Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Войтович Марія Андріївна

УДК 517.55+517.57

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ СУБГАРМОНІЙНИХ ТА АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ В ОДИНИЧНІЙ КУЛІ

01.01.01 — математичний аналіз

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів — 2018

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана на кафедрі теорії функцій і теорії ймовірностей Львівського національного університету імені Івана Франка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Чижиков Ігор Ельбертович,
професор кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей Львівського національного університету імені Івана Франка

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Плакса Сергій Анатолійович,
завідувач відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики Національної академії наук України;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Сало Тетяна Михайлівна,
доцент кафедри вищої математики національного університету "Львівська політехніка".

Захист відбудеться 18 жовтня 2018 р. о 15.05 год.
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.051.18
у Львівському національному університеті імені Івана Франка
за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою:
м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий 14 вересня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Христіянин А.Я.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Клас субгармонійних функцій в області $D \subset \mathbb{C}$ є узагальненням опуклих на відрізку (a, b) функцій. Основи теорії субгармонійних функцій були закладені Ф. Ріссом. Напівнеперервна зверху функція $u : D \to [-\infty, +\infty)$ називається субгармонійною в області D, якщо виконується нерівність

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it})dt,$$

для всіх $z \in D$ та достатньо малих r. Поняття та теорія $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій належить Девіду Ульріху[1]. Функція $u \in C^2$ є $\mathcal{M}$-субгармонійною тоді і тільки тоді, коли $(\tilde{\Delta}u)(a) \geq 0$ для всіх $a \in B$, де $\tilde{\Delta}$ — інваріантний лапласіан,

$$\tilde{\Delta} f(a) = 4(1 - |a|^2) \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{j,k} - \bar{a}_j \bar{a}_k) \frac{\partial^2 f(a)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k},$$

$\delta_{j,k}$ — символ Кронекера. Клас $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій є одним з n-вимірних узагальнень субгармонійних функцій. У випадку $n = 1$ класи $\mathcal{M}$-субгармонійних та субгармонійних функцій збігаються. Зауважимо, що для $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій, на відміну від плюрісубгармонійних функцій, виконується аналог теореми Рісса про розклад[2] $\mathcal{M}$-субгармонійної функції у різницю $\mathcal{M}$-гармонійної функції і інваріантного потенціалу Гріна, тому велике значення у вивченні всього класу $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій мають потенціали Гріна.

Добре відомо, що властивості аналітичних та субгармонійних функцій тісно пов'язані з їх зростанням. Тому класичними об'єктами вивчення є класи Гарді обмежених аналітичних функцій, класи Неванлінни аналітичних функцій з обмеженою характеристикою, субгармонійних функцій з обмеженими інтегральними середніми та їхні узагальнення, у тому числі і багатовимірні[3]. Такими задачами для одиничного кругу $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ займалися І. Привалов, Ф. Рісс, В. Смирнов, М. Цудзі, М. Арсов, О. Фростман, М. Джрбашян, Ф. Шамоян, Ч. Горовіц, Е. Беллер та інші. У випадку $n > 1$, точну

[1]Ulrich, D.: Radial limits of M-subharmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **292**, 501–518 (1985).

[2]Stoll, M.: Harmonic and Subharmonic Function Theory on the Hyperbolic Ball. London Mathematical Society Lecture Note Series. **431**, (2016).

[3]Шведенко, С. В.: Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре. Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. **23**, 3–124 (1985).

оцінку швидкості зростання

$$m_p(r, G_\mu) = \left(\int_S |G_\mu(r\xi)|^p \, d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}, \ p > 0,$$

де G_μ — інваріантний потенціал Гріна на $B = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$, для всього класу борелевих мір, які задовольняють умову $\int_B (1-|w|^2)^n d\mu(w) < \infty$, багатовимірного аналогу умови Бляшке, знайшов М. Столл[4]. Зазначимо, що аналогічні результати для потенціалів Гріна в одиничній кулі в $\mathbb{R}^n$ були опубліковані раніше в роботах М. Столла[5] та С. Гардінера[6]. Дослідження у випадку дійсної змінної описані Столлом[2]. Також гранична поведінка інваріантних потенціалів Гріна досліджена К. Т. Ханом[7]. Випадок $n = 1$ вивчений глибше, наприклад у роботі Ліндена[8].

