Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Бандура Андрій Іванович

УДК 517.55

ВЛАСТИВОСТІ КЛАСІВ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ІНДЕКСУ

01.01.01 - математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії функцій і теорії ймовірностей
Львівського національного університету імені Івана Франка
Міністерства освіти і науки України

Науковий консультант:
доктор фізико-математичних наук, професор
Скасків Олег Богданович,
професор кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей
Львівського національного університету імені Івана Франка.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор
Фаворов Сергій Юрійович,
професор кафедри фундаментальної математики
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Савчук Віктор Васильович,
провідний науковий співробітник відділу теорії функцій
Інституту математики Національної академії наук України;

доктор фізико-математичних наук, професор
Боднар Дмитро Ількович,
професор кафедри економічної кібернетики та інформатики
Тернопільського національного економічного університету.

Захист відбудеться "___" листопада 2018 р. о ___ год
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18
у Львівському національному університеті імені Івана Франка
за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою:
м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий "___" вересня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **А. Я. Христіянин**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Аналітична теорія диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними виникла ще в дев'ятнадцятому столітті. Її теоретичним опертям стали результати О. Коші, С. Ковалевської, Ф. Фробеніуса, Е. Хольмґрена. Їхні здобутки такі, як теорема Коші - Ковалевської про існування та єдиність задачі Коші для рівняння з частинними похідними з аналітичними коефіцієнтами, чи теорема Фробеніуса про інтегровність системи рівнянь з частинними похідними (так званої системи Пфаффа) або теорема єдиності Хольмґрена стали основою, на якій наступні покоління математиків побудували струнку теорію. Ще тоді ж Ш. Бріо та Ж. Буке (1875) сформулювали таку задачу: „Випадки, коли можна проінтегрувати диференціальне рівняння, надзвичайно рідкісні і їх варто розглядати як виняток; але ми можемо розглядати диференціальне рівняння як визначення деякої функції і пропонувати вивчати властивості цієї функції на основі вигляду диференціального рівняння.“ Так була поставлена давня велика наукова проблема в аналітичній теорії диференціальних рівнянь — проблема опису властивостей їхніх розв'язків.

Зважаючи на її загальність, інші математики ставили конкретніші питання, пов'язані з аналітичними властивостями розв'язків диференціальних рівнянь. Зокрема, тривалий час лишається нерозв'язаною відома класична проблема 1.35 з коментарями О. Е. Єременка зі збірника проблем У. Хеймана (1984) про визначення верхніх та нижніх оцінок зростання цілих та мероморфних розв'язків алгебраїчних диференціальних рівнянь. Як слушно він зауважує там, існують певні оцінки зростання усіх мероморфних та цілих розв'язків алгебраїчних диференціальних рівнянь першого порядку. Вони отримані як самим О. Е. Єременком (1982), так і А. А. Гольдбергом (1956) та А. Мальмквістом (1920). Натомість для рівнянь другого порядку відомо, що порядок їхніх цілих розв'язків є додатним. Інші цікаві результати про вигляд та поводження мероморфних розв'язків рівнянь другого порядку за додаткових припущень отримав Н. Штайнмец (1980,1982). Тим не менш, У. Хейман (1996) вказує приклади рівнянь другого порядку, що не задовольняють умови Штайнмеца і для яких водночас невідомо, чи вони мають розв'язки нескінченного порядку зростання. Крім того, досі залишається неспростованою давня гіпотеза У. Хеймана про те, що $\ln|f(z)| \leq \exp_n(|z|)$ для цілих розв'язків алгебраїчних диференціальних рівнянь n-го порядку.

Проте більшість результатів свідчить, що великі класи диференціальних рівнянь мають своїми розв'язками аналітичні функції, які в тому чи іншому сенсі мають певні "регулярні властивості". Тим паче, що кожен розв'язок лінійного диференційного рівняння з цілими коефіцієнтами і старшим коефіцієнтом рівним одиниці локально є аналітичною функцією і за теоремою про монодромію допускає ціле продовження (тобто, на всю комплексну площину), яка за звичайними теоремами єдиності з теорії аналітичних функцій задовольняє те ж саме рівняння. Тому, тривалий час виглядала досить вірогідною гіпотеза видатного аналітика Б. Я. Левіна у формулюванні В. П. Петренка (1984) про те, що кожен цілий розв'язок скінченного порядку лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку з цілими коефіцієнтами має також цілком регулярне зростання. У такій постановці ця гіпотеза була спростована А. А. Гольдбергом (1994), який показав,

що довільна ціла функція f з нулями порядку щонайбільше $n-1$ задовольняє деяке лінійне однорідне диференціальне рівняння $n-$го порядку. Уточнена постановка цієї задачі з додатковою умовою цілком регулярного зростання коефіцієнтів рівняння відома в літературі під назвою проблеми Гольдберга - Островського - Петренка (GOP-проблема). У недавній статті І. Лайне, Я. Хейтокангаса, К. Тохґе та Ч.-Т. Вен (2015) написано, що ця проблема досі залишається відкритою.

Серед методів дослідження властивостей розв'язків диференціальних рівнянь найрізноманітнішого вигляду одне з центральних місць займає теорія Вімана - Валірона, методи якої віддавна продемонстрували свою ефективність. Зокрема, У. Хейман скористався цими методами для отримання оцінок зростання розв'язків, виділивши підклас алгебраїчних диференціальних рівнянь n-го порядку, цілі розв'язки яких мають скінченний порядок, що не перевищує деякої сталої, залежної від степенів многочленів, які входять у рівняння. Надалі М. М. Шеремета й О. Б. Скасків разом зі своїми учнями ефективно розвинули методи типу Вімана-Валірона в класах аналітичних функцій, зображуваних рядами Діріхле та деякими загальнішими об'єктами. І. Е. Чижиков зі своїми учнями зуміли закласти підвалини подібного підходу до дробових похідних, довівши аналог одного з основних співвідношень теорії в цьому випадку та застосувавши його до оцінки зростання розв'язків деяких рівнянь з дробовими похідними. Проте класична теорія Вімана-Валірона стосується в основному властивостей цілих функцій, що задані своїми степеневими розвиненнями, та їхніх похідних. Вже навіть у випадку аналітичних функцій в одиничному крузі не все так прозоро, як у випадку цілих функцій, не говорячи вже про випадок аналітичних функцій у довільній кратно-круговій області.

З іншого боку в цілому ряді випадків тонкі інструменти для дослідження властивостей аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь, зокрема, згаданої вище гіпотези Хеймана, дає теорія аналітичних функцій обмеженого індексу. Ця теорія започаткована Б. Лепсоном (1968) і Дж. Макдоннелом (1957) та розроблена зусиллями С. Шаха, Г. Фріке, Р. Роя, М. М. Шеремети, О. Б. Скасківа, І. Е. Чижикова, А. Д. Кузика, В. О. Кушніра, М. Т. Бордуляк, Ю. С. Трухана, Ф. Нурая, Р. Патерсона та інших. Варто зазначити, що аналітичні функції обмеженого l-індексу мають цілий ряд "регулярних властивостей". Зокрема, в них у певному сенсі обмежений (рівномірний) розподіл значень. Відомий такий факт (У. Хейман, 1973), що аналітична функція має обмежений l-розподіл значень тоді і тільки тоді, коли її похідна має обмежений l-індекс. Функції з таких класів допускають апріорні оцінки швидкості їхнього зростання, а також є розв'язками диференціальних рівнянь за прозорих умов на аналітичні коефіцієнти цих рівнянь. Звідси, зокрема, щоразу для класу диференціальних рівнянь, обмеженість l-індексу розв'язків яких встановлюється, випливає доведення згаданої гіпотези У. Хеймана про максимально можливу швидкість зростання розв'язків у порівнянні зі швидкістю зростання коефіцієнтів диференціального рівняння.

У зв'язку з викладеним вище є безсумнівним важливе значення досліджень різноманітних класів аналітичних функцій обмеженого l-індексу. Зрозуміло, що задачі, подібні до описаних вище, актуальні не лише для функцій з $\mathbb{C}$, а й для функцій з $\mathbb{C}^n$. Зазначимо, що у теорії аналітичних функцій від декількох комплексних змінних є дві провідні групи методів. Перша з них ґрунтується на вла-

стивостях, які можна отримати з властивостей аналітичних функцій від однієї змінної, розглядаючи дану функцію F, як аналітичну функцію за кожною змінною окремо. Цей підхід породжує поняття обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, в означенні якого містяться усі можливі частинні похідні. Інша група методів обумовлена дослідженням так званих „зрізок“ функції, тобто, аналітичних функцій від однієї змінної $g(\tau) = F(a + b\tau), \tau \in \mathbb{C}$, які є звуженнями аналітичної функції F на довільні комплексні прямі $\{z = a + b\tau : \tau \in \mathbb{C}\}$, $a, b \in \mathbb{C}^n$. Відповідно, це призводить до поняття обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, яке використовує похідні за напрямком.

Крім самого n-вимірного комплексного простору, важливими геометричними об'єктами у ньому є куля та полікруг. Відкриті кулі та відкриті полікруги біголоморфно не еквівалентні між собою. Зате саме на таких об'єктах добре розробляти методи багатовимірного комплексного аналізу.

Зважаючи на вищезгадане, виникає необхідність розгляду таких класів функцій 1) цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком; 2) цілі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних; 3) аналітичні в кулі функції обмеженого L-індексу за напрямком; 4) аналітичні в кулі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних; 5) аналітичні в полікрузі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних; 6) мероморфні функції від однієї змінної. Для кожного з цих класів потрібно знайти не лише критерії приналежності до них, а й на основі знайдених критеріїв розробити або вдосконалити підходи до дослідження обмеженості індексу аналітичних розв'язків диференційних рівнянь та рівнянь з частинними похідними. Насправді перехід у $\mathbb{C}^n$ та введення в розгляд поняття функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних вимагає дослідження систем рівнянь з частинними похідними, а також знаходження оцінки їхніх аналітичних розв'язків через сталі, що залежать від коефіцієнтів. Приклад функції $\exp(z_1 z_2)$, яка має необмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних для довільної функції $\mathbf{L}(z) = (l_1(z_1), l_2(z_2))$, і обмежений L-індекс для функції $\mathbf{L}(z) = (|z_2| + 1, |z_1| + 1)$, призводить до появи припущення, зрештою і реалізованого у дисертації, що для виникнення можливості досліджувати довільну цілу функцію від декількох комплексних змінних з обмеженою кратністю нульових точок потрібно вибирати вектор-функцію $\mathbf{L}$ загального вигляду.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Львівського національного університету імені Івана Франка. Дисертаційна робота є складовою частиною досліджень за держбюджетними темами Мг–58Ф “Асимптотичні методи дослідження гармонійних та аналітичних функцій, зображених випадковими рядами, інтегралами Лапласа–Стільтьєса та їх узагальненнями” (номер держреєстрації 0110 U 001365), Мг–145Ф “Нові комплексно–ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами” (номер держреєстрації 0113 U 003051), Мг–159Ф “Методи комплексного та гармонійного аналізу в теорії аналітичних функцій в банахових просторах” (номер держреєстрації 0113 U 000184), що виконувались на кафедрі теорії функцій і теорії ймовірностей.

Мета і завдання дослідження. *Мета дисертації* — розширення теорії цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком і обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за су-

купністю змінних, побудова теорії аналітичних у кулі чи полікрузі функцій обмеженого L-індексу за напрямком або обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, а також їхнє застосування в аналітичній теорії диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними та їхніх систем. *Об'єкт* дослідження: цілі та аналітичні в кулі чи полікрузі функції від декількох змінних обмеженого L-індексу за напрямком та обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, цілі та аналітичні в крузі чи в площині з виколотою точкою функції від однієї змінної. *Предмет* дослідження: асимптотичні та локальні властивості функцій з розглядуваних класів, аналітичних розв'язків рівнянь з частинними похідними та їхніх систем.

Задачі дослідження:

— ввести гнучке поняття обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій від декількох змінних, яке б дозволило досліджувати властивості будь-яких цілих функцій з обмеженою кратністю нульових точок, а також отримати критерії приналежності цілих функцій для цього класу;

— ввести гнучке поняття обмеженості L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для аналітичних в одиничній кулі функцій, яке б дозволило досліджувати властивості будь-яких аналітичних в одиничній кулі функцій з особливостями на одиничній сфері, а також отримати критерії приналежності аналітичних функцій для цього класу;

— знайти точні оцінки зростання логарифма максимуму модуля функцій з відповідних класів на колі чи кістяку полікруга;

— виділити клас цілих функцій необмеженого індексу за будь-яким напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ таких, що на кожній зрізці вигляду $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ вони мають обмежений індекс та знайти функцію L, для якої такі цілі функції матимуть обмежений L-індекс за тим напрямком (задача А. А. Кондратюка);

— довести гіпотезу про можливість послаблення достатніх умов обмеженості L-індексу за напрямком для цілих функцій (оцінка максимуму модуля, мінімуму модуля, логарифмічний критерій) шляхом заміни квантора загальності на квантор існування;

— довести гіпотезу М. М. Шеремети про обмеженість l-індексу деяких композицій аналітичних функцій від однієї змінної, встановити умови обмеженості L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних деяких композицій цілих функцій від декількох змінних;

— дослідити обмеженість l-індексу цілих розв'язків рівняння $w^{(p)} = f(z, w)$, де $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ — ціла функція;

— знайти достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних цілих чи аналітичних в кулі розв'язків систем рівнянь з частинними похідними загальнішого вигляду, ніж відомі досі, та отримати точні оцінки їхнього зростання через параметри, обумовлені коефіцієнтами систем;

— застосувати вичерпування багатовимірного комплексного простору кулями для встановлення нових характеристичних властивостей цілих та аналітичних в кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних;

— отримати аналог логарифмічного критерію та оцінки максимуму модуля через мінімум модуля для цілих та аналітичних в кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних;

— з'ясувати, чи умову „F голоморфна в $\mathbb{C}^n$“ можна замінити на умову „F —

голоморфна на усіх зрізках вигляду $z^0 + t\mathbf{b}$“ у теорії цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком та отримати при цьому аналоги всіх тверджень (питання С. Ю. Фаворова);

— для аналітичних в полікрузі та у кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних вивести аналог теореми Хеймана, з'ясувати поводження коефіцієнтів розвинення у степеневий ряд;

Для розв'язання поставлених задач використовуються методи теорії функцій, багатовимірного комплексного аналізу, аналітичної теорії диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, а також певні прийоми з праць А. А. Гольдберга, М. М. Шеремети та їхніх учнів.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. У роботі вперше отримано такі результати:

— узагальнено поняття обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій від декількох змінних з використанням вектор-функцій $\mathbf{L}$ загальнішого вигляду, встановлено критерії приналежності цілих функцій до цього класу, теореми існування та інші властивості;

— узагальнено поняття обмеженості L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для аналітичних в одиничній кулі функцій, досліджено характеристичні властивості функцій з цих класів;

— знайдено точні оцінки зростання логарифма максимуму модуля функцій з цих класів функцій обмеженого індексу на колі чи кістяку полікруга;

