Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Луківська Дзвенислава Володимирівна

УДК 517.53

Властивості узагальнених локсодромних та еліптичних функцій

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
(доктора філософії)

Львів – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного і функціонального аналізу
Львівського національного університету імені Івана Франка
Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент
Христіянин Андрій Ярославович,
доцент кафедри математичного і функціонального аналізу
Львівського національного університету імені Івана Франка.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Мохонько Анатолій Захарович,
професор кафедри вищої математики
Інституту прикладної математики та фундаментальних наук
Національного університету "Львівська політехніка";

доктор фізико-математичних наук, професор
Дільний Володимир Миколайович,
професор кафедри математики
Дрогобицького педагогічного університету імені Івана Франка.

Захист відбудеться “19” жовтня 2018 р. о 15.05 год.
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського
національного університету імені Івана Франка за адресою:
м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий “17” вересня 2018 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради **А. Я. Христіянин**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Еліптичні функції як особливий розділ спеціальних функцій посідають центральне місце в математиці ще з XIX століття. Теорія еліптичних функцій зародилася у працях Л. Ейлера, А. Лежандра, К. Гаусса, Н. Абеля, К. Якобі і динамічно розвивалась завдяки дослідженням таких видатних математиків як Ф. Ейзенштейн, Ж. Ліувілль, К. Вейєрштрасс, Б. Ріман, Л. Кронекер, Ф. Фробеніус, Г. Вебер, Р. Фрікке.

Еліптичні функції, вирізняючись неабияким багатством, різноманіттям та універсальністю своїх властивостей, постійно служили і досі служать джерелом натхнення та нових ідей для математиків, а також, поєднуючи в собі не тільки аналітичну, а й алгебраїчно-арифметичну, геометричну і топологічну природу, були і є сполучною ланкою для різних математичних теорій та дисциплін.

Теорія еліптичних функцій тісно пов'язана з теорією локсодромних функцій, які з'явились дещо пізніше і відомі завдяки монографіям О. Раузенбергера (1884 р.) та Ж. Валірона (1947 р.). Локсодромні функції дають просту конструкцію еліптичних. За словами А. Кондратюка ці теорії є дуальними.

Розвиток теорії еліптичних функцій у XX столітті пов'язаний з іменами Ф. Фуртвенглера, Т. Такагі, Е. Артіна, М. Дойрінга, Х. Хассе, К. Шевалле, І. Шафаревича, Г. Шімури, С. Ленга, А. Вейля, Н. Ахієзера, К. Чандразекхарана, Д. Массера.

А от щодо локсодромних функцій, то відновлення інтересу до їх вивчення відбулося вже в XXI столітті, зокрема після звернення до цієї тематики А. Кондратюка. А. Кондратюком та його учнями отримано важливі результати в теорії локсодромних функцій та їх узагальнень.

Також дослідженням локсодромних функцій та їх застосувань в даний час займаються Д. Кровді, С. Кос, Т. Погани, Дж. Маркотт, М. Саломон та інші.

Теорією еліптичних функцій та їх застосувань в останні роки також займається чимало математиків, зокрема А. Дієнтсфрей, Дж. Хуанг, Й. Чен, Ж. Ян, М. Вальдшмідт, Г. Пастрас та інші.

Завдяки своїм особливим властивостям, як еліптичні, так і локсодромні функції знайшли чимало застосувань в різних галузях математики (таких як комплексний аналіз, теорія функцій, алгебра і теорія чисел, геометрія і топологія, диференціальні рівняння), фізики (класична та квантова механіка, електротехніка, оптика, динаміка, теорія потенціалів, комп'ютерна фізика та ін.).

Оскільки локсодромні та еліптичні функції володіють такими унікальними і водночас універсальними властивостями і, крім того, мають досить широке поле застосувань, то природнім чином постає питання про узагальнення класів еліптичних та локсодромних функцій та дослідження їх властивостей. Актуальність цієї тематики визначається не тільки внутрішніми потребами теорії, а й відомими потребами суміжних наук. Вивчення цих об'єктів становить певний науковий інтерес і може знайти застосування у подальших теоретичних та прикладних дослідженнях.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі математичного і функціонального аналізу Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми МА-06 Ф "Інваріантні функціональні підпростори в нелінійних однорідних просторах та обернені задачі теорії операторів" (номер державної реєстрації 0115U003250).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження властивостей узагальнених локсодромних та узагальнених еліптичних функцій.