Оцінка, знайдена М. Столлом[4] не враховує властивостей конкретної міри μ. Тоді, як властивості гладкості повної міри або міри Грішина субгармонійної функції дозволяють нам описати зростання відповідного потенціалу. Зокрема для одновимірного комплексного простору І. Е. Чижиковим знайдено необхідні і достатні умови для оцінки зростання p-их середніх субгармонійних функцій в термінах властивостей міри Рісса[9]. Зазначимо, що у випадку $u = \log|B|$, де B — добуток Бляшке, аналогічний результат іншим методом отримали Я. В. Микитюк і Я. В. Васильків[10]. У другому розділі дисертації цей результат узагальнено для багатьох комплексних змінних. Також описано зростання p-х середніх інваріантного потенціалу Гріна $m_p(r, G_\mu)$ в термінах властивостей міри μ, що узагальнює результати Столла.

Вже майже два століття у математиків не згасає інтерес до такого об'єкту, як інтеграл Пуассона та його узагальнення, через велику кількість застосувань у рівняннях математичної фізики, теорії потенціалу, тощо. У дисертаційній роботі досліджується зростання аналітичних та гармонійних функцій

[4]Stoll, M.: Rate of growth of pth means of invariant potentials in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. J. Math. Anal. Appl. **143**, 480–499 (1989).

[5]Stoll, M.: On the rate of growth of the means M_p of holomorphic and pluriharmonic functions on the ball. J.Math. Anal. Appl. **93**, 109–127 (1983).

[6] Gardiner, S. J.: Growth properties of pth means of potentials in the unit ball. Proc. Amer. Math. Soc. **103**, 861–869 (1988).

[7]Hahn, K. T., Singman, D.: Boundary behavior of invariant Green's potentials on the unit ball in $\mathbb{C}^n$. Trans. Amer. Math. Soc. **309.**, 339–354 (1988).

[8]Linden, C. N.: Integral logarithmic means for regular functions. Pacific J. of Math. **138**, 119–127 (1989).

[9]Chyzhykov, I.: Growth of pth means of analytic and subharmonic function in the unit disk and angular distribution of zeros. arXiv:1509. 02141v2 [math.CV], 1–19 (2015).

[10]Микитюк, Я. В., Васильків, Я.В.: Критерії обмеженості інтегральних середніх логарифмів добутків Бляшке. Доп. НАН України **8**, 10-–14 (2000).

в кулі B, які можна представити у вигляді інтегралу Коші-Стілтьєса та інтегралу Пуассона-Стілтьєса, зокрема знайдено точну оцінку зростання інтегралу Коші-Стілтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стілтьєса та оцінку зростання інтегралу Пуассона-Стілтьєса. Випадок диференційованих мір (відносно міри σ) є добре відомим[11]. Необхідні та достатні умови зростання інтегралу Пуассона-Стілтьєса при певному способі прямування до межі в термінах міри Стілтьєса описані І. Чижиковим та О. Золотою[12].

У вивченні функцій вигляду $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, які є аналітичними і однолистими в одиничному крузі $\mathbb{D}$ природно постає питання вивчення підкласу в якому $f(\mathbb{D})$ має прості геометричні властивості. Для прикладу, якщо f – аналітична в $\mathbb{D}$, $f'(0) \neq 0$ і виконується умова $Re\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$, то f – однолиста в $\mathbb{D}$ та область $f(\mathbb{D})$ – зіркова відносно початку координат. Функції, для яких виконуються такі умови, називають зірковими в $\mathbb{D}$. Зіркові області та зіркові функції можуть бути узагальнені, використовуючи логарифмічні спіралі $\gamma_\lambda : t \mapsto \exp(te^{i\lambda}),\ t \in \mathbb{R},\ -\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$ замість відрізків.

У третьому розділі узагальнено результат Йонг Чан Кім та Тошіюкі Сугава[13], які спростували гіпотезу Гансена[14], щодо поведінки максимуму модуля λ-спіралеподібних функцій на колі радіуса r, $0 < r < 1$. Через $\mathfrak{F}_\lambda$ позначатимемо клас λ-спіралеподібних функцій, таких, що $f'(0) = 1$. Для $R > 0$, нехай $\alpha(R, f)$ позначатиме довжину найбільшої дуги, яка міститься в множині $\{\zeta \in \partial\mathbb{D} : R\zeta \in f(\mathbb{D})\}$. Також позначимо $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ та $q_0 = \frac{1}{\pi} \lim\limits_{R\to+\infty} \alpha(R, f) \cos^2 \lambda$.

