P. 746–759.
126. Malanchuk O. M., Nytrebych Z. M. Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables // Open Mathematics. 2017. No. 15. P. 101–110.
127. Homogeneous problem with two-point conditions in time for some equations of mathematical physics / Z. M. Nytrebych, O. M. Malanchuk, V. S. Il'kiv, P. Ya. Pukach // Azerb. J. Math. 2017. Vol. 7, No. 2. P. 180–196.
128. On the solvability of two-point in time problem for PDE / Z. M. Nytrebych, O. M. Malanchuk, V. S. Il'kiv, P. Ya. Pukach // Ital. J. of Pure and Applied Mathematics. 2017. No. 38. P. 715-726.
129. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. About the set of solutions of the homogeneous two-point problem for the PDE of second order in time and infinite order in spatial variables // Intern. Conf. on Diff. Eq. dedic. to the 110th anniversary of Ya. B. Lopatynsky: book of abstracts (Lviv, September 20-24, 2016). Lviv, 2016. P. 95-96.
130. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. Homogeneous Two-point in Time Problem for PDE // Intern. Scien. Conf. „Differential-Functional Equations and their Applications", dedic. to the 80th anniversary of Prof. V. I. Fodchuk: materials of conf. (Chernivtsi, September 28-30, 2016). Chernivtsi, 2016. P. 125-126.
131. Nytrebych Z. M., Malanchuk O. M. Two-point problem for homogeneous

PDE of second order in time with nonhomogeneous conditions // Intern. Conf. on Diff. Eq., Math. Physics and Applications: Book of Abstracts (Cherkasy, October 17-19, 2017). Cherkasy, 2017. P. 68-69.

132. Pedersen P. A basis for polynomial solutions for systems of linear constant coefficient PDE's // Adv. Math. 1996. Vol. 117. P. 157–163.
133. Picone M. Sui valori eccezionali di un parametro do cui dipend un equazione differentiale lineare ordinaria del secondo ordine. Pisa, 1909. 176 p.
134. Polya G. On the mean value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1922. Vol. 24. P. 312–324.
135. Pucci P. Problemi ai limiti per sistemi di equazieni iperboliche // Boll. Unione Mat. ital. B. 1979. Vol. 16, No. 5. P. 87–99.
136. Symotyuk M. M., Tymkiv I. R. Problem with two-point conditions for parabolic equation of second order on time // Carpathian Mat. Publication. 2014. Vol. 6, No. 2. P. 351–359.
137. Vallee-Poussin Ch. J. Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n // Journ. Math. de pura et appl. 1929. Vol. 9, No. 8. P. 125–144.