— виділено клас цілих функцій необмеженого індексу за будь-яким напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ таких, що на кожній зрізці вигляду $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ вони мають обмежений індекс та знайдено функцію L, для якої деякі цілі функції з описаною властивістю матимуть обмежений L-індекс за тим самим напрямком;

— повністю доведено гіпотезу про можливість послаблення достатніх умов обмеженості L-індексу за напрямком для цілих функцій (оцінка максимуму модуля, мінімуму модуля на колі, логарифмічний критерій) через заміну квантора загальності на квантор існування;

— доведено достатність гіпотези М. М. Шеремети про обмеженість l-індексу деяких композицій аналітичних функцій від однієї змінної, встановлено достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних деяких композицій цілих функцій;

— отримано достатні умови обмеженості l-індексу цілих розв'язків диференціального рівняння $w^{(p)} = f(z, w)$, де $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ — ціла функція;

— знайдено достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних цілих та аналітичних в кулі розв'язків спеціальних систем лінійних рівнянь з частинними похідними вищих порядків та отримано точні оцінки їхнього зростання через параметри, залежні від коефіцієнтів систем;

— виявлено нові характеристичні властивості цілих та аналітичних в кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних через оцінку максимуму модуля таких функцій на сфері замість кістяка полікруга;

— вперше отримано аналоги логарифмічного критерію у вигляді достатніх умов та оцінки максимуму модуля через мінімум модуля для цілих та аналітичних в кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних;

— доведено побудовою відповідного прикладу, що умову „F голоморфна в $\mathbb{C}^n$“ неможливо замінити на умову „F — голоморфна на усіх зрізках вигляду $z^0 + t\mathbf{b}$“ у теорії цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком та отримати при цьому аналоги всіх тверджень;

— встановлено аналог теореми Хеймана для аналітичних в кулі та у полікрузі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних та описано поводження коефіцієнтів розвинення у степеневий ряд.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер та є вагомим внеском у теорію голоморфних функцій від декількох змінних. Зокрема, в теорію цілих функцій та функцій, аналітичних у кулі або у полікрузі. Вони можуть бути застосовані в аналітичній теорії звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, а також їхніх систем.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У спільних з науковим консультантом працях О. Б. Скасківу належать постановка задач, визначення загальної схеми дослідження та обговорення отриманих результатів. У спільній статті із М. М. Шереметою [27] співавтору належать постановка проблем та обговорення отриманих результатів. В опублікованій статті [18] М. Т. Бордуляк належать доведення теорем 3, 4, 5, 6 у випадку, коли $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$. Переробка їхніх доведень під загальніший клас функцій вигляду $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, $z \in \mathbb{C}^n$, а також доведення теорем 7, 8 належать здобувачу. У статті [5] П. В. Філевич — автор теорем 5 та 6, решта тверджень належать здобувачу. У статтях з Н. В. Петречко здобувач — автор теореми 2 з [20], теореми 5.1 з [4], теореми 2 з [25], теореми 2 з [7] і теорем 2-3 з [19]. Решта тверджень з вказаних чотирьох праць належать Н. В. Петречко. Твердження, отримані співавторами здобувача, включені у рукопис дисертації лишень у випадку, коли вони потрібні для подальших викладок. Для відмінності вони пронумеровані римськими цифрами та наводяться без доведень.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на 23 міжнародних та всеукраїнських конференціях, літніх школах та міжнародних семінарах, вичерпний перелік яких наведений нижче у списку праць, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації.

Про результати дисертації неодноразово доповідалося на Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. А. А. Кондратюк, проф. О. Б. Скасків у 2011-2016, тепер проф. М. В. Заболоцький, проф. О. Б. Скасків, проф. П. В. Філевич, проф. І. Е. Чижиков у 2017-2018) та на семінарі з теорії потенціалу та застосувань (керівники проф. О. Б. Скасків, проф. І. Е. Чижиков, 2012-2016), на семінарі „Analyse géometrique“ у лабораторії імені Поля Пенлеве, університет Лілль-1, Франція, 14 лютого 2014 року (керівники — проф. С. М. Івашкович, проф. Л. Бланш-Сенті); засіданнях математичної комісії Наукового Товариства ім. Шевченка (Львів, 27 березня 2015 року і 29 березня 2018 року); міському семінарі з теорії функцій в Харківському національному університеті ім. В. Н. Каразіна, 5 квітня 2018 року (керівники — проф. С. Ю. Фаворов, проф. Л. Б. Голінський), семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник — проф. А. С. Романюк, 11 травня 2018 року), семінарі кафе-

дри математичного аналізу Житомирського державного університету ім. І. Франка (керівники — проф. Є. О. Севостьянов, проф. А. О. Погоруй, 18 травня 2018 року), семінарі відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник — проф. С. А. Плакса, 29 травня 2018 року), семінарі „Сучасний аналіз“ у Київському національному університеті ім. Т. Г. Шевченка (керівники — проф. І. О. Шевчук, проф. О. О. Курченко, проф. В. М. Радченко, 30 травня 2018 року), а також на інших семінарах.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 60 роботах, 31 з них (в тому числі 13 статей) опубліковано без співавторів, 29 статей в українських та закордонних фахових виданнях із фізико-математичних наук, 11 статей надруковано в українських та закордонних виданнях [1–8,10,27,29], що включені до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus), 2 — монографії [30,31], 29 тез конференцій.

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, 7 розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 352 сторінки. Основний текст дисертації викладено на 339 сторінках. Список використаних джерел містить 297 найменувань та займає 13 сторінок. Дисертація містить чотири рисунки.

Основний зміст дисертації

У вступі обґрунтовується актуальність теми, дається короткий огляд результатів, що мають безпосереднє відношення до теми роботи, та загальна характеристика дисертації.

У розділі 1 наведено огляд праць, що стосуються обмеженості l-індексу, L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, а також формулюються основні результати дисертації.

Розділ 2 присвячений аналітичним в кулі функціям обмеженого L-індексу за напрямком. Нехай $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ — заданий напрямок, $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, $L : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція така, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n$ $L(z) > \frac{\beta|\mathbf{b}|}{1-|z|}$, $\beta = \mathrm{const} > 1$.

Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ називається функцією *обмеженого L-індексу за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{B}^n$ справджується така нерівність

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)|}{m! L^m(z)} \leq \max_{0 \leq k \leq m_0} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k! L^k(z)}, \tag{1}$$

де $\partial_{\mathbf{b}}^0 F(z) = F(z), \partial_{\mathbf{b}} F(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$, $\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = \partial_{\mathbf{b}}\Big(\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} F(z)\Big)$, $k \geq 2$.

Найменше таке ціле число $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ називається *L-індексом за напрямком* $\mathbf{b}$ *аналітичної функції* $F(z)$ *та позначається через* $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = m_0$.

Для $\eta \in [0, \beta]$ визначимо $\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta, L) = \inf_{z \in \mathbb{B}^n} \inf \{L(z + t\mathbf{b})/L(z) : |t| \leq \eta/L(z)\}$ та $\lambda_2^{\mathbf{b}}(z, \eta, L) = \sup_{z \in \mathbb{B}^n} \sup \{L(z + t\mathbf{b})/L(z) : |t| \leq \eta/L(z)\}$. Через $Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$ визначимо клас усіх функцій L таких, що для всіх $\eta \in [0, \beta]$ $\;0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta, L) \leq \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta, L) < +\infty$. Нехай $\mathbb{D} \equiv \mathbb{B}^1$, $Q_\beta(\mathbb{D}) \equiv Q_{1,\beta}(\mathbb{D})$.

Наступна теорема 2.1 з якісної точки зору є новою в теорії функцій обмеженого індексу, бо замість скрізь щільної множини на гіперплощині, розглядається скрізь щільна множина на послідовності сфер, збіжній до межі кулі.

Теорема 2.1. *Нехай (r_p) — додатна послідовність така, що $r_p \to 1$ при $p \to \infty$, $D_p = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z| = r_p\}$, A_p — скрізь щільна множина в D_p (тобто, $\overline{A}_p = D_p$) та $A = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} A_p$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існує число $M > 0$ таке, що для всіх $z^0 \in A$ функція $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$ є обмеженого l_{z^0}-індексу $N(g_{z^0}, l_{z^0}) \leq M < +\infty$, як функція від змінної t, де $l_{z^0}(t) \equiv L(z^0 + t\mathbf{b})$, причому $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n) = \max\{N(g_{z^0}, l_{z^0}) : z^0 \in A\}$.*

Теорема 2.2. *Нехай $\beta > 1$ та $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли для кожного η, $0 < \eta \leq \beta$, існує $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ та $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$ таке, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n$ існує $k_0 = k_0(z) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, для якого справджується така нерівність*

$$\max\{|\partial_{\mathbf{b}}^{k_0} F(z + t\mathbf{b})| : |t| \leq \eta / L(z)\} \leq P_1 |\partial_{\mathbf{b}}^{k_0} F(z)|. \tag{2}$$

Використовуючи теорему 2.2, доводиться такий критерій обмеженості L-індексу за напрямком.

Теорема 2.3. *Нехай $\beta > 1$, $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого r_1 та будь-якого r_2 при $0 < r_1 < r_2 \leq \beta$, знайдеться $P_1 = P_1(r_1, r_2) \geq 1$ таке, що для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\max\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r_2}{L(z^0)}\right\} \leq P_1 \max\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t| = \frac{r_1}{L(z_0)}\right\}$.*

Нижче наводимо критерій, який є аналогом теореми Хеймана. Він зручний для отримання достатніх умов обмеженості L-індексу за напрямком та оцінок зростання аналітичних розв'язків рівнянь з частинними похідними.

Теорема 2.4. *Нехай $\beta > 1$ та $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли існують $p \in \mathbb{Z}_+$ та $C > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n$ справедлива така нерівність $\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{L^{p+1}(z)} \leq C \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{k} F(z)|}{L^{k}(z)} : \ 0 \leq k \leq p\right\}$.*

Наступна теорема забезпечує оцінку максимуму модуля аналітичної функції на колі вздовж зрізки за напрямком через її мінімум модуля. Вона носить допоміжний характер, але досить важлива для доведення логарифмічного критерію.

Теорема 2.5. *Нехай $\beta > 1$ та $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$. Аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція $F(z)$ є обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного R, $0 < R \leq \beta$, знайдуться числа $P_2(R) \geq 1$ та $\eta(R) \in (0, R)$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$ та деякого $r = r(z^0) \in [\eta(R), R]$ виконується нерівність*

$$\max\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : |t| = r/L(z^0)\right\} \leq P_2 \min\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| : \ |t| = r/L(z^0)\right\}. \tag{3}$$

Наступний критерій обмеженості L-індексу за напрямком описує поводження логарифмічної похідної за напрямком та розподіл нулів аналітичної в кулі функції. Відповідне твердження для цього класу голоморфних функцій, а також для інших, часто називатимемо для стислості логарифмічним критерієм. Нехай

$g_{z^0}(t) := F(z^0 + t\mathbf{b})$. Якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\quad g_{z^0}(t) \neq 0$ для всіх $t \in S_{z^0}$, то приймемо за означенням $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \emptyset$; якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\quad g_{z^0}(t) \equiv 0$, то позначаємо $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \{z^0 + t\mathbf{b} \colon t \in S_{z^0}\}$. А якщо при деякому $z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\ g_{z^0}(t) \not\equiv 0$ та a_k^0 — нулі $g_{z^0}(t)$, тобто, $F(z^0 + a_k^0\mathbf{b}) = 0$, то вважаємо, що

$$G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) := \bigcup_k \left\{z^0 + t\mathbf{b} \colon |t - a_k^0| \leq r/L(z^0 + a_k^0\mathbf{b})\right\}, \quad r > 0.$$

Нехай $G_r^{\mathbf{b}}(F) = \bigcup_{z^0 \in \mathbb{B}^n} G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0)$. Через $n\big(r, z^0, 1/F\big) = \sum_{|a_k^0| \leq r} 1$ позначимо лічильну функцію нулів a_k^0.

Теорема 2.6. *Нехай $F(z)$ — аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція, $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$ та $\mathbb{B}^n \setminus G_\beta^{\mathbf{b}}(F) \neq \emptyset$. $F(z)$ має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли:*

1) *для кожного $r \in (0, \beta]$ існує $P = P(r) > 0$ таке, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(F)$ $\left|\frac{1}{F(z)} \frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq PL(z)$;*

2) *для кожного $r \in (0, \beta]$ знайдеться $\widetilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$ при $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$ $\quad n\left(\frac{r}{L(z^0)}, z^0, \frac{1}{F}\right) \leq \widetilde{n}(r)$.*

Розглянемо таке рівняння з частинними похідними

$$g_0(z)\partial_{\mathbf{b}}^p w + g_1(z)\partial_{\mathbf{b}}^{p-1} w + \ldots + g_p(z) w = h(z). \tag{4}$$

Для цього рівняння правильна така теорема, яка забезпечує достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком аналітичних у кулі його розв'язків та доводиться із використанням логарифмічного критерію.

Теорема 2.7. *Нехай $\beta > 1$, $L \in Q_{\mathbf{b},\beta}(\mathbb{B}^n)$, $g_0(z), \ldots, g_p(z), h(z)$ — аналітичні в $\mathbb{B}^n$ функції обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, $\mathbb{B}^n \setminus G_\beta^{\mathbf{b}}(g_0) \neq \emptyset$ та для кожного $r \in (0; \beta]$ існує $T = T(r) > 0$ таке, що для кожного $z \in \mathbb{B}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(g_0)$ та $j = 1, \ldots, p$ виконується нерівність $|g_j(z)| \leq TL^j(z)|g_0(z)|$. Тоді аналітична функція $F(z)$, $z \in \mathbb{B}^n$, яка задовольняє рівняння (4), має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.*

За допомогою аналога теореми Хеймана у дисертації отримано оцінки зростання функцій з цього класу (теорема 2.8), які полягають у виконанні такої нерівності $\overline{\lim}_{r \to (1-|z^0|)/|\mathbf{b}|} \frac{\ln |F(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})|}{\int_0^r L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b})dt} \leq N_{\mathbf{b}}(F, L) + 1$ за певних умов на функцію L.