Гіпотеза Гансена рівносильна припущенню, що величина $\delta_f(r)$ у виразі $\log M(r, f) \equiv q_0 \log \frac{1}{1-r} + \delta_f(r)$ обмежена зверху. З прикладу Кіма та Сугави випливає, що $\delta_f(r)$ може зростати як $\log\log \frac{1}{1-r}$ при $r \to 1-$ для $f \in \mathfrak{F}_\lambda,\ q_0 = q_0(\lambda)$. В дисертаційній роботі описано максимальну швидкість зростання $\delta_f(r)$ для класу λ-спіралеподібних в одиничному крузі функцій $\mathfrak{F}_\lambda$ та оцінено коефіцієнти з розкладу в ряд Тейлора для екстремальної функції f.

---

[11] Stoll, M.: Invariant Potential Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. Cambridge University Press. (1994).

[12] Chyzhykov, I.: Growth and representation of analytic and harmonic functions in the unit disc. Ukrainian Math. Bulletin. **3**(1), 31–44 (2006).
Chyzhykov, I., Zolota, O.: Sharp estimates of the growth of the Poisson-Stieltjes integral in the polydisc. Mat. Stud. **34**(2), 193–196 (2010).

[13] Kim, Yong Chan, Sugawa, Toshiyuki.: Correspondence between spirallike functions and starlike functions. Math. Nachr. **285**(2-3), 322–331 (2012).

[14] Hansen, L. J.: The Hardy class of a spirallike function. Michigan Math.J. **18**, 279–282 (1971).

Зв'язок роботи з науковими програмами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Матеріал дисертації є складовою частиною держбюджетних тем:
Мг–159 Ф "Методи комплексного та гармонійного аналізу в теорії аналітичних функцій у банахових просторах"(номер держреєстрації 0113 U 000184),
Мг–145 Ф "Нові комплексно-ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами"(номер держреєстрації 0113 U 003051).

Мета і завдання досліджень. Метою дисертації є:

- описати асимптотичне поводження p-их середніх

  $$m_p(r, G_\mu) = \left(\int_S |G_\mu(r\xi)|^p \, d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}, \ p > 0$$

  інваріантного потенціалу Гріна $G_\mu(z) = \int_B G(z, w) d\mu(w)$ в термінах властивостей міри μ, де G — функція Гріна інваріантного лапласіану в одиничній кулі B;

- описати асимптотичне поводження при $r \to 1-$ p-их середніх $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій у термінах гладкості міри Рісса;

- знайти точну оцінку зростання інтегралу Коші-Стілтьєса та інтегралу Пуассона-Стілтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стілтьєса;

- описати максимальну швидкість зростання різниці $\log M(r, f) - q_0 \log \frac{1}{1-r}$, $0 < r < 1$, $q_0 = q_0(\lambda)$ для класу λ-спіралеподібних в одиничному крузі функцій

  $$\mathfrak{F}_\lambda = \{f \in S : \Re(e^{-i\lambda} z f'(z)/f(z)) > 0, \quad z \in \mathbb{D}\}, \quad \lambda \in (-\pi/2, \pi/2),$$

  де $M(r, f)$ – максимум модуля функції f на колі радіуса r, та оцінити коефіцієнти Тейлора функції f.

Об'єктом дослідження є інваріантний потенціал Гріна, $\mathcal{M}$-субгармонійні функції, інтеграли Коші-Стілтьєса та Пуассона-Стілтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$, та λ-спіралеподібні функції в одиничному крузі комплексної площини.

Предметом дослідження є асимптотичні оцінки інваріантного потенціалу Гріна, $\mathcal{M}$-субгармонійних функції, інтегралів Коші-Стілтьєса та Пуассона-Стілтьєса, оцінки зростання λ-спіралеподібних функцій.

Методи дослідження. Для розв'язання задач у дисертаційній роботі використовуються методи математичного та комплексного аналізу, а також деякі ідеї та підходи з праць А. Грішина, М. Столла, В. Рудіна, І. Чижикова.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертації є новими. У роботі вперше:

- описано асимптотичне поводження середніх інваріантного потенціалу Гріна $m_p(r, G_\mu)$ в термінах властивостей міри μ;
- описано асимптотичне поводження при $r \to 1-$ p-их середніх $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій у термінах гладкості їхньої міри Рісса;
- встановлено точну оцінку зростання інтегралу Коші-Стільтьєса та оцінку зростання інтегралу Пуассона-Стільтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стільтьєса;
- описано швидкість зростання $\delta_f(r)$ для класу λ-спіралеподібних в одиничному крузі функцій $\mathfrak{F}_\lambda$.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані в дисертаційній роботі, мають теоретичний характер та можуть бути використані у подальших дослідженнях з теорії потенціалу та теорії функцій багатьох комплексних змінних.

