

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

СТЕЛЬМАЩУК ВІТАЛІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ



УДК 519.63

**АНАЛІЗ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОП'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ
ТА ПРОЕКЦІЙНО-СІТКОВІ СХЕМИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ**

01.01.07 – обчислювальна математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі інформаційних систем у Львівському національному університеті імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Шинкаренко Георгій Андрійович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
завідувач кафедри інформаційних систем.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
Подлевський Богдан Михайлович,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
провідний науковий співробітник відділу
числових методів математичної фізики

кандидат фізико-математичних наук,
Вербіцький Віктор Васильович,
Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова,
доцент кафедри обчислювальної математики

Захист відбудеться «26» жовтня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.07 Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий «21» вересня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради



Ю.Д. Головатий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. П'єзоелектричні та піроелектричні матеріали все ширше застосовуються в сучасних технічних пристроях. Явище прямого п'єзо ефекту використовується для побудови таких приладів як: вимірювачі тиску, вібрацій, датчики механічних напружень, датчики деформацій та прискорення та інші сенсори. На основі явища оберненого п'єзо ефекту побудовані різноманітні актуатори (прилади, що передають дію з керуючого пристрою на об'єкт керування). Найважливішими застосуваннями піроелектричного ефекту є детектори інфрачервоної радіації, термографія (тепловізори) та піроелектричні телевізійні трубки. Вищезгадані факти зумовлюють актуальність комп'ютерного моделювання поведінки п'єзоелектричних та піроелектричних матеріалів.

Вперше математична модель взаємодії механічного, електричного та теплового полів у піроелектрику була сформульована в працях R.D. Mindlin. Подальше теоретичне дослідження цієї моделі здійснив W. Nowacki. Інші вчені розробляли свої дещо модифіковані моделі термоп'єзоелектрики, в цьому зв'язку варто згадати роботи Н. Tiersten та R.A. Toupin. Вагомий внесок у розвиток математичних моделей термоп'єзоелектрики та методів, що застосовуються для їх розв'язування, здійснили такі вчені як В.Т. Грінченко, О.Ю. Жарій, В.Г. Карнаухов, М.Р. Короткіна, Б.А. Кудрявцев, В.З. Партон, А.Ф. Улітко, Г.А. Шинкаренко, Н.А. Шульга, Ф.В. Чабан, F. Ashida, T.R. Tauchert, J. Yang.

У дисертації Ф.В. Чабана описана розроблена ним адаптивна схема методу скінченних елементів (МСЕ) для задачі про вимушені гармонійні коливання п'єзоелектриків. Актуальною є побудова подібних схем для розв'язування задач термоп'єзоелектрики, адже, використовуючи їх, ми можемо наперед гарантувати точність отриманого чисельного розв'язку.

Основним недоліком класичної моделі термоп'єзоелектрики є припущення про нескінченну швидкість поширення тепла в матеріалі, що не є правильним з фізичної точки зору. Способи обійти цю проблему були застосовані у роботах С. Cattaneo, P. Vernotte, Н. Lord & Y. Shulman, А.Е. Green & К.А. Lindsay, Я.С. Підстригача. До задач термоп'єзоелектрики вперше такі підходи застосував S. Kaliski, а далі G. Lebon, D.S. Chandrasekharaiah. Зрештою, було розроблено багато інших моделей термопружності та термоп'єзоелектрики, які враховують скінченну швидкість поширення тепла, зокрема, моделі Green-Naghdi, Chandrasekharaiah-Tzou, Hetnarski-Ignaczak. Такі моделі називають узагальненими моделями термоп'єзоелектрики.

У роботах Г.А. Шинкаренка досліджено дещо модифіковану (з врахуванням в'язкості матеріалу та з рівнянням електродинаміки, що впливає з диференціювання закону Максвелла для електричного поля) початково-крайову задачу термоп'єзоелектрики та з допомогою переходу до варіаційної задачі розроблено чисельні схеми її розв'язування на основі МСЕ. З огляду на вищенаведені факти, актуальним є формулювання та дослідження варіаційних задач термоп'єзоелектрики на основі моделей Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея та модифікацій Г.А. Шинкаренка, а також побудова чисельних схем їх розв'язування.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в рамках держбюджетних науково-дослідних робіт кафедри інформаційних систем Львівського національного університету імені Івана Франка: Пі-120П “Чисельне розв’язування прямих і обернених задач математичної фізики і механіки проекційно-сітковими методами” (2012-2013 рр., № ДР 0112U001285); наукові керівники – д.ф.-м.н., проф. Шинкаренко Г.А., д.ф.-м.н., проф. Хапко Р.С; Пі-17П “Побудова, аналіз і програмна реалізація чисельних методів для прямих та обернених задач фізики та механіки” (2015-2016 рр., № ДР 0115U003256); науковий керівник – д.ф.-м.н., проф. Хапко Р.С.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є побудова, аналіз та апробація високоточних скінченно-елементних схем для розв’язування задач класичної та узагальненої термоп’єзоелектрики, порівняння результатів одержаних за різними математичними моделями, а також порівняння власних результатів з наявними в літературі, а детальніше:

1. Програмна реалізація проекційно-сіткових схем на основі МСЕ, описаних у роботах Шинкаренка Г.А., для нестационарної задачі класичної термоп’єзоелектрики та задачі про вимушені коливання піроелектриків. Аналіз отриманих чисельних результатів, порівняння їх з результатами одержаними іншими дослідниками.
2. Побудова апостеріорних оцінювачів похибок (АОП) апроксимацій МСЕ для задач про вимушені усталені коливання піроелектриків та їх застосування для побудови h -адаптивних схем МСЕ.
3. Дослідження коректності варіаційної задачі про вимушені усталені коливання піроелектрика у випадку моделей термоп’єзоелектрики Лорда-Шульмана (Lord-Shulman) та Гріна-Ліндсея (Green-Lindsay). Побудова схем МСЕ для розв’язування цих задач. Аналіз стійкості та збіжності цих схем.
4. Дослідження коректності нестационарної варіаційної задачі термоп’єзоелектрики Лорда-Шульмана. Побудова чисельної схеми розв’язування цієї задачі з використанням МСЕ та однокрокової рекурентної схеми. Порівняння отриманих чисельних результатів з результатами інших дослідників.
5. Дослідження коректності нестационарної варіаційної задачі термоп’єзоелектрики Гріна-Ліндсея. Побудова чисельної схеми розв’язування цієї задачі з використанням МСЕ та однокрокової рекурентної схеми.

Об’єктом дослідження є крайові і початково-крайові задачі термоп’єзоелектрики та відповідні їм варіаційні задачі (класична модель, модель Лорда-Шульмана, модель Гріна-Ліндсея).

Предмет дослідження – коректність формулювань варіаційних задач термоп’єзоелектрики для моделей Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея, чисельні схеми МСЕ їх розв’язування, зокрема h -адаптивні, рекурентні схеми інтегрування в часі.

Методи досліджень – елементи функціонального аналізу в гільбертових просторах та варіаційного числення, метод Гальоркіна, метод скінченних елементів, рекурентні схеми інтегрування в часі.

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Побудовано h -адаптивну схему для розв'язування задач про вимушені коливання піроелектриків у випадку класичної моделі термоп'єзоелектрики, що дозволяє знаходити розв'язок з наперед заданою точністю.
2. Доведено коректність варіаційної задачі про вимушені коливання піроелектриків моделі Лорда-Шульмана. Розроблено скінченно-елементну схему її розв'язування та доведено її стійкість та збіжність.
3. Доведено коректність нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. Розроблено чисельну схему її розв'язування на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми.
4. Доведено коректність варіаційної задачі про вимушені коливання піроелектриків моделі Гріна-Ліндсея. Розроблено скінченно-елементну схему її розв'язування та доведено її стійкість та збіжність.
5. Доведено коректність нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея. Розроблено чисельну схему її розв'язування на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми.

Практичне значення одержаних результатів. Побудовану h -адаптивну схему МСЕ для розв'язування задачі про вимушені коливання піроелектрика можна використати для знаходження розв'язків задачі з наперед гарантованою точністю.

Створений комплекс програм для розв'язування крайових та початково-крайових задач класичної та узагальненої термоп'єзоелектрики можна використати для комп'ютерного моделювання процесів, що відбуваються в піроелектричних матеріалах.

Особистий внесок здобувача.