Для досягнення поставленої мети в дисертації потрібно розв'язати такі завдання:

– знайти і описати всі мероморфні та голоморфні розв'язки функціонального рівняння $f(qz) = pf(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q, p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|q| < 1$ та дослідити їх властивості;

– знайти і описати всі мероморфні та голоморфні розв'язки функціонального рівняння $f(qz) = R(z)f(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|q| < 1$, R – раціональна функція;

– побудувати узагальнення еліптичних функцій та знайти аналоги класичних $\wp$, ζ і σ-функцій Вейєрштрасса;

– встановити зв'язок між квазі-еліптичними та p-локсодромними функціями.

Об'єктами дослідження є узагальнені локсодромні та узагальнені еліптичні функції, а *предметом* досліджень – властивості узагальнених локсодромних та узагальнених еліптичних функцій.

Методи дослідження. У процесі вивчення дисертаційних задач застосовуються методи комплексного аналізу, теорії функцій, деякі прийоми з теорії еліптичних та локсодромних функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати отримані в дисертаційній роботі є новими та оригінальними.

Основні наукові результати, що виносяться на захист:

– отримано зображення p-локсодромних функцій;

- досліджено розташування нулів та полюсів p-локсодромної функції та отримано співвідношення між їх кількістю;
- доведено Жюліа винятковість p-локсодромних функцій;
- наведено зв'язок між модуль-локсодромними та p-локсодромними функціями;
- введено поняття раціонально-локсодромної функції шляхом розв'язку відповідного функціонального рівняння;
- отримано зображення раціонально-локсодромних функцій;
- введено поняття квазі-еліптичної функції та отримано аналоги деяких класичних теорем теорії Вейєрштрасса еліптичних функцій;
- побудовано квазі-еліптичну функцію Вейєрштрасса – $\wp_{\alpha\beta}$, яка є безпосереднім узагальненням класичного випадку;
- знайдено аналоги ζ- та σ-функцій Вейєрштрасса для класу квазі-еліптичних функцій;
- встановлено зв'язок між квазі-еліптичними та p-локсодромними функціями;
- наведено співвідношення між класами квазі-еліптичних та модуль-еліптичних функцій.

Практичне значення отриманих результатів. Наукові результати дисертації носять теоретичний характер і є певним внеском в теорію мероморфних функцій. Вони можуть бути використані як у подальших дослідженнях з теорії функцій, так і у інших розділах сучасної математики.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані її автором самостійно.

Зі статтей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору. Зокрема, у статті [1] автору належать усі результати, за винятком тих, що наведені у розділі 3 згаданої статті; у статті [2] автору належить лише розділ 3. Результати з цих двох статтей, що не належать авторові до дисертації не включені. У спільних з науковим керівником публікаціях ([5]−[9]) А. Христіянину належить постановка задач та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації.

Усі основні результати дисертації доповідались та обговорювались на наукових конференціях, наукових семінарах і літній школі, а саме:

1) Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій, у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Львів, 29.10.2015 р., 5.11.2015 р., 10.05.2018 р. (керівники: проф. О. Б. Скасків, проф. І. Е. Чижиков, проф. М. В. Заболоцький, проф. П. В. Філевич);

2) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , смт. Ворохта, 24–27 лютого 2016 р.;

3) науковому семінарі з комплексного і нелінійного аналізу, у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Львів, 23.06.2016 р., 30.06.2016 р. (керівник – проф. А. А. Кондратюк);

4) науковому семінарі з комплексного аналізу кафедри математики "Oberseminar Funktionentheorie" у Вюрцбурзькому універститеті імені Юліуса Максиміліана, Вюрцбург, Німеччина, 8 липня 2016 р. (керівники: проф. О. Ротт, проф. С. Рушевай);

5) всеукраїнській науковій конференції, присвяченій 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики" , Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.;

6) всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , смт. Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.;

7) XII-й Літній школі "Алгебра, Топологія, Аналіз" , с. Колочава, 10–23 липня 2017 р.;

8) міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125-річчю з дня народження Стефана Банаха, Львів, 18–23 вересня 2017 р.;

9) Львівському міжвузівському семінарі з функціонального аналізу імені проф. В. Е. Лянце, у Львівському національному університеті імені Івана Франка, Львів, 10 жовтня 2017 р. (керівник – проф. О. Г. Сторож).

Публікації. Основні результати дисертації відображено у 18 наукових публікаціях, а саме 9 статтях (2 з яких без співавторів), 4 тезах міжнародних конференцій, 4 тезах всеукраїнських конференцій (1 без співавторів) та 1 тезах літньої школи. Всі статті опубліковані в наукових фахових виданнях, що задовольняють вимоги, які передбачені законодавством України щодо кандидатських дисертацій. Серед статтей є такі, що входять до міжнародних науково-метричних баз, зокрема таких як Zentralblatt MATH, MathSciNet, Scopus, Web of Science.