Особистий внесок здобувача. В опублікованих спільно з науковим керівником І. Е. Чижиковим працях співавтору належать постановки задач, загальне керівництво над роботою та обговорення одержаних результатів. Викладені в дисертаційній роботі результати отримані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях:

- міжнародній науковій математичній конференції присвяченій 120-річчю з дня народження Стефана Банаха (17-21 вересня 2012 р., Львів);
- всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"(25 лютого-3 березня 2013 р., Ворохта);
- міжнародній конференції "Комплексний аналіз, теорія потенціалу та її застосування"(19-23 серпня 2013 р., Київ);

- міжнародній науковій конференції "Complex Analysis and Related Topics"(Lviv, Ukraine, September 23-28, 2013);
- міжнародній науковій конференції "Complex Analysis and Related Topics"(Lviv, Ukraine, May 30-June 4, 2016);
- міжнародній науковій математичній конференції присвяченій 125-річчю з дня народження Стефана Банаха (18-23 вересня 2017 р., Львів).

Результати дисертації доповідалися на:

- львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій (керівники проф. А. А. Кондратюк і проф. О. Б. Скасків);
- семінарі з теорії потенціалу та його застосувань у Львівському національному університеті ім. Івана Франка (керівники проф. О. Б. Скасків і проф. І. Е. Чижиков);
- семінарі з теорії аналітичних функцій у Дрогобицькому державному педагогічному університеті ім. Івана Франка (керівник проф. Б. В. Винницький).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 6 (з них 1 - одноосібно) статтях у виданнях [1-6] в яких слід публікувати результати дисертації, зокрема 2 ([1,4]) — у закордонних виданнях, 3 ([2,4,6]) — з бази даних SCOPUS і 7 тезах конференцій різного рівня.

Структура і об'єм дисертації. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, вступу, 3 розділів, висновків та списку використаних джерел, який налічує 52 найменування. Загальний обсяг дисертації - 126 сторінок, обсяг списку використаних джерел - 6 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У першому розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за темою дисертації, окреслено коло проблем, які залишалися нерозв'язаними, і сформульовано основні результати дисертації.

У другому розділі описано швидкість зростання

$$m_p(r, G_\mu) = \left(\int_S |G_\mu(r\xi)|^p \, d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}, \ p > 0,$$

де G_μ — інваріантний потенціал Гріна, B — одинична куля в $\mathbb{C}^n$, S — межа B, для всього класу борелевих мір, які задовольняють умову

$$\int_B (1-|w|^2)^n d\mu(w) < \infty. \tag{1}$$

Для $\xi \in S$ і $\delta > 0$ визначимо множину $C(\xi,\delta) = \{z \in B : d(z,\xi) < \delta^{1/2}\}$ та міру $d\lambda(z) = (1-|z|)^n d\mu(z)$, де $d(a,b) = |1-\langle a,b\rangle|^{1/2}$ неізотропна метрика на S.

Наступна теорема є основним результатом підрозділу 2.1.

Теорема 2.1. *Нехай $n > 1$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$, $0 \le \gamma < 2n$ і нехай μ — борелева міра, яка задовольняє умову (1). Тоді*

$$m_p\left(r, G_\mu\right) = O\left((1-r)^{\gamma-n}\right),\ r \uparrow 1$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^\gamma\right),\ 0 < \delta < 1.$$

Як наслідок ми отримали критерій обмеженості інваріантного потенціалу Гріна.

Наслідок 2.1. *Нехай $n > 1$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$, і нехай μ — борелева міра, яка задовольняє (1). Тоді*

$$m_p\left(r, G_\mu\right) = O\left(1\right), \quad 0 < r < 1$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^n\right),\ 0 < \delta < 1.$$

Встановлено також “o”-аналог теореми 2.1.

Теорема 2.2. *Нехай $n > 1$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$, $0 \le \gamma < 2n$, і нехай μ — борелева міра, що задовольняє умову (1). Тоді*

$$m_p\left(r, G_\mu\right) = o\left((1-r)^{\gamma-n}\right),\ r \to 1-$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = o\left(\delta^\gamma\right),\ \delta \to 0+.$$

Далі розглянемо випадок $0 < p < 1$. Для цього інтервалу справджується аналог твердження необхідності теореми 2.1. У протилежному напрямку доведено таку точну оцінку.

Теорема 2.4. *Нехай* $n > 1$, $0 < p \le 1$, $0 \le \gamma < 2n$, *і нехай* μ *— борелева міра, що задовольняє умову* (1). *Якщо*

$$\int_S \lambda\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi) = O\left(\delta^\gamma\right),\ 0 < \delta < 1.$$

то

$$m_p\left(r, G_\mu\right) = O\left((1-r)^{\gamma-n}\right),\ r \uparrow 1.$$

Наступне твердження показує точність оцінки в теоремі 2.4.