Усі наукові результати, які виносяться на захист, автор дисертації отримав самостійно. У спільних з науковим керівником роботах [1-8] проф. Г.А. Шинкаренку належать постановка задач, загальні підходи розв'язування варіаційних задач, ідеї для постановки чисельних експериментів, а здобувачеві належить розробка програмних засобів для побудованих схем та чисельні результати і їх аналіз. У роботі [1] здобувачеві належить доведення теореми про обмеженість розв'язку задачі піроелектрики. В праці [2] автору дисертації належать теореми (з доведеннями) про взаємозв'язок білінійних форм, про єдиність розв'язку та коректність задачі про вимушені коливання піроелектриків у випадку моделі Лорда-Шульмана, побудова чисельної схеми розв'язування та теорема про збіжність МСЕ-апроксимацій у побудованій чисельній схемі. В роботі [3] здобувачеві належить доведення існування та єдиності розв'язку нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. В праці [4] автору дисертації належать теорема про коректність задачі про вимушені коливання піроелектриків у випадку моделі Гріна-Ліндсея, побудова чисельної схеми розв'язування та теорема про збіжність МСЕ-апроксимацій у побудованій чисельній схемі. В роботах [5, 7] здобувачеві належать результати чисельних експериментів та їх аналіз. В статті [6] автору дисертації належить порівняння чисельних розв'язків задачі термоп'єзоелектрики з розв'язками задачі п'єзоелектрики, а також порівняння отриманих чисельних результатів з результатами праць інших дослідників. В роботі

[8] здобувачеві належить побудова h -адаптивної схеми МСЕ для розв'язування задачі про вимушені коливання піроелектрика у випадку класичної моделі термоп'єзоелектрики.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на міжнародних наукових конференціях: «Computer Methods in Mechanics» (Gdańsk, 2015; Lublin, 2017), Ім. В. Я. Скоробагатька (Дрогобич, 2011); «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 2013-2014), «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2013), «Сучасні проблеми термомеханіки» (Львів, 2016); вітчизняних наукових конференціях: «Підстригачівські читання» (Львів, 2014); «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2012-2016); семінарах кафедри: інформаційних систем; аспірантських семінарах факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка 2012-2015рр.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 8-ми наукових працях: [1-4] у наукових фахових виданнях з переліку, затвердженого МОН України, та [5-8] у закордонних виданнях. Стаття [2] входить до наукометричної бази даних Web of Science, [8] – до Scopus та CRCnetBASE, [5-7] складають розділи монографій. У матеріалах наукових конференцій опубліковано 14 тез та матеріалів доповідей.

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, який налічує 149 найменувань на 16 сторінках та додатку зі списком публікацій здобувача. Дисертація містить 43 рисунки. Загальний обсяг дисертації становить 151 сторінку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовується актуальність теми дисертаційної роботи, продемонстровано зв'язок з науковими програмами та темами, визначено її наукову новизну та практичне значення, сформульовано предмет та мету досліджень, наведено відомості про апробацію результатів роботи та публікації за темою дисертації.

У першому розділі проведено аналіз стану проблеми взаємодії механічного, електричного та теплового полів у піроелектриках і на основі класичної моделі термоп'єзоелектрики та моделей Лорда-Шульмана і Гріна-Ліндсея здійснено постановки відповідних початково-крайових задач.

Припустимо, що екземпляр піроелектрика займає обмежену область $\Omega \subset R^d$, $d=1,2,3$, з ліпшицевою межею $\Gamma = \partial\Omega$ та з одиничним вектором зовнішньої нормалі $\mathbf{n} = \{n_i\}_{i=1}^d$, де $n_i = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_i)$. Нехай $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^d$ – точка області Ω та t – час, $t \in [0, T], 0 < T < +\infty$. Необхідно знайти вектор пружних зміщень $\mathbf{u} = \{u_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$, електричний потенціал $p = p(\mathbf{x}, t)$ та приріст температури $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$, які задовольняють взаємопов'язані системи рівнянь еластодинаміки (1), рівняння

електродинаміки (2) та рівняння теплопровідності (3) (тут і далі за індексами, які повторюються, передбачається підсумовування від 1 до d):

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u}_i'' - f_i) - \sigma_{ij,j} = 0, \\ \sigma_{ij} = c_{ijkm}[\varepsilon_{km}(\mathbf{u}) - \alpha_{km}\theta] + a_{ijkm}\varepsilon_{km}(\mathbf{u}') - e_{kij}E_k(p), \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} D'_{k,k} + J_{k,k} = 0, \\ D_k = g_{km}E_m(p) + e_{kij}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \pi_k\theta, \\ J_k = z_{km}E_m(p), \\ E_k(p) = -p_{,k} \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \rho(T_0 S' - w) + q_{i,i} = 0, \\ q_i = -\lambda_{ij}\theta_{,j}, \\ S = \rho c_\nu T_0^{-1}\theta + c_{ijkm}\alpha_{km}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \pi_k E_k(p) \quad \text{в } \Omega \times (0, T]. \end{cases} \quad (3)$$

Для однозначної розв'язності системи рівнянь класичної термоп'єзоелектрики (1)-(3) доповнимо її відповідними крайовими та початковими умовами (4)-(5):

$$\begin{cases} u_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_u \times [0, T], \Gamma_u \subset \Gamma, \text{mes}(\Gamma_u) > 0, \\ \sigma_{ij}n_j = \bar{\sigma}_i \quad \text{на } \Gamma_\sigma \times [0, T], \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u, \\ p = 0 \quad \text{на } \Gamma_p \times [0, T], \Gamma_p \subset \Gamma, \text{mes}(\Gamma_p) > 0, \\ [D'_k + J_k]n_k = 0 \quad \text{на } \Gamma_d \times [0, T], \Gamma_d \subset \Gamma, \Gamma_d \cap \Gamma_p = \emptyset, \\ \int_{\Gamma_e} [D'_k + J_k]n_k d\gamma = I \quad \text{на } \Gamma_e \times [0, T], \Gamma_e = \Gamma \setminus (\Gamma_d \cup \Gamma_p), \\ E_k(p) - n_k E_m(p)n_m = 0 \quad \text{на } \Gamma_e \times [0, T], \\ \theta = 0 \quad \text{на } \Gamma_\theta \times [0, T], \Gamma_\theta \subset \Gamma, \text{mes}(\Gamma_\theta) > 0, \\ q_i n_i = \bar{q} \quad \text{на } \Gamma_q \times [0, T], \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_\theta, \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \mathbf{u}'|_{t=0} = \mathbf{v}_0, p|_{t=0} = p_0, \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega. \quad (5)$$

Тут $\rho = \rho(\mathbf{x})$ – густина маси піроелектрика, $\mathbf{f} = \{f_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$ – вектор об'ємних сил, $w = w(\mathbf{x}, t)$ – внутрішні джерела тепла, σ_{ij} та ε_{ij} – компоненти тензорів механічних напружень та деформацій відповідно; D_k , J_k , E_k та q_i – компоненти векторів електричної індукції, електричного струму, напруженості електричного поля та теплового потоку відповідно; S – ентропія. Компоненти a_{ijkm} та c_{ijkm} описують тензори в'язкості та пружності зі звичайними властивостями симетрії та еліптичності; e_{kij} , z_{km} , g_{ij} , λ_{ij} , α_{km} та π_k визначають коефіцієнти п'єзоелектрики, електричної провідності, діелектричної проникливості, теплопровідності, теплового розширення та піроелектрики відповідно. Величини $\bar{\sigma} = \{\bar{\sigma}_i(\mathbf{x}, t)\}$, $I = I(\mathbf{x}, t)$ та

$\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t)$ визначають задані поверхневі напруження, електричний струм та тепловий потік відповідно.

Задача класичної термоп'єзоелектрики (1)-(5) та проекційно-сіткові методи її розв'язування вивчалася в працях Г.А. Шинкаренка, а її частковий випадок (задача п'єзоелектрики) був розглянутий Ф.В. Чабаном. Однак, модель класичної термоп'єзоелектрики передбачає нескінченну швидкість поширення тепла, що не відповідає фізиці реальних процесів, тому в останні десятиліття було розроблено багато інших моделей термоп'єзоелектрики, які виправляють цей недолік, зокрема моделі Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея.

В моделі Лорда-Шульмана класичний закон Фур'є для теплового потоку

$$q_i = -\lambda_{ij}\theta_{,j} \quad (6)$$

узагальнюється до вигляду:

$$\tau q'_i + q_i = -\lambda_{ij}\theta_{,j}. \quad (7)$$

Тут $\tau > 0$ – деяка стала, яку називають часом релаксації, визначає проміжок часу, який необхідний, щоб встановити стаціонарний розподіл температури в елементі об'єму, коли до нього прикладається градієнт температури.