Структура і обсяг дисертації Дисертація складається з анотації (українською та англійською мовами), переліку основних позначень, вступу, 4-ох розділів, висновків, списку літератури та одного додатку. Загальний обсяг роботи – 127 сторінок, обсяг списку використаних джерел налічує 101 найменування і займає 10 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обгрунтовано актуальність теми дослідження, вказані мета, завдання та методи досліджень, підкреслено наукову новизну отриманих результатів, наведено форми апробації одержаних результатів, описано особистий внесок здобувача, кількість публікацій, структуру та обсяг дисертації.

У **першому розділі** дисертаційної роботи проведено огляд літератури за тематикою дисертації і подано огляд основних результатів. В підрозділі 1.1 зроблено аналіз літературних джерел, наведено необхідні означення та теореми, пов'язані з тематикою досліджень і висвітлено передумови вибору тематики дисертації. Підкреслено значний вклад А. Кондратюка в розвиток теорії локсодромних функцій та їх узагальнень. В підрозділі 1.2 наведені основні результати досліджень.

Другий розділ дисертації присвячений дослідженню p-локсодромних функцій та їх властивостей, він складається з трьох підрозділів.

Позначимо $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Означення 2.1.1. *Нехай* $q, p \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$. *Мероморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція* f *називається* ***p-локсодромною з мультиплікатором*** q, *якщо для кожного* $z \in \mathbb{C}^*$ *виконується рівність*

$$f(qz) = pf(z).$$

Символ $\mathcal{L}_{qp}$ позначає клас p-локсодромних функцій з мультиплікатором q.

У підрозділі 2.1 описано клас p-локсодромних функцій та їх елементарні властивості; наведено приклади; досліджено розташування нулів та полюсів p-локсодромної функції та показано, що нулі та полюси p-локсодромної функції у випадку недодатного q лежать на логарифмічній спіралі; знайдено рівняння цієї логарифмічної спіралі; доведено теореми про зображення мероморфної та голоморфної p-локсодромної функккції, про кількість нулів та полюсів p-локсодромної функккції, про Жюліа винятковість функцій з цього класу; виконано порівняльний аналіз та окреслено основні відмінності між локсодромними та p-локсодромними функціями.

Позначимо $A_q(R) = \{z \in \mathbb{C} : |q|R < |z| \leq R\}$, $R > 0$.

Теорема 2.1.7. *Нехай $f \in \mathcal{L}_{qp}$ і не має ні нулів, ні полюсів на межі кільця $A_q(R)$. Тоді кількість нулів функції f у кільці $A_q(R)$ дорівнює кількості її полюсів у кільці $A_q(R)$ з урахуванням їх кратностей.*

Нехай $a_1, ..., a_m$ і $b_1, ..., b_m$ є нулями і полюсами функції $f \in \mathcal{L}_{qp}$ в кільці $A_q(1)$ відповідно. Позначимо $\lambda = \dfrac{a_1 \cdot ... \cdot a_m}{b_1 \cdot ... \cdot b_m}$.

Означення. *Функція $P : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, що визначається рівністю*

$$P(z) = (1-z)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n z)\left(1-\frac{q^n}{z}\right),\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q|<1,$$

називається первинною функцією Шотткі-Кляйна[1].

Теорема 2.1.8. *Відмінна від нуля, мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція f належить до класу $\mathcal{L}_{qp}$, $p \neq 1$, тоді і лише тоді, коли існує $\nu \in \mathbb{Z}$, таке що $\lambda = \dfrac{p}{q^\nu}$ і f має вигляд*

$$f(z) = cz^\nu \frac{P\left(\frac{z}{a_1}\right) \cdot ... \cdot P\left(\frac{z}{a_m}\right)}{P\left(\frac{z}{b_1}\right) \cdot ... \cdot P\left(\frac{z}{b_m}\right)},$$

де c – стала.

Наслідок 2.1.9. *Нехай $f \in \mathcal{L}_{qp}$. Якщо f голоморфна в $\mathbb{C}^*$, то $f(z) \equiv 0$ або існує $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, таке що $p = q^k$ і $f(z) = cz^k$, де c – стала. І навпаки, голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція вигляду $f(z) = cz^k$, де $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, c – стала, належить до класу $\mathcal{L}_{qp}$.*

Означення. *Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція f називається Жюліа винятковою* [2]*, якщо для деякого q, $0<|q|<1$, сім'я $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, де $f_n(z) = f(q^n z)$, є нормальною в $\mathbb{C}^*$.*

Через P_f позначимо множину полюсів p-локсодромної функції f.