Твердження 2.3. Для $n > 1$, $0 < p \le 1$, $n < \gamma < 2n$, існує борелева міра μ на B така, що

$$G_\mu(z) = O\left((1-|z|)^{\gamma-n}\right),\ |z| \uparrow 1$$

та

$$\lambda\left(C(\xi,\delta)\right) \ge \delta^\gamma,\ 0 < \delta < 1.$$

Використовуючи теорему 2.1, ми можемо отримати узагальнення, яке описує зростання p-х середніх субгармонійної функції у термінах властивостей міри μ.

Напівнеперервна зверху функція $u : B \to [-\infty, \infty)$, яка задовольняє умову $u \not\equiv -\infty$, називається $\mathcal{M}$-субгармонійною в B, якщо

$$u(a) \le \int_S u(\varphi_a(r\xi)) d\sigma(\xi)$$

для всіх $a \in B$ та всіх r достатньо малих, де $\varphi_w(z)$ — інволютивний автоморфізм, σ — нормована міра Лебега на S така, що $\sigma(S) = 1$.

Введемо такий аналог повної міри Грішина, для підкласу $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій міра λ визначена наступним чином

$$d\lambda(w) = \frac{4n^2}{n+1} d\nu(w) + (1-|w|^2)^n d\mu_u(w)$$

для $w \in \bar{B}$, тобто

$$\lambda(E) = \int_E \frac{4n^2}{n+1} d\nu(w) + \int_E (1-|w|^2)^n d\mu_u(w),$$

де E — борелева підмножина $\bar{B}$ така, що $E \cap S$ — борелева підмножина S.

Теорема 2.5. *Нехай u — недодатня $\mathcal{M}$-субгармонійна функція в B, для якої виконується $u \not\equiv -\infty$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$, $0 \le \gamma < 2n$. Тоді*

$$m_p(r,u) = O\left((1-r)^{\gamma-n}\right),\ r \uparrow 1$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^\gamma\right),\ 0 < \delta < 1.$$

Для $\mathcal{M}$-гармонійних функцій можна сформулювати такий наслідок.

Наслідок 2.3. *Нехай $u = \mathcal{P}[\nu](z)$ в B, де ν — невід'ємна борелева міра на S, $p > 1$ і $0 \le \gamma < 2n$. Тоді*

$$m_p(r,u) = O\left((1-r)^{\gamma-n}\right),\ r \uparrow 1$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \nu^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^\gamma\right),\ 0 < \delta < 1.$$

Наступна теорема описує асимптотичну поведінку p-их значень $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій, використовуючи клас функцій ширший ніж степеневі та охоплює випадок $\gamma = 2n$.

Теорема 2.6. *Нехай u — недодатна $\mathcal{M}$-субгармонійна функція в B, $n \in \mathbb{N}$, $u \not\equiv -\infty$, $1 \le p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$. Нехай функція $\Phi\colon [0,2] \to [0,\infty)$ така, що для всіх $t > 1$ і $0 < t\delta < 2$ виконується*

$$\Phi(t\delta) = O\left(\frac{t^{2n}}{\psi(\log(e+t))}\Phi(\delta)\right)$$

для деякої додатної зростаючої функції ψ, що задовольняє умови

$$\int_1^\infty \frac{dt}{\psi(t)} < \infty \quad \text{та} \quad \psi(ct) \asymp \psi(t), \quad c > 1.$$

Тоді

$$m_p(r,u) = O\left(\frac{\Phi(1-r)}{(1-r)^n}\right),\ r \uparrow 1$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\int_S \lambda^p\left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\Phi(\delta)\right),\ 0 < \delta < 1.$$

Не важко перевірити, що функція $\Phi(t) = \frac{t^{2n}}{\log^\beta \frac{e}{t}}$, $t \in (0,2]$, $\Phi(0) = 0$ не задовольняє припущення теореми 2.6 для жодного $\beta \in \mathbb{R}$. Для цього випадку отримаємо таке твердження.