Зважаючи на (7), тепловий потік $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ стає додатковою шуканою змінною і тому початкові умови задачі (1)-(5) повинні бути модифіковані таким чином:

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \mathbf{u}'|_{t=0} = \mathbf{v}_0, p|_{t=0} = p_0, \theta|_{t=0} = \theta_0, \mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{q}_0 \text{ в } \Omega. \quad (8)$$

Модель Гріна-Ліндсея не суперечить класичному закону Фур'є (6). Натомість, вона модифікує основні співвідношення класичної моделі термоп'єзоелектрики додаванням двох параметрів часу релаксації $t_1 \geq t_0 > 0$, які не пов'язані з параметром релаксації τ моделі Лорда-Шульмана. Модифіковані основні феноменологічні співвідношення у моделі Гріна-Ліндсея виглядають так:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkm}[\varepsilon_{km} - \alpha_{km}(\theta + t_1\theta')] - e_{kij}E_k + a_{ijkm}\varepsilon'_{km}, \quad (9)$$

$$D_k = e_{kij}\varepsilon_{ij} + g_{km}E_m + \pi_k(\theta + t_1\theta'), \quad (10)$$

$$\rho S = c_{ijkm}\alpha_{km}\varepsilon_{ij} + \pi_k E_k + \frac{\rho c_v}{T_0}(\theta + t_0\theta'). \quad (11)$$

Для однозначної розв'язності початкові умови повинні містити значення похідної від приросту температури, тому матимуть вигляд:

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \mathbf{u}'|_{t=0} = \mathbf{v}_0, p|_{t=0} = p_0, \theta|_{t=0} = \theta_0, \theta'|_{t=0} = \theta_{10} \text{ на } \Omega. \quad (12)$$

Сформульовані вище початково-крайові задачі термоп'єзоелектрики та відповідні їм варіаційні задачі становлять основний об'єкт цього дослідження.

У другому розділі вивчено питання чисельного розв'язування задачі про вимушені усталені коливання піроелектриків для випадку класичної моделі термоп'єзоелектрики та розроблено h -адаптивну схему розв'язування цієї задачі.

Введемо простори допустимих зміщень, електричних потенціалів та приростів температури (відносно початкової температури T_0)

$$\begin{aligned}
V &= \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d : \mathbf{v} = 0 \text{ на } \Gamma_u \right\}, \\
Q &= \left\{ q \in H^1(\Omega) : q = 0 \text{ на } \Gamma_p, q = \text{const на } \Gamma_e \right\}, \\
Z &= \left\{ \zeta \in H^1(\Omega) : \zeta = 0 \text{ на } \Gamma_\theta \right\}
\end{aligned} \tag{13}$$

та позначення $\mathbf{H} = [L^2(\Omega)]^d$, $\Phi := V \times Q \times Z$ і спряжений простір $\Phi' := V' \times Q' \times Z'$.

У випадку вимушених гармонійних коливань піроелектрика із заданою круговою частотою $\omega = \text{const} > 0$, складові наближених розв'язків варіаційного формулювання задачі (1)-(5) шукаються у вигляді $v(\mathbf{x}, t) = v_1(\mathbf{x}) \cos \omega t + v_2(\mathbf{x}) \sin \omega t$, а сама варіаційна задача набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned}
&\text{задано } \omega = \text{const} > 0, \ell = (l_1, r_1, \mu_1, l_2, r_2, \mu_2) \in W'; \\
&\text{знайти вектор амплітуд } \psi = (\mathbf{u}_1, p_1, \theta_1, \mathbf{u}_2, p_2, \theta_2) \in W, W = \Phi \times \Phi, \text{ такий, що} \\
&-\omega^2 m(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + \omega a(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) + c(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) - e(p_1, \mathbf{v}_1) - \gamma(\theta_2, \mathbf{v}_1) = \langle l_1, \mathbf{v}_1 \rangle \quad \forall \mathbf{v}_1 \in V, \\
&\omega g(p_2, q_1) + \omega e(q_1, \mathbf{u}_2) + z(p_1, q_1) + \pi(\theta_2, q_1) = \langle r_1, q_1 \rangle \quad \forall q_1 \in Q, \\
&k(\theta_1, \xi_1) + s(\theta_2, \xi_1) + \omega \gamma(\xi_1, \mathbf{u}_2) + \omega \pi(\xi_1, p_2) = \langle \mu_1, \xi_1 \rangle \quad \forall \xi_1 \in Z, \\
&-\omega^2 m(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) - \omega a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2) + c(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) - e(p_2, \mathbf{v}_2) - \gamma(\theta_1, \mathbf{v}_2) = \langle l_2, \mathbf{v}_2 \rangle \quad \forall \mathbf{v}_2 \in V, \\
&-\omega g(p_1, q_2) - \omega e(q_2, \mathbf{u}_1) + z(p_2, q_2) - \pi(\theta_1, q_2) = \langle r_2, q_2 \rangle \quad \forall q_2 \in Q, \\
&k(\theta_2, \xi_2) - s(\theta_1, \xi_2) - \omega \gamma(\xi_2, \mathbf{u}_1) - \omega \pi(\xi_2, p_1) = \langle \mu_2, \xi_2 \rangle \quad \forall \xi_2 \in Z.
\end{aligned} \right. \tag{14}$$

Після введення відповідних позначень, задачу (14) перепишемо так:

$$\left\{ \begin{aligned}
&\text{задано } \omega = \text{const} > 0, \chi_\omega = (l_1, r_1, \mu_1, l_2, r_2, \mu_2) \in W'; \\
&\text{знайти вектор амплітуд } \psi = (\mathbf{u}_1, p_1, \theta_1, \mathbf{u}_2, p_2, \theta_2) \in W \text{ такий, що} \\
&\Pi_\omega(\psi, w) = \langle \chi_\omega, w \rangle \quad \forall w \in W.
\end{aligned} \right. \tag{15}$$

Задача для знаходження похибки апроксимації МСЕ формулюється таким чином:

$$\left\{ \begin{aligned}
&\text{задано } \omega = \text{const} > 0, \text{ апроксимацію } \psi_h \in W_h, \dim W_h < \infty; \\
&\text{знайти похибку } e = \psi - \psi_h \in E = W \setminus W_h \text{ таку, що} \\
&\Pi_\omega(e, w) = \langle \rho_\omega(\psi_h), w \rangle =: \langle \chi_\omega, w \rangle - \Pi_\omega(\psi_h, w) \quad \forall w \in E.
\end{aligned} \right. \tag{16}$$

Після введення скінченновимірного підпростору E_h простору похибок E , отримуємо дискретну варіаційну задачу для знаходження оцінювача похибки $e_h \approx e$:

$$\left\{ \begin{aligned}
&\text{задано } \omega = \text{const} > 0, \psi_h \in W_h; \\
&\text{знайти оцінювач } e_h \in E_h \text{ такий, що} \\
&\Pi_\omega(e_h, w) = \langle \rho_\omega(\psi_h), w \rangle \quad \forall w \in E_h.
\end{aligned} \right. \tag{17}$$

Підпростір E_h будується таким чином, щоб забезпечити обчислення апостеріорного оцінювача похибки e_h на кожному скінченному елементі K триангуляції \mathfrak{T}_h незалежно від інших елементів сітки. Для цього за базис підпростору E_h обрано поелементно визначені невід'ємні функції бульбашки b_K :

$$\begin{cases} b|_K := b_K \in H_0^1(K), \\ b_K(x_K) = 1 \quad \forall K \in \mathfrak{T}_h \quad \forall h > 0, \end{cases} \quad (18)$$

де $x_K \in K$ – центр мас скінченного елемента $K \in \mathfrak{T}_h$.

На кожній ітерації адаптивної схеми індикатор похибки η_K обчислюється на скінченному елементі K за таким правилом:

$$\eta_K = \frac{\sqrt{N} \|e_h\|_{1,K}}{\|e_h\|_{1,\Omega}} \quad \forall K \in \mathfrak{T}_h. \quad (19)$$

Тут $N = \text{card} \mathfrak{T}_h$ – загальна кількість елементів сітки \mathfrak{T}_h . Якщо на певному скінченному елементі значення $\eta_K > 1$ (похибка більша, ніж середня на триангуляції), елемент K ділиться на декілька нових. Якщо індикатор загальної похибки $\eta = \frac{\|e_h\|_{1,\Omega}}{\|\psi_h + e_h\|_{1,\Omega}} \cdot 100\%$ стає меншим за заданий рівень допустимої похибки δ ,

алгоритм зупиняється.