У розділі 3 вивчаються аналітичні в кулі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Нам потрібні деякі типові позначення. Позначимо $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$, $\mathbf{1}_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{–те місце}}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $|z| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2}$. Для $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ використовуватимемо формальні позначення без порушення умов існування відповідних виразів $AB = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n)$, $A/B = (a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n)$, $A^B = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{b_n}$, а запис $A < B$ означає, що $a_j < b_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; подібним чином визначається відношення $A \leq B$. Для

$K=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ позначимо $K!=k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!$, $\|K\|=k_1+\dots+k_n$. Додавання, скалярне множення та спряження визначені в $\mathbb{C}^n$ покомпонентно. Для $z\in\mathbb{C}^n$ та $w\in\mathbb{C}^n$ визначимо $\langle z,w\rangle=z_1\overline{w}_1+\dots+z_n\overline{w}_n$, де $\overline{w}_k$ — комплексно спряжене число до w_k. Полікруг $\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z_j-z_j^0|<r_j,\ j=1,\dots,n\}$ позначаємо через $\mathbb{D}^n(z^0,R)$, його кістяк $\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z_j-z_j^0|=r_j,\ j=1,\dots,n\}$ — через $\mathbb{T}^n(z^0,R)$, замкнений полікруг $\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z_j-z_j^0|\le r_j,\ j=1,\dots,n\}$ — через $\mathbb{D}^n[z^0,R]$, $\mathbb{D}^n=\mathbb{D}^n(\mathbf{0},\mathbf{1})$. Відкрита куля $\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z-z^0|<r\}$ позначається через $\mathbb{B}^n(z^0,r)$, її топологічна межа — це сфера $\mathbb{S}^n(z^0,r)=\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z-z^0|=r\}$, замкнена куля $\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z-z^0|\le r\}$ — через $\mathbb{B}^n[z^0,r]$, $\mathbb{B}^n=\mathbb{B}^n(\mathbf{0},1)$, $\mathbb{D}=\mathbb{B}^1=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$.

Для $K=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ та частинних похідних аналітичної в $\mathbb{B}^n$ функції $F(z)=F(z_1,\dots,z_n)$ використовуємо запис $F^{(K)}(z)=\frac{\partial^{\|K\|}F}{\partial z^K}=\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}F}{\partial z_1^{k_1}\dots\partial z_n^{k_n}}$. Нехай $\mathbf{L}(z)=(l_1(z),\dots,l_n(z))$, де $l_j(z):\mathbb{B}^n\to\mathbb{R}_+$ — неперервна функція така, що

$$(\forall z\in\mathbb{B}^n):\ l_j(z)>\beta/(1-|z|),\ j\in\{1,\dots,n\},\tag{5}$$

де $\beta>\sqrt{n}$ — деяка стала.

Аналітична функція $F\colon\mathbb{B}^n\to\mathbb{C}$ називається функцією *обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу (за сукупністю змінних),* якщо існує $n_0\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{B}^n$ та всіх $J\in\mathbb{Z}_+^n$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)}\le\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:\ K\in\mathbb{Z}_+^n,\ \|K\|\le n_0\right\}.\tag{6}$$

Найменше таке ціле число n_0 називається $\mathbf{L}$*-індексом за сукупністю змінних функції* F та позначається через $N(F,\mathbf{L},\mathbb{B}^n)$.

Через $Q(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас функцій $\mathbf{L}$, які задовольняють (5) та таку умову для кожного $j\in\{1,\dots,n\}$ та деякого $R=(r_1,\dots,r_n)$

$$\sup_{z,w\in\mathbb{B}^n}\left\{\frac{l_j(z)}{l_j(w)}:\ |z_k-w_k|\le\frac{r_k}{\min\{l_k(z),l_k(w)\}},k\in\{1,\dots,n\}\right\}<\infty.\tag{7}$$

Наступна теорема є базовою при встановленні ефективніших критеріїв обмеженості індексу, які формулюються в термінах поводження максимуму модуля на колі (кістяку полікруга) чи в термінах обмежень на логарифмічну похідну.

Теорема 3.1. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^n)$. *Аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і тільки тоді, коли для кожного* $R\in\mathbb{R}_+^n$, $|R|\le\beta$, *знайдеться* $n_0\in\mathbb{Z}_+$, $p_0>0$ *таке, що для всіх* $z^0\in\mathbb{B}^n$ *існує* $K^0\in\mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\|\le n_0$, *та* $\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}:\ \|K\|\le n_0,\ z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\}\le p_0\frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}$.

Теорема 3.2. *Нехай* $\mathbf{L}\in Q(\mathbb{B}^n)$. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних необхідно, аби для кожного* $R\in\mathbb{R}_+^n$, $|R|\le\beta$, $\exists n_0\in\mathbb{Z}_+$ $\exists p\ge1$ $\forall z^0\in\mathbb{B}^n$ $\exists K^0\in\mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\|\le n_0$, *та* $\max\left\{|F^{(K^0)}(z)|:z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\}\le p|F^{(K^0)}(z^0)|$ *і досить, щоб для кожного* $R\in\mathbb{R}_+^n$, $|R|\le\beta$, $\exists n_0\in\mathbb{Z}_+$ $\exists p\ge1$ $\forall z^0\in\mathbb{B}^n$ $\forall j\in\{1,\dots,n\}$ $\exists K_j^0=k_j^0\cdot\mathbf{1}_j$ *таке, що* $k_j^0\le n_0$ *та* $\max\left\{|F^{(K_j^0)}(z)|:z\in\mathbb{D}^n\left[z^0,R/\mathbf{L}(z^0)\right]\right\}\le p|F^{(K_j^0)}(z^0)|$.

Для аналітичної функції $F:\mathbb{B}^n\to\mathbb{C}$ покладемо $M(r,z^0,F)=\max\{|F(z)|:z\in\mathbb{T}^n(z^0,r)\}$, де $z^0\in\mathbb{B}^n$, $r\in\mathbb{R}_+^n$.

Теорема 3.3. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$, $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ *— аналітична функція. Якщо існують* R', $R'' \in \mathbb{R}^n_+$, $R' < R''$, $|R''| < \beta$ *та* $p_1 = p_1(R', R'') \geq 1$ *такі, що для кожного* $z^0 \in \mathbb{B}^n$

$$M\left(R''/\mathbf{L}(z^0), z^0, F\right) \leq p_1 M\left(R'/\mathbf{L}(z^0), z^0, F\right), \tag{8}$$

то F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Також справедливі такі відповідні необхідні умови до теореми 3.3, але в них стверджується виконання нерівності (8) для будь-яких R', $R'' \in \mathbb{R}^n_+$, деякої сталої $p_1 = p_1(R', R'') \geq 1$ та кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$.

Наступна теорема є аналогом теореми Хеймана для аналітичних в кулі функцій. Цей аналог нами застосовується до дослідження властивостей аналітичних розв'язків систем рівнянь з частинними похідними.

Теорема 3.5. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Аналітична функція* F *в* $\mathbb{B}^n$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних тоді і лише тоді, коли знайдуться* $p \in \mathbb{Z}_+$ *та* $c \in \mathbb{R}_+$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n$

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{\mathbf{L}^J(z)} : \ \|J\| = p+1\right\} \leq c \cdot \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{\mathbf{L}^K(z)} : \ \|K\| \leq p\right\}. \tag{9}$$

Зв'язок між обмеженістю L-індексу за напрямком та $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних встановлює така теорема.

Теорема 3.6. *Нехай* $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* l_j*-індекс за напрямком* $\mathbf{1}_j$ *для кожного* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *то* F *є обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних.*

Позначимо $[0, 2\pi]^n = \underbrace{[0, 2\pi] \times \cdots \times [0, 2\pi]}_{n \text{ раз}}$. Для $R = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in [0, 2\pi]^n$, $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ писатимемо $Re^{i\Theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_n e^{i\theta_n})$, $arg\, A = (arg\, a_1, \ldots, arg\, a_n)$.

Через $K(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L} = (l_1, \ldots, l_n)$, де $l_j : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}_+$ задовольняє (5) та існує $c \geq 1$ таке, що для будь-якого $R \in \mathbb{R}^n_+$ при $|R| < 1$ та $j \in \{1, \ldots, n\}$ $\max_{\Theta_1, \Theta_2 \in [0, 2\pi]^n} \frac{l_j(Re^{i\Theta_2})}{l_j(Re^{i\Theta_1})} \leq c$. У випадку $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|, \ldots, |z_n|), \ldots, l_n(|z_1|, \ldots, |z_n|))$ маємо, що $\mathbf{L} \in K(\mathbb{B}^n)$. Для простоти запису позначимо $M(F, R) = \max\{|F(z)| \colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}$, де $|R| < 1$.

Теорема 3.10. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n) \cap K(\mathbb{B}^n)$, $\beta > c\sqrt{n}$. *Якщо аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то*

$$\ln M(F, R) = O\left(\min_{\sigma_n \in \mathcal{S}_n} \min_{\Theta \in [0, 2\pi]^n} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{r_j} l_j(R(j, \sigma_n, t) e^{i\Theta}) dt\right) \text{ при } |R| \to 1 - 0,$$

де σ_n *— перестановка* $\{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{S}_n$ *— множина усіх перестановок* $\{1, \ldots, n\}$,

$$R(j, \sigma_n, t) = (r'_1, \ldots, r'_n),\ r'_k = \begin{cases} r^0_k, & \text{якщо } \sigma_n(k) < j, \\ t, & \text{якщо } k = j, \\ r_k, & \text{якщо } \sigma_n(k) > j, \end{cases} \quad k \in \{1, \ldots, n\},\ R^0 = (r^0_1, \ldots, r^0_n)$$

— фіксований радіус.

Наш основний результат про зростання аналітичних в кулі функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних має такий вигляд.

Теорема 3.12. *Нехай* $\mathbf{L}(R) = (l_1(R), \ldots, l_n(R))$, $l_j(R)$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* r_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $|R| < 1$. *Якщо*

функція $\mathbf{L}$ *задовольняє* (5) *та аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F, \mathbf{L})$ *за сукупністю змінних, то*

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon\ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R)\rangle d\tau} \le N + 1.$$

Позначимо $\ell(z) = \min_{1\le j\le n} l_j(z)$, $\mathcal{L}(z) = \max_{1\le j\le n} l_j(z)$. Через $Q'(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}$, які задовольняють умову $(\forall r \in [0, \beta],\ j \in \{1, \dots, n\})\colon\ 0 < \lambda_{1,j}(r) \le \lambda_{2,j}(r) < \infty$, де $\lambda_{1,j}(r) = \inf\limits_{z^0\in\mathbb{B}^n} \inf\left\{l_j(z)/l_j(z^0) : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\right\}$, $\lambda_{2,j}(r) = \sup\limits_{z^0\in\mathbb{B}^n} \sup\left\{l_j(z)/l_j(z^0) : z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)\right]\right\}$.Тут такі позначення $\lambda_{1,j}(r)$, $\lambda_{2,j}(r)$ дійсні лише для теореми 3.13.

Основний результат про вичерпування кулями для аналітичних в одиничній кулі функцій має такий вигляд.

Теорема 3.13. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q'(\mathbb{B}^n)$. *Для того, щоб аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція* F *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних необхідно, аби для кожного* $r \in (0, \beta]$ *існували* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, $p_0 > 0$ *такі, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *знайдеться* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \le n_0$, *для якого*

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\mathcal{L}(z^0)\right]\right\} \le p_0 \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}$$

і досить, щоб для кожного $r \in (0, \beta]$ *знайшлися* $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ *та* $p_0 > 0$ *такі, що для будь-якого* $z^0 \in \mathbb{B}^n$ *існує* $K^0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|K^0\| \le n_0$, *для якого*

$$\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)}\colon \|K\| \le n_0,\ z \in \mathbb{B}^n\left[z^0, r/\ell(z^0)|\right]\right\} \le p_0 \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}.$$

Нехай $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ — додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною r_k, $k \in \{1, \dots, n\}$, $|R| < 1$, $\Theta \in [0, 2\pi]^n$. Через $W(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}$ таких, що $r^*(-(u_j(t, R, \Theta))'_{t=r^*})^+/(r_j l_j^2(Re^{i\Theta})) \to 0$ рівномірно для всіх $\Theta \in [0, 2\pi]^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$, при $|R| \to 1 - 0$.

Сформулюємо твердження, які дають оцінки зростання аналітичних розв'язків такої системи рівнянь з частинними похідними:

$$G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)F^{(p_j\mathbf{1}_j)}(z) + \sum_{\|S_j\|\le p_j-1} G_{S_j}(z)F^{(S_j)}(z) = H_j(z),\ j \in \{1, \dots, n\} \tag{10}$$

$p_j \in \mathbb{N}$, $S_j \in \mathbb{Z}_+^n$, H_j та G_{S_j} — аналітичні функції в $\mathbb{B}^n$. Позначимо $QW(\mathbb{B}^n) = Q(\mathbb{B}^n) \cap W(\mathbb{B}^n)$.

Кажемо, що неоднорідна система рівнянь з частинними похідними вигляду (10) належить до класу $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{L})$, якщо $\mathbf{L} \in QW(\mathbb{B}^n)$, для всіх $z \in \mathbb{B}^n$ та для кожного $j \in \{1, \dots, n\}$ аналітичні в $\mathbb{B}^n$ функції H_j та G_{S_j} задовольняють такі умови:

1) для кожного $\|S_j\| \le p_j - 1$ та для будь-якого $M \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|M\| \le 1 + \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$, $\left|G_{S_j}^{(M)}(z)\right| \mathbf{L}^{S_j-M}(z) \le B_{S_j,M} l_j^{p_j}(z)|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|$, $\left|G_{p_j\mathbf{1}_j}^{(M)}(z)\right| \le B_{p_j\mathbf{1}_j,M}\mathbf{L}^M(z)|G_{p_j\mathbf{1}_j}(z)|$,

2) для кожного $I \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|I\| = 1 + \sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^n p_k$, $\left|H_j^{(I)}(z)\right| \le D_{I,j}\mathbf{L}^I(z)|H_j(z)|$,

3) $G_{p_j\mathbf{1}_j}(z) \neq 0$,
де $B_{S_j,M}$, $D_{I,j}$, $B_{p_j\mathbf{1}_j,M}$ — додатні сталі, $\mathbf{H}(z) = (H_1(z), \ldots, H_n(z))$, $\mathbf{G}(z)$ — матриця, утворена з коефіцієнтів $G_{S_J}(z)$ системи (10).

Теорема 3.14. *Якщо неоднорідна система рівнянь з частинними похідними вигляду* (10) *належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{L})$ *та аналітична функція* $F(z)$ *у* $\mathbb{B}^n$ *задовольняє* (10), *то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to 1-0} \frac{\ln \max\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R e^{i\Theta})\rangle d\tau} \leq \max\{1, c\},$$

де c *— деяка стала, залежна від* $B_{S_j,M}$, $D_{I,j}$, $B_{p_j\mathbf{1}_j,M}$.

Якщо система (10) — однорідна ($H_j(z) \equiv 0$), то попередня теорема спроститься, бо формула для сталої c набуде іншого вигляду і дещо зміняться умови в означенні класу $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{L})$.