Теорема 2.7. *Нехай u — недодатна $\mathcal{M}$-субгармонійна функція в B, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $u \not\equiv -\infty$, $1 < p < \frac{2n-1}{2(n-1)}$. Нехай $\beta > 1$ і $\varkappa > 1$. Якщо*

$$\left(\int_S \lambda^p \left(C(\xi,\delta)\right) d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\delta^{2n} \log^\beta \frac{e}{\delta}\right),\ 0 < \delta < 2,$$

то

$$m_p\left(r,u\right) = O\left((1-r)^n \log^{\beta+\varkappa} \frac{e}{1-r}\right),\ r \uparrow 1.$$

У підрозділі 2.3 ми знаходимо точну оцінку зростання інтеграла Коші-Стілтьєса $\mathcal{C}[\mu](z) = \int_{S_n} \frac{d\mu(\xi)}{(1-\langle z,\xi\rangle)^n}$ та оцінку зростання інтеграла Пуассона-Стілтьєса $\mathcal{P}[\mu](z) = \int_S \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{2n}} d\mu(\xi)$ в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стільтьєса.

Теорема 2.8. *Нехай μ — комплекснозначна борелева міра на S, $p \in (0,n]$. Якщо*

$$\exists c > 0:\ \omega(\delta,\mu) \le c\delta^{2(n-p)}, \quad 0 < \delta \le \sqrt{2},$$

то

$$\mathcal{C}[\mu](z) = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^p}\right), \quad z \in B.$$

Показано, що ця оцінка непокращувана з точністю до константи.

Теорема 2.9. *Нехай μ — додатна борелева міра на S, $p \in (0,n)$. Тоді*

$$\exists c > 0:\ \omega(\delta,\mu) \le c\delta^{2(n-p)}, 0 < \delta < 1 \Leftrightarrow \mathcal{P}[\mu](z) = O\left(\frac{1}{(1-|z|)^p}\right), z \in B.$$

У третьому розділі узагальнено результат Йонг Чан Кім та Тошіюкі Сугава, які спростували гіпотезу Гансена, щодо поведінки максимуму модуля $M(r,f)$ λ-спіралеподібних функцій на колі радіуса r, $0 < r < 1$.

Для функції f з класу λ-спіралеподібних функцій

$$\mathfrak{F}_\lambda = \{f \in S : \Re(e^{-i\lambda} z f'(z)/f(z)) > 0,\ z \in \mathbb{D}\},\ \lambda \in (-\pi/2, \pi/2),$$

запишемо $\log M(r,f) \equiv q_0 \log \frac{1}{1-r} + \delta_f(r)$, $\quad 0 < r < 1$. Гіпотеза Хансена рівносильна припущенню, що величина $\delta_f(r)$ обмежена зверху. З прикладу

Кіма та Сугави випливає, що $\delta_f(r)$ може зростати як $\log\log\frac{1}{1-r}$ при $r \to 1-$ для $f \in \mathfrak{F}_\lambda,\ q_0 = q_0(\lambda)$.

Природно виникає наступне питання, яка максимальна швидкість зростання $\delta_f(r)$ для класу $\mathfrak{F}_\lambda$?

Зауваження 1. З означення q_0 випливає, що $\delta_f(r) = o(\log\frac{1}{1-r})$, $r \to 1-$. Ми показуємо, що це співвідношення не можна покращити.

Наступна теорема є основним результатом третього розділу.

Теорема 3.1. *Нехай ψ — необмежена повільно зростаюча функція, $0 \le A < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$. Тоді існує функція $f \in \mathfrak{F}_\lambda$ така, що $A(f) = A$ і константа $D > 0$ така, що*

$$\log M(r, f) \ge \frac{A\cos^2\lambda}{\pi}\log\frac{1}{1-r} + \frac{D\log\frac{1}{1-r}}{\psi(\frac{1}{1-r})} + O(1), \quad r \in (0, 1).$$

Далі, за додаткових умов на гладкість функції ψ, оцінено коефіцієнти в розкладі Тейлора для функції f, побудованої в теоремі 3.1.

Твердження 3.1. *Нехай виконуються припущення теореми і $A\cos^2\lambda > \pi$. Крім того припустимо, що $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ψ диференційована та виконується рівність*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\psi'(t)t\log t}{\psi^2(t)} = 0.$$

Тоді існує послідовність натуральних чисел (n_k), $n_k \uparrow +\infty$ $(k \to \infty)$, така, що

$$|a_{n_k}| \ge c n_k^{\alpha(1-\frac{1}{n_k})},$$

де $\alpha(r) = q_0 - 1 + \frac{D}{\psi(\frac{1}{1-r})}$, $c > 0$.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено асимптотичне поводження p-их середніх значень недодатних $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій в одиничній кулі в термінах властивостей міри Рісса μ та межової міри. Описане зростання інтегралів Коші-Стілтьєса, Пуассона-Стілтьєса в одиничній кулі та зростання спіралеподібних в одиничному крузі функцій. У роботі отримано такі результати:

- Описано зростання середніх інваріантного потенціалу Гріна $m_p(r, G_\mu)$ в термінах властивостей міри μ, що є узагальненням результату М. Столла, який знайшов точну оцінку швидкості зростання $m_p(r, G_\mu)$, для $1 \le p < \frac{2n-1}{2n-3}$, без урахування властивостей конкретної міри μ.