Теорема 2.1.10. *Кожна функція $f \in \mathcal{L}_{qp}$ є Жюліа винятковою в $\mathbb{C}^* \setminus P_f$.*

Підрозділ 2.2 присвячений дослідженню ще одного узагальнення поняття локсодромності – модуль-локсодромних функцій.

Означення 2.2.1. *Нехай $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$. Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція f називається* ***модуль-локсодромною з мультиплікатором*** *q, якщо для всіх $z \in \mathbb{C}^*$*

$$|f(qz)| = |f(z)|.$$

Символом $|\mathcal{L}|_q$ позначаємо множину модуль-локсодромних функцій з мультиплікатором q.

[1] Hellegouarch, Y.: Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles. Academic Press (2002).

[2] Montel, P.: Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques at leurs applications. Gauthier-Villars, Paris (1927).

В цьому підрозділі доведено Теорему 2.2.2 про зв'язок між модуль-локсодромними та p-локсодромними функціями.

Позначимо клас p-локсодромних функцій з мультиплікатором q, де $p = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, через $\mathcal{L}_q^\alpha$.

Теорема 2.2.2. $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathbb{R}} \mathcal{L}_q^\alpha = |\mathcal{L}|_q$.

Як відомо, локсодромні функції тісно пов'язані з еліптичними, тому нашим завданням також було побудувати деяке узагальнення еліптичних функцій. Найпершим кроком у цьому напрямку стало вивчення так званих p-еліптичних функцій. Цей об'єкт розглянуто у підрозділі 2.3.

Означення 2.3.1. *Нехай ω_1, ω_2 – комплексні числа, такі що $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$. Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція g називається **p-еліптичною** з періодами ω_1, ω_2, якщо існує $p \in \mathbb{C}^*$, таке, що для всіх $u \in \mathbb{C}$*

$$g(u + \omega_1) = g(u), \quad g(u + \omega_2) = pg(u).$$

У підрозділі 2.3 проілюстровано зв'язок між p-локсодромними та p-еліптичними функціями.

Іншими словами, у розділі 2 зроблено перший крок у напрямку знаходження узагальнень локсодромних функцій, а саме знайдено мероморфні та голоморфні розв'язки функціонального рівняння

$$f(qz) = p(z)f(z),\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1$$

у випадку $p(z) \equiv const$. Природно, наступним кроком є розгляд випадку, коли $p(z)$ є функцією, не обов'язково сталою. Саме цьому присвячений **третій розділ**, який складається з трьох підрозділів.

У підрозділі 3.1 розглядаються функціональні рівняння

$$f(qz) = \frac{a}{z^m} f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad a \in \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{Z} \tag{3.13}$$

та

$$f(qz) = \frac{a}{(b-z)^m} f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*, \quad a, b \in \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{3.21}$$

Позначимо

$$H(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n z),\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1.$$

Доведено теореми, що описують вигляд мероморфних та голоморфних розв'язків рівнянь (3.13) і (3.21).

Теорема 3.1.6. *Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція f є розв'язком рівняння (3.13) тоді і лише тоді, коли*

$$f(z) = P^m((-1)^m z)g(z),$$

де $g \in \mathcal{L}_{qa}$.

Теорема 3.1.8. *Кожен голоморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння (3.13) можна зобразити у вигляді $f(z) = Cz^\nu \prod_{j=1}^{m} P\left(\frac{z}{c_j}\right)$, де $\nu \in \mathbb{Z}$, $c_1, c_2, \dots c_m$ – комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що $\prod_{j=1}^{m} c_j = (-1)^m a q^{-\nu}$, а C – стала.*

Теорема 3.1.9. *Якщо m – від'ємне ціле, то рівняння (3.13) не має голоморфних в $\mathbb{C}^*$ розв'язків.*

Теорема 3.1.11. *Мероморфна в $\mathbb{C}^*$ функція f є розв'язком рівняння (3.21) тоді і лише тоді, коли*

$$f(z) = H^m\left(\frac{z}{b}\right) g(z),$$

де $g \in \mathcal{L}_{qp}$, $p = \frac{a}{b^m}$.

Теорема 3.1.13. *Нехай $m \in \mathbb{N}$, $a = b^m q^k$, де k – додатне ціле. Тоді кожен голоморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння (3.21) має вигляд $f(z) = Cz^k H^m(\frac{z}{b})$, де C – стала.*

Теорема 3.1.14. *Якщо m – від'ємне ціле, то рівняння (3.21) не має голоморфних в $\mathbb{C}^*$ розв'язків.*

Застосування результатів підрозділу 3.1 надало можливість знайти мероморфні та голоморфні розв'язки функціонального рівняння

$$f(qz) = p(z)f(z),\ q \in \mathbb{C}^*,\ |q| < 1$$

у випадку коли $p(z)$ є раціональною функцією.