Нехай Z_F — нульова множина аналітичної в $\mathbb{B}^n$ функції F. Позначимо

$$G_R(F) = \bigcup_{z^0\in Z_F} \mathbb{D}^n\left(z^0, R/\mathbf{L}(z^0)\right).$$

Теорема 3.16. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$, F *— аналітична в* $\mathbb{B}^n$ *функція. Якщо* $\exists R \in \mathbb{R}^n_+$ *з* $r_j \in (0, \frac{\beta}{2\sqrt{n}})$, $\exists p_2 \geq 1$ $\exists \Theta \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{0} < \Theta < R$, $\exists R' > \mathbf{0}$ ($R' = \mathbf{0}$ *для* $Z_F = \emptyset$) *таке, що* $\forall z^0 \in \mathbb{B}^n$ $\exists R^0 = R^0(z^0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\Theta \leq R^0 \leq R$, *для якого*

$$\operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \cap G_{R'}(F)\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta}) l_j(z^0)}$$

$$\max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq p_2 \min\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \setminus G_{R'}(F)\right\},$$

то функція F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних (*meas *— лебегова міра на кістяку полікруга).*

Теорема 3.17. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$. *Якщо аналітична функція* $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ *задовольняє такі умови:*

1) *для кожного* $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \leq \beta$, *існує* $p_1 = p_1(R) > 0$ *таке, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n \setminus G_R(F)$ *та для кожного* $j \in \{1, \ldots, n\}$ $\frac{1}{|F(z)|}\left|\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right| \leq p_1 l_j(z)$,

2) *для будь-яких* $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \leq \beta$, *та* $R' \geq \mathbf{0}$ *існує* $p_2 = p_2(R, R') \geq 1$ *таке, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{B}^n$, *що* $T^n(z^0, \frac{R}{\mathbb{L}(z^0)}) \setminus G_{R'}(F) = \bigcup_i C_i \neq \emptyset$, *де* C_i *— зв'язні неперетинні множини, виконується принаймні одна з таких умов а)* $\max\limits_i \min\limits_{z\in C_i} |F(z)| \leq p_2 \min\limits_i \min\limits_{z\in C_i} |F(z)|$, *або б)* $\max\limits_i \max\limits_{z\in C_i} |F(z)| \leq p_2 \min\limits_i \max\limits_{z\in C_i} |F(z)|$, *або в)* $|F(z^*)| = \max_i \max_{z\in C_i} |F(z)|$, $|F(z^{**})| = \min_i \min_{z\in C_i} |F(z)|$, *і* z^*, z^{**} *належать до однієї і тієї самої множини* C_{i_0}

3) *для кожного* $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \leq \beta$, *існують* $\Theta, R' \in \mathbb{R}^n_+$, $0 < \theta_j < \frac{2r_j}{2+3\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta})}$, *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n$

$$meas\left\{G_{R'}(F) \cap \mathbb{D}^n\left[z, R/\mathbf{L}(z)\right]\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j(r_j - \theta_j)}{\lambda_{2,j}(\boldsymbol{\beta}) l_j^2(z)},$$

то F має обмежений $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних (тут $meas$ — це $2n$-вимірна лебегова міра).*

Теорема 3.7. *Нехай $F(z)$ — аналітична в $\mathbb{B}^n$ функція, $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{B}^n)$ та для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\mathbb{B}^n \setminus G^{\mathbf{1}_j}_{\beta/\sqrt{n}}(F) \neq \emptyset$. Якщо для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджуються такі умови:*

1) *для будь-якого $r \in (0; \beta/\sqrt{n}]$ існує $P_j = P_j(r) > 0$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n \setminus G^{\mathbf{1}_j}_r(F)$ $\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right| \leq P_j l_j(z)$;*

2) *для будь-якого $r > 0$ існує $\widetilde{n}_j(r) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$, для яких $F(z^0 + t\mathbf{1}_j) \not\equiv 0$, $n_{\mathbf{1}_j}\left(\frac{r}{l_j(z^0)}, z^0, \frac{1}{F}\right) \leq \widetilde{n}_j(r)$,*

то $F(z)$ має обмежений $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

У розділі 4 розглядаються аналітичні в полікрузі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. У цьому розділі залишаються чинними позначення із розділу 3. Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j(z)\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервні функції такі, що $(\forall z \in \mathbb{D}^n)$ $l_j(z) > \beta/(1 - |z_j|)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, а $\beta > 1$ — деяка стала, $\boldsymbol{\beta} := (\beta, \ldots, \beta) \in \mathbb{R}^n$. Тоді через $Q(\mathbb{D}^n)$ позначимо клас неперервних вектор-функцій $\mathbf{L} = (l_1, \ldots, l_n) : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n_+$, які $(\forall R = (r_1, \ldots, r_n) \in [0, \beta]^n)$ $(\forall j \in \{1, \ldots, n\})$ задовольняють умову (7), де $\sup_{(z,w)\in\mathbb{B}^n}$ замінено на $\sup_{(z,w)\in\mathbb{D}^n}$.

Аналітична функція $F\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ називається функцією *обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу (за сукупністю змінних),* якщо існує $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ така, що для всіх $z \in \mathbb{D}^n$ та кожного $J \in \mathbb{Z}^n_+$ виконується нерівність (6) Стисло опишемо наші результати для аналітичних у полікрузі функцій. Зокрема, теорема 4.1 за своїм формулювання подібна до наведеної вище теореми 3.2 для аналітичних в кулі функцій. Відмінності полягають в іншому виборі радіусів, точок та дещо інших умовах на вектор-функцію $\mathbf{L}$.

Також згадаємо наш результат для $n = 2$, тобто, для аналітичних в одиничному бікрузі функцій. Теорема 4.2 в дисертації є аналогом відомої теореми Хеймана, встановленої ним для цілих функцій обмеженого індексу від однієї комплексної змінної. За формулюванням вона подібна до теореми 3.5, але тепер відповідні умови повинні виконуватися для точок з бікруга.

Нехай $z^0 \in \mathbb{D}^2$. Розвинемо аналітичну в $\mathbb{D}^2$ функцію $F(z)$ у степеневий ряд, записаний у діагональній формі

$$F(z) = \sum_{k_1+k_2=0}^{\infty} p_{k_1+k_2}((z_1 - z_1^0), (z_2 - z_2^0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1+j_2=k} b_{j_1,j_2}(z_1 - z_1^0)^{j_1}(z_2 - z_2^0)^{j_2}, \tag{11}$$

де p_k — однорідні многочлени степеня k, $b_{j_1,j_2} = \frac{F^{(j_1,j_2)}(z^0)}{j_1! j_2!}$. Многочлен $p_{k_0}, k_0 \in \mathbb{Z}_+$, називається головним у степеневому розвиненні (11) на $\mathbb{T}^2(z^0, R)$, якщо для кожного $z \in \mathbb{T}^2(z^0, R)$ правильна нерівність

$$|\sum_{k_1+k_2\neq k^0} p_{k_1+k_2}((z_1 - z_1^0), (z_2 - z_2^0))| \leq \frac{1}{2}\max\{|b_{j_1,j_2}| r_1^{j_1} r_2^{j_2} \colon j_1 + j_2 = k^0\}.$$

Теорема 4.3. *Нехай $\beta > 1$, $\mathbf{L} \in Q(\mathbb{D}^2)$. Якщо існують $p \in \mathbb{Z}_+$, $d \in (0; 1]$, $\eta \in (0; d)$ такі, що для кожного $z^0 \in \mathbb{D}^2$ та деякого $R = (r_1, r_2)$ при $r_j = r_j(d, z^0) \in$*

(η, d), $j \in \{1, 2\}$, *і певного* $k^0 = k^0(d, z^0) \le p$ *многочлен* p_{k^0} *є головним у ряді* (11) *на* $\mathbb{T}^2(z^0, R/\mathbf{L}(z^0))$, *то аналітична в* $\mathbb{D}^2$ *функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

У розділі 5 об'єктом вивчення є цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком. У ньому використовуються позначення з розділу 2. Нагадаємо означення функцій з цього класу. Нехай $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція.

Ціла функція $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ називається функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{C}^n$ справджується нерівність (1). Найменше таке ціле число m_0, для якого виконується (1), називається L-індексом за напрямком функції F та позначається через $N_{\mathbf{b}}(F, L)$. Якщо такого m_0 не існує, то покладемо $N_{\mathbf{b}}(F, L) = \infty$, а F називатимемо функцією необмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$.

Нові результати, отримані у цьому розділі для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком істотно посилюють раніше встановлені нами твердження і їхньою основною принциповою відмінністю від результатів з кандидатської дисертації здобувача, полягають у заміні в достатніх умовах з відповідних критеріїв квантора загальності на квантор існування. Тобто, з огляду на цю обставину, для того, щоб переконатися в обмеженості L-індексу за напрямком заданої функції, достатньо перевірити виконання певних нерівностей лише при деякому фіксованому значенні параметра (для кіл одного радіуса), а не для всіх можливих його значень. Цю ідею нам вдалося послідовно реалізувати для всіх основних критеріїв, а також при встановленні достатніх умов обмеженості L-індексу за напрямком цілих розв'язків рівнянь з частинними похідними.

Допоміжний клас $Q^n_{\mathbf{b}}$ означаємо так: існує $\eta \ge 0$

$$\lambda_{\mathbf{b}}(\eta) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \sup_{t_1, t_2 \in \mathbb{C}} \left\{ \frac{L(z + t_1\mathbf{b})}{L(z + t_2\mathbf{b})} \colon |t_1 - t_2| \le \frac{\eta}{\min\{L(z + t_1\mathbf{b}), L(z + t_2\mathbf{b})\}} \right\} < \infty.$$

Використовуючи ідею Г. Фріке, отримали модифікацію одного критерію зі слабшими достатніми умовами обмеженості L-індексу за напрямком.

Теорема 5.4. *Нехай* $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$. *Якщо існують сталі* $\eta > 0$, $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ *та* $P_1 = P_1(\eta) \ge 1$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n$ *існує* $k_0 = k_0(z) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le k_0 \le n_0$, *для якого виконується нерівність* (2), *то ціла функція* $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *є функцією обмеженого* L*-індексу за напрямком* $\mathbf{b}$.

Теорема 5.5. *Нехай* $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, F *— ціла функція в* $\mathbb{C}^n$. *Якщо існують* $R > 0$, $P_2 \ge 1$ *та* $\eta \in (0, R)$ *такі, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *та деякого* $r = r(z^0) \in [\eta, R]$ *виконується нерівність* (3), *то* F *має обмежений* L*-індекс за напрямком* $\mathbf{b}$.

Позначимо $G_r(F) := G^{\mathbf{b}}_r(F) \bigcup_{z\colon F(z)=0} \{z + t\mathbf{b} \colon |t| < r/L(z)\}$, a^0_k - нулі функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ при фіксованому $z^0 \in \mathbb{C}^n$. Через $n_{z^0}(r, F) = n_{\mathbf{b}}\big(r, z^0, 1/F\big) := \sum_{|a^0_k| \le r} 1$ позначимо лічильну функцію нулів a^0_k функції зрізки $F(z^0 + t\mathbf{b})$ в крузі $\{t \in \mathbb{C} \colon |t| \le r\}$. Якщо для заданого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та для всіх $t \in \mathbb{C}$ $F(z^0 + t\mathbf{b}) \equiv 0$, то ми покладемо $n_{z^0}(r) = -1$. Позначимо $n(r) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} n_z(r/L(z))$.

Теорема 5.6. *Нехай* $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$, $F(z)$ *— ціла функція в* $\mathbb{C}^n$. *Якщо виконуються такі умови:*

1) *існують* $r_1 > 0$, $P > 0$ *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n \backslash G_{r_1}(F)$ $\left|\frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z)}{F(z)}\right| \le P$;
2) *знайдеться* $r_2 > 0$ *таке, що* $n(r_2) \in [-1; \infty)$ *та* $2r_1 \cdot n(r_2) < r_2/\lambda_{\mathbf{b}}(r_2)$, *де* r_1 *— вибране з попередньої умови,*

то функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Зауважимо, що теореми 5.5 та 5.6 є новими навіть для цілих функцій від однієї змінної та $l \equiv 1$.

Тепер розглянемо таке рівняння з частинними похідними

$$g_0(z)\partial_{\mathbf{b}}^p w + g_1(z)\partial_{\mathbf{b}}^{p-1} w + \ldots + g_p(z)w = h(z), \tag{12}$$

де g_j, h — цілі функції в $\mathbb{C}^n$, $j \in \{0, 1, \ldots, p\}$. У кандидатській дисертації здобувача було отримано достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком для цілих розв'язків рівняння (12). У них, по суті, вимагається, щоб деякі нерівності повинні виконувалися зовні кругів будь-якого радіуса. Замінюючи квантор загальності на квантор існування, ми послабили ці умови.

Позначимо $g^*(z) = h(z) \cdot \prod_{j=0}^p g_j(z)$, $n(r, g^*) = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}^n} n_{\mathbf{b}}(r/L(z), z, 1/g^*)$, $r^* = \sup\limits_{s\geq 1} \frac{(s-1)\lambda_1(s)}{8(n(s,g^*)+1)}$. Справедлива така теорема.

Теорема 5.7. *Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$, та $g_0(z), \ldots, g_p(z), h(z)$ — цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Припустимо, що існують $r \in (0; r^*)$ та $T > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_r(g_0)$ та $j = 1, \ldots, p$ виконуються нерівності $|g_j(z)| \leq TL^j(z)|g_0(z)|$. Тоді ціла функція F, яка задовольняє (12), має обмежений L-індекс за напрямком* $\mathbf{b}$.

Це твердження також є новим в одновимірному випадку.

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$w^{(p)} = f(z, w). \tag{13}$$

С. М. Шах, Ґ. Фріке, М. М. Шеремета, А. Д. Кузик та інші не вивчали обмеженість індексу цілого розв'язку рівняння (13), тому що права частина рівняння є функцією від двох змінних. Проте, зважаючи на теорію функцій обмеженого L-індексу за напрямком, цілком природно поставити відповідне питання.

Теорема 5.8. *Нехай $l_j \in Q_{\mathbf{1}_j}^2$, $f(z, w)$ — ціла функція обмеженого l_j-індексу за напрямками $\mathbf{1}_j$ для кожного $j \in \{1, 2\}$. Якщо існує $C > 0$ та $l \in Q$ такі, що для всіх $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus (G_r^{\mathbf{1}_1}(f) \cup G_r^{\mathbf{1}_2}(f))$*

$$l_1(z, w) + l_2(z, w)|f(z, w)| \leq Cl(z),$$

то кожна ціла функція, що задовольняє (13), має обмежений l-індекс.

Як застосування теореми 5.8, ми розглянемо алгебраїчне диференціальне рівняння такого типу:

$$w^{(p)} = g(z) + \sum_{j=0}^{k} a_j w^j, \ a_j \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

Наслідок 5.2. *Нехай $g(z)$ — ціла функція обмеженого l-індексу, $l^*(z) := l(z) + |g(z)|$, $l^* \in Q$. Тоді кожна ціла функція, яка задовольняє (14), має обмежений l^*-індекс.*

Зважаючи на те, що обмеженості L-індексу за напрямком для цілої функції F необхідно і досить, щоби були рівномірно обмежені l_z-індекси ($l_z = L(z + t\mathbf{b})$) функції-зрізки $F(z + t\mathbf{b})$ по всіх $z \in \mathbb{C}^n$, у свій час виникло таке природне *питання*: чи існує ціла функція $F(z)$ з $N(g_{z^0}, l_{z^0}) < +\infty$ для кожного $z^0 \in \mathbb{C}^n$, але $N_{\mathbf{b}}(F, L) = +\infty$?