- Знайдено непокращувані оцінки зростання $m_p(r, G_\mu)$ для $0 < p < 1$.

- Досліджено асимптотичну поведінку p-их середніх недодатних $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій, що зображуються у вигляді
$$u(z) = H_u(z) - \int_B G(z, w) d\mu_u(w),$$
де H_u — найменша $\mathcal{M}$-гармонійна мажоранта функції u, у термінах гладкості міри Рісса μ та межової міри. Теорема 2.5 узагальнює результат І.Е.Чижикова для субгармонійних функцій в одновимірному комплексному просторі.

- Отримано точну оцінку зростання інтегралу Коші-Стільтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стільтьєса та оцінку зростання інтегралу Пуассона-Стільтьєса.

- Узагальнено результат Йонг Чан Кіма та Тошіюкі Сугава, які спростували гіпотезу Гансена, щодо поведінки максимуму модуля λ-спіралеподібних функцій на колі радіуса r, $0 < r < 1$.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер та можуть бути використані у подальших дослідженнях з теорії потенціалу та теорії функцій багатьох комплексних змінних.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of spirallike function. Analele Universitatii Oradea Fasc. Matematica **22**(2), 93–99 (2015).

2. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of the Cauchy-Szegő transform in the unit ball. J. Math. Phys. Anal, Geom. **11**(3), 236–244 (2015).

3. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On asymptotic behavior of the pth means of the Green potential for $0 < p \leq 1$. Mat. Stud. **46**(2), 159–170 (2016).

4. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: Growth description of pth means of the Green potential in the unit ball. Complex Variables and Elliptic Equations **62**(7), 899–913 (2017).

5. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On decrease of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions in the unit ball. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. (83), 90–99 (2017).

6. Voitovych, M.: Asymptotic behaviour of means of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions. Mat. Stud. **47**(1), 20–26 (2017).

7. Iurkevych, M.: On the growth of starlike functions. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, September 17-21, 2012, p. 165-166.

8. Iurkevych, M.: On the growth of spirallike functions. In: Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Ворохта, 25 лютого - 3 березня 2013, с. 89–90.

9. Voitovych, M.: On the growth of the Cauchy integral. In: Abstracts of the International Conference "Complex Analysis, Potential Theory and Applications", http://www.imath.kiev.ua/ complex/conf_2013/ abstracts. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the Taras Shevchenko Kiev National University, Kyiv, August 19-23, 2013.

10. Voitovych, M.: Growth of the Cauchy integral. In: Abstracts of the International Conference "Complex analysis and related topics". Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, September 23-28, 2013, p. 87.

11. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: On the growth of starlike functions. In: Abstract book "The 10th International Symposium on Geometric Function Theory

and Applications", GFTA. University of Oradea, Oradea, Romania, August 25-28, 2014, p. 38.

12. Chyzhykov, I., Voitovych, M.: Growth of the invariant Green potential. In: Abstracts of the International Conference "Complex Analysis and Related Topics". Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, May 30 - June 4 2016, p. 19-20.

13. Voitovych, M.: Asymptotic behaviour of means of nonpositive $\mathcal{M}$-subharmonic functions. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, September 18-23, 2017, p. 142.

АНОТАЦІЯ

Войтович М. А. *Асимптотичні властивості субгармонійних та аналітичних функцій в одиничній кулі.* – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2018.

Дисертація присвячена дослідженню асимптотичних властивостей інваріантного потенціалу Гріна, $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій, аналітичних та гармонійних функцій, які можуть бути зображені у вигляді інтегралів Коші-Стілтьєса та Пуассона-Стілтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

У дисертаційній роботі описано асимптотичне поводження при $r \to 1-$ середніх інваріантного потенціалу Гріна $m_p(r, G_\mu)$ в термінах властивостей міри μ, що є узагальненням результату Столла. Також, на основі попередніх результатів, досліджено асимптотичну поведінку $\mathcal{M}$-субгармонійних функцій в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах властивостей міри Рісса і межової міри породженої граничними значеннями.

В дисертаційній роботі описано зростання аналітичних та гармонійних функцій в одиничній кулі, які можуть бути зображені у вигляді інтегралів Коші-Стілтьєса та Пуассона-Стілтьєса. Оцінки доведено в термінах гладкості міри Стілтьєса через модуль неперервності міри μ.