Нехай R – раціональна функція від z. Тоді R можна подати у вигляді

$$R(z) = Cz^m \frac{(a_1 - z)(a_2 - z)\dots(a_k - z)}{(b_1 - z)(b_2 - z)\dots(b_l - z)}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

де $a_1, a_2, \dots, a_k$ і $b_1, b_2, \dots, b_l$ – відмінні від 0 комплексні числа, не обов'язково різні, але такі, що $a_i \neq b_j$ для всіх i, j, а C – стала.

У підрозділі 3.2 розглянуто рівняння

$$f(qz) = R(z)f(z), \quad z \in \mathbb{C}^*. \tag{3.27}$$

і описано його мероморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки. Розв'язки рівняння (3.27) називатимемо ***раціонально-локсодромними функціями***. Основним результатом підрозділу 3.2 є нижче наведена теорема.

Теорема 3.2.2. *Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ та $b_1, b_2, \ldots, b_l$ – відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі, що $a_i \neq b_j$ для всіх i, j, C – стала, $m \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathcal{L}_{qp}$, де $p = C\frac{a_1 a_2 \ldots a_k}{b_1 b_2 \ldots b_l}$. Тоді кожен мероморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння (3.27) має вигляд*

$$f(z) = \frac{H(\frac{z}{b_1})H(\frac{z}{b_2}) \ldots H(\frac{z}{b_l})}{H(\frac{z}{a_1})H(\frac{z}{a_2}) \ldots H(\frac{z}{a_k})P^m((-1)^m z)} g(z).$$

Опираючись на результати підрозділу 3.1, отримуємо, що голоморфні в $\mathbb{C}^*$ розв'язки рівняння (3.27) існуватимуть лише за умови, що $R(z)$ матиме такий вигляд

$$R(z) = \frac{M(z)}{z^m (b_1 - z)(b_2 - z) \ldots (b_l - z)},$$

де $b_1, b_2, \ldots, b_l$ – відмінні від 0 комплексні числа, не обов'язково різні, $\deg M(z) = 0$ і $m \geq 0$. Тоді рівняння (3.27) набуде вигляду

$$f(qz) = \frac{M}{z^m (b_1 - z)(b_2 - z) \ldots (b_l - z)} f(z), \tag{3.31}$$

де $z \in \mathbb{C}^*$, $M = const$.

Теорема 3.3.2. *Кожен голоморфний в $\mathbb{C}^*$ розв'язок рівняння (3.31) можна записати у вигляді $f(z) = Cz^\nu \prod\limits_{i=1}^{l} H\left(\frac{z}{b_i}\right) \prod\limits_{j=1}^{m} P\left(\frac{z}{c_j}\right)$, де C – стала, $\nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $c_1, c_2, \ldots c_m$ – відмінні від нуля комплексні числа, не обов'язково різні, такі що $M = (-1)^m q^\nu \prod\limits_{i=1}^{l} b_i \prod\limits_{j=1}^{m} c_j$.*

Розділ 4 дисертації присвячений узагальненню теорії Вейєрштрасса еліптичних функцій. Основним отриманим узагальненням еліптичних функцій, є так звані квазі-еліптичні функції.

Означення 2.3.1. *Нехай $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція g називається **квазі-еліптичною**, якщо існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, такі що для всіх $u \in \mathbb{C}$*

$$g(u + \omega_1) = pg(u), \;\; g(u + \omega_2) = qg(u).$$

Символом $\mathcal{QE}$ позначаємо множину квазі-еліптичних функцій.

В підрозділі 4.1 висвітлено основні аспекти теорії квазі-еліптичних функцій, зокрема, показано, що квазі-еліптичні функції справді є узагальненням еліптичних; побудовано аналоги відомих $\wp$, σ та ζ-функцій Вейєрштрасса в теорії квазі-еліптичних функцій.

Позначимо

$$G_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) e^{i(m\alpha + n\beta)},$$

де $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Функція $G_{\alpha\beta}$ є мероморфною в $\mathbb{C}$.

Нехай

$$C_{\alpha\beta} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e^{i\alpha} G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{G_{\alpha\beta}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - e^{i\beta} G_{\alpha\beta}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)}{e^{i\beta} - 1}.$$

Якщо $\alpha = \beta = 0 \mod 2\pi$, то довизначимо $C_{00} = 0$.

Теорема 4.1.6. *Функція*

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = G_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta}$$

належить до класу $\mathcal{QE}$ *з* $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$.

Зрештою, бачимо, що $\wp_{00}$ збігається з класичною $\wp$-функцією Вейєрштрасса. Отже, $\wp_{\alpha\beta}$ справді є узагальненням класичного випадку.