Нижче вітку квадратного кореня з комплексного числа вибираємо на основі умови $\sqrt{1}=1$. Ствердна відповідь на згадане питання отримана ще в кандидатській дисертації здобувача. Там доведено, що $F(z_1,z_2)=\cos\sqrt{z_1z_2}$ має необмежений індекс за напрямком $(1,1)$. Але традиційно розв'язування одних проблем призводить до виникнення інших. У нашому випадку цікавим є таке питання:

Проблема 1 ([22, Проблема 17]). *Які умови на нульову множину та зростання цілих функцій забезпечують обмеженість індексу функції $F(z_1^0+b_1t,z_2^0+b_2t)$ для кожної фіксованої точки $(z_1^0,z_2^0)\in\mathbb{C}^2$ та необмеженість індексу функції $F(z_1,z_2)$ за напрямком $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$?*

Відповідь дає така теорема.

Теорема 5.1. *Нехай $f(t)$, $t\in\mathbb{C}$, — парна ціла трансцендентна функція обмеженого індексу. Тоді: 1) для кожного напрямку $\mathbf{b}=(b_1,b_2)\in\mathbb{C}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ та кожної фіксованої пари z_1^0, $z_2^0\in\mathbb{C}$ функція $g(t)=f(\sqrt{(z_1^0+b_1t)(z_2^0+b_2t)})$ є цілою функцією обмеженого індексу ($t\in\mathbb{C}$); 2) функція $f(\sqrt{z_1z_2})$ є необмеженого індексу за кожним напрямком $\mathbf{b}$.*

Зважаючи на описані властивості функції $F(z_1,z_2)=\cos\sqrt{z_1z_2}$, на львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій (2007) проф. А. А. Кондратюк поставив **питання**:

Проблема 2. *Якою є найменша неперервна функція $L:\mathbb{C}^2\to\mathbb{R}_+$, що гарантуватиме обмеженість L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$ функції $F(z_1,z_2)=\cos\sqrt{z_1z_2}$?*

Використовуючи підхід через рівняння з частинними похідними, дано відповідь на питання Кондратюка в теоремі 5.10, згідно з якою ця функція має обмежений $L_{\varepsilon,\mathbf{b}}$-індекс за напрямком $\mathbf{b}$, де

$$L_{\varepsilon,\mathbf{b}}(z_1,z_2):=\begin{cases}\frac{|b_1z_2+b_2z_1|}{\sqrt{|z_1z_2|}}+1, & |z_1z_2|>\varepsilon^2,\\ \frac{|b_1z_2+b_2z_1|}{\varepsilon}+1, & |z_1z_2|\le\varepsilon^2.\end{cases}$$

Насправді на шляху пошуку відповіді на питання А. А. Кондратюка нами встановлено дещо більше. Опишемо ці результати. Розглянемо такі рівняння з похідними за напрямком $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$

$$z_1z_2(b_1z_2+b_2z_1)\partial_{\mathbf{b}}^2F(z)+\frac{(b_1z_2-b_2z_1)^2}{2}\partial_{\mathbf{b}}F(z)+\frac{(b_1z_2+b_2z_1)^3}{4}F(z)=0 \qquad (15)$$

для $b_1\neq0,\ b_2\neq0$ та

$$4z_1\partial_{\mathbf{b}}^2F(z)+2b_1\partial_{\mathbf{b}}F(z)+b_1^2z_2F(z)=0,\ \text{для } b_1\neq0,\ b_2=0. \qquad (16)$$

Для $b_1=0$, $b_2\neq0$ можна розглянути рівняння з частинними похідними, яке збігається з (16) з точністю до перестановок змінних z_1 та z_2. По суті, нами доведено у теоремі 5.9, що кожний цілий розв'язок цих рівнянь є функцією обмеженого $L_{\varepsilon,\mathbf{b}}$-індексу за відповідним напрямком $\mathbf{b}$.

Нехай $\mathbb{L}_n$ $(n\ge1)$ — клас додатних неперервних функцій $L\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}_+$. У 2006 році на львівському семінарі з теорії аналітичних функцій проф. М. М. Шеремета поставив питання: *якою є оцінка зростання максимуму модуля цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком?* Для заданого $z^0\in\mathbb{C}^n$ розвинемо функцію $F(z^0+w\mathbf{b})$ у степеневий ряд по $w\in\mathbb{C}$ $F(z^0+w\mathbf{b})=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z^0)w^m$, $b_m(z^0)=$

$\frac{1}{m!}\frac{\partial^m F(z^0)}{\partial \mathbf{b}^m}$. Позначимо $\mu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F) = \max\{|b_m(z^0)|r^m : m \geq 0\}$, $\nu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F) = \max\{m : |b_m(z^0)|r^m = \mu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F)\}$,

$$\varphi(\delta, \theta, z^0) = \varliminf_{r\to+\infty} \min\left\{L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b}) : \ r/(1+\delta) \leq t \leq r\right\} / L(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b}).$$

Легко бачити, що $\exists \lim_{\delta\to+0} \varphi(\delta, \theta, z^0) := \varphi_0(\theta, z^0)$.

У дисертації отримано оцінки зростання цілих функцій обмеженого L-індекс за напрямком у вигляді теореми 5.11, з якої випливає такий наслідок.

Наслідок 5.3. *Нехай* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $L \in \mathbb{L}_n$ *буде додатна неперервна функція така, що* $(\forall z^0 \in \mathbb{C}^n)$ $(\forall \theta \in [0, 2\pi]) : rL(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b}) \to +\infty$ $(r \to +\infty)$ *та*

$$\inf_{z^0\in\mathbb{C}^n} \min_{\theta\in[0,2\pi]} \varphi_0(\theta, z^0) = \varphi_0 \in (0, 1]. \tag{17}$$

Якщо ціла трансцендентна функція F *є обмеженого* L*-індексу з напрямком* $\mathbf{b}$ *з* $N_{\mathbf{b}}(F, L) < \infty$, *то*

$$\sup_{z^0\in\mathbb{C}^n} \max_{\theta\in[0,2\pi]} \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\nu_{\mathbf{b}}(r, z^0, F)}{rL(z^0 + re^{i\theta}\mathbf{b})} \leq \frac{N_{\mathbf{b}}(F, L) + 1}{\varphi_0},$$

$$\sup_{z^0\in\mathbb{C}^n} \max_{\theta\in[0,2\pi]} \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \max\{|F(z^0 + \tau\mathbf{b})| : |\tau| = r\}}{\int_0^r L(z^0 + te^{i\theta}\mathbf{b})dt} \leq \frac{N_{\mathbf{b}}(F, L) + 1}{\varphi_0^2}.$$

Зауважимо, що наслідок 5.3 та згадана теорема 5.11 при $n = 1$ є узагальненнями відповідного результату Шеремети та Кузика у двох напрямах: 1) відсутнє припущення, що функція l має вигляд $l(|z|)$; 2) відсутнє припущення, що $\varphi_0 = 1$ (наші результати справедливі для будь-якого $\varphi_0 \in (0, 1]$).

Наведемо результат, який вказує достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком для композиції цілих функцій.

Теорема 5.12. *Нехай* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, f *— ціла функція в* $\mathbb{C}$, Φ *— ціла функція в* $\mathbb{C}^n$ *така, що* $\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) \neq 0$ *та* $\left|\partial_{\mathbf{b}}^j \Phi(z)\right| \leq K\left|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right|^j$, $K \equiv \mathrm{const} > 0$, *для всіх* $z \in \mathbb{C}^n$ *та кожного* $j \leq p$, *де* $p = N(f, l)$ *або* $p = N_{\mathbf{b}}(F, L)$ *відповідно.*

Нехай $l \in Q$, $l(w) \geq 1$, $w \in \mathbb{C}$ *та* $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$, *де* $L(z) = \left|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)\right| l(\Phi(z))$. *Ціла функція* f *має обмежений* l*-індекс тоді і тільки тоді, коли* $F(z) = f(\Phi(z))$ *має обмежений* L*-індекс за напрямком* $\mathbf{b}$.

Отримані умови є слабшими при $n = 1$, ніж результати В. Кушніра (2002). Зазначимо, що умова $\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) \neq 0$ в теоремі 5.12 обумовлена суто методом доведення. Насправді її можна позбутися та довести загальніше твердження, але уже з більшою функцією $L(z) \asymp \max_{1\leq j\leq p}\left\{1, \left|\partial_{\mathbf{b}}^j \Phi(z)\right|\right\} l(\Phi(z))$. Відповідна теорема 5.13 з дисертації є новою навіть при $n = 1$.

Також у дисертації встановлено достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком для суми цілих функцій (це теореми 5.2, 5.3), причому теорема 5.2 є новою для $n = 1$, а теорема 5.3 є новою навіть у випадку $n = 1$ та $l \equiv 1$, тобто, для цілих функцій обмеженого індексу. Побудовано відповідний приклад двох цілих функцій обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$, сума яких є функцією необмеженого індексу за цим напрямком.

У наших дослідженнях обмеженості L-індексу за напрямком ми часто розглядали зрізки $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$. Потім фіксували $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та застосовували

міркування з одновимірного випадку. Після цього будували рівномірні оцінки по усіх z^0. Це стислий опис методу.

Виходячи з цього, проф. С. Ю. Фаворов (2015) поставив таку **проблему**.

Проблема 3. *Нехай* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ *— заданий напрямок,* $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ *— неперервна функція. Чи можна замінити умову „F голоморфна в $\mathbb{C}^n$“ на умову „F — голоморфна на усіх зрізках вигляду $z^0 + t\mathbf{b}$“ та з цього вивести усі відомі властивості цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком?*

Наша відповідь на питання Фаворова є заперечною. Таке послаблення обмежень на функцію F не дозволяє довести деякі теореми. А саме у твердженні 5.4 дисертації побудовано приклад функції, яка голоморфна на зрізках $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$, але не голоморфна за сукупністю змінних і така, що вона має необмежений індекс за напрямком $\mathbf{b}$ в деякій обмеженій області. Хоча, як відомо, кожна ціла функція є обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$ в обмеженій області, в якій вона відмінна від тотожного нуля на зрізках $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ (див. лема 5.1).

Цілі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних вивчаються в шостому розділі. У ньому залишаються дійсними позначення з розділу 3.

Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, де $l_j(z)$ — додатні неперервні функції, $z \in \mathbb{C}^n$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Ціла функція $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, називається *функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних,* якщо існує число $m \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ та $J = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ виконується (6). Найменше таке ціле число m, для якого (6) виконується, називається $\mathbf{L}$*-індексом за сукупністю змінних функції* F та позначається через $N(F, \mathbf{L})$.

Через Q^n (зокрема, $Q := Q^1$) позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$ таких, що $\exists R_0 \in \mathbb{R}_+^n, \exists C, c \in \mathbb{R}_+^n (\mathbf{0} < c \le C)$, $\forall z_0 \in \mathbb{C}^n$ $\forall z \in \mathbb{D}^n[z_0, R_0/L(z_0)]$ $\quad c \le \mathbf{L}(z)/\mathbf{L}(z_0) \le C$.

Нехай $\mathbf{L}(z) = \mathbf{L}(R)$, $R = (r_1, \dots, r_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $r_k = |z_k|$ $(1 \le k \le n)$. Позначимо $r^* = \max_{1 \le k \le n} r_k$, $u_j(t) = u_j(t, R, \Theta) = l_j(\frac{tR}{r^*} e^{i\Theta})$. У цьому випадку наш основний результат про зростання функцій з цього класу має вигляд

Теорема 6.12. *Нехай* $\mathbf{L}(R) = (l_1(R), \dots, l_n(R))$, $l_j(R)$ *— додатні неперервно диференційовні неспадні функції за кожною змінною* $r_k \in [0, +\infty)$, $k, j \in \{1, \dots, n\}$. *Якщо ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N = N(F, \mathbf{L})$ *за сукупністю змінних, то*

$$\varlimsup_{|R| \to +\infty} \frac{\ln \max\{|F(z)| : \ z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\}}{\int_0^1 \langle R, \mathbf{L}(\tau R) \rangle d\tau} \le N + 1.$$

Для неперервних функцій $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+^n$ клас K^n визначається по аналогії до класу $K(\mathbb{B}^n)$, просто відповідна нерівність справджується для всіх $R \in \mathbb{R}_+^n$ замість $|R| < 1$.

Теорема 6.13. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n \cap K^n$. *Якщо ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то*

$$\ln M(F, R) = O\left(\min_{\sigma_n \in \mathcal{S}_n} \min_{\Theta \in [0, 2\pi]^n} \sum_{j=1}^n \int_0^{r_j} l_j(R(j, \sigma_n, t) e^{i\Theta}) dt \right) \text{ при } |R| \to \infty,$$

де σ_n *— перестановка з* $\{1, \dots, n\}$, $\mathcal{S}_n$ *— множина усіх перестановок з* $\{1, \dots, n\}$,

$$R(j,\sigma_n,t)=(r'_1,\dots,r'_n),\ r'_k=\begin{cases} r^0_k, \text{ якщо } \sigma_n(k)<j,\\ t, \text{ якщо } k=j,\\ r_k, \text{ якщо } \sigma_n(k)>j,\end{cases} \qquad k\in\{1,\dots,n\},\ R^0=(r^0_1,\dots,r^0_n)$$

— досить великий радіус.

Зазначимо, що теорема 6.13 нова навіть для $n=1$, бо ми замінили умову $l=l(|z|)$ на умову $l\in K$, тобто, існує $c>0$ таке, що для кожного $r>0$ $\max\limits_{\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi]}\frac{l(re^{i\theta_2})}{l(re^{i\theta_1})}\le c$.

Теорема 6.14. *Нехай* $\mathbf{L}(Re^{i\Theta})$ *— додатна неперервно диференційовна функція за кожною змінною* $r_k\in[0,+\infty)$, $k\in\{1,\dots,n\}$, $\Theta\in[0,2\pi]^n$. *Якщо ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс* $N=N(F,\mathbf{L})$ *за сукупністю змінних та існує* $C>0$ *таке, що функція* $\mathbf{L}$ *задовольняє нерівності*

$$\sup_{R\in\mathbb{R}^n_+}\max_{t\in[0,r^*]}\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\max_{1\le j\le n}\frac{(-(u_j(t,R,\Theta))'_t)^+}{\frac{r_j}{r^*}l_j^2(\frac{t}{r^*}Re^{i\Theta})}\le C,$$

$$\max_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\left\langle R,\mathbf{L}\left(\tau Re^{i\Theta}\right)\right\rangle d\tau\to+\infty \text{ при } |R|\to+\infty,$$

то

$$\varlimsup_{|R|\to+\infty}\frac{\ln\max\{|F(z)|:\ z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}\left(\tau Re^{i\Theta}\right)\rangle d\tau}\le(C+1)N+1.$$

Оцінка в теоремі 6.14 для $n=1$ *точніша*, ніж результат Шеремети, який отриманий для випадку $n=1$, $C\ne0$ та $l(|z|)$. Справді, відповідна теорема на с. 83 монографії Шеремети[1] стверджує, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\max\{|f(z):\ |z|=r\}}{\int_0^r l(\tau)d\tau}\le(C+1)(N+1).$$

Очевидно, що $NC+N+1<(C+1)(N+1)$ для $C\ne0$ та $N\ne0$.