У **третьому розділі** розглянуто чисельне розв'язування нестационарної задачі класичної моделі термоп'єзоелектрики.

Варіаційне формулювання для класичної початково-крайової задачі термоп'єзоелектрики має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \psi_0 = (\mathbf{u}_0, p_0, \theta_0) \in \Phi, \mathbf{v}_0 \in \mathbf{H} \text{ та } (l, r, \mu) \in L^2(0, T; \Phi'); \\ \text{знайти } \psi = (\mathbf{u}, p, \theta) \in L^2(0, T; \Phi) \text{ таке, що} \\ m(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - e(p(t), \mathbf{v}) - \gamma(\theta(t), \mathbf{v}) = \langle l(t), \mathbf{v} \rangle, \\ g(p'(t), q) + e(q, \mathbf{u}'(t)) + z(p(t), q) + \pi(\theta'(t), q) = \langle r(t), q \rangle, \\ s(\theta'(t), \zeta) + k(\theta(t), \zeta) + \pi(\zeta, p'(t)) + \gamma(\zeta, \mathbf{u}'(t)) = \langle \mu(t), \zeta \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, c(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\ g(p(0) - p_0, q) = 0, s(\theta(0) - \theta_0, \zeta) = 0 \quad \forall q \in Q, \forall \zeta \in Z. \end{array} \right. \quad (20)$$

Шинкаренком Г.А. доведено коректність цієї варіаційної задачі, а також розроблено однокрокову рекурентну схему (ОРС) її розв'язування. Автором дисертації розроблено програмні засоби на основі цієї чисельної схеми.

Зокрема, було розглянуто такий приклад застосування цієї чисельної схеми до моделювання поведінки піроелектричного стрижня з кераміки PZT-4 довжиною $L = 0.01 \text{ м}$. Лівий кінець стрижня жорстко закріплений, заземлений і підтримується з нульовим збуренням температури, а до правого кінця подається лише ненульове механічне навантаження ударного типу:

$$\bar{\sigma}(t) = \begin{cases} 5 \cdot 10^6 \text{ Н / м}^2, & t \leq 5 \cdot 10^{-7} \text{ с} \\ 0 \text{ Н / м}^2, & t > 5 \cdot 10^{-7} \text{ с} \end{cases}, \quad \bar{J}(t) = 0 \text{ А}, \quad \bar{h}(t) = 0 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (21)$$

Для дискретизації цієї задачі використано рівномірну сітку з $N = 512$ скінченних елементів з кусково-квадратичними апроксимаціями розв'язку і $N_T = 4000$ кроків інтегрування в часі протягом періоду $T = 75 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, що гарантує виконання умови

Куранта-Фрідрікса. Наведені нижче результати одержано зі значенням параметра $\alpha = 0,5$, який забезпечує другий порядок збіжності ОРС.

У першому рядку на рис.1 показано профілі пружного зміщення $u(x,t)$ та механічного напруження $\sigma(x,t)$ під час руху хвилі до лівого кінця стрижня після зняття навантаження. Наступний рядок демонструє перетворення в структурі хвиль, які відбуваються при відбитті від закріпленого кінця стрижня. Як можна зауважити, в ці моменти часу значення механічного напруження подвоюється. В третьому рядку показано профілі цих хвиль під час руху до правого кінця стрижня. Останній рядок зображає профілі хвиль після відбивання від вільного кінця стрижня. Тут варто зауважити, що амплітуди хвиль залишаються такими самими, але змінюють свій знак (фазу).

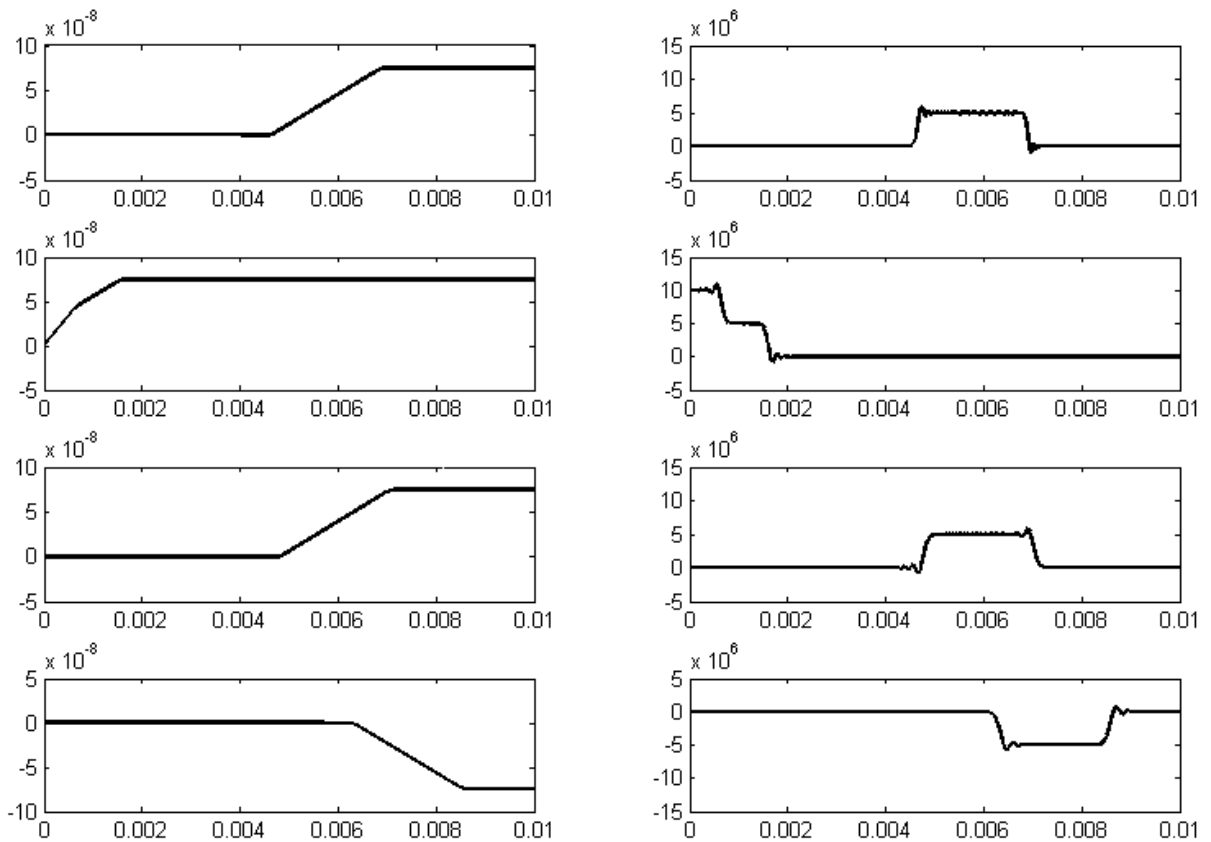


Рис.1. Профілі пружного зміщення (зліва) та механічного напруження (справа) в моменти часу $t = 12 \cdot 10^{-7} \text{ c}$; $23,85 \cdot 10^{-7} \text{ c}$; $38,1 \cdot 10^{-7} \text{ c}$; $52,95 \cdot 10^{-7} \text{ c}$.

Далі, як видно з рис. 2, кінетична, потенціальна, електрична та теплова компоненти енергії піроелектрика зростають лінійно поки подається імпульс механічного навантаження. Потім, коли передній фронт хвилі рухається вздовж стрижня, всі вони залишаються сталими, аж поки він не досягне закріпленого кінця стрижня. В цей момент перебудовується структура ударної хвилі: кінетична енергія тоді починає зменшуватися аж до перетворення в нуль, коли задній фронт хвилі досягне лівого кінця стрижня, а решта компонент енергії набувають свого максимального значення в цей момент часу. Далі перетворення продовжується і кінетична енергія починає зростати, тоді як значення інших складових енергії зменшується, що ілюструє закон збереження енергії в піроелектриках.