Функцію $\wp_{\alpha\beta}$, визначену таким чином, називатимемо квазі-еліптичною $\wp$-функцією Вейєрштрасса.

Мероморфну функцію

$$\zeta_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{u} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right) e^{i(m\alpha + n\beta)},$$

де $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $m^2 + n^2 \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$, називатимемо узагальненою ζ-функцією Вейєрштрасса.

Слід зауважити, що у випадку $\alpha = \beta = 0 \mod 2\pi$, ζ_{00} дорівнює класичній ζ-функції Вейєрштрасса.

Розглянемо цілі функції

$$\sigma_{mn}(u) = \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{u^2}{2\omega^2}}, \quad m^2 + n^2 \neq 0,$$

і

$$\sigma_{00}(u) = u.$$

Ці функції ми вважаємо узагальненням σ-функції Вейєрштрасса для класу квазі-еліптичних функцій.

Відзначимо, що якщо розглядати добуток $\prod\limits_{m,n\in\mathbb{Z}}\sigma_{mn}(u)$, то отримаємо класичну σ-функцію Вейєрштрасса.

Нижче, подано рівності, які демонструють зв'язок між узагальненими функціями $\wp_{\alpha\beta}$, $\zeta_{\alpha\beta}$ та σ_{mn}

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = -\zeta'_{\alpha\beta}(u) + C_{\alpha\beta},$$

$$\zeta_{\alpha\beta}(u) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{i(m\alpha+n\beta)}\frac{\sigma'_{mn}(u)}{\sigma_{mn}(u)},$$

$$\wp_{\alpha\beta}(u) = C_{\alpha\beta} + \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{i(m\alpha+n\beta)}\frac{(\sigma'_{mn}(u))^2 - \sigma''_{mn}(u)\sigma_{mn}(u)}{\sigma^2_{mn}(u)}.$$

У підрозділі 4.2 наведено ще одне узагальнення еліптичних функцій – модуль-еліптичні функції.

Означення 4.2.1. *Мероморфна в $\mathbb{C}$ функція f називається* ***модуль-еліптичною****, якщо існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$, такі що $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ і для всіх $u \in \mathbb{C}$*

$$|f(u+\omega_1)| = |f(u)|, \;\; |f(u+\omega_2)| = |f(u)|.$$

Клас модуль-еліптичних функцій позначаємо символом $|\mathcal{E}|$.

Доведено теорему про зв'язок між модуль-еліптичними та квазі-еліптичними функціями.

Теорема 4.2.2. $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}} \mathcal{QE}_{\alpha\beta} = |\mathcal{E}|.$

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розв'язано низку актуальних задач теорії мероморфних функцій. Зміст отриманих результатів полягає в тому, що

- знайдено та описано всі мероморфні розв'язки функціонального рівняння $f(qz) = pf(z)$, $q, p \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$, які називатимемо p-локсодромними функціями;
- описано найпростіші властивості p-локсодромних функцій;
- доведено критерій p-локсодромності;
- отримано зображення голоморфної p-локсодромної функції;

– доведено теорему про співвідношення між кількістю нулів та полюсів p-локсодромної функції;

– досліджено розташування нулів та полюсів p-локсодромної функції та показано, що нулі та полюси p-локсодромної функції у випадку недодатного q лежать на логарифмічній спіралі, отримано зображення цієї логарифмічної спіралі;

– доведено Жюліа винятковість p-локсодромних функцій;

– зроблено порівняльний аналіз та окреслено основні відмінності між класичними локсодромними та p-локсодромними функціями;

– встановлено зв'язок між p-локсодромними та модуль-локсодромними функціями, а також між p-локсодромними та p-еліптичними функціями;

– знайдено і описано всі мероморфні та голоморфні розв'язки функціонального рівняння $f(qz) = R(z)f(z)$, $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$, де R – раціональна функція;

– введено клас квазі-еліптичних функцій;

– показано нетривіальність класу квазі-еліптичних функцій;

– для функцій з цього класу отримано аналоги деяких класичних теорем теорії еліптичних функцій;

– побудовано квазі-еліптичну функцію Вейєрштрасса – $\wp_{\alpha\beta}$, яка є безпосереднім узагальненням класичного випадку;

– знайдено аналоги ζ- та σ-функцій Вейєрштрасса для класу квазі-еліптичних функцій;

– показано зв'язок та співвідношення між узагальненими функціями Вейєрштрасса $\wp_{\alpha\beta}$, $\zeta_{\alpha\beta}$ та σ_{mn};

– встановлено зв'язок між квазі-еліптичними та p-локсодромними функціями, а також між квазі-еліптичними та модуль-еліптичними функціями, які є ще одним альтернативним узагальненням еліптичних функцій.