У дисертації сформульовано та доведено твердження, які дають оцінки зростання цілих розв'язків систем рівнянь з частинними похідними (10), де H_j та G_{S_j} — цілі функції. Кажемо, що неоднорідна система рівнянь (10) з цілими коефіцієнтами належить до класу $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{H},\mathbf{L})$, якщо $\mathbf{L}\in QW^n$ та відповідні умови 1)-3) на 12 виконуються для всіх $z\in\mathbb{C}^n$ замість $z\in\mathbb{B}^n$.

Теорема 6.7. *Якщо неоднорідна система рівнянь з частинними похідними* (10) *з цілими коефіцієнтами належить до класу* $\mathcal{A}(\mathbf{G},\mathbf{H},\mathbf{L})$ *і ціла функція* $F(z)$ *задовольняє* (10), *то* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних та*

$$\varlimsup_{|R|\to\infty}\frac{\ln\max\{|F(z)|:\ z\in\mathbb{T}^n(\mathbf{0},R)\}}{\max\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n}\int_0^1\langle R,\mathbf{L}(\tau Re^{i\Theta})\rangle d\tau}\le\max\{1,c\},$$

де c *— стала, залежна від* $B_{S_j,M}$, $D_{I,j}$, $B_{p_j\mathbf{1}_j,M}$.

Якщо система (10) — однорідна ($H_j(z)\equiv0$), то попередню теорему можна дещо спростити через простіші умови на коефіцієнти та інакше обрану сталу c.

Зазначимо, що отримані оцінки через сталу c є точними. Відповідні приклади наведено у підрозділі 6.4.3 дисертації. Теореми 6.7 та пов'язані з нею теорема 6.8

[1] Sheremeta, M.: Analytic functions of bounded index, *Mathematical Studies. Monograph Series*, vol. 6. VNTL Publishers, Lviv (1999)

для однорідної системи і твердження 6.13-6.14 є узагальненнями результатів М. Салмассі (1978) у двох напрямках:
— відсутнє припущення, що коефіцієнти в системі (10) є сталими;
— розглядається система, що також може містити мішані частинні похідні.

Теореми 6.7-6.8 і твердження 6.13-6.14 також є покращеними аналогами результатів М. Бордуляк (1996) для системи (10) у трьох напрямках:
— відсутнє припущення, що коефіцієнти у (10) є функціями з відокремленими змінними;
— функція $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ має загальніший вигляд, ніж $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$, де $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$;
— отримано точні, в загальному, не покращувані оцінки зростання цілих розв'язків системи. Зазначимо, що оцінки зростання розв'язків системи взагалі не обговорювалися М. Бордуляк та М. Салмассі.

Також у дисертації отримано теореми 6.15 та 6.16, які забезпечують достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних для суми цілих функцій F і G. Відповідні умови подано у вигляді обмежень на локальне поводження похідних цих функцій. Згадані твердження є новими для функцій обмеженого індексу за сукупністю змінних.

Позначимо $Z_F = \bigcup_{z\in\mathbb{C}^n}\{z : F(z) = 0\}$ та $G_R(F) = \bigcup_{z^0\in Z_F} \mathbb{D}^n\left(z^0, \frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)$.

Теорема 6.4. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$, F *— ціла в* $\mathbb{C}^n$ *функція. Якщо* $\exists R > \mathbf{0}$ $\mathbf{0} < R < \mathbf{1}$, $\exists p_2 \geq 1$ $\exists \Theta \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{0} < \Theta < R$, $\exists R' > \mathbf{0}$ *(*$R' = \mathbf{0}$ *для* $Z_F = \emptyset$*) такі, що* $\forall z^0 \in \mathbb{C}^n$ $\exists R^0 = R^0(z^0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\Theta \leq R^0 \leq R$, *для якого*

$$\operatorname{meas}\left\{\mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \cap G_{R'}(F)\right\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j(z^0)},$$

$$\max\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right)\right\} \leq p_2 \min\left\{|F(z)|\colon z \in \mathbb{T}^n\left(z^0, \frac{R^0}{\mathbf{L}(z^0)}\right) \setminus G_{R'}(F)\right\},$$

то функція F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних (*meas *— міра Лебега на кістяку полікруга).*

Позначимо $c(z', r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z'| = \frac{r}{l(z')}\}$. Для $n = 1$ з теореми 6.4 випливає такий наслідок.

Наслідок 6.2. *Нехай* $l \in Q$, f *— ціла функція. Якщо* $\exists r > 0$, $\exists r' \geq 0$, $\exists p_2 \geq 1$ $\exists \theta \in (0, r)$, *такі, що* $\forall z^0 \in \mathbb{C}$ $\exists r^0 = r^0(z^0) \in [\theta; r]$, *та* $\operatorname{meas}\left\{c(z^0, r^0) \cap G_{R'}(F)\right\} < \frac{2\pi\theta}{3l(z^0)\lambda_2(2r+2)}$ *і* $\max\left\{|f(z)|\colon z \in c(z^0, r^0)\right\} \leq p_2 \min\left\{|f(z)|\colon z \in c(z^0, r^0) \setminus G_{r'}(f)\right\}$, *то функція* f *має обмежений* l*-індекс (тут* meas *означає міру Лебега на колі).*

У деякому розумінні цей наслідок є новим для цілих функцій від однієї змінної, бо коло $c(z^0, r^0)$ може містити нулі функції f. Разом з тим у відповідних теоремах, отриманих М. Шереметою, А. Кузиком та Г. Фріке, коло $c(z^0, r^0)$ вибиралося так, щоб $f(z) \neq 0$ для всіх $z \in c(z^0, r^0)$.

Наведемо отриманий нами аналог достатніх умов логарифмічного критерію для цього класу функцій.

Теорема 6.5. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n$. *Якщо ціла функція* F *задовольняє такі умови:*

1) *для кожного* $R > \mathbf{0}$ *існує* $p_1 = p_1(R) > 0$ *таке, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_R(F)$ *та всіх* $j \in \{1, \ldots, n\}$ $\frac{1}{|F(z)|}\left|\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right| \leq p_1 l_j(z)$,

2) *для кожного* $R > \mathbf{0}$ *та* $R' \geq \mathbf{0}$ *існує* $p_2 = p_2(R, R') \geq 1$, *що для всіх* $z^0 \in \mathbb{C}^n$ *таких, що* $T^n(z^0, \frac{R}{\mathbb{L}(z^0)}) \setminus G_{R'}(F) = \bigcup_i C_i \neq \emptyset$, *де* C_i *— зв'язні неперетинні множини, і виконується одна з трьох умов a)* $\max\limits_i \min\limits_{z \in C_i} |F(z)| \leq p_2 \min\limits_i \min\limits_{z \in C_i} |F(z)|$, *або b)* $\max\limits_i \max\limits_{z \in C_i} |F(z)| \leq p_2 \min\limits_i \max\limits_{z \in C_i} |F(z)|$, *або c)* $|F(z^*)| = \max_i \max_{z \in C_i} |F(z)|$, $|F(z^{**})| = \min_i \min_{z \in C_i} |F(z)|$, *та точки* z^*, z^{**} *належать до однієї і тієї множини* C_{i_0}

3) *для кожного* $R \in \mathbb{R}^n_+$, $|R| \leq \beta$, *існують* $\Theta, R' \in \mathbb{R}^n_+$, $0 < \theta_j < \frac{2r_j}{2+3\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))}$, *такі, що для всіх* $z \in \mathbb{B}^n$

$$meas\,\{G_{R'}(F) \cap \mathbb{D}^n\,[z, R/\mathbf{L}(z)]\} < \left(\frac{2\pi}{3}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\theta_j(r_j - \theta_j)}{\lambda_{2,j}(2(R+\mathbf{1}))l_j^2(z)},$$

то F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних (тут* $meas$ *є* $2n$*-вимірна міра Лебега).*

Інші достатні умови обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних можна отримати через логарифмічні похідні за напрямками $\mathbf{1}_j$ та розподіл нулів вздовж тих напрямків.

Теорема 6.3. *Нехай* $F(z)$ *— ціла в* $\mathbb{C}^n$ *функція та для кожного* $j \in \{1, \ldots, n\}$ $l_j(z) \in Q^n_{\mathbf{1}_j}$ *і* $\mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{1}_j}(F) \neq \emptyset$. *Якщо для кожного* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *справджуються такі умови*

1) *для будь-якого* $r > 0$ *існує* $P_j = P_j(r) > 0$ *таке, що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_r^{\mathbf{1}_j}(F)$ $\left|\frac{1}{F(z)} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\right| \leq P_j l_j(z)$;

2) *для будь-якого* $r > 0$ *існує* $\widetilde{n}_j(r) \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що для всіх* $z^0 \in \mathbb{C}^n$, *для яких* $F(z^0 + t\mathbf{1}_j) \not\equiv 0$, $n_{\mathbf{1}_j}\left(\frac{r}{l_j(z^0)}, z^0, \frac{1}{F}\right) \leq \widetilde{n}_j(r)$,

то $F(z)$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Усі дві наведені теореми є повністю новими в теорії функцій обмеженого індексу за сукупністю змінних, причому теорема 6.5 заодно дає ствердну відповідь на питання проф. І. Е. Чижикова про можливість збільшити розмір виняткової множини, зовні якої оцінюються частинні логарифмічні похідні, якщо порівнювати з теоремою 6.3.

У дисертації також розглядається композиція цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

Додатково введемо такі позначення $\nabla\Phi(z) = (\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_n})$ та $|\nabla|\Phi(z) = (|\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_1}|, \ldots, |\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_n}|)$. Наш основний результат про композицію формулюється у вигляді такої теореми.

Теорема 6.9. *Нехай* f *ціла функція в* $\mathbb{C}$, Φ *ціла функція в* $\mathbb{C}^n$ *така що для деякого* p *і для всіх* $z \in \mathbb{C}^n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *та* $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\|J\| \leq p$ *виконуються нерівності* $\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_k} \neq 0$ *та* $|\Phi^{(J)}(z)| \leq C|\nabla|\Phi(z)^J$, $\quad C \equiv \mathrm{const} > 0$. *Нехай функція* $l \in Q$ *така, що* $l(w) \geq 1$ $(w \in \mathbb{C})$ *та* $\mathbf{L} \in Q^n$, *де* $\mathbf{L}(z) = l(\Phi(z))|\nabla|\Phi(z)$. *Ціла функція* f *має обмежений* l*-індекс тоді і тільки тоді, коли* $F(z) = f(\Phi(z))$ *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних.*

Проф. М.М. Шеремета сформулював загальніше **питання:** *Нехай* $G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *— ціла функція обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних,* $\Phi_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

та $\Phi_2 : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ *— цілі функції,* $\mathbf{L} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_+$ *— неперервна функція. Якою має бути неперервна функція* $\widetilde{\mathbf{L}} : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{R}^n_+$*, щоб складена функція* $H(z,w) = G(\Phi_1(z), \Phi_2(w))$ *мала обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних?* На це питання у дисертації дає відповідь теорема 6.10, яка за формулюванням подібна до теореми 6.9.

Нехай F — ціла функція, Z_F — нульова множина функції F. Якщо $z^0 \in Z_F$, то через $p_F(z^0)$ позначимо "кратність" нульової точки z^0 функції F, тобто, таке ціле число, що для всіх J, $\|J\| < p_F(z^0)$, $F^{(J)}(z^0) = 0$, але, принаймні для одного J, $\|J\| = p_F(z^0)$, виконується $F^{(J)}(z^0) \neq 0$.

Теорема 6.11. *Для того, щоб для цілої функції* F *існувала додатна неперервна вектор-функція* $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ *така, що* $F(z)$ *є функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних необхідно та досить, щоб існувало* $p \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що* $p_F(z^0) \leq p$ *для всіх* $z^0 \in Z_F$.

Наведений результат показує широту досліджуваного класу цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних.

Тепер згадаємо результати, пов'язані з вичерпуванням n-вимірного комплексного простору кулями замість полікругів. Основним результатом такого типу для цілих функцій у відповідному підрозділі є теорема 6.2, яка за формулюванням подібна до теореми 3.13, наведеної вище для аналітичних в кулі функцій.

Нарешті розділ 7 містить одновимірні результати, які нами не отримані для функцій від декількох змінних. В ньому розглядається обмежений l-індекс та M-індекс для функцій від однієї змінної. Нехай G — довільна область в $\mathbb{C}$ та l — додатна неперервна функція в G. Для $r \in [0, \beta]$ покладемо $\lambda_1(r) = \inf\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leq \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\}$ and $\lambda_2(r) = \sup\{\frac{l(z)}{l(z_0)} :\ |z - z_0| \leq \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\}$. Через $Q_\beta(G)$ позначимо клас додатних неперервних функцій l, які задовольняють умову $(\forall z \in G)\colon\ l(z) > \dfrac{\beta}{dist\{z, \partial G\}}$, $\beta = const > 1$ і для деякого $r_0 \in [0, \beta]$ $0 < \lambda_1(r_0) \leq \lambda_2(r_0) < +\infty$. Аналітична функція f в $G \subset \mathbb{C}$ називається функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in G$ $\dfrac{|f^{(n)}(z)|}{n! l^n(z)} \leq \max\left\{\dfrac{|f^{(k)}(z)|}{k! l^k(z)} : 0 \leq k \leq N\right\}$.

У дисертації доведено достатність умов наступної гіпотези М. М. Шеремети[2], а за певних додаткових обмежень також обґрунтовано їхню необхідність.

Гіпотеза 7.2. *Нехай* f *— ціла функція та*

$$g(z) = \frac{q_1}{(1-z)^p} + \frac{q_2}{(1-z)^{p-1}} + \ldots + \frac{q_p}{1-z} + q_{p+1},\ p \in \mathbb{N},\ q_j \in \mathbb{C},\ q_1 \neq 0.$$

Складена функція $F = f(g)$ *у* $\mathbb{D}$ *має обмежений* l*-індекс у* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ *з* $l(|z|) = \frac{\beta}{(1-|z|)^{p+1}}$ *тоді і тільки тоді, коли* f *є обмеженого індексу.*

Теорема 7.1. *Нехай* f *— ціла функція. Функція* $f(\frac{q_1}{z^p} + \frac{q_2}{z^{p-1}} + \ldots + q_{p+1})$ *має обмежений* l*-індекс у* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *з* $l(|z|) = \frac{\beta}{|z|^{p+1}}$ *тоді і тільки тоді, коли функція* f *має обмежений індекс, де* $p \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{C}$, $q_1 \neq 0$.

Теорема 7.2. *Для того, щоб функція* F *була обмеженого* l*-індексу з* $l(r) =$

[2]Sheremeta, M.M.: On the l-index boundedness of some composition of functions. Mat. Stud. **47**(2), 207–210 (2017). doi: 10.15330/ms.47.2.207-210

$\frac{\beta}{(1-r)^{p+1}}$, *досить, а якщо* f *— ціла функція скінченного порядку та* 0 *— її пікарівське виняткове значення, то і необхідно, щоб* f *була обмеженого індексу.*

Подібна задача розглянута для аналітичних функцій обмеженого $l-M$-індексу (теореми 7.3 та 7.4).