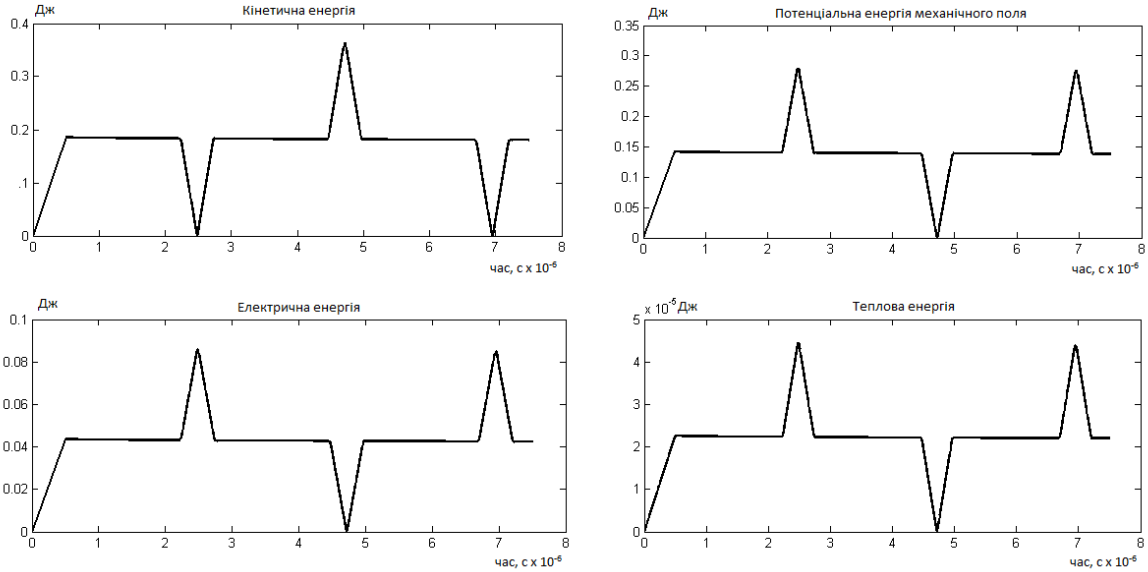


Рис.2. Поведінка в часі компонент повної енергії піроелектрика.

У **четвертому розділі** розглянуто чисельне розв'язування задачі про вимушені усталені коливання піроелектриків та нестационарної задачі для випадку моделі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана.

Варіаційна задача про вимушені коливання піроелектрика у цьому випадку має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \text{задано } \omega > 0, \tau > 0, \chi_\omega \in W' = \Phi' \times \Phi'; \\ \text{знайти } \psi = (\mathbf{u}_1, p_1, \theta_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{u}_2, p_2, \theta_2, \mathbf{q}_2) \in W = \Phi \times \Phi \text{ такі, що} \\ \Pi_\omega(\tau; \psi, w) = \langle \chi_\omega, w \rangle \quad \forall w = (\mathbf{v}_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \mathbf{v}_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2) \in W. \end{cases} \quad (22)$$

Теорема 4.1. (про коректність варіаційної задачі для вимушених усталених коливань піроелектрика за моделлю Лорда-Шульмана).

Для кожних значень параметрів $\omega > 0$ та $\tau > 0$ варіаційна задача (22) має єдиний розв'язок $\psi \in W$, причому

$$\|\psi\| \leq \alpha^{-1}(\omega) M_2(\omega) \|\chi_\omega\|_*, \quad (23)$$

де $\alpha(\omega) > 0$ – стала з умови W -еліптичності білінійної форми Π_ω , $M_2(\omega) > 0$ – стала з умови обмеженості лінійного функціоналу χ_ω .

Теорема 4.2. (про збіжність апроксимацій МСЕ).

Нехай $\psi \in W$ – розв'язок задачі (22), причому існує натуральне $k \geq 1$ таке, що $\psi \in W \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2(2d+2)}$, і нехай його апроксимації ψ_h визначаються розв'язками дискретизованої задачі в просторах $W_h \subset W$, які володіють наступною властивістю:

для кожного $\varphi \in W \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2(2d+2)}$, $k \geq 1$, існують $\varphi_h \in W_h$ та $C = \text{const} > 0$ такі, що $\|\varphi - \varphi_h\|_{m, \Omega} \leq C \cdot h^{k+1-m} \|\varphi\|_{k+1, \Omega}$, $0 \leq m \leq k$, де $h > 0$ – діаметр сітки скінченних елементів та k – максимальний степінь повного поліному від d змінних, який точно відтворюється базисними функціями з W_h .

Тоді справедлива така оцінка швидкості збіжності послідовності $\psi_h \subset W$:

$$\|\psi - \psi_h\| \leq C \cdot h^k \alpha^{-1}(\omega) M_1(\omega) \|\psi\|_{k+1, \Omega}, \quad (24)$$

де $C = \text{const} > 0$, $M_1(\omega) > 0$ – стала з умови обмеженості білінійної форми Π_ω .

У випадку нестационарної задачі термоп'єзоелектрики для моделі Лорда-Шульмана відповідна варіаційна задача має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти } \boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{q}) \in L^2(0, T; \Phi) \text{ такі, що} \\ m(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - e(p(t), \mathbf{v}) - \beta(\theta(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{l}_\sigma(t), \mathbf{v} \rangle, \\ \chi(p'(t), r) + z(p(t), r) + \pi(\theta'(t), r) + e(r, \mathbf{u}'(t)) = \langle l_e(t), r \rangle, \\ s(\theta'(t), \zeta) + T_0^{-1}(\text{div } \mathbf{q}(t), \zeta) + \pi(\zeta, p'(t)) + \beta(\zeta, \mathbf{u}'(t)) = \langle l_g(t), \zeta \rangle, \\ \tau\kappa(\mathbf{q}'(t), \mathbf{y}) - T_0^{-1}(\text{div } \mathbf{y}, \theta(t)) + \kappa(\mathbf{q}(t), \mathbf{y}) = 0 \quad \forall t \in (0, T], \\ m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad \chi(p(0) - p_0, r) = 0, \\ s(\theta(0) - \theta_0, \zeta) = 0, \quad \tau\kappa(\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_0, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{v}, r, \zeta, \mathbf{y}) \in \Phi. \end{array} \right. \quad (25)$$

З рівняння енергетичного балансу та леми Гронуолла випливає наступна пропозиція.

Пропозиція 4.1. Нехай дані варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана (25) задовольняють умови:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_0 \in [L^2(\Omega)]^d, \quad \mathbf{N} = (\mathbf{l}_\sigma, l_e, l_g, 0) \in L^2(0, T; \Phi'), \\ \boldsymbol{\psi}_0 = (\mathbf{u}_0, p_0, \theta_0, \mathbf{q}_0) \in [H^1(\Omega)]^d \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^d. \end{array} \right. \quad (26)$$

Тоді розв'язок $\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{q}) \in \Phi$ задачі (25), якщо такий існує, характеризується наступними властивостями регулярності

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}' \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^d) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \quad \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \\ p \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; P), \quad \theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; Z), \\ \mathbf{q} \in L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^d) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}), \end{array} \right. \quad (27)$$

та стійкості

$$\| \boldsymbol{\psi}(t) \|_\Phi^2 \leq C \left[\| \mathbf{v}_0 \|_m^2 + \tau \| \mathbf{q}_0 \|_\kappa^2 + \| \boldsymbol{\psi}_0 \|_\Phi^2 + \int_0^t \| \mathbf{N}(s) \|_*^2 ds \right] \quad \forall t \in [0, T], \quad (28)$$

де $C = \text{const} > 0$ не залежна від шуканих величин.

Пропозиція 4.2. Розв'язок $\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{q})$ задачі (25), якщо існує, то єдиний.

На основі попередніх пропозицій доводиться наступна теорема.

Теорема 4.3. Припустимо, що дані варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана (25) задовольняють умови регулярності (26). Тоді задача (25) має єдиний розв'язок $\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{q})$ з властивостями регулярності (27) та стійкості (28).