Основні результати дисертації є новими і носять завершений характер.

Достовірність результатів дисертації підтверджується чіткими та розлогими доведеннями, а також тим, що вони опубліковані у фахових журналах і були оприлюднені на багатьох міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях і спеціалізованих наукових семінарах.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Khoroshchak, V.S., Khrystiyanyn, A.Ya., Lukivska, D.V.: A class of Julia exceptional functions. Карпатські математичні публікації. **8** (1), 172–180 (2016). doi:10.15330/cmp.8.1.172-180.

2. Kondratyuk, A., Khoroshchak, V., Lukivska, D.: p-Elliptic functions. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **81**, 121–129 (2016).

3. Lukivska, D.: Generalization of the Weierstrass $\wp$, ζ and σ functions. Буковинський Математичний Журнал. **4** № 1-2, 107–109 (2016).

4. Луківська, Дз. В.: Деякі голоморфні узагальнення локсодромних функцій. Укр. мат. журн. **69** № 9, 1284–1288 (2017).

   (Lukivs'ka, Dz. V.: Some Holomorphic Generalizations of Loxodromic Functions. Ukr. Math. J. **69** No. 9, 1490 – 1495 (2018). doi.org/10.1007/s11253-018-1449-4)

5. Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Some generalizations of p-loxodromic functions. Вісник Харківського університету ім. В. Н. Каразіна. Серія мат.,прикл.мат. і стат. **86**, 18–25 (2017). doi: 10.26565/2221-5646-2017-86-03.

6. Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: On some generalizations of p-loxodromic functions. Буковинський Математичний Журнал. **5** № 1-2, 144–148 (2017).

7. Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Modulo-elliptic and modulo-loxodromic functions. Буковинський Математичний Журнал. **5** № 3-4, 88–89 (2017).

8. Khrystiyanyn, A., Lukivska, Dz.: Quasi-elliptic functions. Ufa Math. J. **9** № 4, 129–136 (2017).

9. Луківська, Дз. В., Христіянин, А. Я.: Про раціонально локсодромні голоморфні функції. Укр. мат. журн. **69** № 11, 1505–1514 (2017).

10. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: Quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the International Conference of Mathematics and Computer Science "Congressio mathematica": pp. 36–37. Rzeszow (Poland), 23–25 September 2015.

11. Khoroshchak, V. S., Lukivska, D. V.: A subclass of quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the International Conference of Mathematics and Computer Science "Congressio mathematica": pp. 35–36. Rzeszow (Poland), 23–25 September 2015.

12. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: Quasi-loxodromic meromorphic functions. In: Abstracts of the III International Conference: "Spectral Problems, Nonlinear and Complex Analysis": pp. 86–87. Bashkir State University, Ufa, 01–03.10.2015.

13. Kondratyuk, A. A., Lukivska, D. V.: The linear space $\mathcal{L}_{qp}$. Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": с. 86–87. смт. Ворохта, 24–27.02.2016 р.

14. Khrystiyanyn, A. Ya., Lukivska, D. V.: Quasi-elliptic functions. Матеріали II Всеукраїнської наукової конференції, присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики": с. 12–13. м. Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.

15. Lukivska, D. V.: Some generalizations of p-loxodromic functions. Матеріали II Всеукраїнської наукової конференції, присвяченої 55-річчю кафедри вищої математики Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу "Прикладні задачі математики": с. 13–14. м. Івано-Франківськ, 13–15 жовтня 2016 р.

16. Луківська, Дз. В., Христіянин, А. Я.: Раціонально локсодромні мероморфні функції. Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу": с. 99–101. смт. Ворохта, 22–25 лютого 2017 р.

17. Луківська, Дз. В., Христіянин, А. Я.: Квазі-еліптичні функції. Тези доповідей XII Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз": с. 9–10. с. Колочава, 10–23 липня 2017 р.

18. Lukivska, Dz. V., Khrystiyanyn, A. Ya.: Quasi-elliptic functions. International conference in Functional Analysis. Book of abstracts: p. 124. Lviv, 18–23 September 2017.

АНОТАЦІЯ

Луківська Дз. В. Властивості узагальнених локсодромних та еліптичних функцій. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

В роботі вперше введено таке поняття як *p-локсодромна функція*, доведено критерій p-локсодромності, знайдено зображення голоморфної p-локсодромної функції, доведено теорему про кількість нулів та полюсів p-локсодромної функції, знайдено вигляд логарифмічної спіралі, на якій розташовані нулі та полюси p-локсодромної функції, встановлено Жюліа винятковість p-локсодромних функцій. Також запропоновано ще одне суттєве узагальнення поняття локсодромності – *раціонально-локсодромні функції*.