Визначимо таку функцію $l_\rho(z) = |z|^{\rho-1}$, $|z| \geq 1$. У підрозділі 7.3 описано **проблему**, неявно поставлену А. А. Гольдбергом (1996): *яким є зв'язок між класом цілих функцій цілком регулярного зростання зі скінченним порядком* ρ *та класом цілих функцій обмеженого* l_ρ*-індексу?* Ми розглядаємо деякі частинні проблеми, які мають безпосередній стосунок до цієї проблеми Гольдберга. А саме виділено клас цілих функцій цілком регулярного зростання, нулі яких не задовольняють жодну з умов Левіна (C) та (C′) та мають необмежений l_ρ-індекс (твердження 7.3).

Насамкінець розглядаємо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$f^{(p)}(z) + g_1(z)f^{(p-1)}(z) + \cdots + g_p(z)f(z) = 0. \tag{18}$$

Нехай φ — додатна необмежена функція, яка строго зростає на $[1, +\infty)$, φ^{-1} — обернена функція до φ, $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Визначимо порядок зростання цілої функції так $\widetilde{\sigma}^0_\varphi[f] = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\varphi(M(r,f))}{\ln r}$, $\alpha_\varphi = \sup\{\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j] |\ j = 1, 2, \ldots, p\}$, а функцію l_1 задамо так $l_1(z) = \max\limits_{1\leq j\leq p}(\varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j] + \varepsilon)\ln|z|))^{1/j}$, $|z| > r_1$, де $\varepsilon > 0$ — задане, r_1 вибране так, щоб $c = \max\limits_{1\leq j\leq p}(\varphi^{-1}((\widetilde{\sigma}^0_\varphi[g_j] + \varepsilon)\ln r_1))^{1/j} \geq 1$. Також нам потрібна більша функція $l_0(z) = \varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon)\ln|z|)$, $|z| > r_0$, де r_0 — вибране так, щоб $c_0 = \varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon)\ln r_0) \geq 1$.

Теорема 7.5. *Нехай* φ *— додатна необмежена функція, що строго зростає на* $[1, +\infty)$*. Якщо* $\alpha_\varphi \in (0, +\infty)$, $l_1 \in Q$*, кожна ціла функція* g_j *має обмежений* l_1*-індекс (*$j \in \{1, \ldots, p\}$*), то кожна ціла функція, що задовольняє* (18)*, має обмежений* l_1*-індекс. Якщо, крім того,* $l_0 \in Q$, φ *— неперервно диференційовна функція від дійсної змінної* $t \in [1, +\infty)$*, то для кожної цілої трансцендентної функції* f*, що задовольняє* (18)*, справджується така оцінка*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, f)}{\int_{r_0}^r \varphi^{-1}((\alpha_\varphi + \varepsilon)\ln r)dr} \leq N(f, l_0) + 1.$$

За ще однієї додаткової умови, що $t^2\varphi'(t)e^{\frac{\varphi(t)}{\alpha_\varphi+\varepsilon}} \to +\infty$ при $t \to +\infty$, у теоремі 7.6 нами встановлено таке: $\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{\int_{r_0}^r \varphi^{-1}((\alpha_\varphi+\varepsilon)\ln r)dr} \leq p$.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Варто зазначити, що досліджувані в дисертації класи цілих та аналітичних функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних чи обмеженого L-індексу за напрямком є досить широкими. Про це свідчать доведені теореми існування. Зокрема, для цілої функції $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ існує додатна неперервна функція $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ така, що F — обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, тоді і тільки тоді, коли F має обмежену кратність нульових точок. Цей факт забезпечує широту та всеохопність проведених досліджень, бо завдяки вибору вектор-функції $\mathbf{L}$ можна вивчати досить складні за структурою та властивостями функції.

Навіть більше, запропоновані підходи до введення поняття обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних для аналітичних у полікрузі чи в одиничній кулі функцій дозволяють вивчати функцій від декількох змінних, які дійсно мають особливі точки на межі полікруга чи на одиничній сфері. Це було нездійсненним при розгляді функцій, які задовольняють означення обмеженого індексу в сенсі Крішни-Шаха для аналітичних довільній області з $\mathbb{C}^n$ функцій, бо такі функції насправді виявлялися цілими.

Серед вагомих здобутків дисертаційної роботи треба відзначити такі:

1) для класу цілих функцій від декількох змінних обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних встановлено нові критерії приналежності функцій до цього класу, теореми існування та інші властивості;
2) для класу аналітичних в одиничній кулі функцій від декількох змінних обмеженого L-індексу за напрямком та **L**-індексу за сукупністю змінних досліджено характеристичні властивості функцій з цього класу;
3) знайдено точні оцінки зростання логарифма максимуму модуля функцій з відповідних класів функцій обмеженого індексу на колі чи кістяку полікруга, причому розв'язано проблему Шеремети про зростання цілих обмеженого L-індексу за напрямку;
4) виділено клас цілих функцій необмеженого індексу за будь-яким напрямком $\mathbf{b}$ таких, що на кожній зрізці вигляду $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ вони мають обмежений індекс та знайдено функцію L, для якої деякі цілі функції з описаною властивістю матимуть обмежений L-індекс за тим напрямком;
5) повністю доведено гіпотезу про можливість послаблення достатніх умов обмеженості L-індексу за напрямком для цілих функцій (оцінка максимуму модуля, мінімуму модуля на колі, логарифмічний критерій) через заміну квантора загальності на квантор існування;
6) встановлено достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком композиції цілих функцій від декількох змінних. Отримані умови є слабшими в одновимірному випадку, ніж відомі досі;
7) доведено достатність умов у гіпотезі М. М. Шеремети про обмеженість l-індексу деяких композицій аналітичних функцій від однієї змінної та дано відповідь на питання М. М. Шеремети про обмеженість **L**-індексу за сукупністю змінних композицій цілих функцій;
8) отримано достатні умови обмеженості l-індексу цілих розв'язків диференціального рівняння $w^{(p)} = f(z, w)$, де f — ціла функція, $p \in \mathbb{N}$.
9) знайдено достатні умови обмеженості L-індексу за напрямком та **L**-індексу за сукупністю змінних для суми цілих функцій;
10) знайдено достатні умови обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних цілих чи аналітичних в кулі розв'язків систем лінійних рівнянь з частинними похідними вищих порядків та отримано точні оцінки їхнього зростання через параметри, залежні від коефіцієнтів систем;
11) виявлено нові характеристичні властивості функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних через оцінку максимуму модуля таких функцій на сфері замість кістяка полікруга;
12) вперше отримано аналоги логарифмічного критерію у вигляді достатніх умов та оцінки максимуму модуля через мінімум модуля для цілих функцій обме-

женого **L**-індексу за сукупністю змінних, причому один з цих аналогів є ствердною відповіддю на питання І. Е. Чижикова про можливість оцінки частинних логарифмічних похідних ззовні більших виняткових множин;

13) побудовою відповідного прикладу спростовано гіпотезу С. Ю. Фаворова, що умову „F голоморфна в $\mathbb{C}^n$“ можна замінити на умову „F — голоморфна на усіх зрізках вигляду $z^0 + t\mathbf{b}$“ в теорії цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком;
14) встановлено аналог теореми Хеймана для аналітичних в полікрузі функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних та описано поводження коефіцієнтів розвинення у степеневий ряд;

Іншим потужним підходом, який дозволяє досліджувати асимптотику аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь, є метод Вімана - Валірона. Проте наразі нам не відома адаптація цього методу до систем рівнянь з частинними похідними, які розглянуті в цій праці. Водночас, на таких системах досить гнучко працює поняття обмеженого індексу, його узагальнення для різних класів функцій та відповідні аналоги теореми Хеймана, завдяки яким можна встановити обмеженість індексу аналітичних розв'язків таких систем, а звідти витягнути оцінки зростання через коефіцієнти систем, певне регулярне поводження як самих розв'язків, так і їхніх похідних, оцінки логарифмічних похідних розв'язків, рівномірний в деякому розумінні розподіл їхніх нулів та багато інших цікавих властивостей, не знаходячи при цьому явного вигляду розв'язку.

Крім того, узагальнюючи одновимірні результати на багатовимірний комплексний простір, у багатьох випадках (результати з пунктів 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12) нам вдалося добитися покращення нових відповідних одновимірних наслідків через послаблення достатніх умов або через уточнення нерівностей.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

[1] Bandura, A.: Composition of entire functions and bounded L-index in direction. Mat. Stud. **47**(2), 179–184 (2017). doi: 10.15330/ms.47.2.179-184

[2] Бандура, А., Скасків, О.: Логарифмічна похідна за напрямком та розподіл нулів цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком. Укр. мат. журн., **69**(3), 426-432 (2017). Engl. transl.: Bandura, A., Skaskiv, O.: Directional logarithmic derivative and the distribution of zeros of an entire function of bounded L-index along the direction. Ukr. Math. J. **69**(3), 500–508 (2017). doi: 10.1007/s11253-017-1377-8

[3] Bandura, A., Skaskiv, O.: Entire functions of bounded **L**-index: Its zeros and behavior of partial logarithmic derivatives. J. Complex Analysis **2017**, 1–10 (2017). Article ID 3253095. doi: 10.1155/2017/3253095

[4] Bandura, A., Skaskiv, O.: Analytic in an unit ball functions of bounded **L**-index in joint variables, Ukr. Mat. Visn., **14**(1), 1–15 (2017). Engl. transl.: Bandura, A., Skaskiv, O.: Functions analytic in a unit ball of bounded **L**-index in joint variables. J. Math. Sci. **227**(1), 1–12 (2017). doi: 10.1007/s10958-017-3570-6

[5] Bandura, A., Skaskiv, O., Filevych, P.: Properties of entire solutions of some linear PDE's. J. Appl. Math. Comput. Mech. **16**(2), 17–28 (2017). doi: 10.17512/jamcm.2017.2.02

[6] Bandura, A.I.: Some improvements of criteria of L-index boundedness in direction. Mat. Stud. **47**(1), 27–32 (2017). doi: 10.15330/ms.47.1.27-32

[7] Bandura, A.I., Petrechko, N.V.: Properties of power series of analytic in a bidisc functions of bounded **L**-index in joint variables. Carpathian Math. Publ. **9**(1), 6–12 (2017). doi: 10.15330/cmp.9.1.6-12

[8] Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Analytic functions in the unit ball of bounded L-index: asymptotic and local properties. Mat. Stud. **48**, (1), 37–73 (2017). doi:10.15330/ms.48.1.37-73

[9] Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Growth of entire functions of bounded L-index in direction. Mat. Met. Phys.-mech. fields **60** (1), 22–31 (2017)

[10] Bandura, A., Skaskiv, O.: Asymptotic estimates of entire functions of bounded **L**-index in joint variables. Novi Sad J. Math., **48** (1), 103–116 (2018). doi: 10.30755/NSJOM.06997

[11] Bandura, A.I.: The properties of entire functions of bounded value L-distribution in direction. Prykarp. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(13)**, 50–55 (2011)

[12] Bandura, A.I.: The metric properties of a space of entire functions of bounded L-index in direction. Prykarp. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(17)**, 46–52 (2012)

[13] Bandura, A.I.: A modified criterion of boundedness of L-index in direction. Mat. Stud. **39**(1), 99–102 (2013)

[14] Bandura, A.I.: A class of entire functions of unbounded index in each direction. Mat. Stud. **44**(1), 107–112 (2015). doi: 10.15330/ms.44.1.107-112

[15] Bandura, A.I.: Entire function of unbounded index in any real direction. Prykarpatskyi Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(29)**, 24–30 (2015)

[16] Bandura, A.I.: Properties of positive continuous functions in $\mathbb{C}^n$. Carpathian Math. Publ. **7**(2), 137–147 (2015). doi: 10.15330/cmp.7.2.137-147

[17] Bandura, A.I.: Sum of entire functions of bounded L-index in direction. Mat. Stud. **45**(2), 149–158 (2016). doi: 10.15330/ms.45.2.149-158

[18] Bandura, A.I., Bordulyak, M.T., Skaskiv, O.B.: Sufficient conditions of boundedness of **L**-index in joint variables. Mat. Stud. **45**(1), 12–26 (2016). doi: 10.15330/ms.45.1.12-26

[19] Bandura, A.I., Petrechko, N.V.: Sum of entire functions of bounded index in joint variables. Electr. J. Math. Anal. Appl. **6**(2), 60–67 (2018).

[20] Bandura, A.I., Petrechko, N.V., Skaskiv, O.B.: Analytic in a polydisc functions of bounded **L**-index in joint variables. Mat. Stud. **46**(1), 72–80 (2016). doi: 10.15330/ms.46.1.72-80

[21] Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Boundedness of L-index in direction of functions of the form $f(\langle z, m\rangle)$ and existence theorems. Mat. Stud. **41**(1), 45–52 (2014)

[22] Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Open problems for entire functions of bounded index in direction. Mat. Stud. **43**(1), 103–109 (2015). doi: 10.15330/ms.43.1.103-109

[23] Бандура, А.: Добуток двох цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком є функцією з того ж класу. Буковин. матем. журн. **4**(1-2), 8–12 (2016)

[24] Бандура, А., Скасків, О.: Метричний простір Ієра, теорема існування та цілі функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних. Буковин. матем. журн. **5**(3-4), 8–14 (2017)

[25] Бандура, А., Петречко, Н.: Властивості степеневого розвинення цілої функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. **82**, 27–33 (2016)

[26] Бандура, А.: Нові критерії обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій. Мат. вісник НТШ **13**, 58–67 (2016)

[27] Bandura, A.I., Sheremeta, M.M.: Bounded l-index and $l-M$-index and compositions of analytic functions. Mat. Stud. **48** (2), 180-188 (2017). doi: 10.15330/ms.48.2.180-188

[28] Bandura, A.: Bounded l-index and infinite products of infinite genus. Visn. Lviv Un-ty, Ser. Mech. Math. Issue **84**, 71–79 (2017).