Після напівдискретизації Гальоркіна за просторовими змінними та наближення невідомих в отриманій задачі Коші поліномами першого та другого степенів, отримуємо таку однокрокову рекурентну схему для розв'язування динамічної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \Delta t > 0, \tau > 0, 1 \geq \beta \geq \gamma \geq 0, (\dot{U}^j, U^j, P^j, \Theta^j, Q^j); \\ \text{знайти вектор } (\ddot{U}^{j+1/2}, \dot{P}^{j+1/2}, \dot{\Theta}^{j+1/2}, \dot{Q}^{j+1/2}) \text{ такий, що} \\ \left(\begin{array}{cccc} M + \Delta t \gamma A + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta C & -\Delta t \gamma E^T & -\Delta t \gamma B^T & 0 \\ \Delta t \gamma E & X + \Delta t \gamma Z & \Pi^T & 0 \\ \Delta t \gamma B & \Pi & S & \Delta t \gamma W^T \\ 0 & 0 & \Delta t \gamma W & \tau K + \Delta t \gamma K \end{array} \right) \begin{pmatrix} \ddot{U}^{j+1/2} \\ \dot{P}^{j+1/2} \\ \dot{\Theta}^{j+1/2} \\ \dot{Q}^{j+1/2} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} L_{j+1/2} - A \dot{U}^j - C U^j - \Delta t \gamma C \dot{U}^j + E^T P^j + B^T \Theta^j \\ R_{j+1/2} - E \dot{U}^j - Z P^j \\ F_{j+1/2} - B \dot{U}^j - W^T Q^j \\ W \Theta^j - K Q^j \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (29)$$

$$\begin{aligned} U^{j+1} &= U^j + \Delta t \dot{U}^j + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{U}^{j+1/2}, \\ P^{j+1} &= P^j + \Delta t \dot{P}^{j+1/2}, \\ \Theta^{j+1} &= \Theta^j + \Delta t \dot{\Theta}^{j+1/2}, \\ Q^{j+1} &= Q^j + \Delta t \dot{Q}^{j+1/2}, \quad j = 0, 1, \dots, N_T - 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Як приклад застосування цієї чисельної схеми аналізувався процес проходження хвиль у піроелектричному стрижень довжиною L з кераміки PZT-4, породжений прикладеним приростом температури на його лівому кінці:

$$\theta(0, t) = \theta_c \begin{cases} \frac{t}{t_p}, & 0 \leq t \leq t_p \\ 1, & t_p \leq t \leq T \end{cases}, \quad \theta_c = 293K, \quad \theta(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (31)$$

Решту крайових умов взято однорідними:

$$\begin{aligned} \sigma = \hat{\sigma} = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma \times [0, T], \Gamma_\sigma = \{x = 0\} \cup \{x = L\}, \\ (D' + J) = 0 \text{ на } \Gamma_d \times [0, T], \Gamma_d = \{x = 0\} \cup \{x = L\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Початкові збурення пружного зміщення u , його швидкості u' , електричного потенціалу p та теплового потоку q – нульові.

Графіки на рис. 3-4 показують значний вплив часу запізнення τ на поведінку піроелектрика. Крім того, одержані результати числових експериментів для приросту температури та механічного напруження добре узгоджуються водночас кількісно та якісно з результатами наведеними у статті N. Sumi & F. Ashida, Journal of Thermal Stresses, 2003.

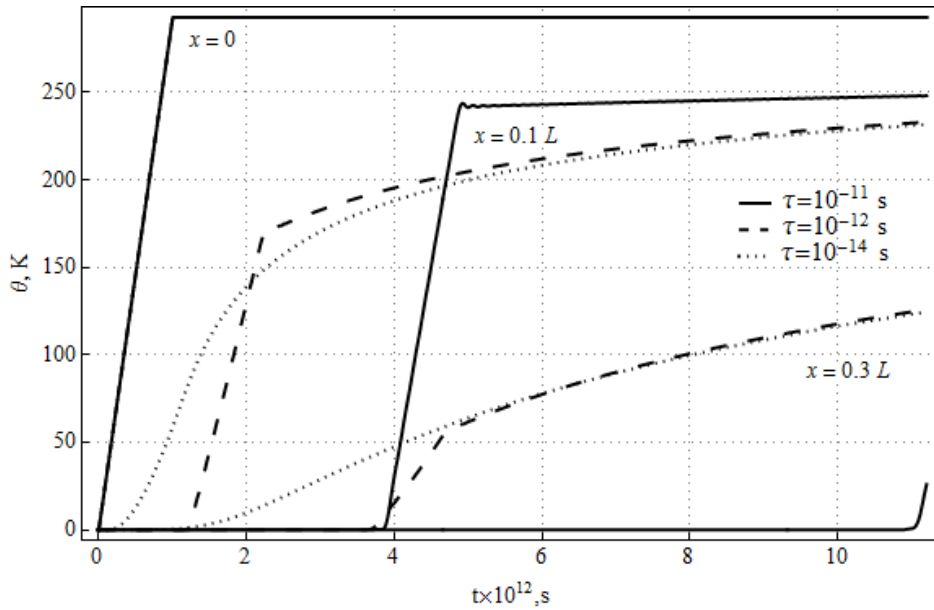


Рис.3. Приріст температури $\theta(x,t)$ в позиціях $x=0; 0,1L; 0,3L$ для значень параметра часу релаксації $\tau = 10^{-11}, 10^{-12}, 10^{-14} \text{ c}$.

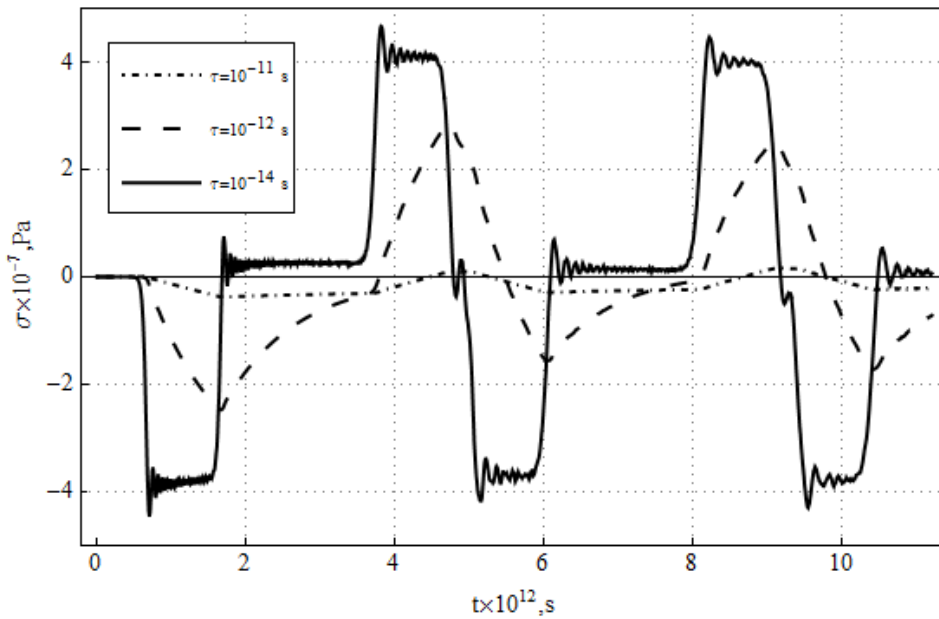


Рис.4. Механічне напруження $\sigma(x,t)$ в позиції $x=0,3L$ для значень параметра часу релаксації $\tau = 10^{-11}, 10^{-12}, 10^{-14} \text{ c}$.

У **п'ятому розділі** розглянуто чисельне розв'язування задачі про вимушені усталені коливання піроелектриків та нестационарної задачі для випадку моделі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея.

Варіаційну задачу про вимушені коливання піроелектрика у цьому випадку коротко запишемо у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \omega > 0, t_1 \geq t_0 > 0, \chi_{\omega, t_1} \in W' = \Phi' \times \Phi'; \\ \text{знайти } \psi = (\mathbf{u}_1, p_1, \theta_1, \mathbf{u}_2, p_2, \theta_2) \in W = \Phi \times \Phi \text{ такі, що} \\ \Pi_{\omega}(t_0, t_1; \psi, w) = \langle \chi_{\omega, t_1}, w \rangle \quad \forall w = (\mathbf{v}_1, \xi_1, \eta_1, \mathbf{v}_2, \xi_2, \eta_2) \in W. \end{array} \right. \quad (33)$$

Теорема 5.1. (про коректність варіаційної задачі для вимушених усталених коливань піроелектрика за моделлю Гріна-Ліндсея).

Для кожних значень параметрів $\omega > 0$ та $t_1 \geq t_0 > 0$ варіаційна задача (33) має єдиний розв'язок $\psi \in W$, причому

$$\|\|\psi\|\| \leq \alpha^{-1}(\omega) M_2(\omega) \|\chi_{\omega, t_1}\|_*, \quad (34)$$

де $\alpha(\omega) > 0$ – стала з умови W -еліптичності білінійної форми Π_ω , $M_2(\omega)$ – стала з умови обмеженості лінійного функціоналу χ_{ω, t_1} .