Вперше введено поняття *квазі-еліптичної функції*. Побудовано аналоги відомих $\wp$, ζ та σ-функцій Вейєрштрасса в теорії квазі-еліптичних функцій, встановлено зв'язок квазі-еліптичних функцій з p-локсодромними функціями.

Ключові слова: p-локсодромна функція, модуль-локсодромна функція, раціонально-локсодромна функція, квазі-еліптична функція, модуль-еліптична функція, первинна функція Шотткі-Кляйна, Жюліа винятковість, $\wp$-функція Вейєрштрасса, ζ-функція Вейєрштрасса, σ-функція Вейєрштрасса.

АННОТАЦИЯ

Лукивська Дз. В. Свойства обобщенных локсодромических и эллиптических функций. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2018.

В работе впервые введено такое понятие как *p-локсодромическая функция*, доказано критерий p-локсодромичности, найдено изображение голоморфной p-локсодромической функции, доказана теорема о количестве нулей и полюсов p-локсодромической функции, найдено вид логарифмической спирали, на которой расположены нули и полюса p-локсодромической функции, установлена Жюлиа исключительность p-локсодромических функций. Также предложено еще одно существенное обобщение понятия p-локсодромичности – *рационально-локсодромические функции*.

Впервые введено понятие *квази-эллиптической функции*. Построены аналоги известных $\wp$, ζ и σ-функций Вейєрштрасса в теории квази-эллиптических функций, установлено связь между квази-эллиптическими и p-локсодромическими функциями.

Ключевые слова: p-локсодромическая функция, модуль-локсодромическая функция, рационально-локсодромическая функция, квази-эллиптическая функция, модуль-эллиптическая функция, первичная функция Шоттки-Клейна, Жюлиа исключительность, $\wp$-функция Вейєрштрасса, ζ-функция Вейєрштрасса, σ-функция Вейєрштрасса.

ABSTRACT

Lukivska Dz. V. The properties of generalized loxodromic and generalized elliptic functions. – On the rights of manuscript.

PhD Thesis for a degree in physics and mathematics, speciality 01.01.01 «Mathematical Analysis». – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018.

The PhD Thesis is devoted to a generalization of loxodromic and elliptic functions.

Let $q \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $|q| < 1$. A meromorphic in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ function f is said to be *loxodromic of multiplicator* q if for every $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ holds $f(qz) = f(z)$.

A meromorphic in $\mathbb{C}$ function g is called *elliptic*, if there exist $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, such that $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$ and for every $u \in \mathbb{C}$ hold

$$g(u+\omega_1) = g(u),\ g(u+\omega_2) = g(u).$$

We introduce for the first time the notion of *p-loxodromic function* (a meromorphic in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ function f, such that for every $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $f(qz) = pf(z)$ for some fixed q, $p \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $|q| < 1$); the criterion of p-loxodromicity is proved; the representation of holomorphic p-loxodromic function is found; the theorem about the number of zeros and poles of p-loxodromic function is proved; a logarithmic spiral, containing zeros and poles of p-loxodromic function is found; a Julia exceptionality of p-loxodromic functions is established.

The PhD Thesis also contains another generalization of loxodromicity, namely *rationally-loxodromic functions*, i. e. meromorphic in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ functions f, such that for some $q \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $|q| < 1$ and for every $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ satisfy the following condition $f(qz) = R(z)f(z)$, where R is a rational function.

Also, the notion of quasi-elliptic function is introduced. Let $p = e^{i\alpha}$, $q = e^{i\beta}$, where α, $\beta \in \mathbb{R}$. A meromorphic in $\mathbb{C}$ function g is called *quasi-elliptic*, if there exist $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, such that for every $u \in \mathbb{C}$

$$g(u+\omega_1) = pg(u),\ \ g(u+\omega_2) = qg(u).$$

For the class of quasi-elliptic function analogues of the classic Weierstrass $\wp$, ζ and σ-functions are constructed. The connection between quasi-elliptic and p-loxodromic functions is obtained.

Additionally, the PhD Thesis also contains alternative generalizations of loxodromic and elliptic functions, so called modulo-loxodromic and modulo-elliptic functions. The theorems, which describe relations between the classes of modulo-loxodromic and p-loxodromic as well as between modulo-elliptic and quasi-elliptic functions are proved.

Key words: p-loxodromic function, modulo-loxodromic function, rationally-loxodromic function, quasi-elliptic function, modulo-elliptic function, the Schottky-Klein prime function, Julia exceptionality, the Weierstrass $\wp$-function, the Weierstrass ζ-function, the Weierstrass σ-function.