Узагальнено результат Йонг Чан Кім та Тошіюкі Сугава, які спростували гіпотезу Гансена, щодо поведінки максимуму модуля λ-спіралеподібних функцій на колі радіуса r, $0 < r < 1$.

Ключові слова: інваріантний потенціал Гріна, $\mathcal{M}$-субгармонійна функція, інтеграл Коші-Стілтьєса, інтеграл Пуассона-Стілтьєса, міра Рісса, спіралеподібна функція, лебегові середні, однолисті функції.

ABSTRACT

Voitovych M. A. *Asymptotic properties of subharmonic and analytic functions in the unit ball.* – On the rights of manuscript.

PhD Thesis for the degree of Candidate of Sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.01 – Mathematical Analysis. – Ivan Franko Lviv National University, Lviv, 2018.

The thesis consists of the abstract, the list of notation, the introduction, 3 sections divided into subsections, the conclusions and the references. The total volume of the thesis is 110 pages, the volume of references with 52 items is 5 pages.

In the introduction it is presented the actuality of the topic, the purpose and research proposals, the novelty of results, the practical meaning, the approbation of the results obtained and the number of publications.

In the first section the review of results related to the topic of the thesis and of the main results are given.

In Subsection 2.1 it is described the asymptotic behavior of pth means of the invariant Green potential $m_p(r, G_\mu)$, $r \to 1-$ in terms of smoothness properties of the measure μ. It is a generalization of the result due to M. Stoll. Also, based on previous results, in Subsection 2.2 it is investigated the asymptotic behavior of $\mathcal{M}$-subharmonic functions in the unit ball in $\mathbb{C}^n$ in terms of smoothness properties of the Riesz measure μ and the boundary measure. In Subsection 2.3 we are interested in description of the growth of analytic and harmonic functions in the unit ball represented by the Cauchy-Stieltjes or Poisson-Stieltjes integrals. We find estimates in terms of smoothness of the Stieltjes measure using the modulus of continuity of Stieltjes measure.

In the third section we describe the growth of spirallike functions in the unit disk. Hansen conjectured that $\delta_f(r)$ in equality $\log M(r,f) \equiv \frac{1}{\pi}A(f)\cos^2\lambda \log\frac{1}{1-r} + \delta_f(r)$ is bounded from above. It follows from the example of Kim and Sugawa that $\delta_f(r)$ can grow as $\log\log\frac{1}{1-r}$ as $r \to 1-$. In PhD Thesis it is described the maximum growth rate $\delta_f(r)$ for the class of λ-spirallike functions in the unit disk. Also the Taylor coefficients of extremal function f are estimated.

Key words: invariant Green potential, $\mathcal{M}$-subharmonic function, Cauchy integral, Poisson integral, Riesz measure, spirallike function, univalent functions, pth means.

АННОТАЦИЯ

Войтович М. А. *Асимптотические свойства субгармонических и аналитических функций в единичном шаре.* – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2018.

Диссертация посвящена исследованию инвариантного потенциала Грина, $\mathcal{M}$-субгармонических функций, аналитических и гармонических функций, которые могут быть представлены в виде интегралов Коши-Стильтьеса и Пуассона-Стильтьеса в единичном шаре.

В диссертационной работе описано асимптотическое поведение при $r \to 1-$ средних инвариантного потенциала Грина $m_p(r, G_\mu)$ в терминах свойств меры μ, что является обобщением результата Столла. Также, на основе предыдущих результатов исследовано асимптотическое поведение $\mathcal{M}$-субгармонических функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$ в терминах свойств меры Рисса и предельной меры порожденной граничными значениями.

В диссертационной работе также описан рост аналитических и гармонических функций в единичном шаре, которые могут быть представлены в виде интегралов Коши-Стильтьеса и Пуассона-Стильтьеса. Оценки доказани в терминах гладкости меры Стильтьеса через модуль непрерывности меры μ.

Обобщено результат Йонг Чан Кима и Тошиюки Сугава, опровергающие гипотезу Хансена, о поведении максимума модуля λ-спиралевидных функций в круге радиуса r, $0 < r < 1$.

Ключевые слова: инвариантный потенциал Грина, $\mathcal{M}$-субгармоническая функция, интеграл Коши-Стильтьеса, интеграл Пуассона-Стильтьеса, мера Рисса, спиралевидная функция, лебеговые средние, однолистные функции.

Підписано до друку 13.08.2018 р.
Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Умовн. друк. арк. 1,0. Тираж 100. Зам №53.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000. Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.