Теорема 5.2. (про збіжність апроксимацій МСЕ).

Нехай $\psi \in W$ – розв'язок задачі (33), причому існує натуральне $k \geq 1$ таке, що $\psi \in W \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2(d+2)}$, і нехай його апроксимації ψ_h визначаються розв'язками дискретизованої задачі в просторах $W_h \subset W$ з наступною властивістю:

для кожного $\varphi \in W \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{2(d+2)}$, $k \geq 1$, існують $\varphi_h \in W_h$ та $C = \text{const} > 0$ такі, що $\|\varphi - \varphi_h\|_{m, \Omega} \leq C \cdot h^{k+1-m} \|\varphi\|_{k+1, \Omega}$, $0 \leq m \leq k$, де h – діаметр триангуляції та k – максимальний степінь повного поліному від d змінних, який точно відтворюється базисними функціями з W_h .

Тоді справедлива така оцінка швидкості збіжності послідовності $\psi_h \subset W$:

$$\|\|\psi - \psi_h\|\| \leq C \cdot h^k \alpha^{-1}(\omega) M_1(\omega) \|\psi\|_{k+1, \Omega}, \quad (35)$$

де $C = \text{const} > 0$, $M_1(\omega) > 0$ – стала з умови обмеженості білінійної форми Π_ω .

У випадку нестационарної задачі термоп'єзоелектрики для моделі Гріна-Ліндсея відповідна варіаційна задача має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}, \mathbf{u}_0 \in V, p_0 \in Q, \theta_0 \in L^2(\Omega), \theta_{10} \in L^2(\Omega) \text{ та } (l, r, \mu) \in L^2(0, T; \Phi'); \\ \text{знайти } \psi = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t), \theta(\mathbf{x}, t)\} \in L^2(0, T; \Phi) \text{ таке, що} \\ m(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - e(p(t), \mathbf{v}) - \gamma(\theta(t) + t_1 \theta'(t), \mathbf{v}) = \langle l(t), \mathbf{v} \rangle, \\ g(p'(t), q) + e(q, \mathbf{u}'(t)) + z(p(t), q) + \pi(\theta'(t) + t_1 \theta''(t), q) = \langle r(t), q \rangle, \\ s(\theta'(t) + t_0 \theta''(t), \xi) + k(\theta(t), \xi) + \pi(\xi, p'(t)) + \gamma(\xi, \mathbf{u}'(t)) = \langle \mu(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V, \\ g(p(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall q \in Q, \\ s(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0, \quad s(\theta'(0) - \theta_{10}, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in Z. \end{array} \right. \quad (36)$$

За допомогою аналізу рівняння енергетичного балансу встановлені наступні результати.

Пропозиція 5.1. Нехай $t_1 > t_0 > 0$ та дані задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея (36) задовольняють умови

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}, \mathbf{u}_0 \in [H^1(\Omega)]^d, \\ p_0 \in H^1(\Omega), \theta_0 \in L^2(\Omega), \theta_{10} \in L^2(\Omega), \\ (l, r, \mu) \in L^2(0, T; \Phi'). \end{array} \right. \quad (37)$$

Тоді розв'язок $\psi = (\mathbf{u}, p, \theta) \in \Phi$ задачі (36), якщо такий існує, характеризується наступними властивостями

$$\begin{cases} \mathbf{u}' \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \\ p \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; Q), \\ \theta' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; Z), \theta \in L^\infty(0, T; Z) \cap L^2(0, T; Z) \end{cases} \quad (38)$$

та умовою стійкості

$$\|\|\psi(t)\|\|_\Phi^2 \leq \|\psi(0)\|^2 + \int_0^t \left[\|l\|_*^2 + \|r\|_*^2 + \|\mu\|_*^2 + \frac{t_1^2}{t_1 - t_0} \|\mu\|_{**}^2 \right] d\tau \quad \forall t \in (0, T]. \quad (39)$$

де $C = \text{const} > 0$ не залежить від шуканих величин.

Пропозиція 5.2. Розв'язок $\psi = (\mathbf{u}, p, \theta)$ задачі (36), якщо існує, то єдиний.

На основі попередніх пропозицій доводиться теорема про коректність варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея (36).

Теорема 5.3. Припустимо, що дані варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея (36) задовольняють умови регулярності (37). Тоді задача (36) має єдиний розв'язок $\psi = (\mathbf{u}, p, \theta)$ з властивостями регулярності (38) та стійкості (39).

Після напівдискретизації Гальоркіна задачі (36) за просторовими змінними та наближення невідомих в отриманій задачі Коші поліномами першого та другого степенів, одержано таку однокрокову рекурентну схему для розв'язування динамічної задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея:

$$\begin{cases} \text{задано } \Delta t > 0, t_1 \geq t_0 > 0, 1 \geq \beta \geq \gamma \geq 0, (\dot{U}^j, U^j, P^j, \dot{\Theta}^j, \Theta^j); \\ \text{знайти } (\ddot{U}^{j+1/2}, \dot{P}^{j+1/2}, \ddot{\Theta}^{j+1/2}) \text{ такі, що} \\ \left(\begin{array}{ccc} M + \Delta t \gamma A + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta C & -\Delta t \gamma E^T & -(\Delta t \gamma t_1 + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta) Y^T \\ \Delta t \gamma E & G + \Delta t \gamma Z & (t_1 + \Delta t \gamma) \Pi^T \\ \Delta t \gamma Y & \Pi & (t_0 + \Delta t \gamma) S + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta K \end{array} \right) \times \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} \times \begin{pmatrix} \dot{U}^{j+1/2} \\ \dot{P}^{j+1/2} \\ \dot{\Theta}^{j+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_{j+1/2} \\ R_{j+1/2} - E \dot{U}^j - Z P^j - \Pi^T \dot{\Theta}^j \\ F_{j+1/2} - Y \dot{U}^j - S \dot{\Theta}^j - K \Theta^j - \Delta t \gamma K \dot{\Theta}^j \end{pmatrix}, \\ \tilde{L}_{j+1/2} = L_{j+1/2} - A \dot{U}^j - C U^j - \Delta t \gamma C \dot{U}^j + E^T P^j + (t_1 + \Delta t \gamma) Y^T \dot{\Theta}^j + Y^T \Theta^j. \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} U^{j+1} &= U^j + \Delta t \dot{U}^j + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{U}^{j+1/2}, \\ P^{j+1} &= P^j + \Delta t \dot{P}^{j+1/2}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\Theta^{j+1} = \Theta^j + \Delta t \dot{\Theta}^j + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\Theta}^{j+1/2}, \quad j = 0, 1, \dots, N_T - 1.$$

Величини $\dot{U}^0, U^0, P^0, \dot{\Theta}^0, \Theta^0$, які необхідні для початку обчислень за схемою (41)-(42), легко отримуються з початкових умов відповідної задачі Коші.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розглянуто крайові, початково-крайові та відповідні їм варіаційні задачі термоп'єзоелектрики для класичної моделі, а також моделей Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея. Одержано такі основні результати:

1. Розроблено програмні засоби на основі існуючих проекційно-сіткових схем для нестационарної задачі класичної термоп'єзоелектрики та задачі про вимушені коливання піроелектриків. Одержані результати числових експериментів добре узгоджуються з розв'язками задачі п'єзоелектрики, а також з результатами одержаними іншими дослідниками.
2. Побудовано h -адаптивну схему МСЕ для задачі про вимушені усталені коливання піроелектриків у випадку класичної моделі термоп'єзоелектрики, що гарантує обчислення апроксимацій розв'язку з наперед заданою точністю.
3. Встановлено коректність варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана про вимушені усталені коливання піроелектрика. Побудовано чисельну схему МСЕ та встановлено достатні умови стійкості та збіжності цієї схеми.
4. Доведено коректність нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана. Побудовано чисельну схему розв'язування цієї задачі на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми.
5. Встановлено коректність варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея про вимушені усталені коливання піроелектрика. Побудовано чисельну схему МСЕ та встановлено достатні умови стійкості та збіжності цієї схеми.
6. Доведено коректність нестационарної варіаційної задачі термоп'єзоелектрики Гріна-Ліндсея. Побудовано проекційно-сіткову схему розв'язування цієї задачі на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми.
7. Для побудованих чисельних схем для розв'язування задач термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея також розроблено програмні засоби, які використовувалися для проведення чисельних експериментів. В окремих випадках зроблено порівняння отриманих результатів з результатами інших дослідників.