[29] Bandura, A.I.: Analytic functions in the unit ball of bounded value L-distribution in a direction. Mat. Stud. **49** (1), 75–79 (2018). doi: 10.15330/ms.49.1.75-79

[30] Bandura, A., Skaskiv, O.: Entire functions of several variables of bounded index. Publisher I. E. Chyzhykov, Chyslo, Lviv (2016)

[31] Bandura, A., Skaskiv, O.: Analytic functions in the unit ball. Bounded **L**-index in joint variables and solutions of systems of PDE's. LAP Lambert Academic Publishing, Beau Bassin (2017)

Список праць здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

[1] Bandura, A.: A new class of functions of bounded L-index in direction. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблем теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, pp. 31–32. Івано-Франківськ (2011). Ворохта, 23-28 лютого 2011 року

[2] Bandura, A.: The properties of a space of entire functions of bounded L-index in direction. Int. conf. dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach: abstracts of reports, p. 122. Lviv (2012). Lviv, September 17-21, 2012

[3] Bandura, A.: About boundedness and unboundedness of L-index of entire functions. Int. conf. “Complex analysis and related topics”: abstracts, p. 8. Lviv (2013). Lviv, September 23-28, 2013

[4] Bandura, A.: A improvement of some criterion of boundedness L-index in direction. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 35–36. Івано-Франківськ (2013). Ворохта, 25 лютого-3 березня 2013

[5] Bandura, A.: Distribution of zeros of analytic in an unit ball functions of bounded L-index in direction. IV International Hahn conference dedicated to the 135-th anniversary of Hans Hahn: book of abstracts, pp. 222–223. Chernivtsi (2014). Chernivtsi, June 30 - July 5, 2014

[6] Bandura, A.: Growth of analytic in an unit ball functions of bounded L-index in direction. IX-th Summer school Algebra, Topology and Analysis, pp. 3–4. Ivano-Frankivs'k (2014). Polianytsia, July 7 - July 18, 2014

[7] Bandura, A.: Analytic in the unit ball functions of bounded L-index in direction and everywhere dense in a sequence of balls set. II International Seminar on Analytic functions, pp. 3–4. Ivano-Frankivs'k (2015). Ivano-Frankivsk, June 1-3, 2015

[8] Bandura, A.: Entire function of unbounded index in any direction. Наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження К. М. Фішмана та М. К. Фаґе. Тези доповідей, с. 133–134. ЧНУ, Чернівці (2015). Чернівці, 1-4 липня 2015 року

[9] Bandura, A.: Estimate of maximum modulus by minimum modulus for entire functions of bounded L-index in direction. Int. conf. "Complex analysis and related topics": abstracts, pp. 10–11. ЛНУ ім. І. Франка, Львів (2016). Lviv, May 30-June 4, 2016

[10] Bandura, A.: L-index in direction of function of form $f(\sqrt{z_1 z_2})$. International Conference «Contemporary Problems of Natural Sciences» «Tarapov Readings-2016»: abstracts, p. 38. ХНУ, Харків (2016). Kharkiv, March 1-15, 2016

[11] Bandura, A.: Remark about bounded L-index in direction $\mathbf{b}$ of function $\cos\sqrt{z_1 z_2}$. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 50. ПНУ ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ (2016). Ворохта, 24-27 лютого 2016

[12] Bandura, A.: Sums of entire functions of bounded L-index in direction. Друга Всеукр. наук. конф. „Прикладні задачі математики“: матеріали конференції, с. 7–8. ІФНТУНГ (2016). Івано-Франківськ, 13-15 жовтня 2016

[13] Bandura, A.: Analytic in a ball functions of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables. Int. conf. in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach: book of abstracts, p. 111. Lviv (2017). Lviv, Ukraine, September 18 – 23, 2017

[14] Bandura, A.: Estimate minimum modulus of entire function of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 52. Івано-Франківськ (2017). Ворохта, 22-25 лютого 2017

[15] Bandura, A., Petrechko, N.: Analytic functions in a bidisc of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables. Int. conf. "Complex analysis and related topics": abstracts, pp. 63–64. ЛНУ ім. І. Франка, Львів (2016). Lviv, May 30-June 4, 2016

[16] Bandura, A., Petrechko, N., Skaskiv, O.: Dominating polynomial of power series of analytic in bidisc functions of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables: book of abstracts. Int. conf. in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, pp. 128–129. Lviv, Ukraine, September 18 – 23, 2017

[17] Bandura, A., Skaskiv, O.: Analytic in a ball functions of bounded L-index in direction. Всеукр. наук. конф. „Прикладні задачі математики“: матеріали конференції, с. 31 – 33. Івано-Франківськ (2011). Яремче, 13-15 жовтня 2011

[18] Bandura, A., Skaskiv, O.: Existence theorems for analytic in a ball functions of bounded L-index in direction. International scientific conference “Theory of approximation of functions and its applications” dedicated to the 70th anniversary of corresponding member of NASU, prof. A. I. Stepanets: abstracts, p. 117. Kamianets-Podilsky, May 28 — June 3, 2012

[19] Bandura, A.I.: Sufficient conditions of strongly boundedness index in direction for entire functions of 0 genus with “plane” zeros. Book of abstracts: Int. conf. „Complex analysis and its applications“, p. 12. Kharkiv (2011). Kharkiv, August 16-18, 2011

[20] Bandura, A.I.: Growth estimate of entire functions of bounded **L**-index in joint variables. Int. conf. ”Computational methods and Function theory 2017”, pp. 33–34. UMCS, Lublin (2017). Lublin, Poland, July 10 – 15, 2017

[21] Bandura, A.I., Kulinich, H.: Some problems in the theory of entire functions of unbounded index in direction. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 42–43. Івано-Франківськ (2014). Ворохта, 24 лютого - 2 березня 2014

[22] Bandura, A.I., Kulinich, H.: The order of entire functions of bounded index on direction. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 7. Івано-Франківськ (2015). Ворохта, 25 лютого - 1 березня 2015

[23] Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Behavior of partial logarithmic derivatives and distribution of zeros of entire functions. Int. conf. "Theory of appoximation of functions and its applications"in honor of 75th anniversary of corresponding member of NASU, prof. A. I. Stepanets: abstracts, p. 18. Slovyansk, May 28 — June 3, 2017

[24] Bandura, A.I., Skaskiv, O.B.: Properties of entire solutions of some linear PDE’s: book of abstracts. Int. conf. on Differential equations, Mathematical Physics and Applications, p. 55. Vinnytsia, Vasyl Stus Donetsk Nat. Univ. (2017). Cherkasy, Ukraine, October, 17 – 19, 2017

[25] Bandura, A.I.: Composition of entire functions and bounded L-index in direction. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 5. Івано-Франківськ (2018). Ворохта, 27 лютого - 2 березня 2018 року

[26] Bandura, A.: Analytic solutions in the unit ball of system of partial differential equations and bounded **L**-index in joint variables. XIXth Int. conf. on analytic functions and related topics. Book of absracts, p. 32-33. University of Rzeszów (2018). Rzeszów, Poland, 25-29 June 2018

[27] Бандура, А., Петречко, Н.: Два критерії обмеженості L-індексу за сукупністю змінних аналітичних у бікрузі функцій. II Всеукр. наук. конф. „Прикладні задачі математики“: матеріали конференції, с. 18–19. ІФНТУНГ (2016). Івано-Франківськ, 13-15 жовтня 2016

[28] Бандура, А., Петречко, Н.В., Скасків, О.Б.: Аналог теореми Хеймана для аналітичних у бікрузі функцій обмеженого **L**-індексу. Всеукр. наук. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези доповідей, с. 114–115. ПНУ ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ (2017). Ворохта, 22-25 лютого 2017 року

[29] Бандура, А. І., Скасків, О.Б.: Аналітичні функції в одиничній кулі обмеженого L-індексу за напрямком. Всеукр. конф. „Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу“: тези с. 9. Івано-Франківськ (2018). Ворохта, 27 лютого - 2 березня 2018

Список публікацій, які додатково відображають результати дисертації

[1] Bandura, A.I., Kulinich, H.M.: Entire functions of strongly bounded L-index in direction. Prykarp. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(21)**, 46–52 (2013)

[2] Bandura, A.I., Kulinich, H.M., Shegda, L.M.: The order of entire functions of bounded index in direction. Prykarp. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **1(25)**, 22–25 (2014)

[3] Скасків, О. Б., Бандура А. І.: Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції. ЛНУ-ІФНТУНГ, Львів – Івано-Франківськ (2015)

[4] Bandura, A., Petrechko, N., Skaskiv, O.: Maximum modulus in a bidisc of analytic functions of bounded **L**-index and an analogue of Hayman’s theorem. Mat. Bohemica, (2018) doi:10.21136/MB.2017.0110-16

[5] Bandura, A., Skaskiv, O.: Analytic in the unit ball functions of bounded L-index in direction. https://arxiv.org/abs/1501.04166

АНОТАЦІЯ

Бандура А. І. *Властивості класів голоморфних функцій обмеженого індексу.* — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 „Математичний аналіз“ (111 — Математика). — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

У роботі об'єктом досідження є класи цілих та аналітичних в кулі чи у полікрузі функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних чи обмеженого L-індексу за напрямком. Такі класи є доволі широкими. Про це свідчать доведені теореми існування. Зокрема, для цілої функції $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ існує додатна неперервна функція $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ така, що F — обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних, тоді й тільки тоді, коли F має обмежену кратність нульових точок. Для цілих та аналітичних в одиничній кулі функцій від декількох змінних обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних встановлено критерії належності функцій до відповідних класів, теореми існування та інші властивості, які описують локальне поводження їхніх частинних похідних на кістяках полікруга. Знайдено точні оцінки зростання логарифма максимуму модуля таких функцій на кістяку полікруга, що покращують в одновимірному випадку відповідну оцінку, доведену раніше М. М. Шереметою. Знайдено достатні умови обмеженості **L**-індексу за сукупністю змінних цілих та аналітичних в кулі розв'язків систем лінійних рівнянь з частинними похідними вищих порядків та отримано точні оцінки їхнього зростання через параметри, залежні від коефіцієнтів систем. Запропоновано повністю новий підхід у теорії функцій від декількох змінних обмеженого індексу — використання вичерпання багатовимірного простору кулями замість полікругів, що дозволило виявити нові характеристичні властивості функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних через оцінку максимуму модуля таких функцій та їхніх похідних на сфері. Вперше отримано аналоги логарифмічного критерію та оцінки максимуму модуля через мінімум модуля для цілих функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних. Знайдені умови містять обмеження на поводження частинних логарифмічних похідних за усіма змінними зовні деяких виняткових множин та на міру нульової множини цілої функції в полікрузі.

Ключові слова: ціла функція, аналітична функція, куля, полікруг, похідна за напрямком, частинна похідна, обмежений **L**-індекс за сукупністю змінних, обмежений L-індекс за напрямком, лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку, системи лінійних рівнянь з частинними похідними, розподіл нулів.

АННОТАЦИЯ

Бандура А. И. *Свойства классов голоморфных функций ограниченного индекса.* - Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико - математических наук по специальности 01.01.01 „Математический анализ“ (111 — Математика). — Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2018.

В работе объектом исследования являются классы целых и аналитических в шаре или в поликруге функций ограниченного **L**-индекса по совокупности переменных или ограниченного L-индекса по направлению. Эти классы являются довольно широкими. На это указывают доказанные теоремы существования. В частности, для целой функции $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ существует положительная непрерывная функция $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ такая, что F является функцией ограниченного **L**-индекса по совокупности переменных, тогда и только тогда, когда нулевые то-

чки F имеют ограниченную кратность. Для целых и аналитических в единичном шаре функций нескольких переменных ограниченного $\mathbf{L}$-индекса по совокупности переменных получены критерии принадлежности функций соответствующим классам, теоремы существования, а также другие свойства, описывающие локальное поведение их частных производных на остове поликруга. Получены точные оценки роста логарифма максимума модуля таких функций на остове поликруга, улучшающие в одномерном случае соответствующую оценку, доказанную ранее М. Н. Шереметой. Найдены достаточные условия ограниченности $\mathbf{L}$-индекса по совокупности переменных целых и аналитических в шаре решений систем линейных уравнений в частных производных высших порядков и получены точные оценки их роста через параметры, определяемые коэффициентамы систем. Предложен новый в теории функций нескольких переменных ограниченного индекса подход, основывающийся на исчерпании многомерного пространства шарами вместо поликругов, что дало возможность обнаружить новые характеристические свойства функций ограниченного $\mathbf{L}$-индекса по совокупности переменных в терминах оценок максимума модуля таких функций и их производных на сфере. Впервые получены аналоги логарифмического критерия и оценки максимума модуля через минимум модуля для целых функций ограниченного $\mathbf{L}$-индекса по совокупности переменных. Полученные условия содержат ограничения на поведение частных логарифмических производных по всем переменным вне некоторых исключительных множеств и на меру нулевого множества целой функции в поликруге.

Ключевые слова: целая функция, аналитическая функция, шар, поликруг, проиводная по направлению, частная производная, ограниченный $\mathbf{L}$-индекс по совокупности переменных, ограниченный L-индекс по направлению, линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка, система линейных уравнений в частных производных, распределение нулей.

ABSTRACT

Bandura A.I. *Properties of classes of holomorphic functions of bounded index.* — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 — Mathematical analysis (111 - Mathematics), Ivan Franko National University of L'viv, Lviv, 2018.

The objects of investigations are classes of entire and analytic functions in the unit ball or in a polydisc of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables index or of bounded L-index in direction. These classes are quite wide. This is proved by the existence theorems. Particularly, for an entire function $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ there exists a positive continuous function $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ such that F has bounded $\mathbf{L}$-index in direction if and only if F has bounded multiplicity of zero points. For entire and analytic functions of several variables in the unit ball of bounded $\mathbf{L}$-index in joint variables there is established characterizations of these classes, existence theorems and other properties which describe local behavior of the partial derivatives on the skeletons of polydisc or estimates of coefficients of power series expansions. Also we have obtained sharp growth estimates of logarithm of maximum modulus for these functions on the skeleton of polydisc. In this way, we improve some growth estimate for functions of one variable

proved by M. M. Sheremeta.

There are deduced sufficient conditions of boundedness of the **L**-index in joint variables for entire and analytic solutions in the unit ball of linear higher-order systems of partial differential equations. For these solutions we find sharp estimates of its growth by parameters depending of the coefficients of the system.

Developing a new approach in function theory of bounded index a usage ball exhaustion instead polydisc in multidimensional complex space allowed us to discover new characteristic properties of functions of bounded **L**-index in joint variables by estimate of maximum modulus of the functions and its derivatives on a sphere.

As sufficient conditions there are presented analogs of logarithmic criterion for entire functions of bounded **L**-index in joint variables. The obtained conditions describe behavior of partial logarithmic derivatives in all variables outside some exceptional sets and a measure of zero zet in polydisc.

We also examine characterizations of entire and analytic functions in the unit ball of several variables of bounded L-index in a direction. For these classes there are sharp growth estimates of logarithm maximum modulus on a circle. Using logarithmic criterion there is selected a subclass of entire functions of unbounded index in any direction such that they have bounded index in each slice $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ for a given $z^0 \in \mathbb{C}^n$. For some functions with described property there is a constructed a positive continuous function such that they have bounded L-index in the same direction. We fully prove a hypothesis about weaker sufficient conditions of L-index boundedness in direction for entire functions (estimate of maximum modulus, minimum modulus on a circle, logarithmic criterion) by replacement of universal quantifier on existential quantifier of some radius.

The sufficient conditions of l-index boudedness of entire solutions of equation $w' = f(z, w)$ are presented. This is revealed that the condition „F is holomorphic in $\mathbb{C}^n$“ is essential. It can not be replaced by the condition "F is holomorphic on all slices of the form $z^0 + t\mathbf{b}$"in the theory of entire functions of bounded L-index in the direction.

Keywords: entire function, analytic function, ball, polydisc, derivative in direction, partial derivative, bounded **L**-index in joint variables, bounded L-index in direction, linear non-homogeneous n-th order differential equation, system of linear partial differential equations, zero distribution.

Підписано до друку 10.09.2018 р. Формат 61×84/16
Ум. друк. арк. 2,0. Папір офсетний.
Друк цифровий.
Тираж 100 прим. Замовлення № 24

Друк: підприємець Голіней О. М.
76008, м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
Тел. (0342) 58-04-32