Основні положення та результати теоретичних досліджень підтверджено результатами чисельних експериментів проведених за допомогою розроблених програмних засобів.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ НАУКОВИХ ПРАЦЬ

Наукові статті у вітчизняних фахових виданнях:

1. Стельмашук В. Числове моделювання динамічних задач піроелектрики / В.Стельмашук, Г.Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2014. – Вип. 22. – С. 92-107.
2. Stelmashchuk V. V. Numerical solution of Lord-Shulman thermopiezoelectricity forced vibrations problem / V. V. Stelmashchuk, H. A. Shynkarenko // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2016. – №2(122). – С. 106-119.
3. Stelmashchuk V. V. Well-posedness of Lord-Shulman thermopiezoelectricity variational problem / V. V. Stelmashchuk, H. A. Shynkarenko // Математичні методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – Т.59, № 4. – С. 116-127.
4. Stelmashchuk V. Finite-element analysis of Green-Lindsay thermopiezoelectricity time-harmonic problem / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2017. – Вип. 25. – С. 136-147.

Наукові статті у закордонних виданнях:

5. Chaban F. Numeric modeling of mechanical and electric fields interaction in piezoelectrics. / F.Chaban, H.Shynkarenko, V.Stelmashchuk, S.Rosinska // Manufacturing processes. Some problems. – Opole: Politechnika Opolska. –2012. – Vol.1, Ch.9. – P. 107-118.
6. Shynkarenko H. Numerical modeling of thermopiezoelectricity problems / H. Shynkarenko, V. Stelmashchuk // Manufacturing Process. Actual Problems-2015. – Opole: Politechnika Opolska. – 2015. – Vol. 1. – P. 75–87.
7. Shynkarenko H. Solvability and finite element approximation of time-harmonic Lord-Shulman thermopiezoelectricity problem. / H.Shynkarenko, V.Stelmashchuk // Manufacturing processes. Actual problems - 2016. – Opole: Politechnika. Opolska. – 2016. – P. 79-92.
8. Stelmashchuk V. Numerical modeling of thermopiezoelectricity steady state forced vibrations problem using finite element method / V. Stelmashchuk, H. Shynkarenko // Advances in Mechanics: Theoretical, Computational and Interdisciplinary Issues. – Taylor & Francis Group. – 2016. – P. 547–550. DOI: 10.1201/b20057-117.

АНОТАЦІЇ

Стельмашук В. В. *Аналіз узагальнених задач термоп'єзоелектрики та проекційно-сіткові схеми їх розв'язування.* – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 – обчислювальна математика. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню і розвитку чисельних схем МСЕ для задач класичної та узагальненої термоп'єзоелектрики. Для задачі про вимушені коливання піроелектрика у випадку класичної моделі побудовано h -адаптивну схему МСЕ. Для задачі про вимушені коливання піроелектрика у випадках узагальнених моделей термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея доведено коректність відповідних варіаційних задач, на основі МСЕ розроблено чисельні схеми їх розв'язування та проведено аналіз стійкості та збіжності цих схем. Для задачі нестационарної термоп'єзоелектрики у випадках узагальнених моделей термоп'єзоелектрики Лорда-Шульмана та Гріна-Ліндсея доведено коректність відповідних варіаційних задач, на основі МСЕ та однокрокової рекурентної схеми розроблено чисельні схеми їх розв'язування. Розроблено програмні засоби, з допомогою яких проведено ряд чисельних експериментів, які підтверджують правильність теоретичних досліджень та демонструють ефективність розроблених методів. Зроблено порівняння результатів деяких експериментів з результатами, що отримали інші дослідники.

Ключові слова: задачі класичної та узагальненої термоп'єзоелектрики, модель Лорда-Шульмана, модель Гріна-Ліндсея, варіаційні задачі, метод скінченних елементів, метод Гальоркіна, h -адаптивна схема, однокрокова рекурентна схема.

Стельмашук В. В. *Анализ обобщённых задач термопьезоэлектричества и проекционно-сеточные схемы их решения.* – На правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – вычислительная математика. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2018.

Диссертационная работа посвящена исследованию и развитию вычислительных схем метода конечных элементов для решения задач классического и обобщённого термопьезоэлектричества. Для задачи о вынуженных колебаниях пироелектрика в случае классической модели построено h -адаптивную схему МКЭ. Для задачи о вынуженных колебаниях пироелектрика в случаях обобщённого термопьезоэлектричества Лорда-Шульмана и Грина-Линдсея доказано корректность соответственных вариационных задач, на базе МКЭ разработано численные схемы их решения и произведено анализ устойчивости и сходимости этих схем. Для задачи нестационарного термопьезоэлектричества в случаях обобщённого термопьезоэлектричества Лорда-Шульмана и Грина-Линдсея доказано корректность соответственных вариационных задач, на базе МКЭ и одношаговой рекуррентной схемы разработано численные схемы их решения. Разработано программные средства, с помощью которых произведен ряд численных

экспериментов, которые подтверждают правильность теоретических исследований и демонстрируют эффективность разработанных методов. Проведено сравнение результатов некоторых экспериментов с результатами полученными другими исследователями.

Ключевые слова: задачи классического и обобщённого термопьезоэлектричества, модель Лорда-Шульмана, модель Грина-Линдсея, вариационные задачи, метод конечных элементов, метод Галёркина, h -адаптивная схема, одношаговая рекуррентная схема.

Stelmashchuk V. V. *Analysis of generalized thermopiezoelectricity problems and projection-mesh schemes for their solution.* – On the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.07 – Computational mathematics. – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2018.

The thesis is devoted to investigation and development of numerical FEM-based schemes for problems of classical and generalized thermopiezoelectricity.

In the introduction the relevance of the thesis topic is substantiated, the scientific novelty and practical value of the work are defined, the subject and the goal of the research are formulated. Besides, the list of the applicant's publications on the thesis topic is given here.

In Chapter 1 the problem of the interaction of mechanical, electrical and heat fields in pyroelectric materials is considered. Firstly, the classical mathematical model of thermopiezoelectricity is discussed, and its drawbacks are pointed out. Then the generalized models of thermopiezoelectricity, namely Lord-Shulman and Green-Lindsay theories, are described. The corresponding initial boundary value problems of these models of thermopiezoelectricity are formulated. Various methods of solving such kind of problems are discussed, in particular, the finite element method (FEM).

Chapter 2 is dedicated to the numerical solution of the problem of forced harmonic vibrations of pyroelectric materials in case of the classical thermopiezoelectricity models. The existing numerical schemes have been verified by a set of numerical experiments and their analysis. Besides, a special h -adaptive FEM scheme has been proposed for solving such kind of problems.

Chapter 3 is devoted to the numerical solution of non-stationary problems of classical thermopiezoelectricity. The existing numerical schemes have been verified by a set of numerical experiments. The obtained numerical results have been compared to the solutions of piezoelectricity problem and are in agreement with the solutions of the classical thermopiezoelectricity problem provided by other researchers.

In Chapter 4 the Lord-Shulman thermopiezoelectricity problems are considered. For forced harmonic vibrations of pyroelectrics under the Lord-Shulman model the well-posedness of the corresponding variational problem has been proved. Based on FEM, the numerical scheme for its solution has been constructed. The analysis of this scheme robustness and convergence has been performed. For non-stationary Lord-Shulman thermopiezoelectricity problem the well-posedness of the corresponding variational problems has been proved too. Based on FEM and one step recurrent scheme, the

numerical scheme for its solution has been constructed. A set of numerical experiments has been carried out and the obtained results are in agreement with the ones obtained by other researchers using different solving methodologies.

In Chapter 5 the Green-Lindsay thermopiezoelectricity problems are considered. Like in case of Lord-Shulman model, the well-posedness of the corresponding variational problems of forced harmonic vibrations and the non-stationary one has been proved. Numerical schemes, based on FEM and one step recurrent scheme, for solving such kind of problems have been constructed. The robustness and convergence of the numerical scheme for Green-Lindsay forced harmonic vibrations problem have been proved. A set of numerical experiments has been performed.

The basic provisions and the results of the theoretical research have been confirmed by the results of the numerical experiments, which were carried out using self-developed software.

Key words: classical and generalized thermopiezoelectricity problems, Lord-Shulman model, Green-Lindsay model, variational problems, finite element method, Galerkin method, h -adaptive scheme, one step recurrent scheme.